UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO E ESTRUTURAS
ENG 114 - HIPERESTÁTICA

1ª. UNIDADE

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO E ESTRUTURAS
ENG 114 – HIPERESTÁTICA
1° Semestre de 2009

PROGRAMA DA DISCIPLINA

1. ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS
- 1.1. Determinação Geométrica
- 1.2. Diagramas de Esforços Solicitantes
- 1.3. Princípio dos Trabalhos Virtuais
- 1.4. Cálculo de Deslocamentos e Rotações

2. PROCESSO DOS ESFORÇOS
- 2.1. Estruturas Submetidas a Ações Diretas
- 2.2. Estruturas Submetidas a Variação de Temperatura
- 2.3. Estruturas Submetidas a Recalques de Apoios
- 2.4. Estruturas com Apoios Elásticos
- 2.5. Simplificações Devidas à Simetria

3. PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS
- 3.1. Estruturas Submetidas a Ações Diretas
- 3.2. Estruturas Submetidas a Variação de Temperatura
- 3.3. Estruturas Submetidas a Recalques de Apoios
- 3.4. Estruturas com Apoios Elásticos

4. PROCESSO DE CROSS
- 4.1. Aplicação em Vigas
- 4.2. Aplicação em Pórticos

METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

A avaliação da aprendizagem, de acordo com o Regulamento do Ensino de Graduação, será realizada a partir:

- da apuração da freqüência às aulas,
- da atribuição de notas aos alunos em exercícios propostos (feitos na sala de aula ou não),
- da atribuição de notas aos alunos em três avaliações parciais e no exame final quando for o caso.

DATAS DAS AVALIAÇÕES:

Primeira Avaliação: 06/04/2009
Segunda Avaliação: 25/05/2009
Terceira Avaliação: 01/07/2009
Segunda Chamada: 06/07/2009
Prova final: 13/07/2009

OBSERVAÇÕES:

1. Nas avaliações podem ser utilizadas calculadoras científicas, programáveis e alfanuméricas (HP, Casio, etc). N**ão é permitido** o uso de palm top, handheld e telefone celular.
2. O aluno que faltar às avaliações e entrar com o pedido de segunda chamada no **Departamento de Construção e Estruturas**, apresentando justificativa de acordo com o Regulamento do Ensino de Graduação da UFBA (www.sgc.ufba.br), e **no prazo determinado** por este, poderá fazer outra avaliação com o mesmo assunto da avaliação que faltar, e em horário determinado a critério da professora.
3. O aluno que **faltar a uma avaliação,** sem justificativa, **deverá** entrar com um pedido de segunda chamada no **Departamento de Construção e Estruturas**, no prazo determinado pelo REG, e poderá fazer outra avaliação **com todo o assunto do curso**, a ser realizada em 06/07/2009.

PLANO DE CURSO

	No.	DIA	DATA*	ASSUNTO
1ª. UNIDADE	1	Segunda	2/mar	Não houve aula
	2	Quarta	4/mar	Programa do curso / Determinação geométrica
	3	Segunda	9/mar	Cálculo de reações de apoio
	4	Quarta	11/mar	Esforços solicitantes: Cálculo e traçado de diagramas / Chapas inclinadas
	5	Segunda	16/mar	Esforços solicitantes: Chapas inclinadas
	6	Quarta	18/mar	Princípio dos Trabalhos Virtuais: Considerações iniciais e exemplos
	7	Segunda	23/mar	Princípio dos Trabalhos Virtuais: Estruturas fletidas usuais,
	8	Quarta	25/mar	Princípio dos Trabalhos Virtuais: Estruturas fletidas usuais,
	9	Segunda	30/mar	Princípio dos Trabalhos Virtuais: Treliças planas
	10	Quarta	1/abr	Princípio dos Trabalhos Virtuais: Estruturas Fletidas com Barras Simples
	11	Segunda	6/abr	**PRIMEIRA AVALIAÇÃO**
2ª. UNIDADE	12	Quarta	8/abr	Processo dos esforços: Considerações iniciais
	13	Segunda	13/abr	Processo dos esforços: Vigas submetidas a ações externas
	14	Quarta	15/abr	Processo dos esforços: Vigas submetidas a variação de temperatura
	15	Segunda	20/abr	Não haverá aula
	16	Quarta	22/abr	Processo dos esforços: Vigas submetidas a recalque de apoio
	17	Segunda	27/abr	Processo dos esforços: Pórticos submetidos a ações externas
	18	Quarta	29/abr	Processo dos esforços: Pórticos submetidos a variação de temperatura
	19	Segunda	4/mai	Processo dos esforços: Pórticos submetidos a recalques de apoio
	20	Quarta	6/mai	Processo dos esforços: Estruturas sobre apoios elásticos
	21	Segunda	11/mai	Processo dos esforços: Estruturas sobre apoios elásticos
	22	Quarta	13/mai	Processo dos esforços: Treliças planas
	23	Segunda	18/mai	Processo dos esforços: Simplificações devidas à simetria
	24	Quarta	20/mai	Processo dos esforços: Exercícios
	25	Segunda	25/mai	**SEGUNDA AVALIAÇÃO**
3ª. UNIDADE	26	Quarta	27/mai	Processo dos deslocamentos: Considerações iniciais
	27	Segunda	1/jun	Processo dos deslocamentos: Estruturas submetidas a ações externas
	28	Quarta	3/jun	Processo dos deslocamentos: Estruturas submetidas a recalques de apoio
	29	Segunda	8/jun	Processo dos deslocamentos: Estruturas submetidas a variação de temperatura
	30	Quarta	10/jun	Processo dos deslocamentos: Estruturas sobre apoios elásticos
	31	Segunda	15/jun	Processo dos deslocamentos: Estruturas sobre apoios elásticos
	32	Quarta	17/jun	Processo de Cross: Considerações iniciais
	33	Segunda	22/jun	Processo de Cross: Vigas
	34	Quarta	24/jun	Não haverá aula
	35	Segunda	29/jun	Processo de Cross: Pórticos
	36	Quarta	1/jul	**TERCEIRA AVALIAÇÃO**
	37	Segunda	6/jul	**SEGUNDA CHAMADA**
	38	Quarta	13/jul	**PROVA FINAL**

*** Datas sujeitas a alterações**

BIBLIOGRAFIA

SORIANO, H. L.; LIMA, S.S. **Análise de Estruturas: Método das Forças e Métodos dos Deslocamentos**. Vol.1, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro.

SOUZA, J. C. A. O.; ANTUNES, H. M. C. C. **Processos Gerais da Hiperestática Clássica**. Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos.

SOUZA, J. C. A. O.; ANTUNES, H. M. C. C. **Processos de Cross**. Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos.

SUSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural**. Vols. 1, 2 e 3. Editora Globo, Rio de Janeiro.

REGULAMENTO DO ENSINO DE GRADUAÇÃO

CAPÍTULO VI
Da Avaliação da Aprendizagem

Artigo 96 - Entende-se por avaliação de aprendizagem o processo de apreciação e julgamento do rendimento acadêmico dos alunos, com o objetivo de acompanhamento, diagnóstico e melhoria do processo de aprendizagem, bem como com a finalidade de habilitação do aluno em cada componente curricular.

Artigo 97 - A avaliação de aprendizagem far-se-á por período letivo, semestral ou anual, compreendendo:

I – a apuração das freqüências às aulas, atividades e aos trabalhos escolares;

II – a atribuição de notas aos alunos em avaliações parciais através de trabalhos escolares e no exame final quando for o caso.

Artigo 98 - As avaliações de aprendizagem através de trabalhos escolares e do exame final serão expressas sob a forma de notas numéricas, até uma casa decimal, obedecendo a uma escala de zero (0) a dez (10).

Parágrafo 1º - A metodologia de avaliação da aprendizagem será definida pelo professor ou grupo de professores de cada componente curricular no respectivo plano de curso, aprovado pelo plenário do Departamento e encaminhado ao(s) Colegiado(s) do(s) Curso(s) para conhecimento.

Parágrafo 2º - Até o final da segunda semana letiva, a metodologia da avaliação da aprendizagem será divulgada aos alunos em sala de aula.

Artigo 99 - Os trabalhos escolares para avaliações parciais de aprendizagem são obrigatórios, conferindo-se nota zero (0) ao aluno que não os fizer.

Parágrafo 1º - O aluno que faltar ou não executar trabalho escolar, ao qual será atribuída nota para fins de aprovação ou reprovação, terá direito à segunda chamada, se a requerer ao professor responsável pela disciplina, até dois dias úteis após a sua realização, comprovando-se uma das seguintes situações:

I - direito assegurado por legislação especifica;

II – motivo de saúde comprovado por atestado médico;

III – razão de força maior, a critério do professor responsável pela disciplina.

Parágrafo 2º - A nota atribuída em segunda chamada substituirá a nota zero (0).

Parágrafo 3º - A falta à segunda chamada implicará na manutenção automática e definitiva da nota zero (0).

Parágrafo 4º - A avaliação da aprendizagem em segunda chamada será feita pelo próprio professor da turma, em horário por este designado, com, pelo menos, três (3) dias de antecedência, consistindo na execução de trabalhos similares àqueles aplicados na primeira chamada.

Artigo 100 - Ao longo do período letivo, deverão ser atribuídas a cada aluno, com base nos trabalhos escolares, no mínimo duas (2) e no máximo seis (6) notas.

Artigo 101 - O exame final constará de prova escrita e/ou prática e/ou oral e/ou execução de um trabalho, versando sobre assunto da matéria lecionada no período.

Parágrafo 1º - O exame de que trata o caput deste artigo deverá realizar-se, no mínimo, uma semana após o encerramento do curso.

Parágrafo 2º - Aplicam-se ao exame final as disposições dos parágrafos 1o, 2o, 3o e 4º do artigo 99 desde regulamento.

Artigo 102 - A nota final do aluno, em cada componente curricular, será determinada pela média aritmética ponderada dos dois valores seguintes:

I – média aritmética simples, sem aproximação, dos valores das notas obtidas pelo aluno nas avaliações parciais de aprendizagem, com peso seis (6);

II – nota obtida no exame final, com peso quatro (4).

Parágrafo 1º - A nota final correspondente ao valor obtido de acordo com os incisos I e II deste artigo será expressa sob a forma de números inteiros ou fracionários, até uma casa decimal, numa escala de zero (0) a dez (10).

Parágrafo 2º - Será dispensado do exame final, salvo se o requerer dentro das vinte e quatro (24) horas que precedem o exame, o aluno que, durante as avaliações parciais da aprendizagem, houver alcançado média mínima igual ou superior a sete (7), sem aproximação, média esta que corresponderá à nota final.

Artigo 103 - Será considerado inabilitado ou reprovado, em cada componente curricular, o aluno que alternativa ou cumulativamente:

I – deixar de cumprir a freqüência mínima de setenta e cinco por cento (75%) às aulas e às demais atividades escolares de cada componente curricular, ficando, conseqüentemente, vedada a realização

das avaliações subseqüentes ao estudante que tenha faltado mais de 25% da carga horária do componente curricular;

II – não obtiver nota igual ou superior a um vírgula sete (1,7) resultante da média das avaliações parciais de cada componente curricular, ficando conseqüentemente vedada a prestação do exame final;

III – não obtiver nota final igual ou superior a cinco (5), sem aproximação, resultante da média das avaliações parciais e do exame final de cada componente curricular.

Artigo 104 - Os trabalhos escolares aos quais sejam atribuídas notas, para fins de aprovação ou reprovação dos alunos, deverão ser marcados com pelo menos uma semana de antecedência e, preferencialmente, figurar no plano de curso do componente curricular, respeitados os dias e horários destinados ao ensino do mesmo.

Parágrafo 1º - O resultado de cada avaliação parcial de aprendizagem deverá ser divulgado ao aluno antes da realização da avaliação seguinte com no mínimo quarenta e oito (48) horas de antecedência.

Parágrafo 2º - Os trabalhos escolares referidos no caput deste artigo deverão ser comentados pelo professor, em sala de aula, após a divulgação das notas, eliminando as dúvidas por parte dos alunos.

Artigo 105 – ~~O trabalho escolar poderá ter sua nota reavaliada em primeira instancia pelo professor que a atribuiu e em segunda instancia por uma banca examinadora composta por três (3) professores inclusive o professor responsável pela turma, mediante solicitação escrita e fundamentada pelo aluno, se a encaminhar até três (3) dias úteis após o dia da divulgação do resultado, ao Departamento respectivo, instancia definitiva.~~

~~Parágrafo único - Quando a nota a ser reavaliada tiver sido atribuída por mais de um professor, constituir-se-á nova banca examinadora a qual deverá integrar o docente responsável pela turma.~~

Supresso - Prevalece o Artigo 45 do Regimento da UFBA:

Artigo 45 - O trabalho escolar poderá ter sua nota reavaliada pelo professor que atribuiu, por solicitação escrita e fundamentada pelo aluno, se requerido até 3 (três) dias úteis após o dia da divulgação do resultado, ao Departamento respectivo, instância definitiva.

Artigo 106 - Para o componente curricular cuja particularidade exigir um sistema de avaliação específico, esse sistema deverá ser submetido à aprovação do(s) respectivo(s) Colegiado(s) de Curso e da Câmara de Ensino de Graduação, resguardando-se o princípio de avaliação intermediária e de recurso de conceito.

OBSERVAÇÕES:

1. O texto completo do Regulamento do Ensino de Graduação pode ser encontrado no seguinte sítio: **http://www.sgc.ufba.br**
2. Só serão revisadas avaliações feitas a tinta (caneta). Portanto, **não serão revisadas avaliações feitas a lápis**.

ELEMENTOS FUNDAMENTAIS DAS ESTRUTURAS

1.1 INTRODUÇÃO

"As estruturas são constituídas de um elemento ou de um conjunto de elementos ligados entre si e externamente ao solo, de tal forma que o sistema assim formado seja estável. A estrutura é, portanto, um sistema adequado para receber solicitações externas e encaminhá-las até seus vínculos externos".

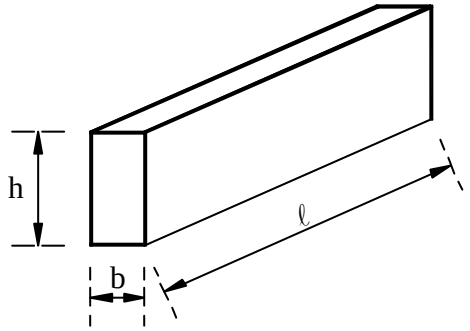
Os elementos que constituem uma estrutura são chamados **elementos estruturais**.

1.2 CLASSIFICAÇÃO DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS

Classificação de acordo com as dimensões principais dos elementos.

1.2.1 ELEMENTO DE BARRA

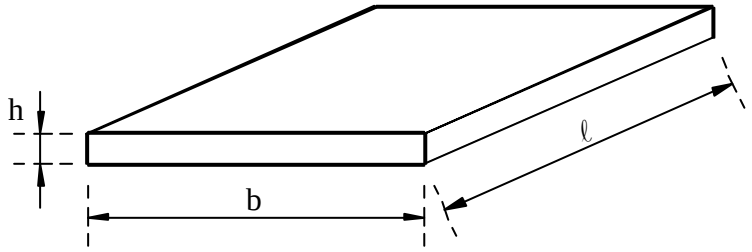
Quando duas dimensões são pequenas em relação à terceira.



$\mathbf{b} \approx \mathbf{h} < \ell$

1.2.2 ELEMENTO DE SUPERFÍCIE

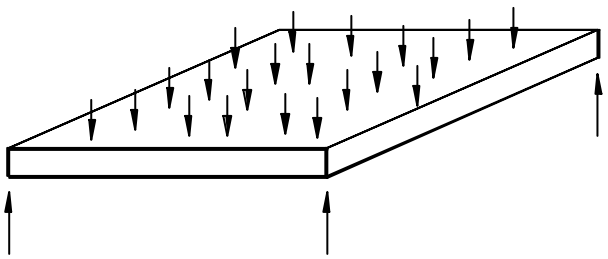
Quando uma dimensão é muito menor que as outras duas.



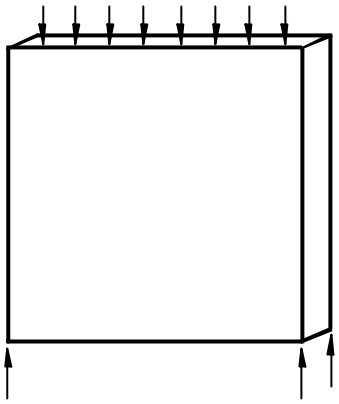
$\mathbf{b} \approx \ell > \mathbf{h}$

Os elementos de superfície são divididos em:

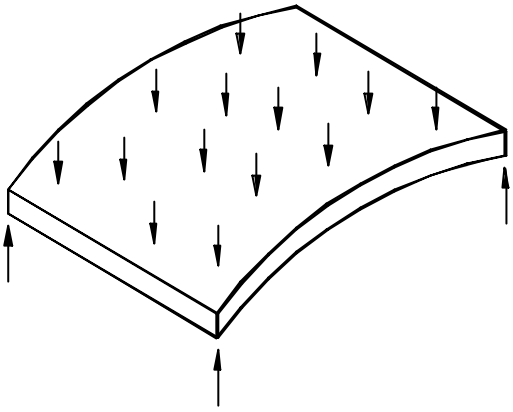
- **Placa**: as ações atuam perpendicularmente ao plano da superfície.



- **Chapa**: as ações atuam paralelamente ao plano da superfície.

