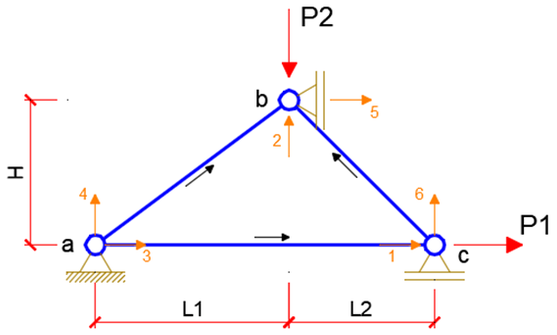
B2T4NA1112A

Considerando a numeração dos graus de liberdade (em laranja) e setas de orientação dos eixos longitudinais positivos das barras (em preto), conforme indicado no modelo estrutural de treliça ao lado, aplique análise matricial via método dos deslocamentos e responda os questionamentos.



Dados:
- Para todas as barras:

$E := 120\ \text{GPa}$ $A := 0,0005\ \text{m}^2$ $\alpha := 12 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{°\text{C}}$

$L1 := 4,0\ \text{m}$ $P1 := 40\ \text{kN}$
$L2 := 2,0\ \text{m}$ $P2 := 100\ \text{kN}$
$H := 3,0\ \text{m}$

A barra "bc" sofre uma variação de temperatura: $\Delta T := +30\ °\text{C}$

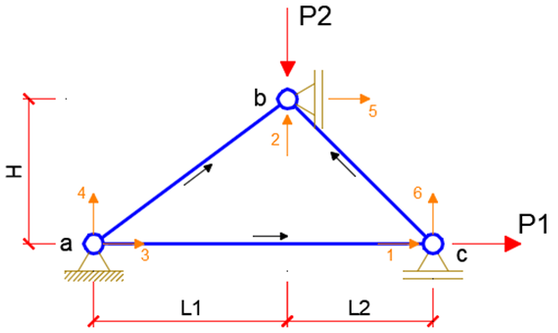
Q01) - O coeficiente "k22" da matriz de rigidez elementar da barra "ab", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]?
Q02) - O coeficiente "k12" da matriz de rigidez elementar da barra "bc", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]?
Q03) - O coeficiente "k11" da matriz de rigidez elementar da barra "ac", em coordenadas globais, é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]?
Q04) - O coeficiente "k22" da matriz de rigidez da estrutura é [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por AE]:
Q05) - Os deslocamento no grau de liberdade 1 é [em m e conforme a convenção de Green]?
Q06) - Os deslocamento no grau de liberdade 2 é [em m e conforme a convenção de Green]?
Q07) - Os esforço axial na barra "bc" é [em kN e com positivo para tração]?

Matrizes de Rigidez Elementares em Coordenadas Globais de Cada Barra:

$L1 := \frac{L1}{\text{m}}$ $L2 := \frac{L2}{\text{m}}$ $H := \frac{H}{\text{m}}$ $P1 := \frac{P1}{\text{kN}}$ $P2 := \frac{P2}{\text{kN}}$ $\alpha := 12 \cdot 10^{-6}$ $\Delta T := 30$

Coordenadas (origem do sistema de eixos global no ponto "3"):

$xa := 0$ $ya := 0$
$xb := L1 = 4$ $yb := H$
$xc := L1 + L2 = 6$ $yc := 0 = 0$



$EA := \frac{E \cdot A}{\text{kN}} = 60000$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 1 (Barra "ab"):

$L1 := \sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2} = 5$ $\lambda x1 := \frac{xb - xa}{L1} = 0,8$ $\lambda y1 := \frac{yb - ya}{L1} = 0,6$

$$k1 := \frac{EA}{L1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 \\ -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7680 & 5760 & -7680 & -5760 \\ 5760 & 4320 & -5760 & -4320 \\ -7680 & -5760 & 7680 & 5760 \\ -5760 & -4320 & 5760 & 4320 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [3\ 4\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$Q01 := k1_{2\,2} = 4320$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 2 (Barra "bc"):

$$L2 := \sqrt{(xb - xc)^2 + (yb - yc)^2} = 3,6056 \qquad \lambda x2 := \frac{xb - xc}{L2} = -0,55470 \qquad \lambda y2 := \frac{yb - yc}{L2} = 0,83205$$

$$k2 := \frac{EA}{L2} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 \\ -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [1\ 6\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 5120,31 & -7680,46 & -5120,31 & 7680,46 \\ -7680,46 & 11520,7 & 7680,46 & -11520,7 \\ -5120,31 & 7680,46 & 5120,31 & -7680,46 \\ 7680,46 & -11520,7 & -7680,46 & 11520,7 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Q02 := k2_{1\,2} = -7680,5$$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 3 (Barra "ac"):

$$L3 := \sqrt{(xc - xa)^2 + (yc - ya)^2} = 6 \qquad \lambda x3 := \frac{xc - xa}{L3} = 1 \qquad \lambda y3 := \frac{yc - ya}{L3} = 0,0000$$

$$k3 := \frac{EA}{L3} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda x3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 \\ \lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda y3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda y3^2 \\ -\lambda x3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda x3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 \\ -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda y3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda y3^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [3\ 4\ 1\ 6] \\ \begin{bmatrix} 10000 & 0 & -10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10000 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Q03 := k3_{1\,1} = 10000,0$$

Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura como um Todo:

$$KG := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k1":

$$k1 = \begin{matrix} [3\ 4\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 7680,0 & 5760,0 & -7680,0 & -5760,0 \\ 5760,0 & 4320,0 & -5760,0 & -4320,0 \\ -7680,0 & -5760,0 & 7680,0 & 5760,0 \\ -5760,0 & -4320,0 & 5760,0 & 4320,0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k1_{4\,4} & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} & k1_{4\,3} & 0 \\ 0 & k1_{1\,4} & k1_{1\,1} & k1_{1\,2} & k1_{1\,3} & 0 \\ 0 & k1_{2\,4} & k1_{2\,1} & k1_{2\,2} & k1_{2\,3} & 0 \\ 0 & k1_{3\,4} & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} & k1_{3\,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4320 & -5760 & -4320 & 5760 & 0 \\ 0 & -5760 & 7680 & 5760 & -7680 & 0 \\ 0 & -4320 & 5760 & 4320 & -5760 & 0 \\ 0 & 5760 & -7680 & -5760 & 7680 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k2":

$$k2 = \begin{matrix} [1\ 6\ 5\ 2] \\ \begin{bmatrix} 5120,3 & -7680,5 & -5120,3 & 7680,5 \\ -7680,5 & 11521 & 7680,5 & -11521 \\ -5120,3 & 7680,5 & 5120,3 & -7680,5 \\ 7680,5 & -11521 & -7680,5 & 11521 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k2_{3\,3} & k2_{3\,2} & 0 & 0 & k2_{3\,1} & k2_{3\,4} \\ k2_{2\,3} & k1_{4\,4} + k2_{2\,2} & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} & k1_{4\,3} + k2_{2\,1} & k2_{2\,4} \\ 0 & k1_{1\,4} & k1_{1\,1} & k1_{1\,2} & k1_{1\,3} & 0 \\ 0 & k1_{2\,4} & k1_{2\,1} & k1_{2\,2} & k1_{2\,3} & 0 \\ k2_{1\,3} & k1_{3\,4} + k2_{1\,2} & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} & k1_{3\,3} + k2_{1\,1} & k2_{1\,4} \\ k2_{4\,3} & k2_{4\,2} & 0 & 0 & k2_{4\,1} & k2_{4\,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5120,3 & 7680,5 & 0 & 0 & -5120,3 & -7680,5 \\ 7680,5 & 15841 & -5760 & -4320 & -1920,5 & -11521 \\ 0 & -5760 & 7680 & 5760 & -7680 & 0 \\ 0 & -4320 & 5760 & 4320 & -5760 & 0 \\ -5120,3 & -1920,5 & -7680 & -5760 & 12800 & 7680,5 \\ -7680,5 & -11521 & 0 & 0 & 7680,5 & 11521 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k3":

$$\begin{matrix}[3&4&1&6]\end{matrix}$$

$$k3 = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & -10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10000 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k2_{3\,3}+k3_{3\,3} & k2_{3\,2} & k3_{3\,1} & k3_{3\,2} & k2_{3\,1} & k2_{3\,4}+k3_{3\,4} \\ k2_{2\,3} & k1_{4\,4}+k2_{2\,2} & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} & k1_{4\,3}+k2_{2\,1} & k2_{2\,4} \\ k3_{1\,3} & k1_{1\,4} & k1_{1\,1}+k3_{1\,1} & k1_{1\,2}+k3_{1\,2} & k1_{1\,3} & k3_{1\,4} \\ k3_{2\,3} & k1_{2\,4} & k1_{2\,1}+k3_{2\,1} & k1_{2\,2}+k3_{2\,2} & k1_{2\,3} & k3_{2\,4} \\ k2_{1\,3} & k1_{3\,4}+k2_{1\,2} & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} & k1_{3\,3}+k2_{1\,1} & k2_{1\,4} \\ k2_{4\,3}+k3_{4\,3} & k2_{4\,2} & k3_{4\,1} & k3_{4\,2} & k2_{4\,1} & k2_{4\,4}+k3_{4\,4} \end{bmatrix}$$

$$KG = \begin{bmatrix} 15120 & 7680,5 & -10000 & 0,0000 & -5120,3 & -7680,5 \\ 7680,5 & 15841 & -5760,0 & -4320,0 & -1920,5 & -11521 \\ -10000 & -5760,0 & 17680 & 5760,0 & -7680,0 & 0,0000 \\ 0,0000 & -4320,0 & 5760,0 & 4320,0 & -5760,0 & 0,0000 \\ -5120,3 & -1920,5 & -7680,0 & -5760,0 & 12800 & 7680,5 \\ -7680,5 & -11521 & 0,0000 & 0,0000 & 7680,5 & 11521 \end{bmatrix}$$

