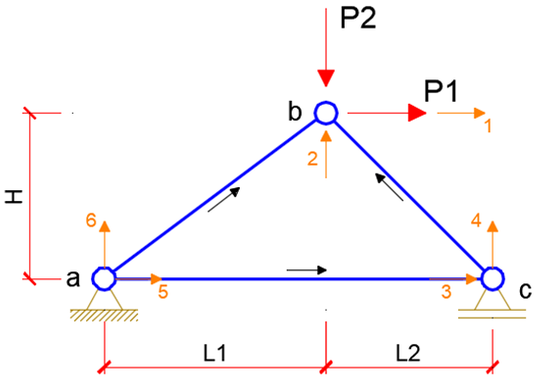
B2T4MA1109A

Considerando a numeração dos graus de liberdade (em laranja) e setas de orientação dos eixos longitudinais positivos das barras (em preto), conforme indicado no modelo estrutural de treliça ao lado, aplique análise matricial via método dos deslocamentos e responda os questionamentos.



Dados:

- Todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade; $E := 150\ \text{GPa}$
- Todas as barras possuem a mesma área de seção transversal: $A := 0,005\ \text{m}^2$

$L1 := 3,0\ \text{m}$ $P1 := 60\ \text{kN}$

$L2 := 2,0\ \text{m}$ $P2 := 80\ \text{kN}$

$H := 4,0\ \text{m}$

Q01) - O coeficiente "k22" da matriz de rigidez elementar da barra "ab", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]?

Q02) - O coeficiente "k12" da matriz de rigidez elementar da barra "bc", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]?

Q03) - O coeficiente "k11" da matriz de rigidez elementar da barra "ac", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]?

Q04) - O coeficiente "k22" da matriz de rigidez da estrutura é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]:

Q05) - O coeficiente "k33" da matriz de rigidez da estrutura é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]:

Q06) - Os deslocamento no grau de liberdade 1 é [em m e conforme a convenção de Green]?

Q07) - Os deslocamento no grau de liberdade 2 é [em m e conforme a convenção de Green]?

Q08) - Os deslocamento no grau de liberdade 3 é [em m e conforme a convenção de Green]?

Matrizes de Rigidez Elementares em Coordenadas Globais de Cada Barra:

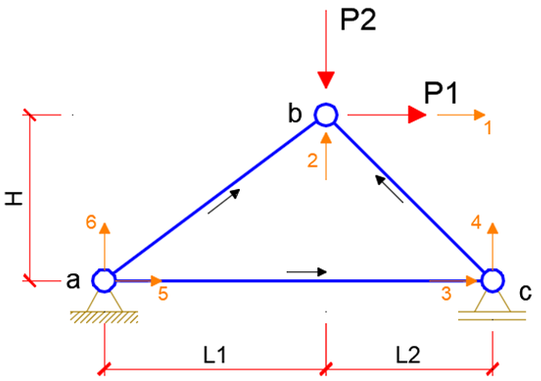
$L1 := \frac{L1}{\text{m}}$ $L2 := \frac{L2}{\text{m}}$ $H := \frac{H}{\text{m}}$ $P1 := \frac{P1}{\text{kN}}$ $P2 := \frac{P2}{\text{kN}}$

Coordenadas (origem do sistema de eixos global no ponto "3"):

$xa := 0$ $ya := 0$

$xb := L1 = 3$ $yb := H$

$xc := L1 + L2 = 5$ $yc := 0 = 0$



$EA := \frac{E \cdot A}{\text{kN}} = 750000$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 1 (Barra "ab"):

$L1 := \sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2} = 5$ $\lambda x1 := \frac{xb - xa}{L1} = 0,6$ $\lambda y1 := \frac{yb - ya}{L1} = 0,8$

$$k1 := \frac{EA}{L1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 \\ -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54000 & 72000 & -54000 & -72000 \\ 72000 & 96000 & -72000 & -96000 \\ -54000 & -72000 & 54000 & 72000 \\ -72000 & -96000 & 72000 & 96000 \end{bmatrix} \begin{matrix} [5\ 6\ 1\ 2] \\ \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$Q01 := k1_{2\,2} = 96000$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 2 (Barra "bc"):

$$L2 := \sqrt{(xb - xc)^2 + (yb - yc)^2} = 4,4721 \qquad \lambda x2 := \frac{xb - xc}{L2} = -0,44721 \qquad \lambda y2 := \frac{yb - yc}{L2} = 0,89443$$

$$k2 := \frac{EA}{L2} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 \\ -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [3\ 4\ 1\ 2] \\ \begin{bmatrix} 33541 & -67082 & -33541 & 67082 \\ -67082 & 134164 & 67082 & -134164 \\ -33541 & 67082 & 33541 & -67082 \\ 67082 & -134164 & -67082 & 134164 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Q02 := k2_{1\,2} = -67082$$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 3 (Barra "ac"):

