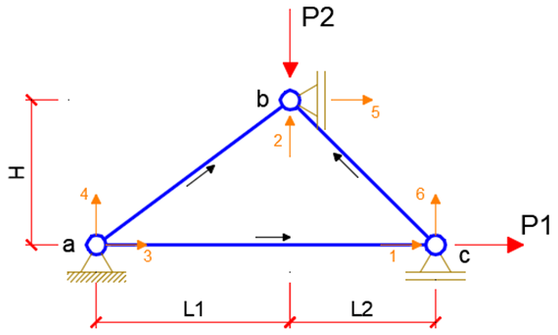
B2T4MA1116A

Considerando a numeração dos graus de liberdade (em laranja) e setas de orientação dos eixos longitudinais positivos das barras (em preto), conforme indicado no modelo estrutural de treliça ao lado, aplique análise matricial via método dos deslocamentos e responda os questionamentos.



Dados:
- Todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade; $E := 180\ \text{GPa}$
- Todas as barras possuem a mesma área de seção transversal: $A := 0,001\ \text{m}^2$

$L1 := 4,0\ \text{m}$ $P1 := 40\ \text{kN}$
$L2 := 2,0\ \text{m}$ $P2 := 100\ \text{kN}$
$H := 3,0\ \text{m}$

O nó "c" sofre um deslocamento vertical para baixo de 20 mm;

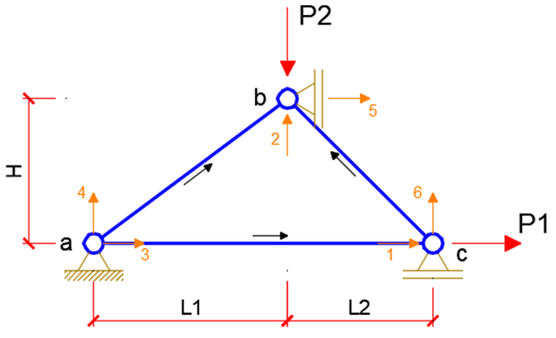
Q01) - O coeficiente "k22" da matriz de rigidez elementar da barra "ab", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por EA]?
Q02) - O coeficiente "k12" da matriz de rigidez elementar da barra "bc", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por EA]?
Q03) - O coeficiente "k11" da matriz de rigidez elementar da barra "ac", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por EA]?
Q04) - O coeficiente "k22" da matriz de rigidez da estrutura é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por EA]:
Q05) - O coeficiente "k12" da matriz de rigidez da estrutura é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por EA]:
Q06) - Os deslocamento no grau de liberdade 1 é [em m e conforme a convenção de Green]?
Q07) - Os deslocamento no grau de liberdade 2 é [em m e conforme a convenção de Green]?
Q08) - Os esforço axial na barra "bc" é [em kN e com positivo para tração]?

Matrizes de Rigidez Elementares em Coordenadas Globais de Cada Barra:

$L1 := \frac{L1}{\text{m}}$ $L2 := \frac{L2}{\text{m}}$ $H := \frac{H}{\text{m}}$ $P1 := \frac{P1}{\text{kN}}$ $P2 := \frac{P2}{\text{kN}}$

Coordenadas (origem do sistema de eixos global no ponto "3"):

$xa := 0$ $ya := 0$
$xb := L1 = 4$ $yb := H$
$xc := L1 + L2 = 6$ $yc := 0 = 0$



$EA := \frac{E \cdot A}{\text{kN}} = 180000$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 1 (Barra "ab"):

$L1 := \sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2} = 5$ $\lambda x1 := \frac{xb - xa}{L1} = 0,8$ $\lambda y1 := \frac{yb - ya}{L1} = 0,6$

$$k1 := \frac{EA}{L1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 \\ -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23040 & 17280 & -23040 & -17280 \\ 17280 & 12960 & -17280 & -12960 \\ -23040 & -17280 & 23040 & 17280 \\ -17280 & -12960 & 17280 & 12960 \end{bmatrix} \begin{matrix} [3\ 4\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q01 := k1_{2\,2} = 12960$$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 2 (Barra "bc"):

$$L2 := \sqrt{(xb - xc)^2 + (yb - yc)^2} = 3,6056 \qquad \lambda x2 := \frac{xb - xc}{L2} = -0,55470 \qquad \lambda y2 := \frac{yb - yc}{L2} = 0,83205$$

$$k2 := \frac{EA}{L2} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 \\ -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [1\ 6\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 15360,9 & -23041,4 & -15360,9 & 23041,4 \\ -23041,4 & 34562,1 & 23041,4 & -34562,1 \\ -15360,9 & 23041,4 & 15360,9 & -23041,4 \\ 23041,4 & -34562,1 & -23041,4 & 34562,1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Q02 := k2_{1\,2} = -23041$$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 3 (Barra "ac"):

