B1T4CARGAVAR

Dados

Comprimento longitudinal da viga AB : $L = 6\ m$

Altura da viga : $h = 0.5\ m$

Base da viga : $b = 0.2\ m$

Módulo de elasticidade : $E = 30000000.0\ kN/m^2$

Carga de Momento Fletor no ponto A : $M_A = -20\ kNm$

Carga de Concentrada no ponto A : $P_A = -60\ kN$

Carregamento : $q_{AB}(x) = 20\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)$

Integração de linha Elástica

$$V_{AB}(x) = -\int q_{AB}(x)dx = C_1 + 20\pi\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$M_{AB}(x) = \int V_{AB}(x)dx = C_1 x + C_2 + 20\pi^2\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$\theta_{AB}(x) = \frac{1}{EI}\int M_{AB}(x)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 - 20\pi^3\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)$$

$$v_{AB}(x) = \int \theta_{AB}(x)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 - 20\pi^4\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)$$

Condições de Contorno

(1) $M_{AB}(0) = -20\ kNm$

(2) $M_{AB}(6) = 0\ kNm$

(3) $v_{AB}(0) = 0\ m$

(4) $v_{AB}(6) = 0\ m$

Aplicação das Condições de Contorno

Aplicando (1) : $M_{AB}(0) = C_2 = -20\ kNm$

logo $C_2 = -20$

Aplicando (2) : $M_{AB}(0) = 6.0C_1 + 166.15 = 0\ kNm$

logo $C_1 = -27.692$

Aplicando (3) : $v_{AB}(0) = C_4 = 0\ m$

logo $C_4 = 0$

Aplicando (7) : $v_{AB}(0) = 6.0C_3 - 3194.2 = 0\ m$

logo $C_3 = 532.36$

Equações Finais

$$V_{AB}(x) = 62.832\cos\left(\frac{x}{\pi}\right) - 27.692$$

$$M_{AB}(x) = -27.692x + 197.39\sin\left(\frac{x}{\pi}\right) - 20.0$$

$$\theta_{AB}(x) = \frac{1}{EI}\left(-13.846x^2 - 20.0x - 620.12\cos\left(\frac{x}{\pi}\right) + 532.37\right)$$

$$v_{AB}(x) = \frac{1}{EI}\left(-4.6154x^3 - 10.0x^2 + 532.37x - 1948.2\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)$$

Máximo Momento Fletor

Derivando $M_{AB}(x)$ e igualando a zero calcula-se a posição x onde ocorre um extremo da função :

$$\frac{dM_{AB}(x)}{dx} = 62.832\cos\left(\frac{x}{\pi}\right) - 27.692 = 0$$

Resolvendo a equação em x e buscando uma raiz dentro do comprimento da viga, ou seja, $x \in [0,6]$:

$x = 3.5009\ m$

Substituindo o valor de x calculado em $M_{AB}(x)$:

$M_{AB}(x = 3.5009) = 60.238\ kNm$

Módulo de Rigidez Flexural

$$EI = E \times \frac{b \times h^3}{12}$$

$$EI = 30000000.0kN/m^2 \times \frac{0.2m \times (0.5m)^3}{12}$$

$$EI = 62500kNm^2$$

Máxima Deflexão

Derivando $v_{AB}(x)$ e igualando a zero calcula-se a posição x onde ocorre um extremo da função :

$$\frac{dv_{AB}(x)}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-13.846x^2 - 20.0x - 620.12\cos\left(\frac{x}{\pi}\right) + 532.37\right) = 0$$

Resolvendo a equação em x (utilizando a calculadora HP) e buscando uma raiz dentro do comprimento da viga, ou seja, $x \in [0,6]$:

$x = 3.1784\ m$

Substituindo o valor de x calculado em $v_{AB}(x)$:

$v_{AB}(x = 3.1784) = -0.0033393\ m = -3.3393\ mm$

Reação de Apoio Vertical em A

A carga P_A é totalmente descarregada sobre o apoio A não influenciando o resto da viga.

Assim sendo, a reação de apoio vertical no ponto será igual a :

$V_A = V_{AB}(x = 0) + P_A = 35.14\ kN + 60\ kN = 95.14\ kN$

Máxima Tensão Normal devido Momento Fletor

$$\sigma = \frac{M \times y}{I}$$

Para a máxima tensão normal em módulo:

$$y = \frac{h}{2} = \frac{0.5\ m}{2} = 0.25\ m$$

O momento de inérica é calculado como:

$$I = \frac{b \times h^3}{12} = \frac{0.2\ m \times (0.5\ m)^3}{12} = 0.0020833\ m^4$$

Assim sendo:

$$\sigma = \frac{M \times y}{I} = \frac{60.238\ kNm \times 0.25\ m}{0.0020833\ m^4} = 7228.5\ kN/m^2 = 7.2285\ kN/m^2$$

Respostas:

Q01) $V_A = 95.14\ kN$

Q02) $M_{máx} = 60.238\ kNm$

Q03) $x_{Mmáx} = 3.5009\ m$

Q04) $v_{máx} = 3.3393\ mm$

Q05) $x_{vmáx} = 3.1784\ m$

Q06) $EI = 62500\ kNm^2$

Q07) $\sigma_{Mmáx} = 7.2285\ MPa$

Forma Alternativa de Iniciar a Solução do Problema

Alternativamente é possível iniciar a solução do problema procedendo o cálculo da resultante de forças do carregamento R_{qAB} e sua respectiva posição x_{RqAB} :

$$R_{qAB} = \int_0^L q_{AB}\,(x)dx = \int_0^6 20\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)dx = 83.73\ kN$$

$$x_{RqAB} = \frac{1}{R_{qAB}}\int_0^L x\,q_{AB}(x)dx = \frac{1}{83.73}\int_0^6 x\,20\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)dx = 3.7208\ m$$

Aplicando somatório de momentos no ponto A com sentido horário positivo:

$$R_{qAB} \times x_{RqAB} - V_B \times L - M_A = 0$$

$$V_B = \frac{1}{L}\left(R_{qAB} \times x_{RqAB} - M_A\right) = \frac{1}{6\ m}(83.73\ kN \times 3.7208\ m - 20\ kNm) = 48.59\ kN$$

Aplicando somatório de forças verticais com sentido positivo para cima:

$$V_A - P_A - R_{qAB} + V_B = 0$$

$$V_A = P_A + R_{qAB} - V_B = 60\ kN + 83.73\ kN - 48.59\ kN = 95.14\ kN$$

Sendo que o cortante logo a direita do apoio A é:

$$V_{Aesq} = V_A - P_A = 95.14\ kN - 60\ kN = 35.14\ kN$$

Verificando este valor substituindo $x = 0$ na equação de cortantes anteriormente calculada:

$V_{AB}(0) = 35.14$ (C.Q.D. - "Como Queriamos Demonstrar")

Sabendo V_A o restante do processo de integração mantem-se o mesmo.