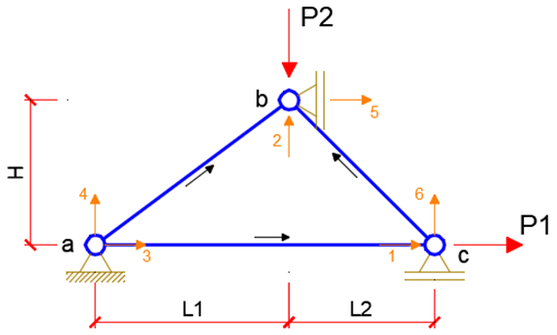
B2T4NA1105A

Considerando a numeração dos graus de liberdade (em laranja) e setas de orientação dos eixos longitudinais positivos das barras (em preto), conforme indicado no modelo estrutural de treliça ao lado, aplique análise matricial via método dos deslocamentos e responda os questionamentos.



Dados:
- Todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade; $E := 120\ GPa$
- Todas as barras possuem a mesma área de seção transversal: $A := 0,005\ m^2$

$L1 := 3,6\ m$ $P1 := 40\ kN$
$L2 := 1,8\ m$ $P2 := 100\ kN$
$H := 2,8\ m$

O nó "c" sofre um deslocamento vertical para cima de 30 mm;

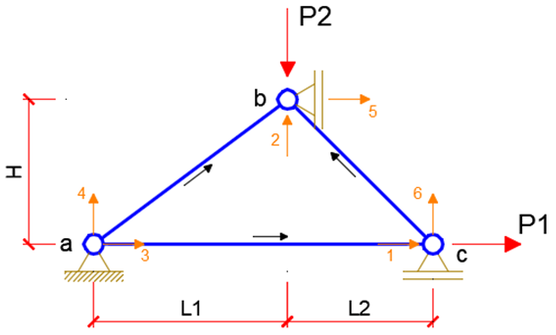
Q01) - O coeficiente "k22" da matriz de rigidez elementar da barra "ab", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]?
Q02) - O coeficiente "k12" da matriz de rigidez elementar da barra "bc", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]?
Q03) - O coeficiente "k11" da matriz de rigidez elementar da barra "ac", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]?
Q04) - O coeficiente "k22" da matriz de rigidez da estrutura é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]:
Q05) - Os deslocamento no grau de liberdade 1 é [em m e conforme a convenção de Green]?
Q06) - Os deslocamento no grau de liberdade 2 é [em m e conforme a convenção de Green]?
Q07) - Os esforço axial na barra "bc" é [em kN e com positivo para tração]?

Matrizes de Rigidez Elementares em Coordenadas Globais de Cada Barra:

$L1 := \frac{L1}{m}$ $L2 := \frac{L2}{m}$ $H := \frac{H}{m}$ $P1 := \frac{P1}{kN}$ $P2 := \frac{P2}{kN}$

Coordenadas (origem do sistema de eixos global no ponto "3"):

$xa := 0$ $ya := 0$
$xb := L1 = 3,6$ $yb := H$
$xc := L1 + L2 = 5,4$ $yc := 0 = 0$



$EA := \frac{E \cdot A}{kN} = 600000$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 1 (Barra "ab"):

$L1 := \sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2} = 4,5607$ $\lambda x1 := \frac{xb - xa}{L1} = 0,7894$ $\lambda y1 := \frac{yb - ya}{L1} = 0,6139$

$$k1 := \frac{EA}{L1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 \\ -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [3\ 4\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 81970 & 63760 & -81970 & -63760 \\ 63760 & 49590 & -63760 & -49590 \\ -81970 & -63760 & 81970 & 63760 \\ -63760 & -49590 & 63760 & 49590 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$Q01 := k1_{2\,2} = 49588$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 2 (Barra "bc"):

$$L2 := \sqrt{(xb - xc)^2 + (yb - yc)^2} = 3,3287 \qquad \lambda x2 := \frac{xb - xc}{L2} = -0,54076 \qquad \lambda y2 := \frac{yb - yc}{L2} = 0,84118$$

$$k2 := \frac{EA}{L2} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 \\ -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [1\ 6\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 52709,2 & -81992,1 & -52709,2 & 81992,1 \\ -81992,1 & 127543 & 81992,1 & -127543 \\ -52709,2 & 81992,1 & 52709,2 & -81992,1 \\ 81992,1 & -127543 & -81992,1 & 127543 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q02 := k2_{1\,2} = -81992$$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 3 (Barra "ac"):

$$L3 := \sqrt{(xc - xa)^2 + (yc - ya)^2} = 5,4 \qquad \lambda x3 := \frac{xc - xa}{L3} = 1 \qquad \lambda y3 := \frac{yc - ya}{L3} = 0,0000$$

$$k3 := \frac{EA}{L3} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda x3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 \\ \lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda y3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda y3^2 \\ -\lambda x3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda x3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 \\ -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda y3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda y3^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [3\ 4\ 1\ 6] \\ \begin{bmatrix} 111111,1 & 0 & -111111,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -111111,1 & 0 & 111111,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q03 := k3_{1\,1} = 111111$$

Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura como um Todo:

$$KG := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k1":

$$k1 = \begin{matrix} [3\ 4\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 81971 & 63755 & -81971 & -63755 \\ 63755 & 49588 & -63755 & -49588 \\ -81971 & -63755 & 81971 & 63755 \\ -63755 & -49588 & 63755 & 49588 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k1_{4\,4} & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} & k1_{4\,3} & 0 \\ 0 & k1_{1\,4} & k1_{1\,1} & k1_{1\,2} & k1_{1\,3} & 0 \\ 0 & k1_{2\,4} & k1_{2\,1} & k1_{2\,2} & k1_{2\,3} & 0 \\ 0 & k1_{3\,4} & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} & k1_{3\,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49588 & -63755 & -49588 & 63755 & 0 \\ 0 & -63755 & 81971 & 63755 & -81971 & 0 \\ 0 & -49588 & 63755 & 49588 & -63755 & 0 \\ 0 & 63755 & -81971 & -63755 & 81971 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k2":

$$k2 = \begin{matrix} [1\ 6\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 52709 & -81992 & -52709 & 81992 \\ -81992 & 1,2754 \cdot 10^5 & 81992 & -1,2754 \cdot 10^5 \\ -52709 & 81992 & 52709 & -81992 \\ 81992 & -1,2754 \cdot 10^5 & -81992 & 1,2754 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k2_{1\,1} & k2_{1\,4} & 0 & 0 & k2_{1\,3} & k2_{1\,2} \\ k2_{4\,1} & k1_{4\,4} + k2_{4\,4} & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} & k1_{4\,3} + k2_{4\,3} & k2_{4\,2} \\ 0 & k1_{1\,4} & k1_{1\,1} & k1_{1\,2} & k1_{1\,3} & 0 \\ 0 & k1_{2\,4} & k1_{2\,1} & k1_{2\,2} & k1_{2\,3} & 0 \\ k2_{3\,1} & k1_{3\,4} + k2_{3\,4} & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} & k1_{3\,3} + k2_{3\,3} & k2_{3\,2} \\ k2_{2\,1} & k2_{2\,4} & 0 & 0 & k2_{2\,3} & k2_{2\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52709 & 81992 & 0 & 0 & -52709 & -81992 \\ 81992 & 1,7713 \cdot 10^5 & -63755 & -49588 & -18237 & -1,2754 \cdot 10^5 \\ 0 & -63755 & 81971 & 63755 & -81971 & 0 \\ 0 & -49588 & 63755 & 49588 & -63755 & 0 \\ -52709 & -18237 & -81971 & -63755 & 1,3468 \cdot 10^5 & 81992 \\ -81992 & -1,2754 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 81992 & 1,2754 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k3":

$$[3\ 4\ 1\ 6]$$

$$k3 = \begin{bmatrix} 111110 & 0 & -111110 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -111110 & 0 & 111110 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k2_{1\,1} + k3_{3\,3} & k2_{1\,4} & k3_{3\,1} & k3_{3\,2} & k2_{1\,3} & k2_{1\,2} + k3_{3\,4} \\ k2_{4\,1} & k1_{4\,4} + k2_{4\,4} & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} & k1_{4\,3} + k2_{4\,3} & k2_{4\,2} \\ k3_{1\,3} & k1_{1\,4} & k1_{1\,1} + k3_{1\,1} & k1_{1\,2} + k3_{1\,2} & k1_{1\,3} & k3_{1\,4} \\ k3_{2\,3} & k1_{2\,4} & k1_{2\,1} + k3_{2\,1} & k1_{2\,2} + k3_{2\,2} & k1_{2\,3} & k3_{2\,4} \\ k2_{3\,1} & k1_{3\,4} + k2_{3\,4} & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} & k1_{3\,3} + k2_{3\,3} & k2_{3\,2} \\ k2_{2\,1} + k3_{4\,3} & k2_{2\,4} & k3_{4\,1} & k3_{4\,2} & k2_{2\,3} & k2_{2\,2} + k3_{4\,4} \end{bmatrix}$$