$$L3 := \sqrt{(xc - xa)^2 + (yc - ya)^2} = 5 \qquad \lambda x3 := \frac{xc - xa}{L3} = 1 \qquad \lambda y3 := \frac{yc - ya}{L3} = 0,0000$$

$$k3 := \frac{EA}{L3} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda x3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 \\ \lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda y3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda y3^2 \\ -\lambda x3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda x3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 \\ -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda y3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda y3^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [5\ 6\ 3\ 4] \\ \begin{bmatrix} 150000 & 0 & -150000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -150000 & 0 & 150000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$Q03 := k3_{1\,1} = 150000$$

Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura como um Todo:

$$KG := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k1":

$$k1 = \begin{matrix} [5\ 6\ 1\ 2] \\ \begin{bmatrix} 54000 & 72000 & -54000 & -72000 \\ 72000 & 96000 & -72000 & -96000 \\ -54000 & -72000 & 54000 & 72000 \\ -72000 & -96000 & 72000 & 96000 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k1_{3\,3} & k1_{3\,4} & 0\ 0 & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} \\ k1_{4\,3} & k1_{4\,4} & 0\ 0 & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 0 \\ k1_{1\,3} & k1_{1\,4} & 0\ 0 & k1_{1\,1} & k1_{1\,2} \\ k1_{2\,3} & k1_{2\,4} & 0\ 0 & k1_{2\,1} & k1_{2\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54000 & 72000 & 0\ 0 & -54000 & -72000 \\ 72000 & 96000 & 0\ 0 & -72000 & -96000 \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 0 \\ -54000 & -72000 & 0\ 0 & 54000 & 72000 \\ -72000 & -96000 & 0\ 0 & 72000 & 96000 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k2":

$$k2 = \begin{matrix} [3\ 4\ 1\ 2] \\ \begin{bmatrix} 33541 & -67082 & -33541 & 67082 \\ -67082 & 1,3416 \cdot 10^5 & 67082 & -1,3416 \cdot 10^5 \\ -33541 & 67082 & 33541 & -67082 \\ 67082 & -1,3416 \cdot 10^5 & -67082 & 1,3416 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k1_{3\,3} + k2_{3\,3} & k1_{3\,4} + k2_{3\,4} & k2_{3\,1} & k2_{3\,2} & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} \\ k1_{4\,3} + k2_{4\,3} & k1_{4\,4} + k2_{4\,4} & k2_{4\,1} & k2_{4\,2} & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} \\ k2_{1\,3} & k2_{1\,4} & k2_{1\,1} & k2_{1\,2} & 0 & 0 \\ k2_{2\,3} & k2_{2\,4} & k2_{2\,1} & k2_{2\,2} & 0 & 0 \\ k1_{1\,3} & k1_{1\,4} & 0 & 0 & k1_{1\,1} & k1_{1\,2} \\ k1_{2\,3} & k1_{2\,4} & 0 & 0 & k1_{2\,1} & k1_{2\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87541 & 4918 & -33541 & 67082 & -54000 & -72000 \\ 4918 & 2,3016 \cdot 10^5 & 67082 & -1,3416 \cdot 10^5 & -72000 & -96000 \\ -33541 & 67082 & 33541 & -67082 & 0 & 0 \\ 67082 & -1,3416 \cdot 10^5 & -67082 & 1,3416 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ -54000 & -72000 & 0 & 0 & 54000 & 72000 \\ -72000 & -96000 & 0 & 0 & 72000 & 96000 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k3":

$$k3 = \begin{matrix}[5\ 6\ 3\ 4]\end{matrix}\begin{bmatrix} 150000 & 0 & -150000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -150000 & 0 & 150000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k1_{3\,3}+k2_{3\,3} & k1_{3\,4}+k2_{3\,4} & k2_{3\,1} & k2_{3\,2} & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} \\ k1_{4\,3}+k2_{4\,3} & k1_{4\,4}+k2_{4\,4} & k2_{4\,1} & k2_{4\,2} & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} \\ k2_{1\,3} & k2_{1\,4} & k2_{1\,1}+k3_{3\,3} & k2_{1\,2}+k3_{3\,4} & k3_{3\,1} & k3_{3\,2} \\ k2_{2\,3} & k2_{2\,4} & k2_{2\,1}+k3_{4\,3} & k2_{2\,2}+k3_{4\,4} & k3_{4\,1} & k3_{4\,2} \\ k1_{1\,3} & k1_{1\,4} & k3_{1\,3} & k3_{1\,4} & k1_{1\,1}+k3_{1\,1} & k1_{1\,2}+k3_{1\,2} \\ k1_{2\,3} & k1_{2\,4} & k3_{2\,3} & k3_{2\,4} & k1_{2\,1}+k3_{2\,1} & k1_{2\,2}+k3_{2\,2} \end{bmatrix}$$

