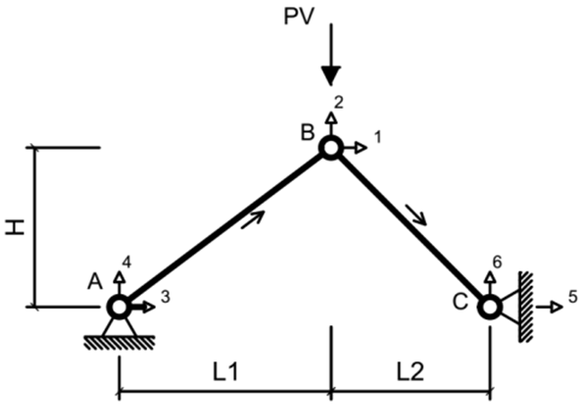
B2T4NA1029A

Considerando a numeração dos graus de liberdade e setas de orientação dos eixos longitudinais positivos das barras, conforme indicado no modelo estrutural de treliça ao lado, calcular os deslocamentos do ponto B (horizontal e vertical) empregando análise matricial via método dos deslocamentos.



Dados:
- L1 = 3.0 m;
- L2 = 4.0 m ;
- H = 3.0 m;
- PV = 70.0 kN ;
- Todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade E = 200 GPa;
- Todas as barras possuem a mesma área de seção transversal A = 0.002 m² ;

Q01) - A primeira linha da matriz de rigidez elementar da barra AB, em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]:
(A) N.D.A.
(B) [47140.0, 47140.0, -47140.0, -47140.0]
(C) [202700.0, 202700.0, -202700.0, -202700.0]
(D) [35355.0, 35355.0, -35355.0, -35355.0]
(E) [56569.0, 56569.0, -56569.0, -56569.0]
(F) [103710.0, 103710.0, -103710.0, -103710.0]

Q02) - A segunda linha da matriz de rigidez elementar da barra BC, em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]:
(A) [-19200.0, 14400.0, 19200.0, -14400.0]
(B) [-84480.0, 63360.0, 84480.0, -63360.0]
(C) N.D.A.
(D) [-38400.0, 28800.0, 38400.0, -28800.0]
(E) [-28800.0, 21600.0, 28800.0, -21600.0]
(F) [-48000.0, 36000.0, 48000.0, -36000.0]

Q03) - A segunda linha da matriz de rigidez global da estrutura [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]:
(A) N.D.A.
(B) [10926.0, 94926.0, -58926.0, -58926.0, 48000.0, -36000.0]
(C) [8740.5, 75940.0, -47140.0, -47140.0, 38400.0, -28800.0]
(D) [13111.0, 113910.0, -70711.0, -70711.0, 57600.0, -43200.0]
(E) [15296.0, 132900.0, -82496.0, -82496.0, 67200.0, -50400.0]
(F) [10489.0, 91129.0, -56569.0, -56569.0, 46080.0, -34560.0]

Q04) - Os deslocamentos nos graus de liberdade 1 e 2 são respectivamente [em m e conforme a convenção de Green]:
(A) [8.2774e-05, -0.0009313]
(B) N.D.A.
(C) [5.7942e-05, -0.00065191]
(D) [9.9328e-05, -0.0011176]
(E) [0.00012416, -0.001397]
(F) [6.6219e-05, -0.00074504]

Dados:

$L1 := 3$ $L2 := 4$ $H := 3$ $PV := 70$ $E := 200\ \mathrm{GPa}$ $A := 0,002\ \mathrm{m}^2$

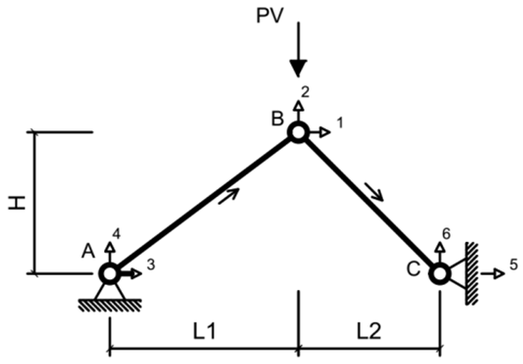
Matrizes de Rigidez Elementares em Coordenas Globais de Cada Barra:

Coordenadas (origem do sistema de eixos global no ponto "A"):

$xA := 0$ $\quad yA := 0$

$xB := L1 = 3$ $\quad yB := H = 3$

$xC := L1 + L2 = 7$ $\quad yC := 0$



$$[k] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{matrix}$$

$EA := \frac{E \cdot A}{kN} = 400000$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra AB (Barra 1):

$LAB := \sqrt{(xB - xA)^2 + (yB - yA)^2} = 4,2426$ $\quad \lambda x1 := \frac{xB - xA}{LAB} = 0,7071$ $\quad \lambda y1 := \frac{yB - yA}{LAB} = 0,7071$

$$k1 := \frac{EA}{LAB} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 \\ -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix}[3 & 4 & 1 & 2] \\ \begin{bmatrix} 47140 & 47140 & -47140 & -47140 \\ 47140 & 47140 & -47140 & -47140 \\ -47140 & -47140 & 47140 & 47140 \\ -47140 & -47140 & 47140 & 47140 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$Q01 := "B"$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra BC (Barra 2):

$LBC := \sqrt{(xC - xB)^2 + (yC - yB)^2} = 5$ $\quad \lambda x2 := \frac{xC - xB}{LBC} = 0,8$ $\quad \lambda y2 := \frac{yC - yB}{LBC} = -0,6$

$$k2 := \frac{EA}{LBC} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 \\ -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix}[1 & 2 & 5 & 6] \\ \begin{bmatrix} 51200 & -38400 & -51200 & 38400 \\ -38400 & 28800 & 38400 & -28800 \\ -51200 & 38400 & 51200 & -38400 \\ 38400 & -28800 & -38400 & 28800 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$Q02 := "D"$

Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura como um Todo:

$$KG := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k1":

$$k1 = \begin{matrix}[3 & 4 & 1 & 2] \\ \begin{bmatrix} 47140,4521 & 47140,4521 & -47140,4521 & -47140,4521 \\ 47140,4521 & 47140,4521 & -47140,4521 & -47140,4521 \\ -47140,4521 & -47140,4521 & 47140,4521 & 47140,4521 \\ -47140,4521 & -47140,4521 & 47140,4521 & 47140,4521 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k1_{3,3} & k1_{3,4} & k1_{3,1} & k1_{3,2} & 0 & 0 \\ k1_{4,3} & k1_{4,4} & k1_{4,1} & k1_{4,2} & 0 & 0 \\ k1_{1,3} & k1_{1,4} & k1_{1,1} & k1_{1,2} & 0 & 0 \\ k1_{2,3} & k1_{2,4} & k1_{2,1} & k1_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47140,4521 & 47140,4521 & -47140,4521 & -47140,4521 & 0 & 0 \\ 47140,4521 & 47140,4521 & -47140,4521 & -47140,4521 & 0 & 0 \\ -47140,4521 & -47140,4521 & 47140,4521 & 47140,4521 & 0 & 0 \\ -47140,4521 & -47140,4521 & 47140,4521 & 47140,4521 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k2":

$$[1\ 2\ 5\ 6]$$

$$k2 = \begin{bmatrix} 51200 & -38400 & -51200 & 38400 \\ -38400 & 28800 & 38400 & -28800 \\ -51200 & 38400 & 51200 & -38400 \\ 38400 & -28800 & -38400 & 28800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k1_{3,3}+k2_{1,1} & k1_{3,4}+k2_{1,2} & k1_{3,1} & k1_{3,2} & k2_{1,3} & k2_{1,4} \\ k1_{4,3}+k2_{2,1} & k1_{4,4}+k2_{2,2} & k1_{4,1} & k1_{4,2} & k2_{2,3} & k2_{2,4} \\ k1_{1,3} & k1_{1,4} & k1_{1,1} & k1_{1,2} & 0 & 0 \\ k1_{2,3} & k1_{2,4} & k1_{2,1} & k1_{2,2} & 0 & 0 \\ k2_{3,1} & k2_{3,2} & 0 & 0 & k2_{3,3} & k2_{3,4} \\ k2_{4,1} & k2_{4,2} & 0 & 0 & k2_{4,3} & k2_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98340 & 8740,5 & -47140 & -47140 & -51200 & 38400 \\ 8740,5 & 75940 & -47140 & -47140 & 38400 & -28800 \\ -47140 & -47140 & 47140 & 47140 & 0,0000 & 0,0000 \\ -47140 & -47140 & 47140 & 47140 & 0,0000 & 0,0000 \\ -51200 & 38400 & 0,0000 & 0,0000 & 51200 & -38400 \\ 38400 & -28800 & 0,0000 & 0,0000 & -38400 & 28800 \end{bmatrix}$$

$Q03 := "C"$

$$Qk := \begin{bmatrix} 0 \\ -PV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -70 \end{bmatrix}$$

$$Qu := \begin{bmatrix} Q3 \\ Q4 \\ Q5 \\ Q6 \end{bmatrix} \qquad Dk := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K11 := \begin{bmatrix} KG_{1,1} & KG_{1,2} \\ KG_{2,1} & KG_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98340 & 8740,5 \\ 8740,5 & 75940 \end{bmatrix}$$

$$K12 := \begin{bmatrix} KG_{1,3} & KG_{1,4} & KG_{1,5} & KG_{1,6} \\ KG_{2,3} & KG_{2,4} & KG_{2,5} & KG_{2,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47140,4521 & -47140,4521 & -51200 & 38400 \\ -47140,4521 & -47140,4521 & 38400 & -28800 \end{bmatrix}$$

$$K21 := \begin{bmatrix} KG_{3,1} & KG_{3,2} \\ KG_{4,1} & KG_{4,2} \\ KG_{5,1} & KG_{5,2} \\ KG_{6,1} & KG_{6,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47140,4521 & -47140,4521 \\ -47140,4521 & -47140,4521 \\ -51200 & 38400 \\ 38400 & -28800 \end{bmatrix}$$

$$K22 := \begin{bmatrix} KG_{3,3} & KG_{3,4} & KG_{3,5} & KG_{3,6} \\ KG_{4,3} & KG_{4,4} & KG_{4,5} & KG_{4,6} \\ KG_{5,3} & KG_{5,4} & KG_{5,5} & KG_{5,6} \\ KG_{6,3} & KG_{6,4} & KG_{6,5} & KG_{6,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47140,4521 & 47140,4521 & 0 & 0 \\ 47140,4521 & 47140,4521 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 51200 & -38400 \\ 0 & 0 & -38400 & 28800 \end{bmatrix}$$

Solução do Sistema de Equações:

Solução do Sistema de Equações: Qk = K11*Du + K12*Dk (1ª Linha)
Qu = K21*Du + K22*Dk (2ª Linha)

Resolvendo a 1ª Linha: Du = K11^-1 * (Qk - K12*Dk) como Dk = 0 ---> Du = K11^-1 * Qk

$$Du := K11^{-1} \cdot Qk = \begin{bmatrix} 8,2774 \cdot 10^{-5} \\ -0,00093130 \end{bmatrix}$$

$Q04 := "A"$

Respostas:

$Q01 = "B"$

$Q02 = "D"$

$Q03 = "C"$

$Q04 = "A"$