$$L3 := \sqrt{(xc - xa)^2 + (yc - ya)^2} = 6 \qquad \lambda x3 := \frac{xc - xa}{L3} = 1 \qquad \lambda y3 := \frac{yc - ya}{L3} = 0,0000$$

$$k3 := \frac{EA}{L3} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda x3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 \\ \lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda y3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda y3^2 \\ -\lambda x3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda x3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 \\ -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda y3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda y3^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [3\ 4\ 1\ 6] \\ \begin{bmatrix} 30000 & 0 & -30000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30000 & 0 & 30000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Q03 := k3_{1\,1} = 30000,0$$

Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura como um Todo:

$$KG := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k1":

$$k1 = \begin{matrix} [3\ 4\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 23040 & 17280 & -23040 & -17280 \\ 17280 & 12960 & -17280 & -12960 \\ -23040 & -17280 & 23040 & 17280 \\ -17280 & -12960 & 17280 & 12960 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k1_{4\,4} & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} & k1_{4\,3} & 0 \\ 0 & k1_{1\,4} & k1_{1\,1} & k1_{1\,2} & k1_{1\,3} & 0 \\ 0 & k1_{2\,4} & k1_{2\,1} & k1_{2\,2} & k1_{2\,3} & 0 \\ 0 & k1_{3\,4} & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} & k1_{3\,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12960 & -17280 & -12960 & 17280 & 0 \\ 0 & -17280 & 23040 & 17280 & -23040 & 0 \\ 0 & -12960 & 17280 & 12960 & -17280 & 0 \\ 0 & 17280 & -23040 & -17280 & 23040 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k2":

$$k2 = \begin{matrix} [1\ 6\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 15361 & -23041 & -15361 & 23041 \\ -23041 & 34562 & 23041 & -34562 \\ -15361 & 23041 & 15361 & -23041 \\ 23041 & -34562 & -23041 & 34562 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k2_{1,1} & k2_{1,4} & 0 & 0 & k2_{1,3} & k2_{1,2} \\ k2_{4,1} & k1_{4,4}+k2_{4,4} & k1_{4,1} & k1_{4,2} & k1_{4,3}+k2_{4,3} & k2_{4,2} \\ 0 & k1_{1,4} & k1_{1,1} & k1_{1,2} & k1_{1,3} & 0 \\ 0 & k1_{2,4} & k1_{2,1} & k1_{2,2} & k1_{2,3} & 0 \\ k2_{3,1} & k1_{3,4}+k2_{3,4} & k1_{3,1} & k1_{3,2} & k1_{3,3}+k2_{3,3} & k2_{3,2} \\ k2_{2,1} & k2_{2,4} & 0 & 0 & k2_{2,3} & k2_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15361 & 23041 & 0 & 0 & -15361 & -23041 \\ 23041 & 47522 & -17280 & -12960 & -5761,4 & -34562 \\ 0 & -17280 & 23040 & 17280 & -23040 & 0 \\ 0 & -12960 & 17280 & 12960 & -17280 & 0 \\ -15361 & -5761,4 & -23040 & -17280 & 38401 & 23041 \\ -23041 & -34562 & 0 & 0 & 23041 & 34562 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k3":

$$k3 = \begin{bmatrix} 30000 & 0 & -30000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30000 & 0 & 30000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad [3\ 4\ 1\ 6]$$

$$KG := \begin{bmatrix} k2_{1,1}+k3_{3,3} & k2_{1,4} & k3_{3,1} & k3_{3,2} & k2_{1,3} & k2_{1,2}+k3_{3,4} \\ k2_{4,1} & k1_{4,4}+k2_{4,4} & k1_{4,1} & k1_{4,2} & k1_{4,3}+k2_{4,3} & k2_{4,2} \\ k3_{1,3} & k1_{1,4} & k1_{1,1}+k3_{1,1} & k1_{1,2}+k3_{1,2} & k1_{1,3} & k3_{1,4} \\ k3_{2,3} & k1_{2,4} & k1_{2,1}+k3_{2,1} & k1_{2,2}+k3_{2,2} & k1_{2,3} & k3_{2,4} \\ k2_{3,1} & k1_{3,4}+k2_{3,4} & k1_{3,1} & k1_{3,2} & k1_{3,3}+k2_{3,3} & k2_{3,2} \\ k2_{2,1}+k3_{4,3} & k2_{2,4} & k3_{4,1} & k3_{4,2} & k2_{2,3} & k2_{2,2}+k3_{4,4} \end{bmatrix}$$

$$KG = \begin{bmatrix} 45361 & 23041 & -30000 & 0,0000 & -15361 & -23041 \\ 23041 & 47522 & -17280 & -12960 & -5761,4 & -34562 \\ -30000 & -17280 & 53040 & 17280 & -23040 & 0,0000 \\ 0,0000 & -12960 & 17280 & 12960 & -17280 & 0,0000 \\ -15361 & -5761,4 & -23040 & -17280 & 38401 & 23041 \\ -23041 & -34562 & 0,0000 & 0,0000 & 23041 & 34562 \end{bmatrix}$$