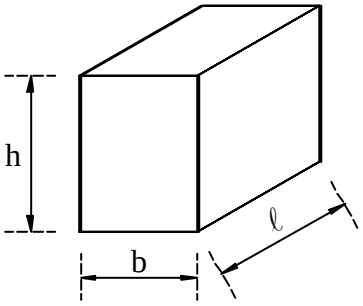


- **Casca**: elemento de superfície com curvatura não nula de seu plano



1.2.3 ELEMENTO DE BLOCO

Não há dimensão preponderante sobre as outras.



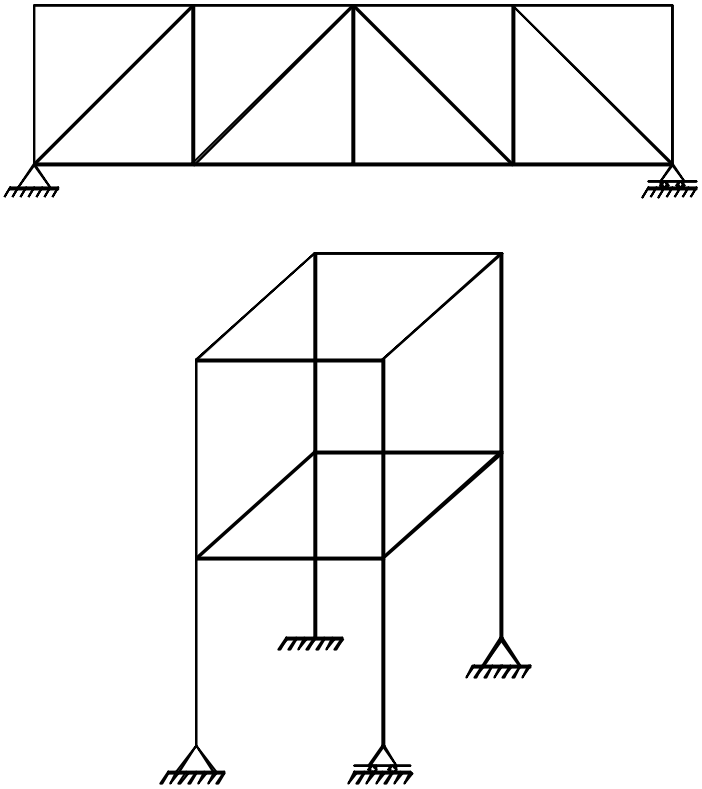
b @ **h** @ ℓ

1.3 CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS

Função dos elementos que a compõem.

1.3.1 ESTRUTURAS LINEARES

São aquelas formadas por elementos de barras. Podem ser planas ou espaciais.



1.3.2 ESTRUTURAS DE SUPERFÍCIE

Formadas por elementos de superfície.

1.3.3 ESTRUTURAS DE VOLUME

Formadas por elementos de bloco.

1.4 ESTRUTURAS LINEARES PLANAS

São aquelas formadas por barras cujos eixos estão situados no mesmo plano.
Alguns exemplos:

- Vigas
- Pórticos
- Treliças
- Grelhas
- Arcos

OBS:
O elemento de barra pode apresentar desempenhos distintos no conjunto da estrutura:

- Ele pode suportar ações transversais ao seu eixo, e, com isso, transmitir momentos fletores e esforços cortantes, sendo chamado, neste caso, de **chapa**.
- Ele pode transmitir apenas esforços axiais, sendo chamado, neste caso, de **barra simples**, ou simplesmente **barra**

VINCULAÇÃO DAS ESTRUTURAS LINEARES PLANAS

2.1 INTRODUÇÃO

Como as estruturas podem ser formadas por vários elementos ligados entre si e exteriormente com o solo, essas ligações são chamadas **vínculos**.

Podem ser distinguidos três tipos de vínculos:

- **Articulação entre chapas**: ligação interna que une as chapas.
- **Articulação entre barras**: ligação interna que une as barras (**nó**).
- **Apoios**: ligação entre a estrutura e o solo (**vínculos externos**).

Os elementos estruturais mais os vínculos devem formar um conjunto estável, sendo os vínculos responsáveis por restringir o movimento da estrutura.

São três os movimentos possíveis nas estruturas lineares planas (**graus de liberdade**):

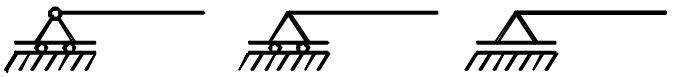
- Uma rotação
- Duas translações

2.2 REPRESENTAÇÃO DOS TIPOS DE VÍNCULOS

Os vínculos são caracterizados pelo número de graus de liberdade retirados da estrutura.

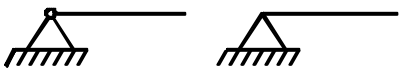
2.2.1 APOIO MÓVEL

Permite a rotação e uma translação, retirando, portanto, um grau de liberdade da estrutura.



2.2.2 APOIO FIXO

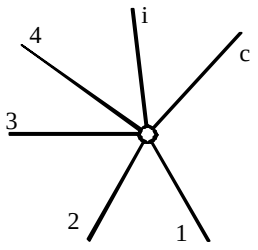
Permite somente a rotação, restringindo, portanto, as duas translações.



2.2.3 ARTICULAÇÃO ENTRE CHAPAS

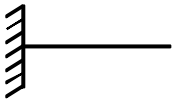
Restringe deslocamentos entre as chapas, permitindo rotações relativas entre elas.

Seja uma articulação onde **c** chapas se encontram. Supondo-se uma das chapas fixa, a articulação retira dois graus de liberdade de cada uma das **(c-1)** chapas, em relação àquela suposta fixa. O número total de graus de liberdade retirados da estrutura por esse tipo de vínculo é, então, igual a **2(c-1)**.



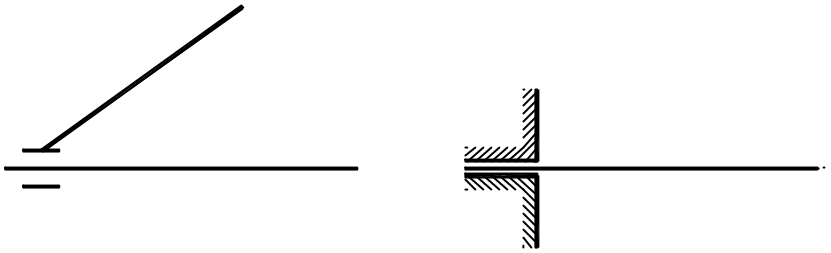
2.2.4 ENGASTE FIXO

Impede todos os movimentos no plano, retirando três graus de liberdade da estrutura.



2.2.5 ENGASTE MÓVEL

Impede o giro e um movimento, retirando, assim, dois graus de liberdade da estrutura.



DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA DAS ESTRUTURAS

3.1 INTRODUÇÃO

As relações entre o número de vínculos e o número de elementos que constituem uma estrutura devem satisfazer certas condições para que esta tenha sua posição determinada no plano. O estudo dessas relações denomina-se **determinação geométrica**.

As estruturas podem ser classificadas, do ponto de vista geométrico, da seguinte forma:

Se **be = bn**	→	a estrutura é geometricamente determinada.
Se **be > bn**	→	a estrutura é geometricamente superdeterminada.
Se **be < bn**	→	a estrutura é geometricamente indeterminada ou móvel.

Sendo:

be = número de barras simples e de barras vinculares existentes na estrutura;

c = número de chapas (ou barras gerais);

n = número de nós

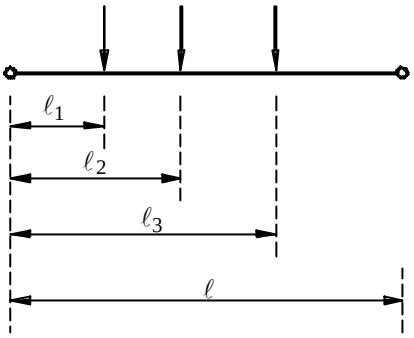
bn = número de barras necessárias para que a estrutura em estudo seja determinada.

3.2 DEFINIÇÕES

São apresentadas a seguir algumas definições necessárias à determinação geométrica das estruturas lineares planas.

3.2.1 CHAPAS (BARRAS GERAIS)

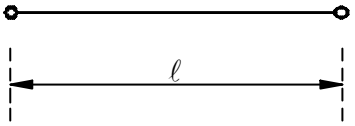
Função geométrica: definir distâncias entre todos os seus pontos:



Função estática: transmitir todos os esforços.

3.2.2 BARRAS SIMPLES (BARRAS)

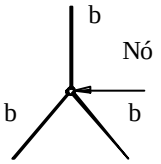
Função geométrica: definir a distância entre seus pontos extremos:



Função estática: transmitir apenas esforços axiais.

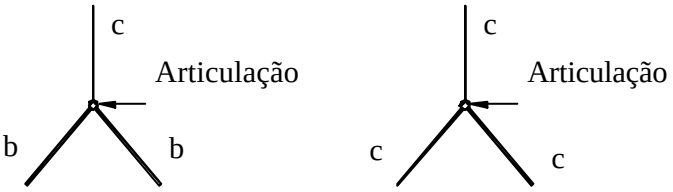
3.2.3 NÓS

Encontro de barras simples



3.2.4 ARTICULAÇÃO

Encontro de barras e chapas ou só de chapas

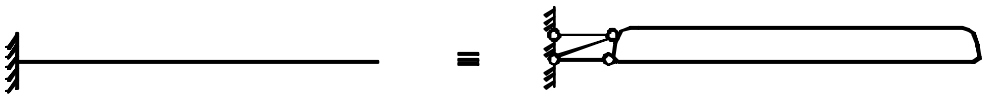


3.2.5 BARRAS VINCULARES

Correspondem aos graus de liberdade impedidos pelos vínculos internos e externos.

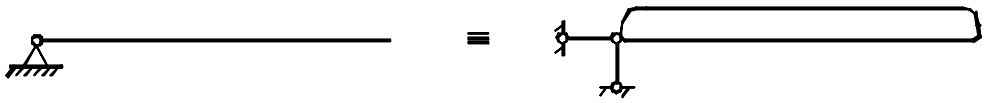
a) Engaste fixo

Corresponde a três barras vinculares



b) Apoio fixo

Corresponde a duas barras vinculares



c) Apoio móvel

Corresponde a uma barra vincular



d) Engaste móvel

Corresponde a duas barras vinculares



3.2.6 CHAPA TERRA

Apoio de todas as estruturas

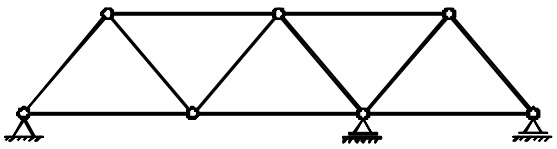
3.3 ESTRUTURAS ELEMENTARES

3.4 2.1 TRELIÇA

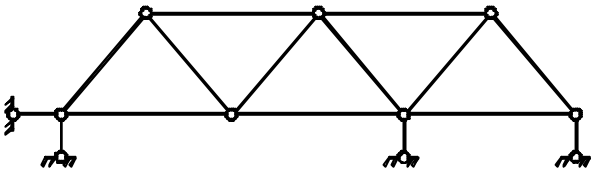
Estrutura composta apenas de barras simples e nós, com carga aplicada somente nos nós.

® **bn = 2n**

Exemplo:



Tem-se:



↗ Barras efetivamente existentes

be = 11 + 4 = 15 n = 7 bn = 2 x 7 = 14

↘ Barras vinculares

be = 15 > bn = 14 → Treliça superdeterminada

Grau:

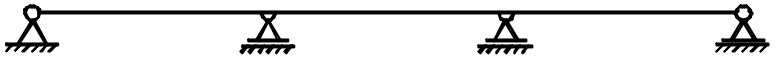
g = be – bn = 15 – 14 = 1 → 1 x superdeterminada

3.4.1 ESTRUTURAS COMPOSTAS DE APOIOS E CHAPAS

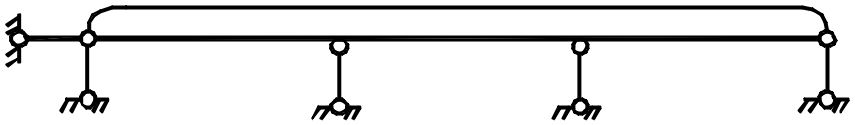
Transmitem todos os esforços

→ **bn = 3c**

Exemplo:



Tem-se:



be = 5 c = 1 n = 0 bn = 3c = 3 x 1 = 3

be = 5 > bn = 3 → Estrutura superdeterminada

Grau:

g = be – bn = 5 – 3 = 2 → Estrutura 2 x superdeterminada

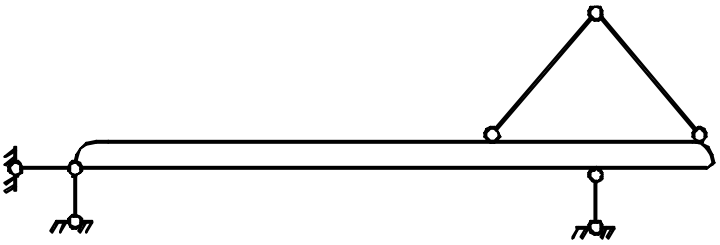
3.4.2 ESTRUTURAS COMPOSTAS DE APOIOS, BARRAS, CHAPAS E NÓS

® **bn = 3c + 2n**

Exemplo 1



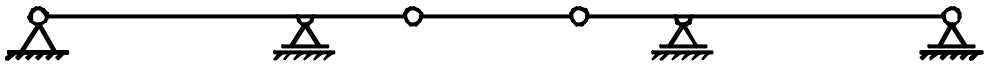
Tem-se:



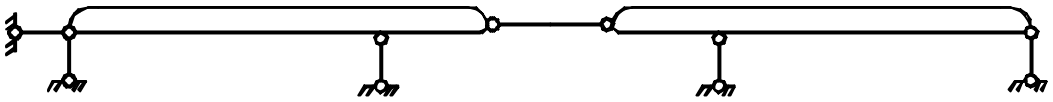
be = 2 + 3 = 5 c = 1 n = 1 bn = 3c + 2n = 3 x 1 + 2 x 1 = 5

be = bn = 5 → Estrutura determinada

Exemplo 2



Tem-se:



be = 1 + 5 = 6 c = 2 n = 0 bn = 3c + 2n = 3 x 2 + 2 x 0 = 6

be = bn = 6 → Estrutura determinada

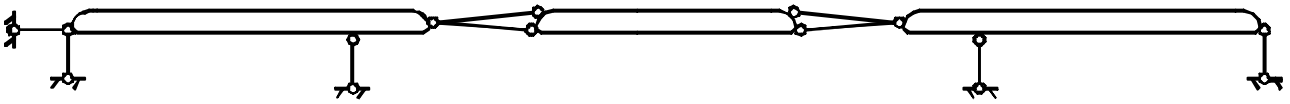
OBS.:

- Articulação entre duas chapas → 2 barras vinculares



- Articulação entre c chapas →2 (c – 1) barras vinculares

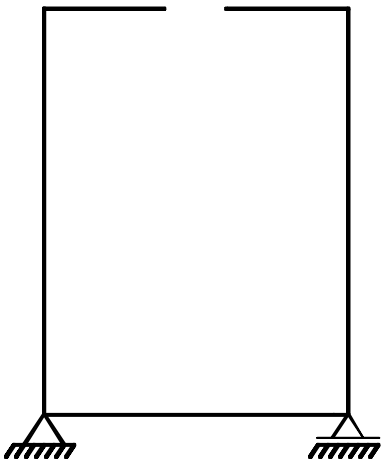
Voltando ao exemplo anterior, tem-se:

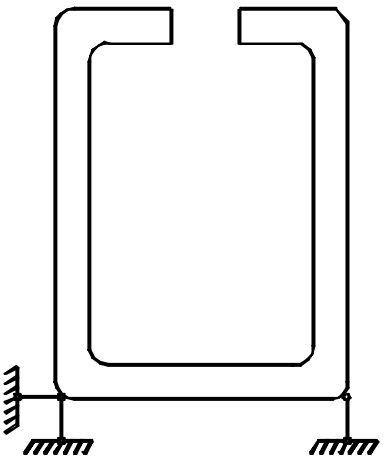


be = 9 c = 3 n = 0 bn = 3c + 2n = 3 x 3 + 2 x 0 = 9

be = bn = 9 → Estrutura determinada

Exemplo 3:

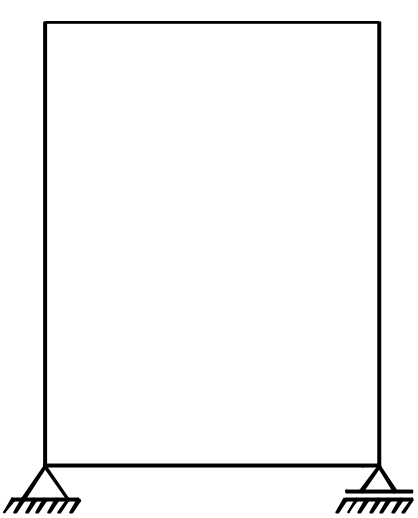


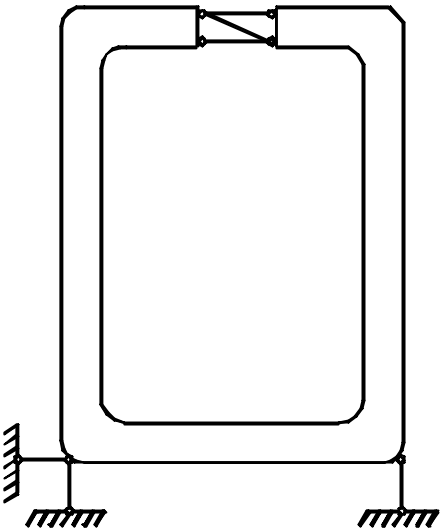


be = 3 c = 1 n = 0 bn = 3c + 2n = 3 x 1 + 2 x 0 = 3

be = bn = 3 → Estrutura determinada

Exemplo 4:





be = 6 c = 1 n = 0 bn = 3c + 2n = 3 x 1 + 2 x 0 = 3

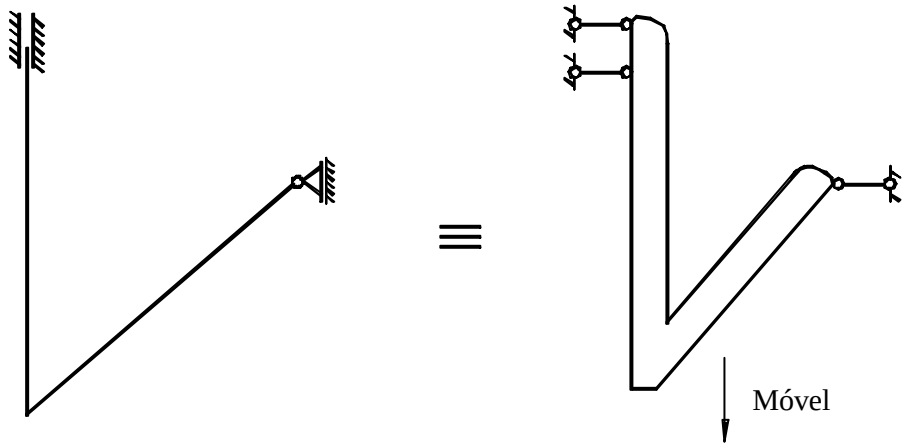
be = 6 > bn = 3 → Estrutura superdeterminada

Grau:

gh = be – bn = 6 – 3 = 3 → Estrutura 3 x superdeterminada

3.5 CASOS EXCEPCIONAIS

3.5.1 BARRAS VINCULARES PARALELAS

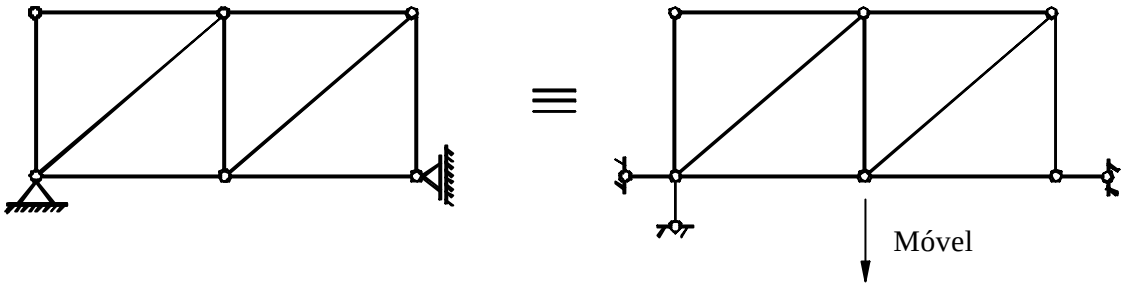


be = 3 c = 1 n = 0 bn = 3c = 3

be = bn = 3 → Estrutura determinada

⇒ **A estrutura é móvel**

3.5.2 DIREÇÃO DAS BARRAS VINCULARES PASSANDO POR UM PONTO



be = 9 + 3 = 12 c = 0 n = 6 bn = 2n = 12

be = bn = 12 → Estrutura determinada

Þ **A estrutura é móvel**

3.6 DETERMINAÇÃO ESTÁTICA DAS ESTRUTURAS

As estruturas podem ser classificadas, do ponto de vista estático, da seguinte forma:

Se **be = bn** → a estrutura é isostática.
Se **be > bn** → a estrutura é hiperestática.
Se **be < bn** → a estrutura é hipostática.

TEORIA LINEAR DA ELASTICIDADE DE 1ª ORDEM (MÉTODO CLÁSSICO)

Admite-se que os deslocamentos da estrutura são muito pequenos e, até um certo nível de solicitação, os materiais tenham comportamento elástico e sem fenômenos significativos de ruptura. Com essas hipóteses, tem-se como conseqüência, a proporcionalidade entre causa e efeito, implicando na superposição de efeitos.

4.1 HIPÓTESES GERAIS DO MÉTODO CLÁSSICO

a) Validade da Lei de Hooke

- O material é considerado elástico e linear.
- As tensões (s ou t) são diretamente proporcionais às deformações específicas.

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\tau = G\gamma$$

b) Validade das hipóteses de Bernouilli

- As seções transversais planas permanecem planas após a deformação.

- As tensões em uma determinada seção transversal podem ser substituídas por suas resultantes (esforços internos).
- As tensões são diretamente proporcionais aos esforços internos.

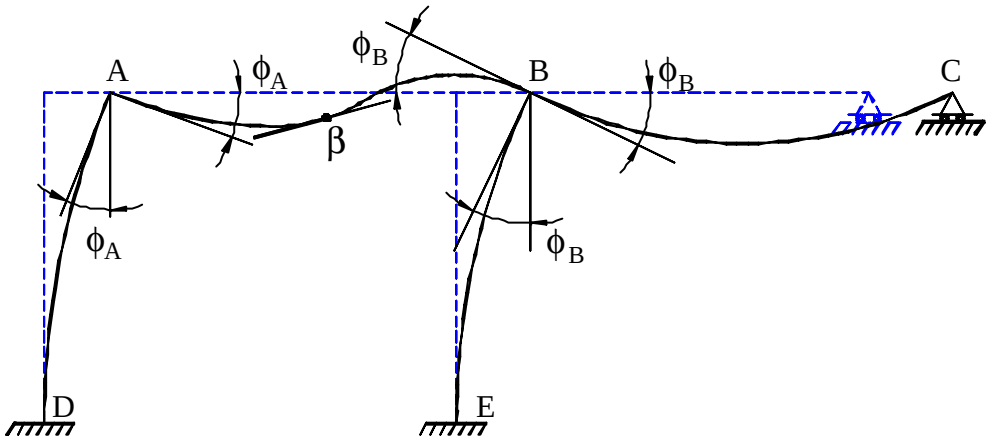
Flexão simples: $\sigma = \frac{y}{I} M$

Cisalhamento devido à flexão: $\tau = \frac{M_S}{b\, I} V$

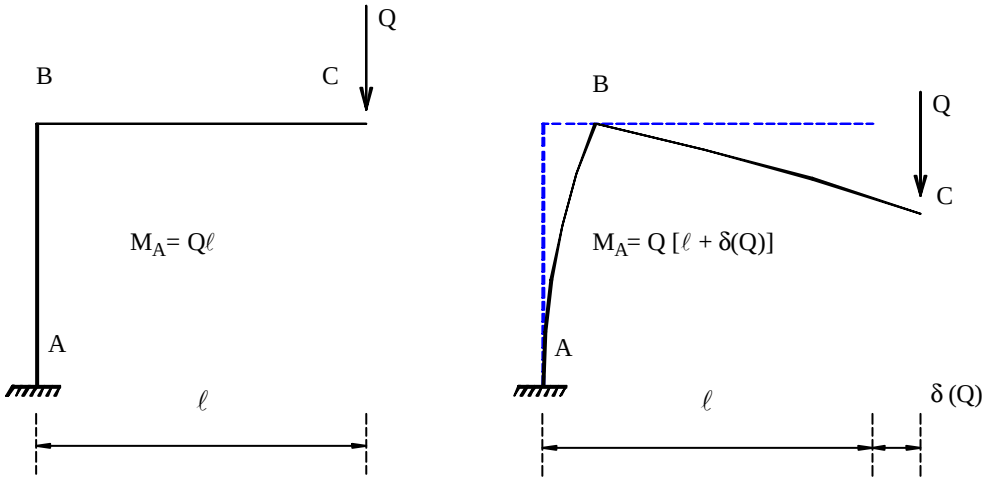
Compressão ou tração: $\sigma = \frac{1}{S} N$

c) Continuidade da estrutura com a deformação

- Em um ponto b qualquer, a tangente à sua esquerda coincide com a tangente à sua direita.
- Os nós contínuos são supostos indeformáveis; os ângulos entre as barras se mantêm na estrutura deformada



d) As condições de equilíbrio são computadas na posição indeformada



Nas estruturas usuais d**(Q)** é muito pequeno e pode ser desprezado. Portanto, $\mathbf{M_A = Q\,\ell}$

e) Os esforços internos são sempre diretamente proporcionais às ações externas

4.2 SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

A proporcionalidade entre o efeito **E** e sua causa **C** implica diretamente na validade da superposição dos efeitos, isto é, para diversas causas C_1, C_2, C_3, ... , C_n, tem-se:

$$E(C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n) = E(C_1) + E(C_2) + E(C_3) + \cdots + E(C_n)$$

CÁLCULO DE REAÇÕES

1.1 REAÇÕES EXTERNAS E INTERNAS

As reações externas, existentes nos apoios (esforços nas barras vinculares), bem como as reações internas, existentes nas ligações (vínculos), e barras simples dessa estrutura, são necessários à determinação dos esforços solicitantes nos elementos que compõem a estrutura.

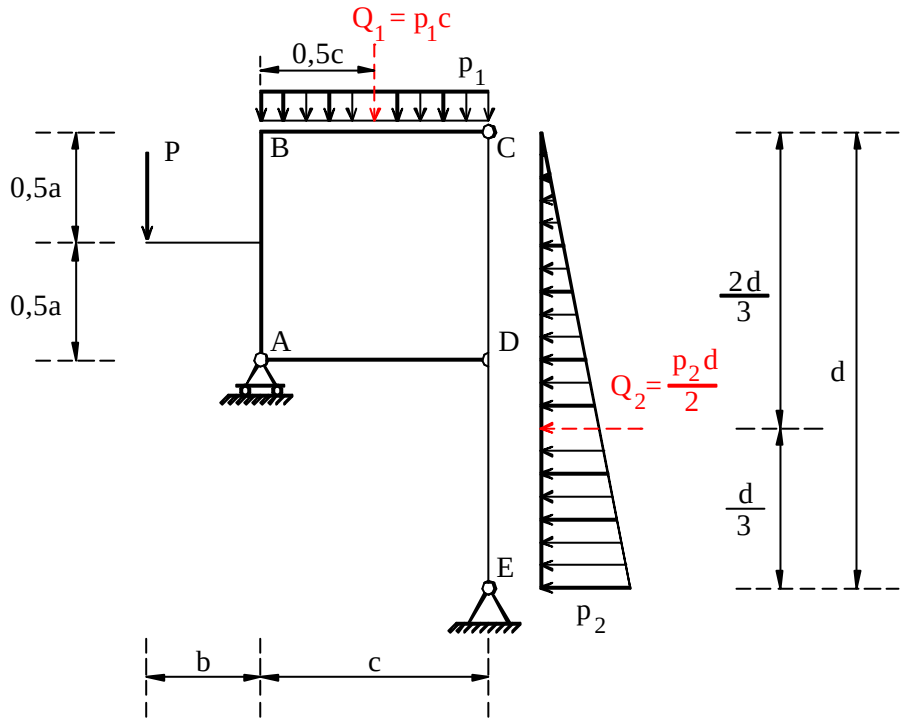
Tais reações externas e internas são calculadas utilizando-se as equações de equilíbrio da Estática:

$$\sum F_H = 0$$

$$\sum F_V = 0$$

$$\sum M = 0$$

Seja a estrutura apresentada a seguir.



Fazendo a determinação geométrica, tem-se:

be = 1 + 5 = 6 c = 2 n = 0 bn = 3c = 6

Þ **be = bn**

Logo, a estrutura é determinada ou isostática, sendo o número de incógnitas igual ao número de equações de equilíbrio. Desta forma, o número de reações a serem calculadas é igual a seis, que é o número total de barras existentes na estrutura. Dessas barras, três são externas (barras vinculares) e três são internas (barras da articulação entre as chapas ABC e BCD, mais a barra simples AD). Portanto, devem ser calculadas seis reações, sendo três externas e três internas.

1.2 RECOMENDAÇÕES PARA O CÁLCULO DAS REAÇÕES

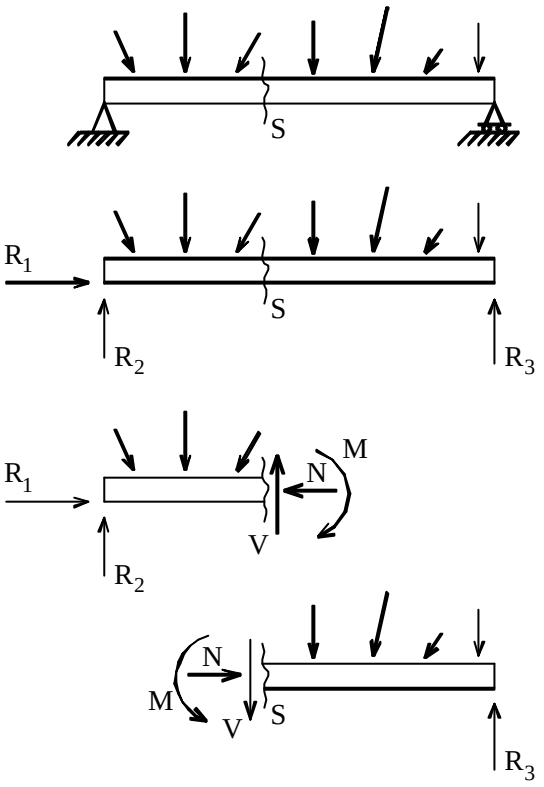
- As cargas distribuídas podem ser substituídas por suas respectivas cargas concentradas equivalentes (Q_1 e Q_2, da figura anterior), cujos valores são numericamente iguais às "áreas das superfícies de carregamento" e os pontos de aplicação estão situados nos centros de gravidades dessas superfícies.
- Sempre que possível, as reações externas devem ser calculadas em primeiro lugar.
- Somente após terem sido esgotadas as possibilidades de cálculo das reações externas, é que as chapas da estrutura devem ser separadas entre si, para o cálculo das reações internas e das possíveis reações externas ainda não calculadas.

ESFORÇOS SOLICITANTES EM ESTRUTURAS PLANAS

1.1 INTRODUÇÃO

Em uma estrutura em equilíbrio, os esforços solicitantes que atuam em uma seção qualquer, equilibram as ações externas que agem à esquerda ou à direita desta seção, conforme indicado na figura abaixo. Nas estruturas planas, com carregamento agindo no seu plano, são três os esforços solicitantes:

- Momento fletor (M)
- Esforço cortante (V)
- Esforço normal (N)

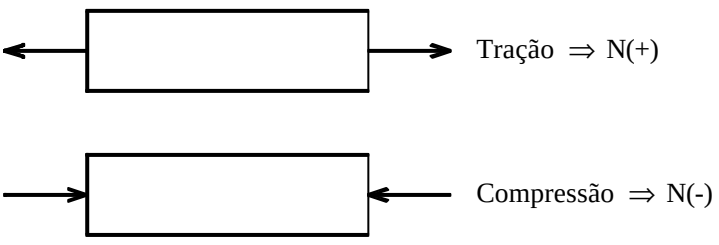


1.2 DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

1.2.1 CONVENÇÃO DE SINAIS

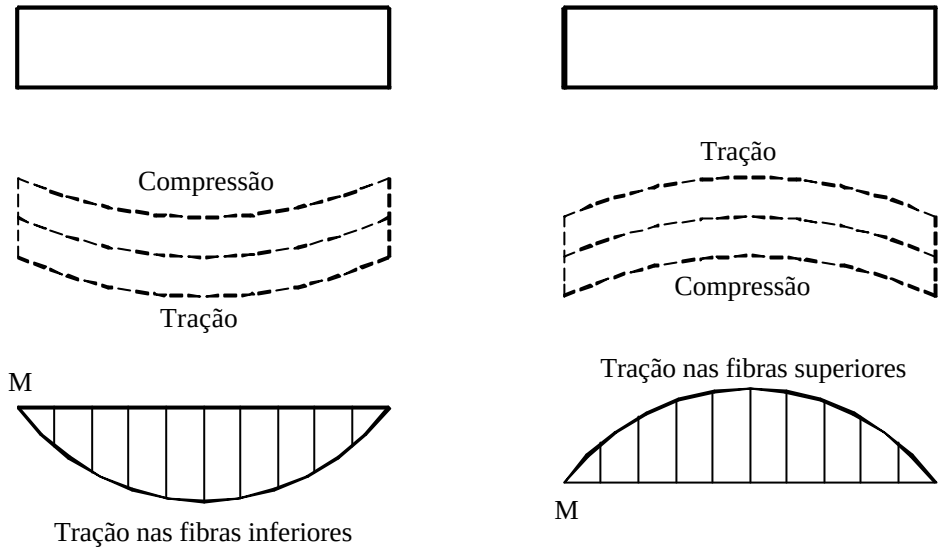
a) Esforço Normal

Considera-se positivo o esforço normal que provoca tração no trecho que atua.