$$KG = \begin{bmatrix} 1,6382 \cdot 10^5 & 81992 & -1,1111 \cdot 10^5 & 0,0000 & -52709 & -81992 \\ 81992 & 1,7713 \cdot 10^5 & -63755 & -49588 & -18237 & -1,2754 \cdot 10^5 \\ -1,1111 \cdot 10^5 & -63755 & 1,9308 \cdot 10^5 & 63755 & -81971 & 0,0000 \\ 0,0000 & -49588 & 63755 & 49588 & -63755 & 0,0000 \\ -52709 & -18237 & -81971 & -63755 & 1,3468 \cdot 10^5 & 81992 \\ -81992 & -1,2754 \cdot 10^5 & 0,0000 & 0,0000 & 81992 & 1,2754 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$Q04 := KG_{2\,2} = 177130$$

$$K11 := \begin{bmatrix} KG_{1\,1} & KG_{1\,2} \\ KG_{2\,1} & KG_{2\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6382 \cdot 10^5 & 81992 \\ 81992 & 1,7713 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$K12 := \begin{bmatrix} KG_{1\,3} & KG_{1\,4} & KG_{1\,5} & KG_{1\,6} \\ KG_{2\,3} & KG_{2\,4} & KG_{2\,5} & KG_{2\,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,1111 \cdot 10^5 & 0,0000 & -52709 & -81992 \\ -63755 & -49588 & -18237 & -1,2754 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$K21 := \begin{bmatrix} KG_{3\,1} & KG_{3\,2} \\ KG_{4\,1} & KG_{4\,2} \\ KG_{5\,1} & KG_{5\,2} \\ KG_{6\,1} & KG_{6\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,1111 \cdot 10^5 & -63755 \\ 0,0000 & -49588 \\ -52709 & -18237 \\ -81992 & -1,2754 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$K22 := \begin{bmatrix} KG_{3\,3} & KG_{3\,4} & KG_{3\,5} & KG_{3\,6} \\ KG_{4\,3} & KG_{4\,4} & KG_{4\,5} & KG_{4\,6} \\ KG_{5\,3} & KG_{5\,4} & KG_{5\,5} & KG_{5\,6} \\ KG_{6\,3} & KG_{6\,4} & KG_{6\,5} & KG_{6\,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,9308 \cdot 10^5 & 63755 & -81971 & 0,0000 \\ 63755 & 49588 & -63755 & 0,0000 \\ -81971 & -63755 & 1,3468 \cdot 10^5 & 81992 \\ 0,0000 & 0,0000 & 81992 & 1,2754 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$Qk := \begin{bmatrix} P1 \\ -P2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -100 \end{bmatrix}$$

* Deslocamento prescrito de 30 mm subindo no grau de liberdade 6:

$$Qu := \begin{bmatrix} Q3 \\ Q4 \\ Q5 \\ Q6 \end{bmatrix} \qquad Dk := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,030 \end{bmatrix}$$

Solução do Sistema de Equações:

Solução do Sistema de Equações: Qk = K11*Du + K12*Dk (1ª Linha)
Qu = K21*Du + K22*Dk (2ª Linha)

Resolvendo a 1ª Linha: Du = K11^-1 * (Qk - K12*Dk)

$$Du := K11^{-1} \cdot (Qk - K12 \cdot Dk) = \begin{bmatrix} 0,00616 \\ 0,01819 \end{bmatrix}$$

$$D1 := Du_1 = 0,0061565 \qquad D2 := Du_2 = 0,018187$$

$$D3 := 0 \qquad D4 := 0 \qquad D5 := 0 \qquad D6 := 0,030$$

$$Q05 := D1 = 0,0061565 \qquad Q06 := D2 = 0,018187$$

Resolvendo a 2ª Linha: Qu = K21*Du + K22*Dk

$$Qu := K21 \cdot Du + K22 \cdot Dk = \begin{bmatrix} -1843,5852 \\ -901,859 \\ 1803,5852 \\ 1001,859 \end{bmatrix}$$

Reações de apoio nos graus de liberdade 3, 4, 5, 6, 7 e 8 respectivamente

---

Esforços Axiais nas Barras:

$$q_F = \frac{AE}{L}[-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y] \begin{Bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{Bmatrix}$$

Na Barra 2:

$$[1\ 6\ 5\ 2]$$

$$N2 := \frac{EA}{L2} \cdot \left(\left(\begin{bmatrix} -\lambda x2 & -\lambda y2 & \lambda x2 & \lambda y2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D1 \\ D6 \\ D5 \\ D2 \end{bmatrix} \right)_1 \right) = -1191,0183$$

$$Q07 := N2 = -1191,0$$

Respostas:

$Q01 = 49587,51$

$Q02 = -81992,13$

$Q03 = 111111,1$

$Q04 = 177130,8$

$Q05 = 0,006156470$

$Q06 = 0,01818722$

$Q07 = -1191,018$