$$Q04 := KG_{2\,2} = 15841$$

$$K11 := \begin{bmatrix} KG_{1\,1} & KG_{1\,2} \\ KG_{2\,1} & KG_{2\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15120 & 7680,5 \\ 7680,5 & 15841 \end{bmatrix}$$

$$K12 := \begin{bmatrix} KG_{1\,3} & KG_{1\,4} & KG_{1\,5} & KG_{1\,6} \\ KG_{2\,3} & KG_{2\,4} & KG_{2\,5} & KG_{2\,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10000 & 0,0000 & -5120,3 & -7680,5 \\ -5760,0 & -4320,0 & -1920,5 & -11521 \end{bmatrix}$$

$$K21 := \begin{bmatrix} KG_{3\,1} & KG_{3\,2} \\ KG_{4\,1} & KG_{4\,2} \\ KG_{5\,1} & KG_{5\,2} \\ KG_{6\,1} & KG_{6\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10000 & -5760,0 \\ 0,0000 & -4320,0 \\ -5120,3 & -1920,5 \\ -7680,5 & -11521 \end{bmatrix}$$

$$K22 := \begin{bmatrix} KG_{3\,3} & KG_{3\,4} & KG_{3\,5} & KG_{3\,6} \\ KG_{4\,3} & KG_{4\,4} & KG_{4\,5} & KG_{4\,6} \\ KG_{5\,3} & KG_{5\,4} & KG_{5\,5} & KG_{5\,6} \\ KG_{6\,3} & KG_{6\,4} & KG_{6\,5} & KG_{6\,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17680 & 5760,0 & -7680,0 & 0,0000 \\ 5760,0 & 4320,0 & -5760,0 & 0,0000 \\ -7680,0 & -5760,0 & 12800 & 7680,5 \\ 0,0000 & 0,0000 & 7680,5 & 11521 \end{bmatrix}$$

$$Qk := \begin{bmatrix} P1 \\ -P2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$$Qu := \begin{bmatrix} Q3 \\ Q4 \\ Q5 \\ Q6 \end{bmatrix} \qquad Dk := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vetor de Forças Térmicas na Barra [2]

$$Ft2 := EA \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{bmatrix} \lambda x2 \\ \lambda y2 \\ -\lambda x2 \\ -\lambda y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11,9815 \\ 17,9723 \\ 11,9815 \\ -17,9723 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vetor Global de Forças Térmicas:

$$FT := \begin{bmatrix} Ft2_{1} \\ Ft2_{4} \\ 0 \\ 0 \\ Ft2_{3} \\ Ft2_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11,9815 \\ -17,9723 \\ 0 \\ 0 \\ 11,9815 \\ 17,9723 \end{bmatrix}$$

$$FT1 := \begin{bmatrix} FT_{1} \\ FT_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11,9815 \\ -17,9723 \end{bmatrix}$$

$$FT2 := \begin{bmatrix} FT_{3} \\ FT_{4} \\ FT_{5} \\ FT_{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 11,9815 \\ 17,9723 \end{bmatrix}$$

Solução do Sistema de Equações:

Solução do Sistema de Equações: Qk-FT1 = K11*Du + K12*Dk (1ª Linha)
Qu-FT2 = K21*Du + K22*Dk (2ª Linha)

Resolvendo a 1ª Linha: Du = K11^-1 * (Qk - FT1 - K12*Dk)

$$Du := K11^{-1} \cdot (Qk - FT1 - K12 \cdot Dk) = \begin{bmatrix} 0,0080511 \\ -0,0090819 \end{bmatrix}$$

$$D1 := Du_1 = 0,0080511 \qquad D2 := Du_2 = -0,0090819$$

$$D3 := 0 \qquad D4 := 0 \qquad D5 := 0 \qquad D6 := 0$$

$$Q05 := D1 = 0,0080511 \qquad Q06 := D2 = -0,0090819$$

Resolvendo a 2ª Linha: Qu = K21*Du + K22*Dk + FT2

$$Qu := K21 \cdot Du + K22 \cdot Dk + FT2 = \begin{bmatrix} -28,199 \\ 39,2338 \\ -11,801 \\ 60,7662 \end{bmatrix}$$

Reações de apoio nos graus de liberdade 3, 4, 5 e 6 respectivamente

Esforços Axiais nas Barras:

Na Barra 2:

$$N2 := \frac{EA}{L2} \cdot \left(\left(\begin{bmatrix} -\lambda x2 & -\lambda y2 & \lambda x2 & \lambda y2 \end{bmatrix}^{[1\ 6\ 5\ 2]} \cdot \begin{bmatrix} D1 \\ D6 \\ D5 \\ D2 \end{bmatrix} \right)_1 \right) - EA \cdot \alpha \cdot \Delta T = -73,0318$$

$$Q07 := N2 = -73,032$$

Respostas:

$$Q01 = 4320$$

$$Q02 = -7680,464$$

$$Q03 = 10000$$

$$Q04 = 15840,7$$

$$Q05 = 0,008051078$$

$$Q06 = -0,009081907$$

$$Q07 = -73,03184$$