b) Momento Fletor

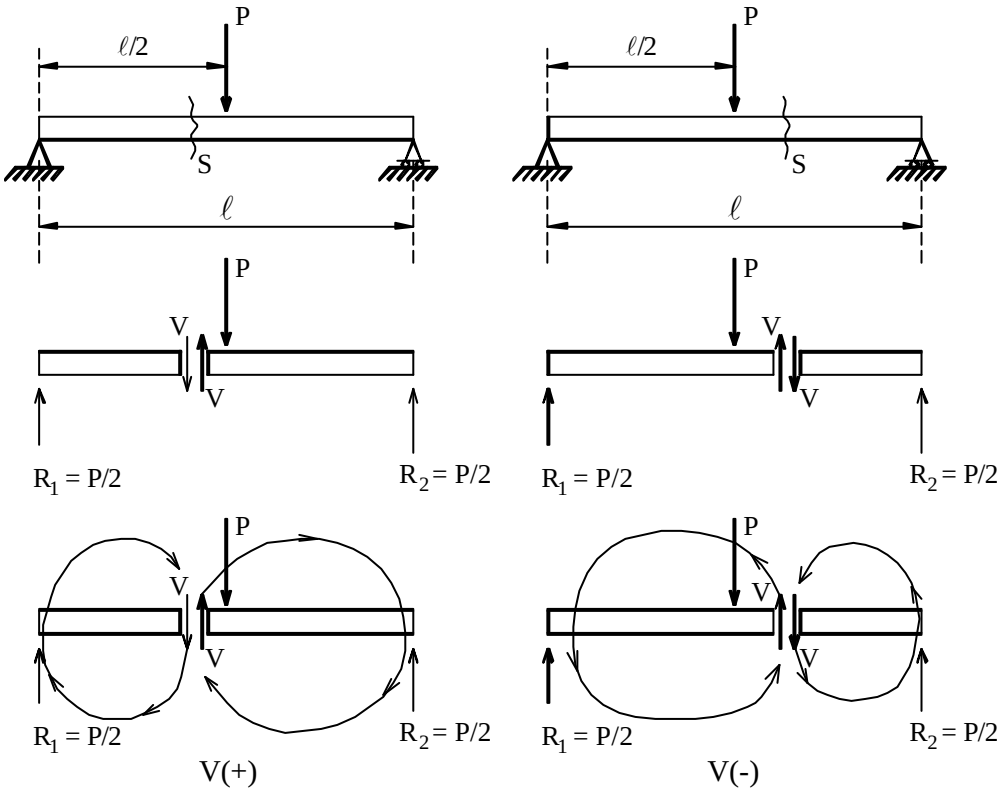
O diagrama de momentos fletores deve ser desenhado com as cotas marcadas do lado das fibras tracionadas, em relação ao eixo longitudinal de cada trecho.



Costuma-se considerar positivo o momento que traciona as fibras inferiores, e negativo o momento que traciona as fibras superiores.

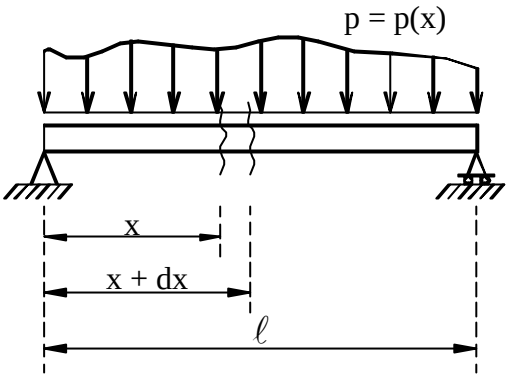
c) Esforço Cortante

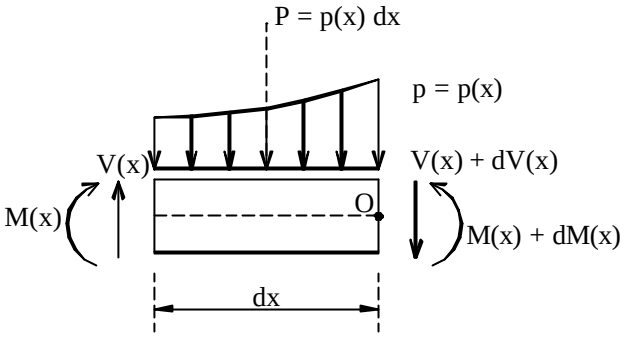
É considerado positivo o esforço cortante que provoca, junto com a resultante das ações atuantes à direita ou à esquerda de uma seção, um binário no sentido horário.



1.2.2 RELAÇÕES ENTRE CARGA, ESFORÇO CORTANTE E MOMENTO FLETOR

Sendo a carga, o esforço cortante e o momento fletor funções de **x**, abscissa ao longo da estrutura, para um elemento de comprimento infinitesimal dx, em equilíbrio sob o efeito da carga **p = p(x)**, e dos esforços solicitantes **M = M(x)** e **V = V(x)**, pode-se estabelecer:





$$\sum F_v = 0$$

$$V(x) - p(x)\,dx - [V(x) - dV(x)] = 0$$

$$-p(x)\,dx - dV(x) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad -p(x) = \frac{dV(x)}{dx} \tag{1}$$

$$\sum M_O = 0$$

$$M(x) + V(x)\,dx - p(x)\,dx\,\frac{dx}{2} - [M(x) + dM(x)] = 0$$

Desprezando-se os infinitesimais de segunda ordem:

$$V(x) - dM(x) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad V(x) = \frac{dM(x)}{dx} \tag{2}$$

Derivando a eq.(2) em relação a x, tem-se

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} \tag{3}$$

E, substituindo-se a eq.(3) na eq.(1), obtém-se:

$$-p(x) = \frac{d^2M(x)}{dx^2} \tag{4}$$

Portanto, sempre que se conhecer a função **p(x)**, a eq.(4) pode ser resolvida para **M(x)**, e, por diferenciação, o esforço cortante **V(x)** pode ser determinado.

1.2.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DOS MOMENTOS FLETORES

Integrando-se a eq.(4) duas vezes, encontra-se:

$$\frac{dM(x)}{dx} = -p(x)\,x + C_1 \tag{5}$$

$$M(x) = -p(x)\frac{x^2}{2} + C_1\,x + C_2 \tag{6}$$

As constantes de integração $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ podem ser determinadas através das condições de apoio. Vale lembrar que a eq.(4) só é válida nos trechos sem carga concentrada aplicada.

Considerando-se **p(x) = constante = p**, de acordo com as eqs (5) e (2), tem-se:

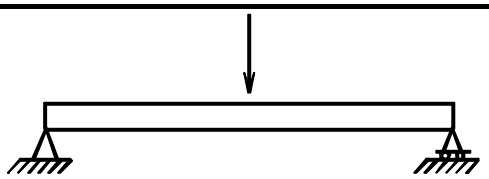
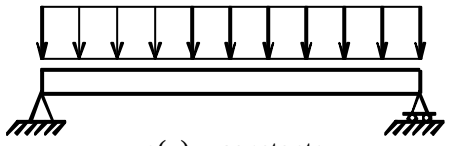
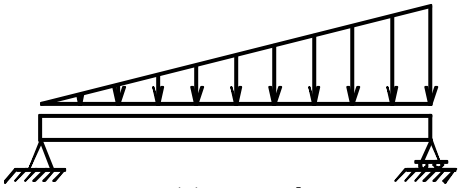
$$\frac{dM(x)}{dx} = -p\,x + C_1$$

$$V(x) = -p\,x + C_1 \qquad \rightarrow \text{Equação de uma reta} \tag{7}$$

E, a partir da eq.(6), encontra-se:

$$M(x) = -\frac{p\,x^2}{2} + C_1\,x + C_2 \quad \rightarrow \text{Equação de uma parábola do 2° grau} \tag{8}$$

A análise das equações (7) e (8) permite que se possam prever as formas que os diagramas dos esforços **M** e **V** irão assumir, conforme tabela abaixo:

Tipo de Carga	**Forma do Diagrama**	
	Esforço Cortante V(x)	**Momento Fletor M(x)**
 p(x) = 0	Constante	Linear
 p(x) = constante	Linear	Parábola de 2º grau
 p(x) = a x + b	Parábola de 2º grau	Parábola cúbica

OBSERVAÇÕES:

1) Essa análise é válida nos trechos onde a carga **p** é contínua. Havendo cargas concentradas, que representam descontinuidades de carregamento, essa análise só é válida nos trechos compreendidos entre essas cargas.

2) Pela eq.(2) observa-se que quando o esforço cortante se anula, a função momento passa por um extremo, que é de máximo, já que a derivada segunda dessa função é negativa.

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x)$$

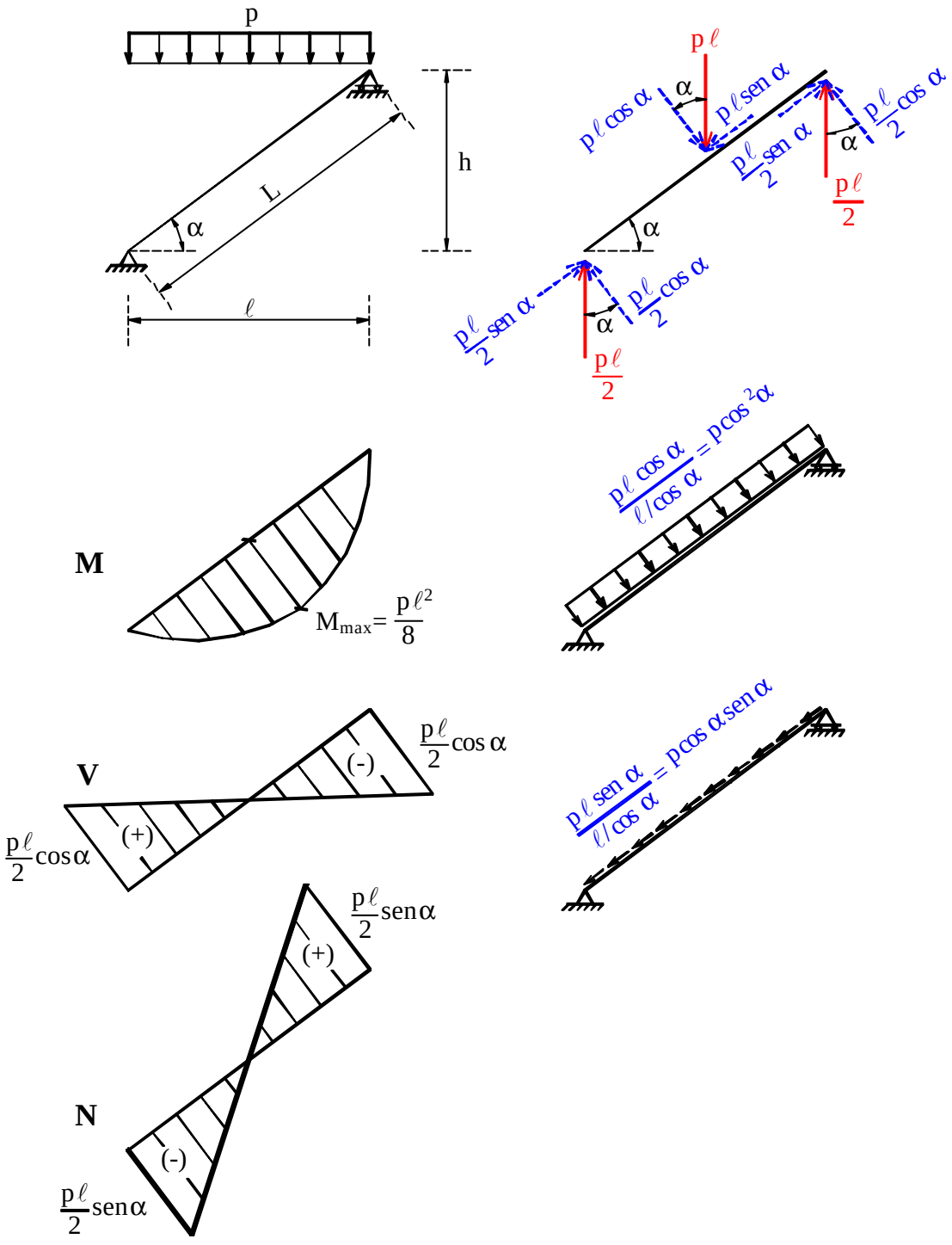
3) É válida a superposição de efeitos, e, portanto, de seus diagramas nos trechos sujeitos à ação de cargas concentradas.

4) Tudo que é válido para o esforço cortante também o é para o esforço normal.

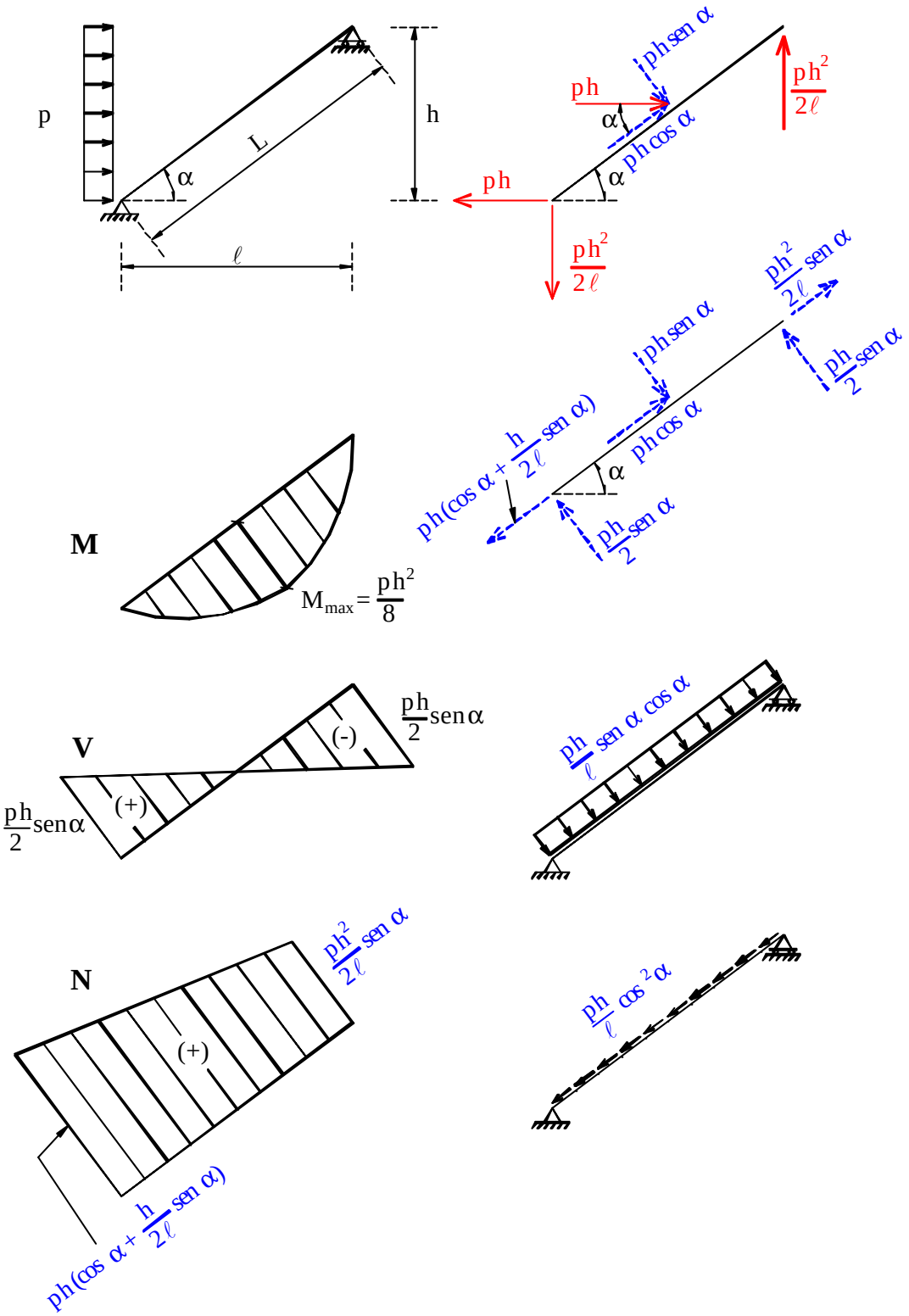
ESFORÇOS SOLICITANTES EM CHAPAS INCLINADAS

Em uma chapa (barra geral) inclinada podem atuar carregamentos em direções diversas. Também neste caso, a variação dos esforços solicitantes pode ser indicada em diagramas, utilizando como eixo das abscissas o próprio eixo da chapa, e representando segundo o eixo das ordenadas, a intensidade dos esforços, seção por seção. São apresentados a seguir, os diagramas de esforços solicitantes para os principais tipos de carregamento uniformemente distribuído que podem atuar nas estruturas.