$Q04 := KG_{2,2} = 47522$ $\quad$ $Q05 := KG_{1,2} = 23041,3928$

$$K11 := \begin{bmatrix} KG_{1,1} & KG_{1,2} \\ KG_{2,1} & KG_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45361 & 23041 \\ 23041 & 47522 \end{bmatrix}$$

$$K12 := \begin{bmatrix} KG_{1,3} & KG_{1,4} & KG_{1,5} & KG_{1,6} \\ KG_{2,3} & KG_{2,4} & KG_{2,5} & KG_{2,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30000 & 0,0000 & -15361 & -23041 \\ -17280 & -12960 & -5761,4 & -34562 \end{bmatrix}$$

$$K21 := \begin{bmatrix} KG_{3,1} & KG_{3,2} \\ KG_{4,1} & KG_{4,2} \\ KG_{5,1} & KG_{5,2} \\ KG_{6,1} & KG_{6,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30000 & -17280 \\ 0,0000 & -12960 \\ -15361 & -5761,4 \\ -23041 & -34562 \end{bmatrix}$$

$$K22 := \begin{bmatrix} KG_{3,3} & KG_{3,4} & KG_{3,5} & KG_{3,6} \\ KG_{4,3} & KG_{4,4} & KG_{4,5} & KG_{4,6} \\ KG_{5,3} & KG_{5,4} & KG_{5,5} & KG_{5,6} \\ KG_{6,3} & KG_{6,4} & KG_{6,5} & KG_{6,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53040 & 17280 & -23040 & 0,0000 \\ 17280 & 12960 & -17280 & 0,0000 \\ -23040 & -17280 & 38401 & 23041 \\ 0,0000 & 0,0000 & 23041 & 34562 \end{bmatrix}$$

$$Qk := \begin{bmatrix} P1 \\ -P2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -100 \end{bmatrix}$$

* Deslocamento prescrito de 30 mm subindo no grau de liberdade 6:

$$Qu := \begin{bmatrix} Q3 \\ Q4 \\ Q5 \\ Q6 \end{bmatrix} \qquad Dk := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,020 \end{bmatrix}$$

Solução do Sistema de Equações:

Solução do Sistema de Equações: Qk = K11*Du + K12*Dk (1ª Linha)
Qu = K21*Du + K22*Dk (2ª Linha)

Resolvendo a 1ª Linha: Du = K11^-1 * (Qk - K12*Dk)

$$Du := K11^{-1} \cdot (Qk - K12 \cdot Dk) = \begin{bmatrix} -0,00109 \\ -0,01612 \end{bmatrix}$$

$D1 := Du_1 = -0,0010877$ $D2 := Du_2 = -0,016123$

$D3 := 0$ $D4 := 0$ $D5 := 0$ $D6 := -0,020$

$Q06 := D1 = -0,0010877$ $Q07 := D2 = -0,016123$

Resolvendo a 2ª Linha: Qu = K21*Du + K22*Dk

$$Qu := K21 \cdot Du + K22 \cdot Dk = \begin{bmatrix} 311,2306 \\ 208,9486 \\ -351,2306 \\ -108,9486 \end{bmatrix}$$

Reações de apoio nos graus de liberdade 3, 4, 5, 6, 7 e 8 respectivamente

---

Esforços Axiais nas Barras:

$$q_F = \frac{AE}{L}[-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y] \begin{Bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{Bmatrix}$$

Na Barra 2:

$[1\ 6\ 5\ 2]$

$$N2 := \frac{EA}{L2} \cdot \left(\left([-\lambda x2 \quad -\lambda y2 \quad \lambda x2 \quad \lambda y2] \cdot \begin{bmatrix} D1 \\ D6 \\ D5 \\ D2 \end{bmatrix} \right)_1 \right) = 130,9399$$

$Q08 := N2 = 130,94$

Respostas:

$Q01 = 12960$

$Q02 = -23041,39$

$Q03 = 30000$

$Q04 = 47522,09$

$Q05 = 23041,39$

$Q06 = -0,001087747$

$Q07 = -0,01612258$

$Q08 = 130,9399315$