$$KG = \begin{bmatrix} 87541 & 4918{,}0 & -33541 & 67082 & -54000 & -72000 \\ 4918{,}0 & 2{,}3016\cdot10^{5} & 67082 & -1{,}3416\cdot10^{5} & -72000 & -96000 \\ -33541 & 67082 & 1{,}8354\cdot10^{5} & -67082 & -1{,}5000\cdot10^{5} & 0{,}0000 \\ 67082 & -1{,}3416\cdot10^{5} & -67082 & 1{,}3416\cdot10^{5} & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ -54000 & -72000 & -1{,}5000\cdot10^{5} & 0{,}0000 & 2{,}0400\cdot10^{5} & 72000 \\ -72000 & -96000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 72000 & 96000 \end{bmatrix}$$

$Q04 := KG_{2\,2} = 230160$ $\quad$ $Q05 := KG_{3\,3} = 183540$

$$K11 := \begin{bmatrix} KG_{1\,1} & KG_{1\,2} & KG_{1\,3} \\ KG_{2\,1} & KG_{2\,2} & KG_{2\,3} \\ KG_{3\,1} & KG_{3\,2} & KG_{3\,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87541 & 4918{,}0 & -33541 \\ 4918{,}0 & 2{,}3016\cdot10^{5} & 67082 \\ -33541 & 67082 & 1{,}8354\cdot10^{5} \end{bmatrix}$$

$$K12 := \begin{bmatrix} KG_{1\,4} & KG_{1\,5} & KG_{1\,6} \\ KG_{2\,4} & KG_{2\,5} & KG_{2\,6} \\ KG_{3\,4} & KG_{3\,5} & KG_{3\,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67082 & -54000 & -72000 \\ -1{,}3416\cdot10^{5} & -72000 & -96000 \\ -67082 & -1{,}5000\cdot10^{5} & 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

$$K21 := \begin{bmatrix} KG_{4\,1} & KG_{4\,2} & KG_{4\,3} \\ KG_{5\,1} & KG_{5\,2} & KG_{5\,3} \\ KG_{6\,1} & KG_{6\,2} & KG_{6\,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67082 & -1{,}3416\cdot10^{5} & -67082 \\ -54000 & -72000 & -1{,}5000\cdot10^{5} \\ -72000 & -96000 & 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

$$K22 := \begin{bmatrix} KG_{4\,4} & KG_{4\,5} & KG_{4\,6} \\ KG_{5\,4} & KG_{5\,5} & KG_{5\,6} \\ KG_{6\,4} & KG_{6\,5} & KG_{6\,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}3416\cdot10^{5} & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 2{,}0400\cdot10^{5} & 72000 \\ 0{,}0000 & 72000 & 96000 \end{bmatrix}$$

$$Qk := \begin{bmatrix} P1 \\ -P2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -80 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Qu := \begin{bmatrix} Q3 \\ Q4 \\ Q5 \end{bmatrix} \qquad Dk := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solução do Sistema de Equações:

Solução do Sistema de Equações: Qk = K11*Du + K12*Dk (1ª Linha)
Qu = K21*Du + K22*Dk (2ª Linha)

Resolvendo a 1ª Linha: Du = K11^-1 * (Qk - K12*Dk)

$$Du := K11^{-1} \cdot (Qk - K12 \cdot Dk) = \begin{bmatrix} 0{,}00083377 \\ -0{,}00045866 \\ 0{,}00032000 \end{bmatrix}$$

$D1 := Du_{1} = 0{,}00083377$ $\quad$ $D2 := Du_{2} = -0{,}00045866$ $\quad$ $D3 := Du_{3} = 0{,}00032000$

$D4 := 0$ $\quad$ $D5 := 0$ $\quad$ $D6 := 0{,}030$

$Q06 := D1 = 0{,}00083377$ $\quad$ $Q07 := D2 = -0{,}00045866$ $\quad$ $Q08 := D3 = 0{,}00032000$

Resolvendo a 2ª Linha: Qu = K21*Du + K22*Dk

$$Qu := K21 \cdot Du + K22 \cdot Dk = \begin{bmatrix} 96 \\ -60 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Reações de apoio nos graus de liberdade 3, 4, 5, 6, 7 e 8 respectivamente

---

Respostas:

$Q01 = 96000$

$Q02 = -67082,04$

$Q03 = 150000$

$Q04 = 230164,1$

$Q05 = 183541,0$

$Q06 = 0,0008337667$

$Q07 = -0,0004586584$

$Q08 = 0,0003200$