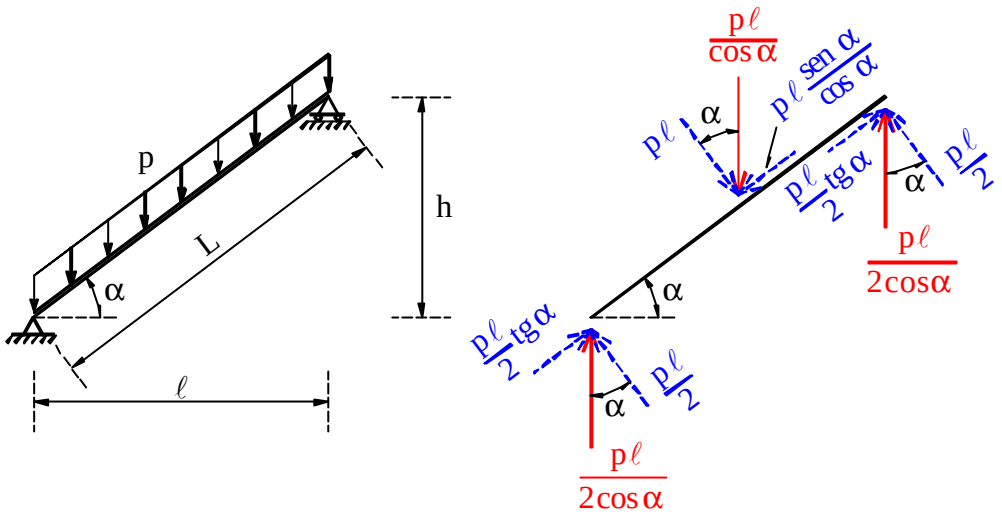
1. CARGA ACIDENTAL

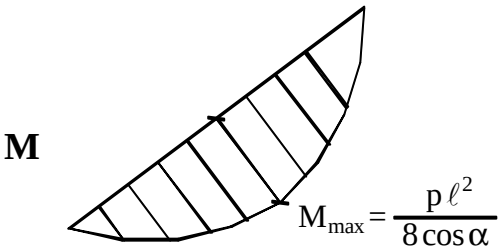


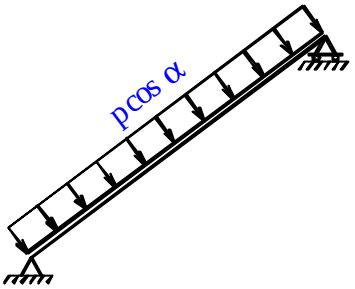
2. AÇÃO DO VENTO

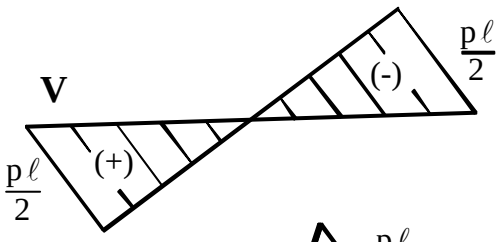


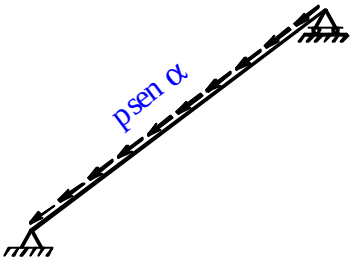
3. PESO PRÓPRIO

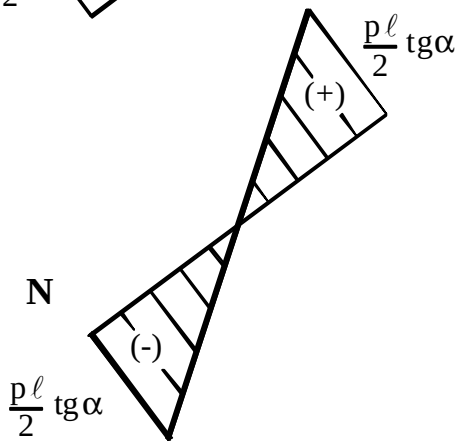








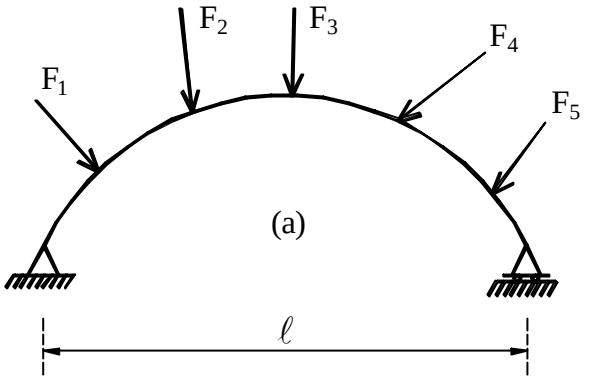




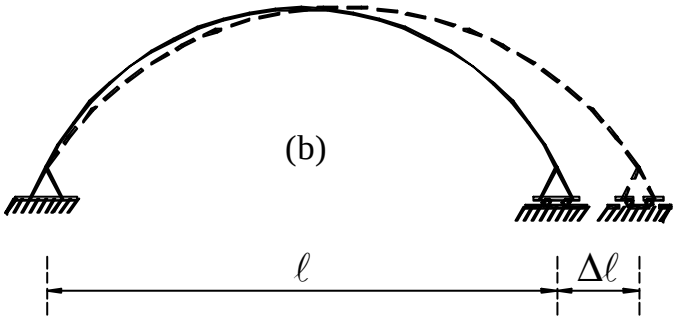
PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

1.1 INTRODUÇÃO

Seja uma estrutura linear qualquer com suas vinculações definidas.
Seja um estado de forças **(a)** agindo nessa estrutura, com forças externas em equilíbrio com os esforços internos.



Seja um estado de deslocamentos **(b)** sobre a mesma estrutura, com deslocamentos e deformações virtuais (isto é, hipotéticos e infinitesimais), geometricamente compatíveis com as vinculações, mas sem qualquer relação obrigatória com o estado de forças **(a)**.

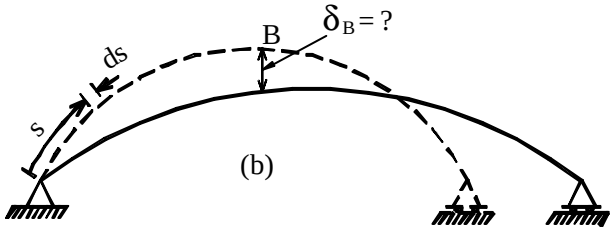


Pelo PTV:
*O trabalho virtual externo, das forças externas de **(a)**, com os deslocamentos de **(b)**, é igual ao trabalho virtual interno realizado pelos esforços internos de **(a)** com as deformações de **(b)**, ou seja:*

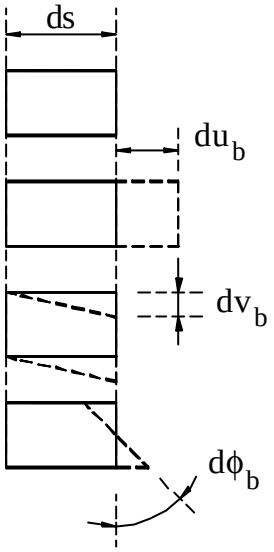
$$\sum T_{EXT} = \sum T_{INT}$$

1.2 CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS

Seja um estado de deslocamento **(b)** real, mas com deslocamentos pequenos o suficiente para que em estados de forças que venham a ser criados sobre a estrutura, possam ser considerados na posição inicial.



As deformações que surgem na seção transversal de um elemento **ds** da estrutura são:

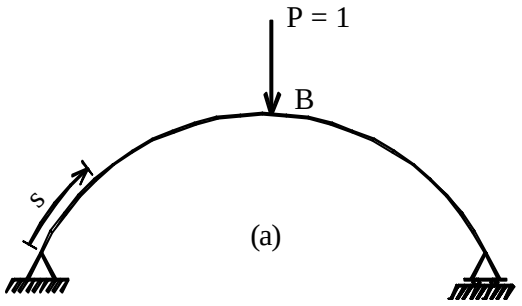


du$_b$ = deformação por esforço normal

dv$_b$ = deformação por esforço cortante

df $_b$ = deformação por momento fletor (rotação)

Para se calcular o deslocamento d_B cria-se um estado de forças (a), conveniente, com uma força externa unitária na direção de d_B e com um sentido assumido para ele.



Em **s** os esforços solicitantes causados pela força unitária são $\mathbf{N_a}$, $\mathbf{V_a}$ e $\mathbf{M_a}$.

Impondo-se, então, o estado de deslocamento **(b)** ao estado de forças **(a)**, tem-se, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais ($\sum T_{EXT} = \sum T_{INT}$)

$$\mathbf{1} \times d_B = \int_{est} \mathbf{N_a}\, \mathbf{du_b} + \int_{est} \mathbf{V_a}\, \mathbf{dv_b} + \int_{est} \mathbf{M_a}\, \mathbf{df_b}$$

1.3 CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM TRELIÇAS PLANAS

1.3.1 INTRODUÇÃO

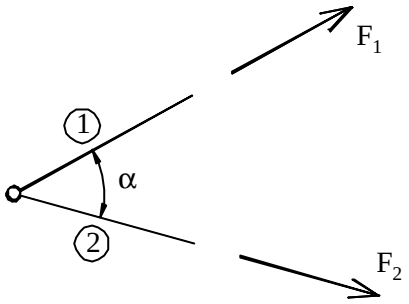
Para a resolução de uma treliça deve-se:

- Calcular as reações de apoio
- Calcular os esforços normais nas barras, utilizando-se:
  - Equilíbrio de nó
  - Processo de Ritter
  - Processo gráfico Carmona

Em algumas treliças não é possível o cálculo das reações de apoio sem que antes seja aplicado o equilíbrio de nó ou o processo de Ritter.

Com o intuito de facilitar a determinação dos esforços normais nas barras de uma treliça, apresentam-se, a seguir, características da geometria e do carregamento que permitem a obtenção direta destes esforços. Sendo $\mathbf{P_i}$ as cargas externas aplicadas nos nós e $\mathbf{F_i}$ os esforços normais nas barras, têm-se:

1º. Nó Característico: Nó formado por duas barras, sem carregamento externo e com a assumindo qualquer valor:

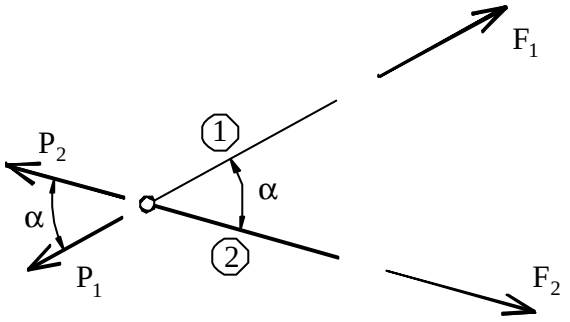


$F_1 = 0$

$F_2 = 0$

Para a = p Þ **$F_1 = F_2$**

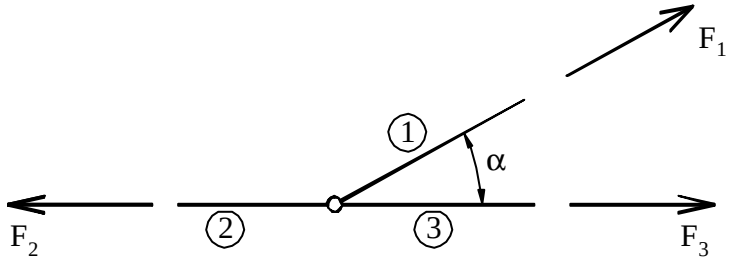
2º. Nó Característico: Nó formado por duas barras, com carregamento externo na direção de uma ou das duas barras e com a assumindo qualquer valor:



$F_1 = P_1$

$F_2 = P_2$

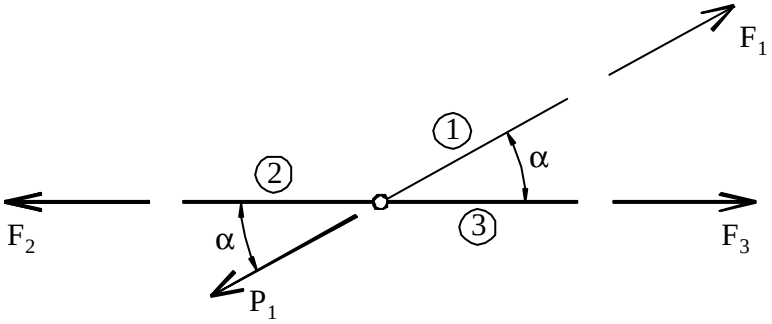
3º. Nó Característico: Nó formado por três barras, sendo duas na mesma direção, sem carregamento externo e com a assumindo qualquer valor:



$F_1 = 0$

$F_2 = F_3$

4º. Nó Característico: Nó formado por três barras, sendo duas na mesma direção, com carregamento externo na direção da barra (1) e com a assumindo qualquer valor:



$F_1 = P_1$

$F_2 = F_3$

1.3.2 CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS

Treliça plana é uma estrutura formada por barras articuladas em suas extremidades, com cargas externas agindo no plano da estrutura e aplicadas em seus nós.

- Esforços solicitantes: somente **N** (M e V = 0)
- Deformações: somente **du** (dv e $d\phi$ = 0)

Portanto, pelo PTV:

$$\mathbf{T_{EXT}} = \int_{\mathbf{est}} \mathbf{N_a}\ \mathbf{du_b}$$

onde:

$\mathbf{N_a}$ = esforço axial causado pela força unitária (estado de forças)

$\mathbf{du_b}$ = deformação axial causada pelo agente externo (estado de deslocamentos)

Sendo a força axial $\mathbf{N_a}$ constante por barra, tem-se:

$$T_{EXT} = \sum_i N_{a_i} \int_0^{\ell_i} du_{b_i}$$

$$T_{EXT} = \sum_i N_{a_i} \Delta\ell_{b_i}$$

sendo que $\Delta\ell_{\mathbf{b_i}}$ pode ser causado por qualquer agente externo (carga, variação de temperatura, etc).

Para a situação muito freqüente, de se ter o estado de deslocamento **(b)** provocado por cargas, $\Delta\ell_{\mathbf{b_i}}$ pode ser calculado pela Lei de Hooke, e em função do esforço axial:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{N_{b_i}}{S_i} = E_i \frac{\Delta\ell_{b_i}}{\ell_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell_{b_i} = \frac{N_{b_i}\ell_i}{E_i S_i}$$

onde:

N_{b_i} = esforço axial atuante em cada barra, e causado pelo agente externo

ℓ_i = comprimento da barra

E_i = módulo de deformação longitudinal

S_i = área da seção transversal da cada barra

Tem-se, então, pelo PTV:

$$\mathbf{T_{EXT}} = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{N_{a_i} N_{b_i}} \frac{\ell_\mathbf{i}}{\mathbf{E_i S_i}}$$

No caso do estado de deslocamento **(b)** ser provocado por uma variação uniforme de temperatura $\Delta\mathbf{T}$, o valor de $\Delta\ell_{\mathbf{b_i}}$ pode ser obtido a partir de:

$$\Delta\ell_{b_i} = \alpha\,\Delta T\,\ell_i$$

E, pelo PTV, tem-se então:

$$\mathbf{T_{EXT}} = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{N_{a_i}}\,a_i\,\Delta\mathbf{T_i}\,\ell_i$$

1.4 CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM ESTRUTURAS FLETIDAS

Estruturas Fletidas Usuais:

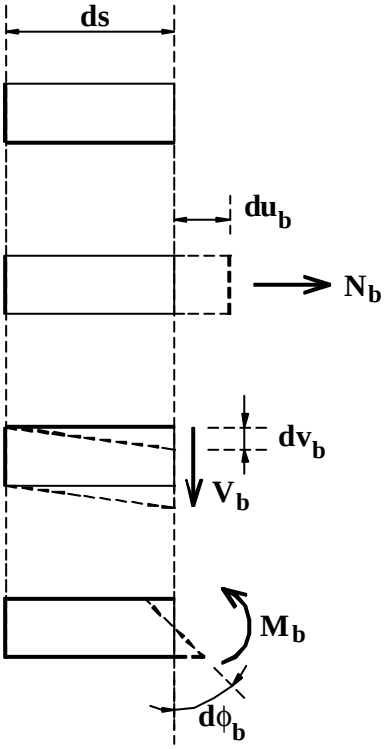
- Carregamento contido no plano da estrutura
- Esforços solicitantes: N, V e M
- Deformações: dub, dvb, ? b

Exemplos: Vigas, pórticos, arcos, etc

Pelo PTV, tem-se:

$$\mathbf{T_{ext}} = \int_{\mathbf{est}} \mathbf{N_a}\,\mathbf{du_b} + \int_{\mathbf{est}} \mathbf{V_a}\,\mathbf{dv_b} + \int_{\mathbf{est}} \mathbf{M_a}\,\mathbf{d}f_b$$

Pela Resistência dos Materiais sabe-se:



$$du_b = \frac{N_b}{ES}\,ds$$

$$dv_b = \frac{cV_b}{GS}\,ds$$

$$d\phi_b = \frac{M_b}{EI}\,ds$$

Portanto, pelo PTV, obtém-se:

$$\mathbf{T_{ext}} = \int_{\mathbf{est}} \frac{\mathbf{N_a N_b}}{\mathbf{ES}}\,\mathbf{ds} + \int_{\mathbf{est}} \frac{\mathbf{c\,V_a V_b}}{\mathbf{GS}}\,\mathbf{ds} + \int_{\mathbf{est}} \frac{\mathbf{M_a M_b}}{\mathbf{EI}}\,\mathbf{ds}$$

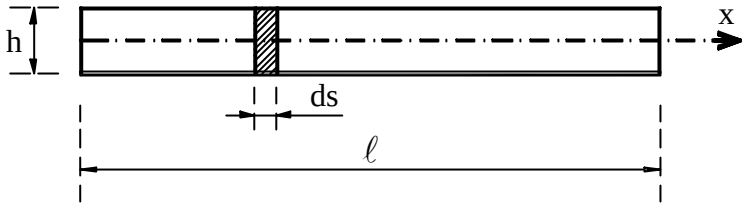
TABELA 1: $I = \int_0^{\ell} f(s)g(s)ds$

f(s) \ g(s)		I	II	III	IV	V
		α — α	α —	— β	α — β	quad. — γ
1	a — a	$\ell a\alpha$	$\ell\frac{1}{2}a\alpha$	$\ell\frac{1}{2}a\beta$	$\ell\frac{1}{2}a(\alpha+\beta)$	$\ell\frac{2}{3}a\gamma$
2	a —	$\ell\frac{1}{2}a\alpha$	$\ell\frac{1}{3}a\alpha$	$\ell\frac{1}{6}a\beta$	$\ell\frac{1}{6}a(2\alpha+\beta)$	$\ell\frac{1}{3}a\gamma$
3	— b	$\ell\frac{1}{2}b\alpha$	$\ell\frac{1}{6}b\alpha$	$\ell\frac{1}{3}b\beta$	$\ell\frac{1}{6}b(\alpha+2\beta)$	$\ell\frac{1}{3}b\gamma$
4	a — b	$\ell\frac{1}{2}(a+b)\alpha$	$\ell\frac{1}{6}(2a+b)\alpha$	$\ell\frac{1}{6}(a+2b)\beta$	$\ell\frac{1}{6}[a(2\alpha+\beta)+b(\alpha+2\beta)]$	$\ell\frac{1}{3}(a+b)\gamma$
5	ℓ/2, c	$\ell\frac{1}{2}c\alpha$	$\ell\frac{1}{4}c\alpha$	$\ell\frac{1}{4}c\beta$	$\ell\frac{1}{4}c(\alpha+\beta)$	$\ell\frac{5}{12}c\gamma$
6	ξℓ, c	$\ell\frac{1}{2}c\alpha$	$\ell\frac{2-\xi}{6}c\alpha$	$\ell\frac{1+\xi}{6}c\beta$	$\ell\frac{1}{6}c[(2-\xi)\alpha+(1+\xi)\beta]$	$\ell\frac{1+\xi-\xi^2}{3}c\gamma$
7	ℓ/2, quad., c	$\ell\frac{2}{3}c\alpha$	$\ell\frac{1}{3}c\alpha$	$\ell\frac{1}{3}c\beta$	$\ell\frac{1}{3}c(\alpha+\beta)$	$\ell\frac{8}{15}c\gamma$
8	ℓ/3, cúb., c	$\ell\frac{3}{8}c\alpha$	$\ell\frac{1}{5}c\alpha$	$\ell\frac{7}{40}c\beta$	$\ell\frac{1}{40}c(8\alpha+7\beta)$	$\ell\frac{3}{10}c\gamma$
9	ℓ/3, c	$\ell\frac{3}{8}c\alpha$	$\ell\frac{7}{40}c\alpha$	$\ell\frac{1}{5}c\beta$	$\ell\frac{1}{40}c(7\alpha+8\beta)$	$\ell\frac{3}{10}c\gamma$
10	s, g(s)	$\ell\alpha^2$	$\ell\frac{1}{3}\alpha^2$	$\ell\frac{1}{3}\beta^2$	$\ell\frac{1}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$	$\ell\frac{8}{15}\gamma^2$

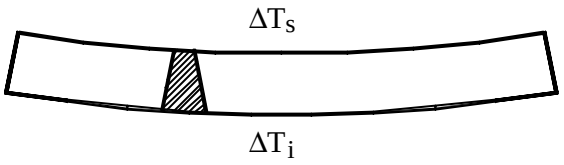
1.5 CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM ESTRUTURAS FLETIDAS CAUSADOS POR VARIAÇÃO DA TEMPERATURA

Nas estruturas isostáticas, a variação de temperatura não provoca esforços solicitantes, já que a estrutura pode se expandir sem restrição.

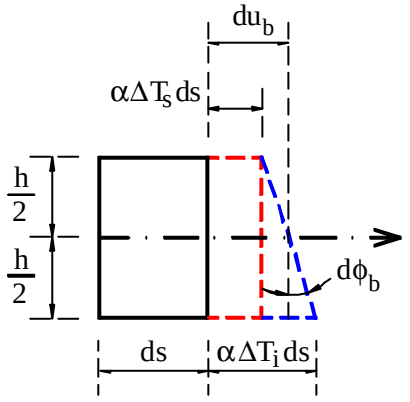
Seja a barra reta, representada abaixo, submetida a uma variação de temperatura $\Delta\mathbf{T_S}$, na sua face superior, e $\Delta\mathbf{T_i}$, na face inferior, com $\Delta\mathbf{T_i} > \Delta\mathbf{T_S}$, e variação linear ao longo da altura **h** da seção transversal. Logo, no eixo **x**, que passa pelos centróides das seções transversais, tem-se a variação de temperatura $\Delta\mathbf{T}$.



Considerando a barra livre e sem vínculos externos, ela se expande longitudinalmente e flete com curvatura voltada para cima. A deformação transversal não é relevante.



Sendo a o coeficiente de dilatação térmica, a deformação de um trecho de comprimento infinitesimal **ds** é ilustrada a seguir.



Esta deformação se deve ao deslocamento na direção do eixo longitudinal $\mathbf{du_b}$, e a rotação das seções transversais $\mathbf{df_b}$, que valem:

$$du_b = \alpha\,\Delta T_s\,ds + \frac{(\alpha\,\Delta T_i\,ds - \alpha\,\Delta T_s\,ds)}{2}$$

$$\therefore\quad \mathbf{du_b} = \frac{a}{2}(\Delta\mathbf{T_i} + \Delta\mathbf{T_s})\mathbf{ds}$$

ou,

$$du_b = \alpha\,\Delta T\,ds$$

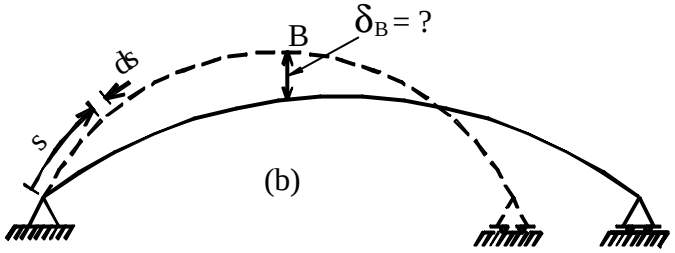
$$\text{com, } \Delta T = \frac{(\Delta T_i + \Delta T_s)}{2}$$

E, para a flexão, tem-se:

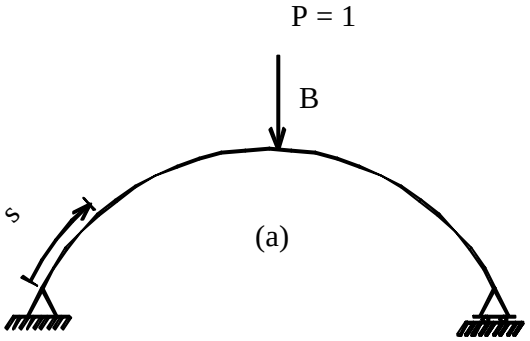
$$d\phi_b = \frac{\left(\alpha\,\Delta T_i\,ds - \alpha\,\Delta T_s\,ds\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$\therefore\ \mathbf{d}f_{\mathbf{b}} = \frac{a}{\mathbf{h}}\left(D\mathbf{T_i} - D\mathbf{T_s}\right)\mathbf{ds}$$

Assim, seja um estado de deslocamento (b) real, causado por variação de temperatura.



Seja um estado de força conveniente (a), para o cálculo de d_B



Impondo-se o estado de deslocamento **(b)** ao estado de forças **(a)**, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais ($\sum T_{EXT} = \sum T_{INT}$), tem-se:

$$\delta_B = \int_{est} N_a\,du_b + \int_{est} V_a\,dv_b + \int_{est} M_a\,d\phi_b$$

$$\delta_B = \int_{est} N_a\left[\frac{\alpha}{2}\left(\Delta T_i + \Delta T_s\right)ds\right] + \int_{est} V_a\cdot 0 + \int_{est} M_a\left[\frac{\alpha}{h}\left(\Delta T_i - \Delta T_s\right)ds\right]$$

$$\therefore\quad d_{\mathbf{B}} = \frac{a}{\mathbf{2}}\left(D\mathbf{T_i} + D\mathbf{T_s}\right)\int_{\mathbf{est}}\mathbf{N_a ds} + \frac{a}{\mathbf{h}}\left(D\mathbf{T_i} - D\mathbf{T_s}\right)\int_{\mathbf{est}}\mathbf{M_a ds}$$

Sendo $\int \mathbf{N_a ds}$ e $\int \mathbf{M_a ds}$ as áreas dos diagramas de esforços normais e de momentos fletores, respectivamente, devidos ao estado de força conveniente.

1.6 CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM PÓRTICOS COM BARRAS SIMPLES (ATIRANTADOS)

Para pórticos com barras simples as parcelas dos deslocamentos correspondentes aos esforços normais e cortantes só serão desprezadas na parte da estrutura submetida à flexão. Na parte submetida a esforços normais não é prudente desprezar a contribuição deste esforço. Logo, pelo PTV, tem-se:

$$T_{EXT} = \int_{semflexão} N_a \, du_b + \int_{comflexão} M_a \, d\theta_b$$

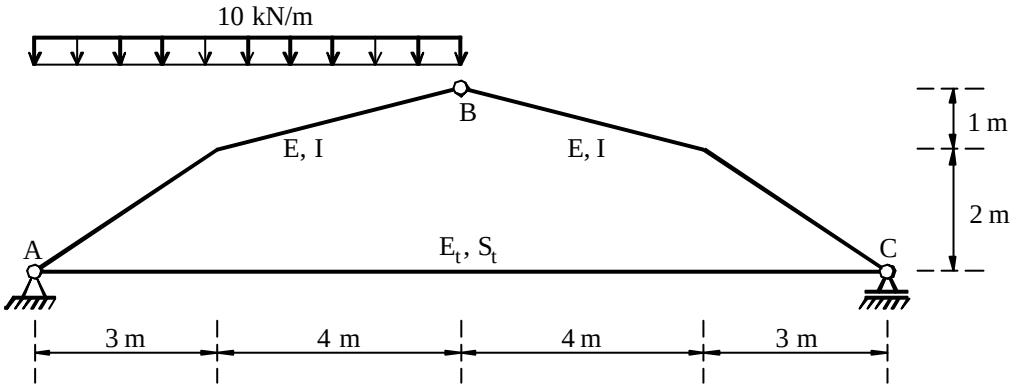
Assim, para os pórticos com barras simples submetidos a forças externas, de acordo com o exposto anteriormente, tem-se:

$$T_{ext} = \int_{comflexão} \frac{M_a M_b}{EI} ds + \int_{semflexão} \frac{N_a N_b}{ES} ds$$

Exemplo: Calcular o deslocamento vertical da articulação **B** do pórtico apresentado a seguir.

Dados: $E = 2000$ kN/cm^2 $E_t = 21000$ kN/cm^2

$I = 50000$cm^4 $S_t = 3$ cm^2



a) Determinação geométrica

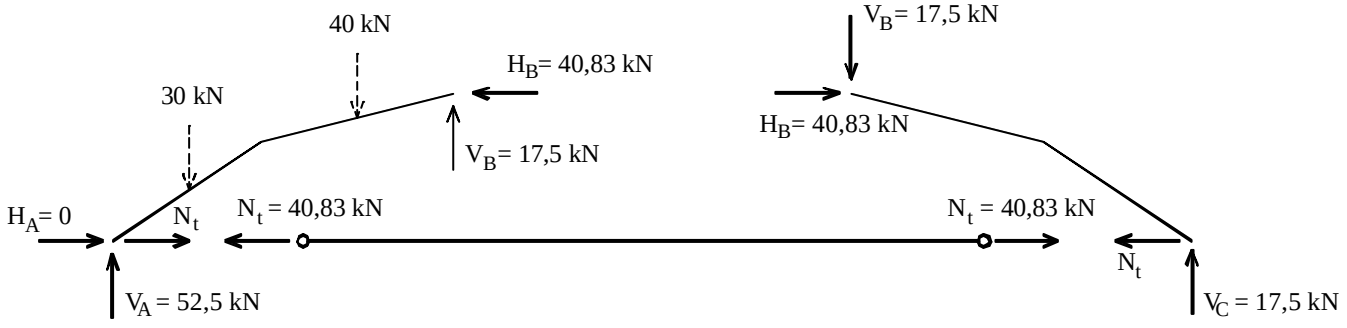
be = 2 + 2 + 1 +1 = 6

c = 2 be = bn ? Estrutura isostática

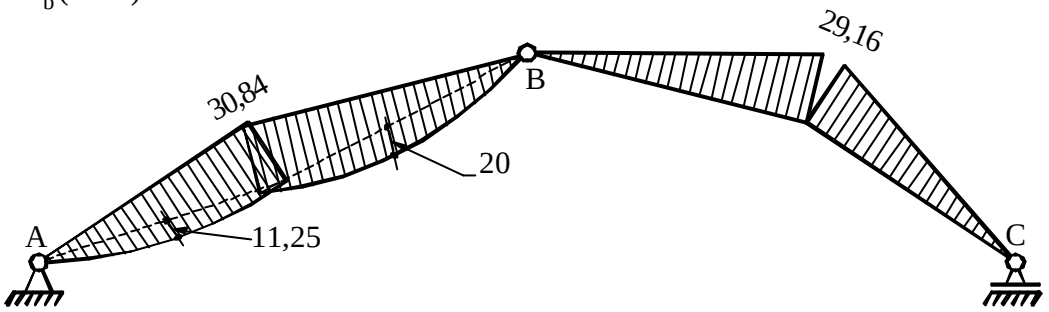
bn = 3c + 2n = 3 × 2 = 6

b) Estado de deslocamento **(b)**

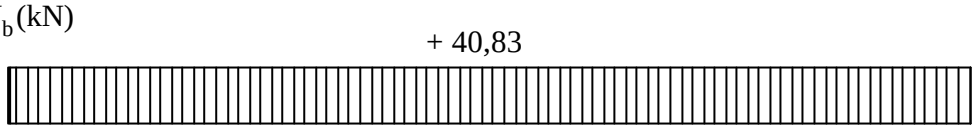
Reações:



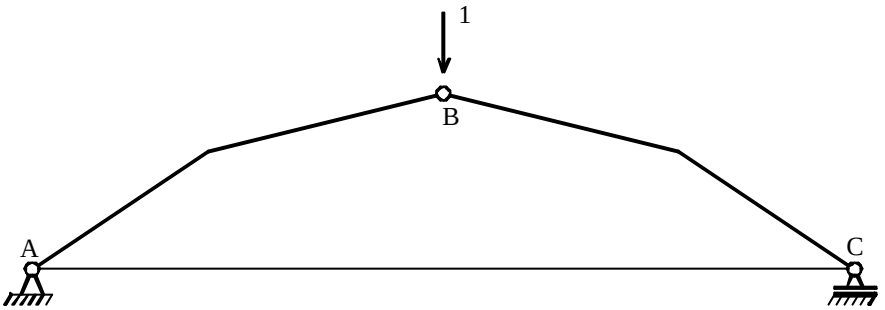
M_b (kNm)



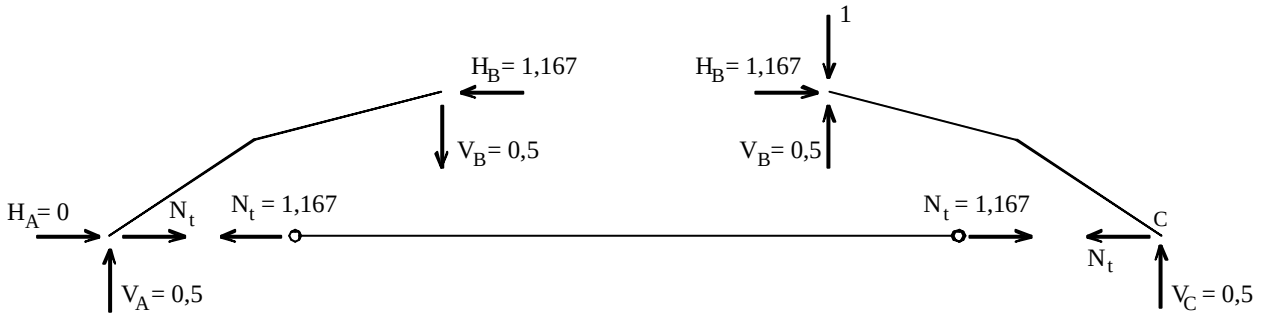
N_b (kN)



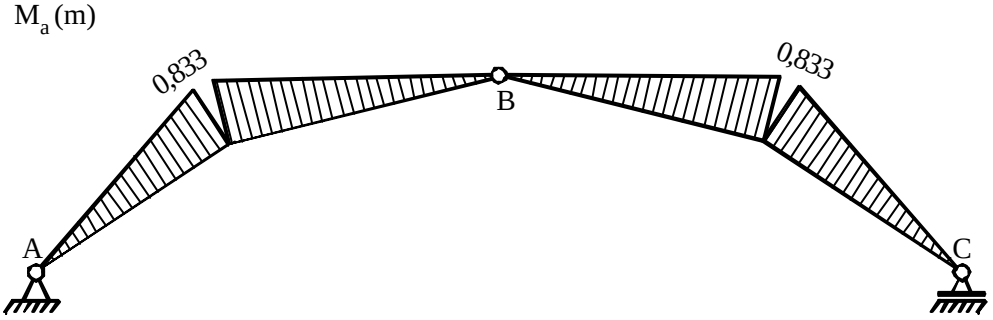
c) Estado de força conveniente **(a)**



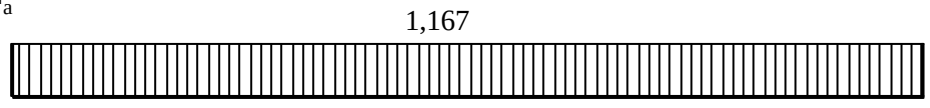
Reações:



M_a (m)



N_a



d) Cálculo de d $\mathbf{V_B}$

$$\delta V_B = \frac{1}{EI} \sum_i \int_0^{\ell_i} M_a M_b \, ds + \frac{N_a N_b \, \ell_t}{E_t S_t}$$

Parcela da flexão:

$$EI\,\delta V_B^{'} = \left[3{,}606 \cdot \frac{1}{3} \cdot 30{,}84 \cdot (-0{,}833) - 3{,}606 \cdot \frac{1}{3} \cdot 11{,}25 \cdot (-0{,}833)\right] +$$

$$+ \left[4{,}123 \cdot \frac{1}{3} \cdot 30{,}84 \cdot (-0{,}833) + 4{,}123 \cdot \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot (-0{,}833)\right]$$

$$+ \left[4{,}123 \cdot \frac{1}{3} \cdot 29{,}16 \cdot 0{,}833\right] + \left[3{,}606 \cdot \frac{1}{3} \cdot 29{,}16 \cdot 0{,}833\right]$$

$$\delta V_B^{'} = \frac{(-37{,}766)}{20 \cdot 10^7 \cdot 5{,}0 \cdot 10^4} = -0{,}00378 \text{ m} = -0{,}378 \text{ cm}$$

Parcela do esforço normal:

$$\delta V_B^{''} = \frac{1{,}167 \cdot 40{,}83 \cdot 14}{2{,}1 \cdot 10^8 \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-4}} = 0{,}01059 \text{ m} = 1{,}059 \text{ cm}$$

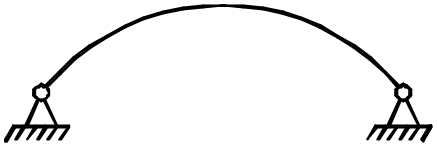
Deslocamento vertical da articulação **B**:

$$\delta V_B = \delta V_B^{'} + \delta V_B^{''} = -0{,}378 + 1{,}059 = 0{,}681 \text{cm}$$

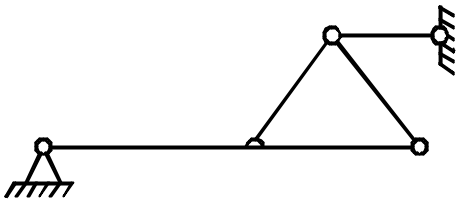
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO E ESTRUTURAS
ENG 114 – HIPERESTÁTICA - T01

Fazer a determinação geométrica das estruturas apresentadas a seguir.

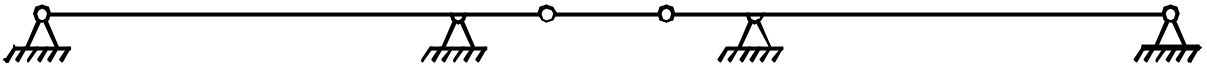
1.



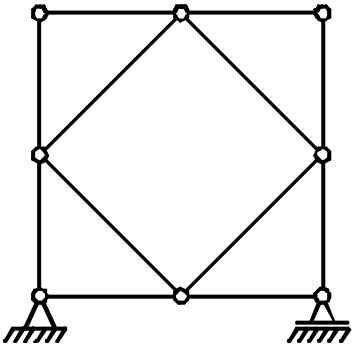
2.



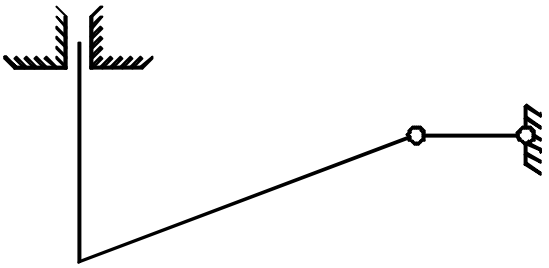
3.



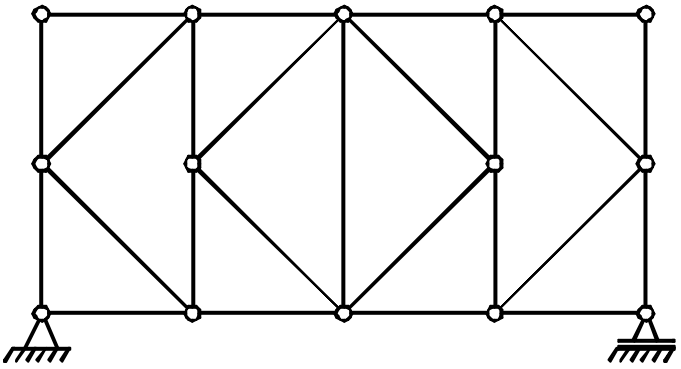
4.



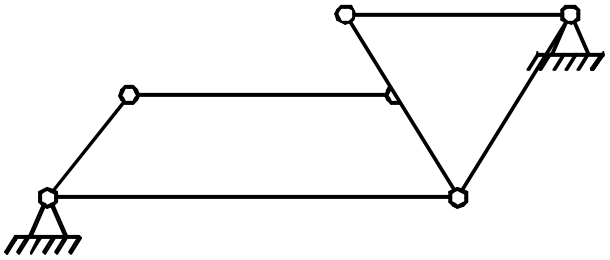
5.



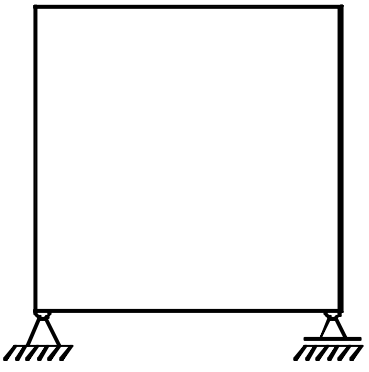
6.



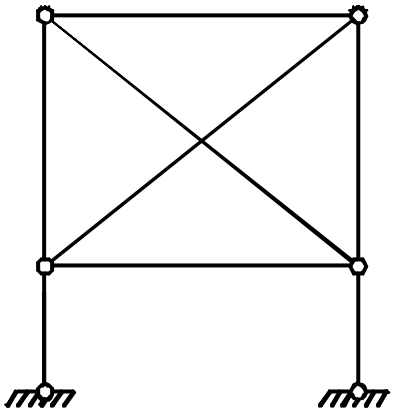
7.



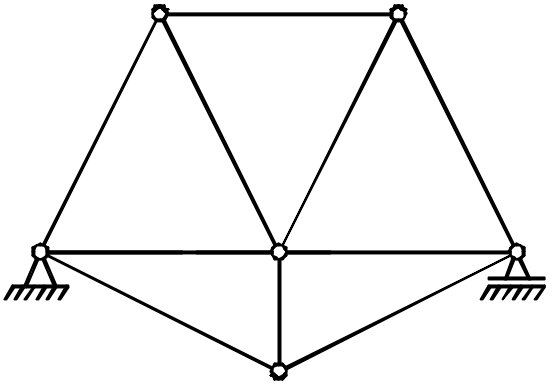
8.



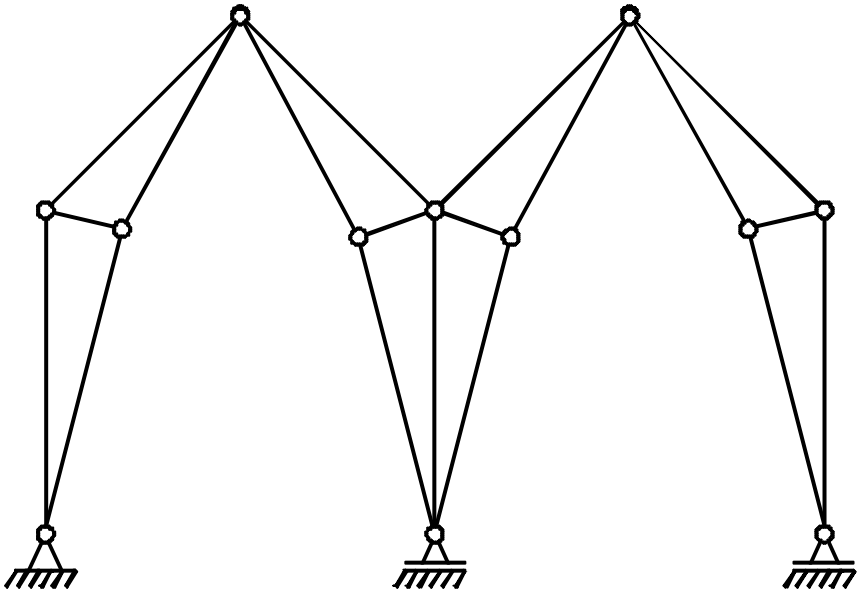
9.



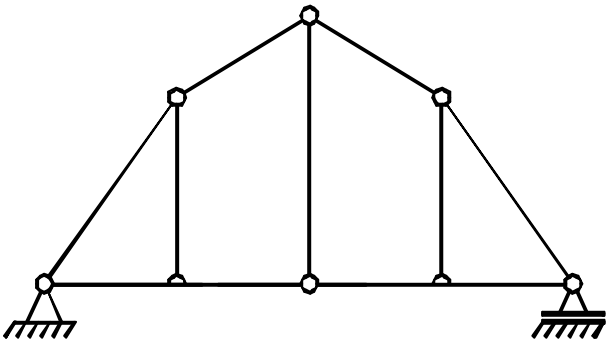
10.



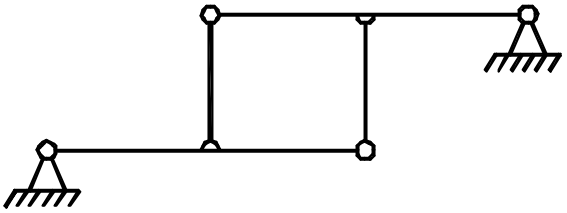
11.



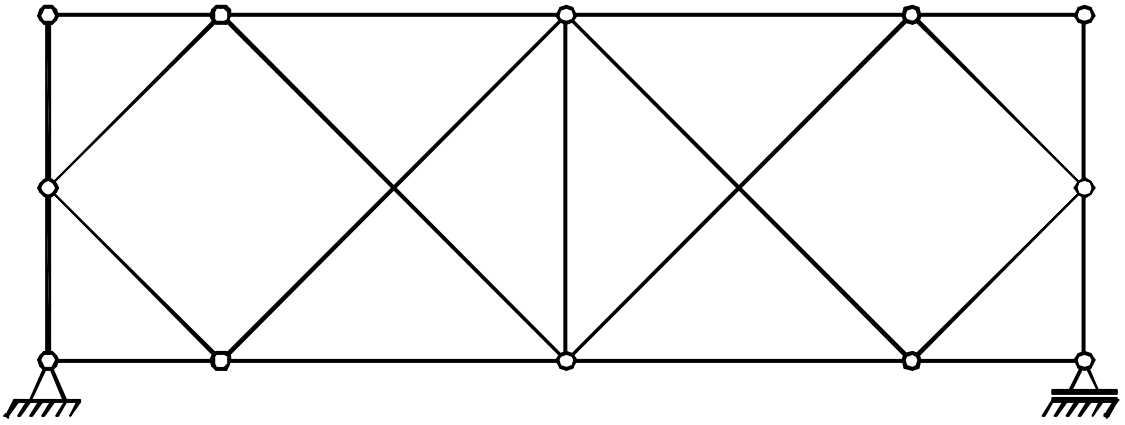
12.



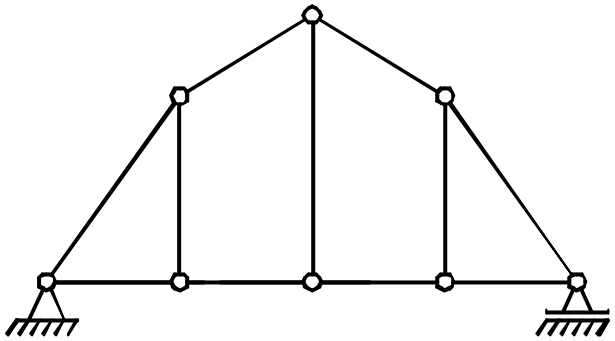
13.



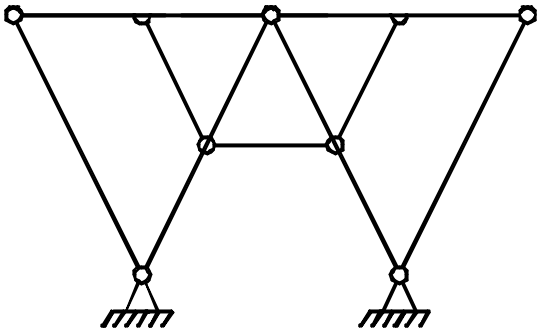
14.



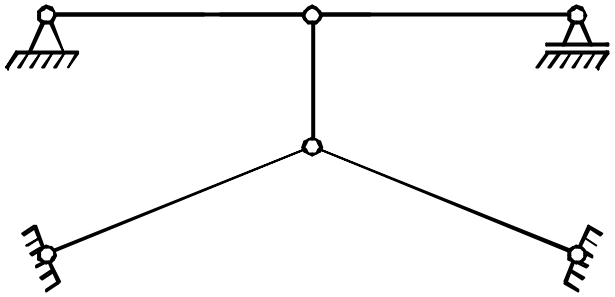
15.



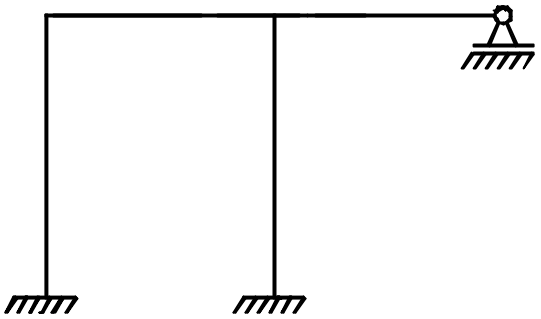
16.



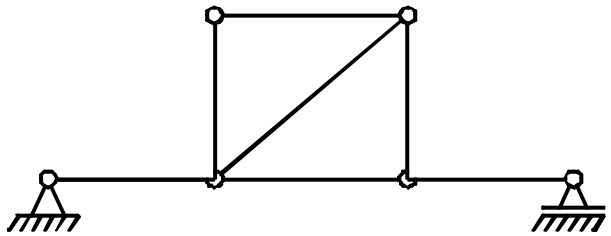
17.



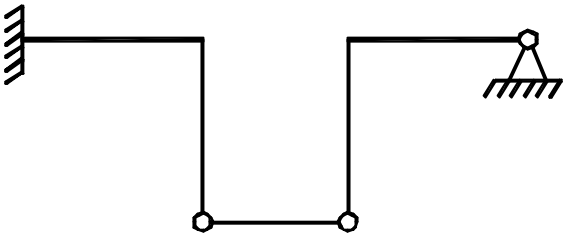
18.



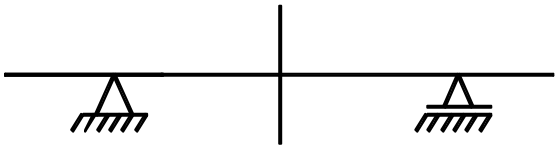
19.



20.



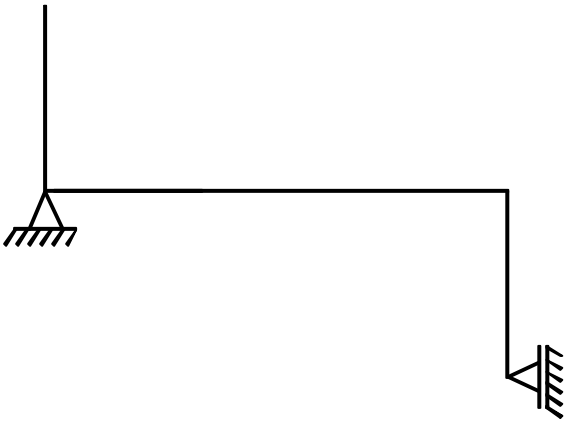
21.



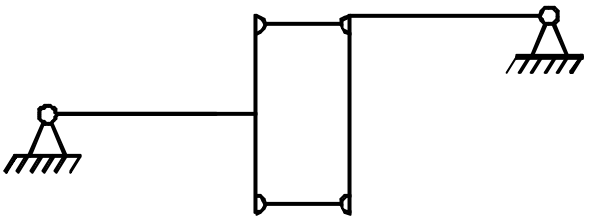
22.



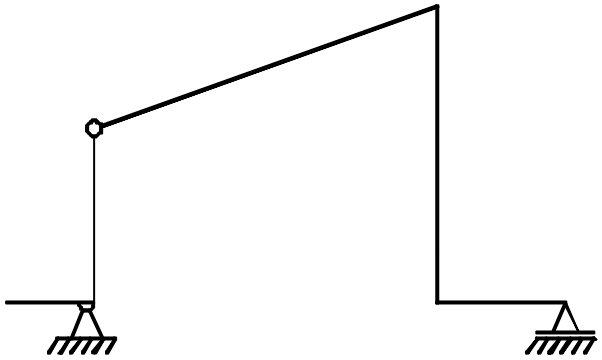
23.



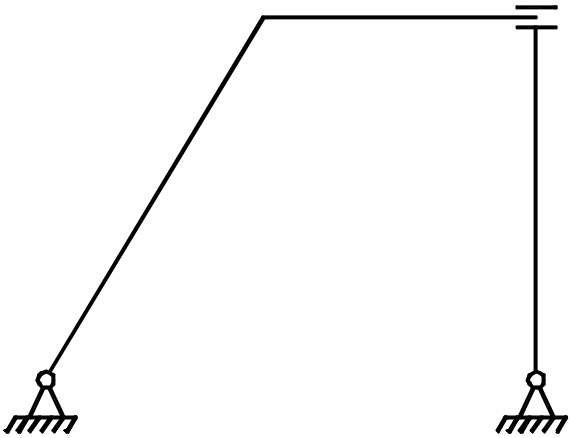
24.



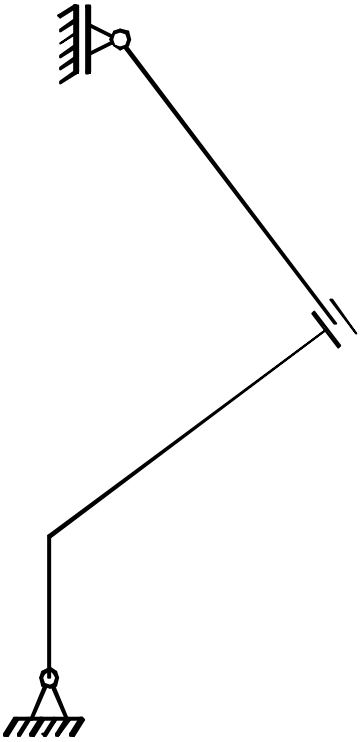
25.



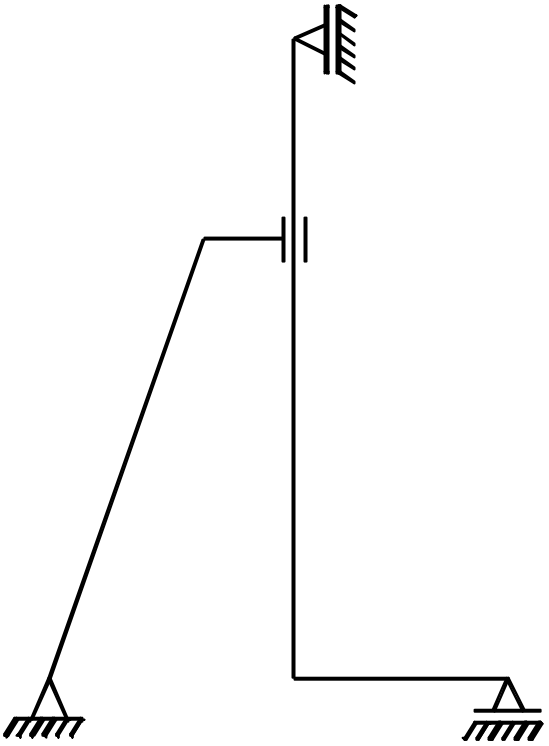
26.



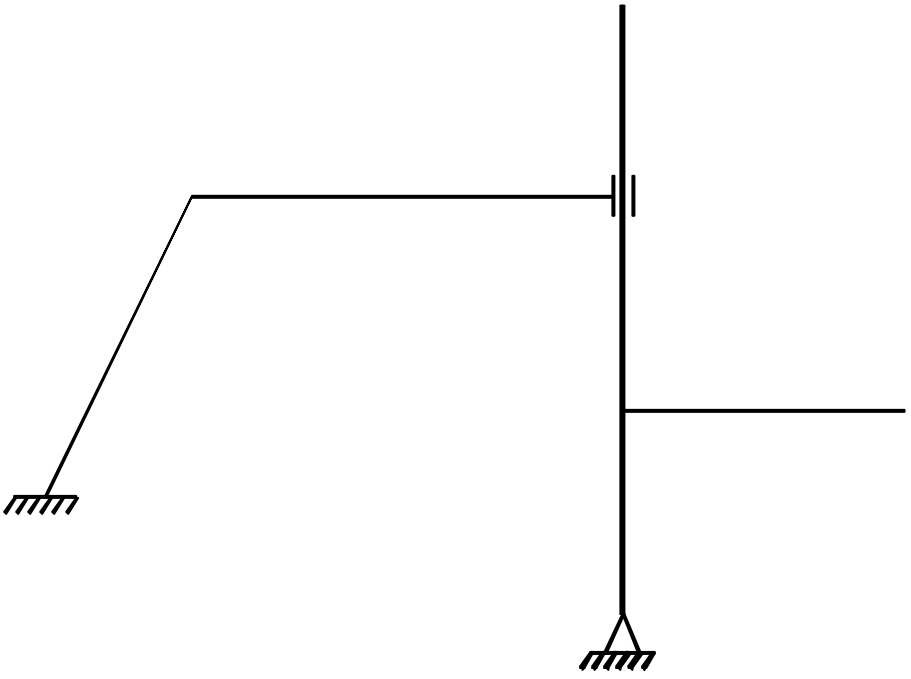
27.



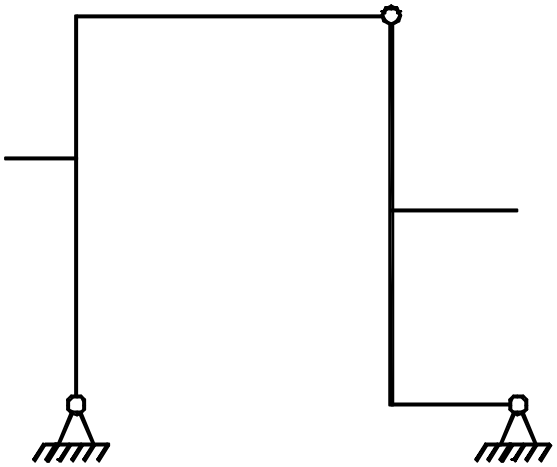
28.



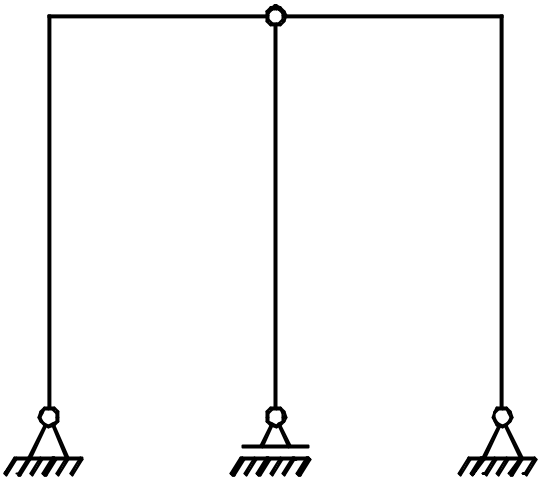
29.



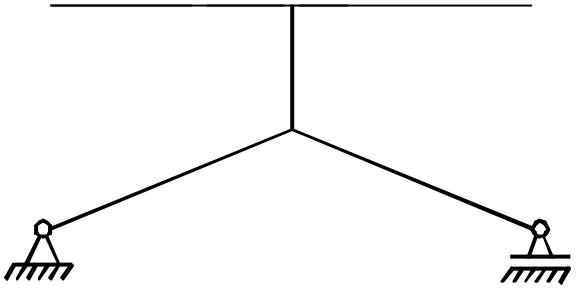
30.



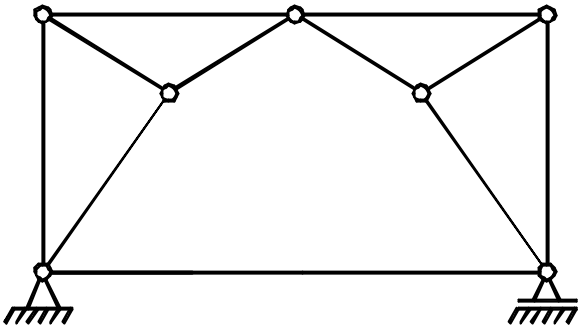
31.



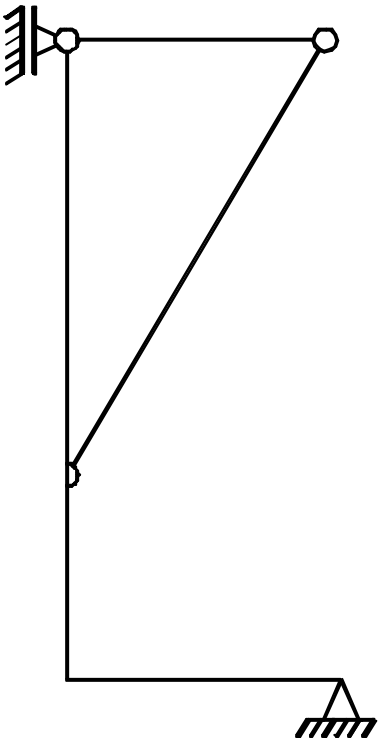
32.



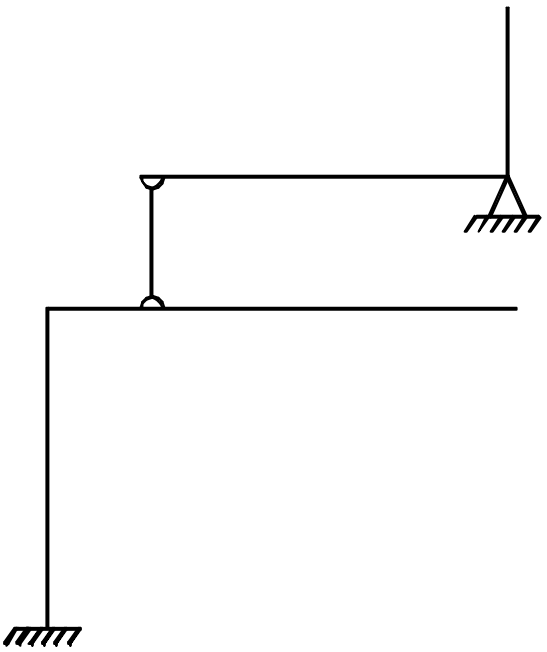
33.



34.



35.



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO E ESTRUTURAS
ENG 114 – HIPERESTÁTICA

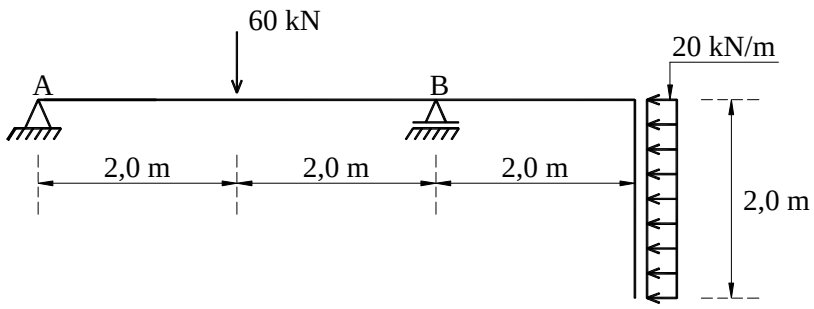
Respostas da Lista de Exercícios - Determinação Geométrica

Questão	Resposta
1	1 x Superdeterminada
2	Determinada
3	3 x Superdeterminada
4	Indeterminada
5	Indeterminada
6	Determinada
7	Determinada
8	3 x Superdeterminada
9	Indeterminada
10	1 x Superdeterminada
11	Indeterminada
12	Determinada
13	Determinada
14	Determinada
15	Indeterminada
16	3 x Superdeterminada
17	Determinada
18	4 x Superdeterminada
19	Determinada
20	Determinada
21	Determinada
22	Determinada
23	Determinada
24	Determinada
25	Indeterminada
26	Determinada
27	Indeterminada
28	Determinada
29	1 x Superdeterminada
30	Determinada
31	Determinada
32	Determinada
33	Determinada
34	Determinada
35	Determinada

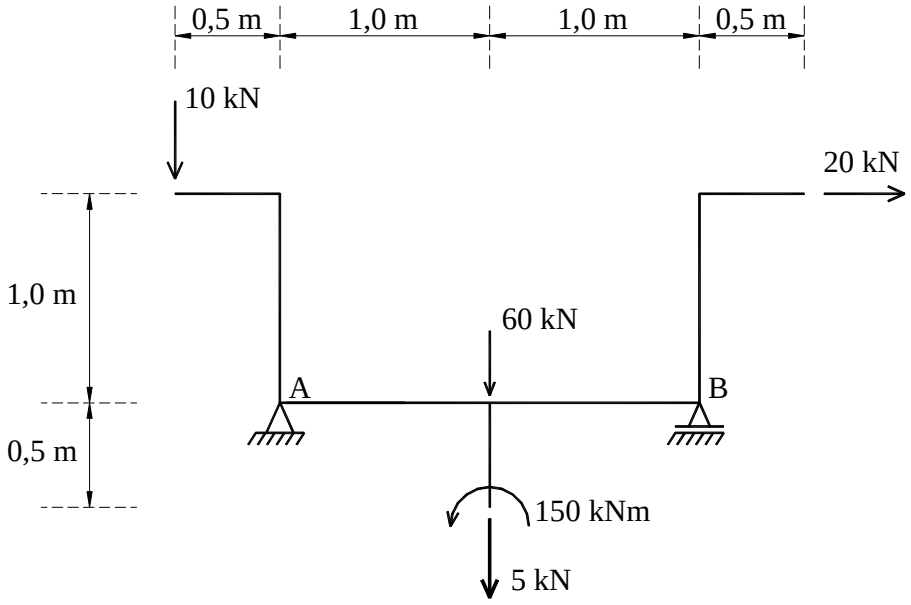
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO E ESTRUTURAS
ENG 114 – HIPERESTÁTICA

Calcular as reações e traçar os diagramas de esforços solicitantes para as estruturas apresentadas a seguir.

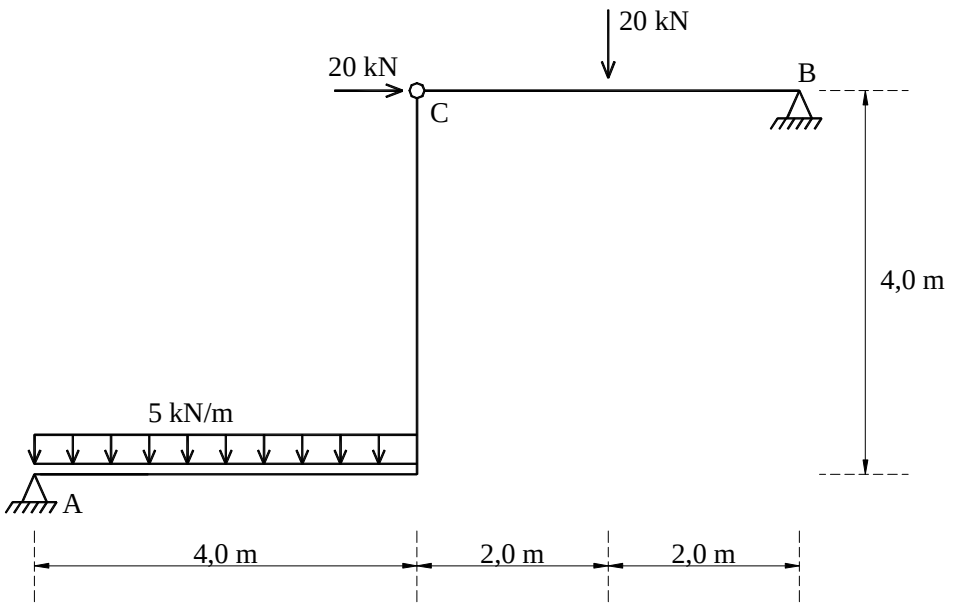
1.



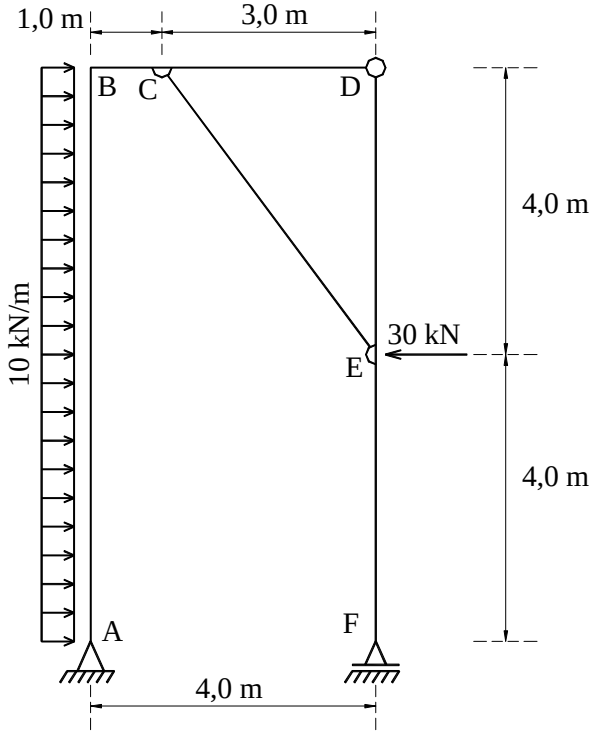
2.



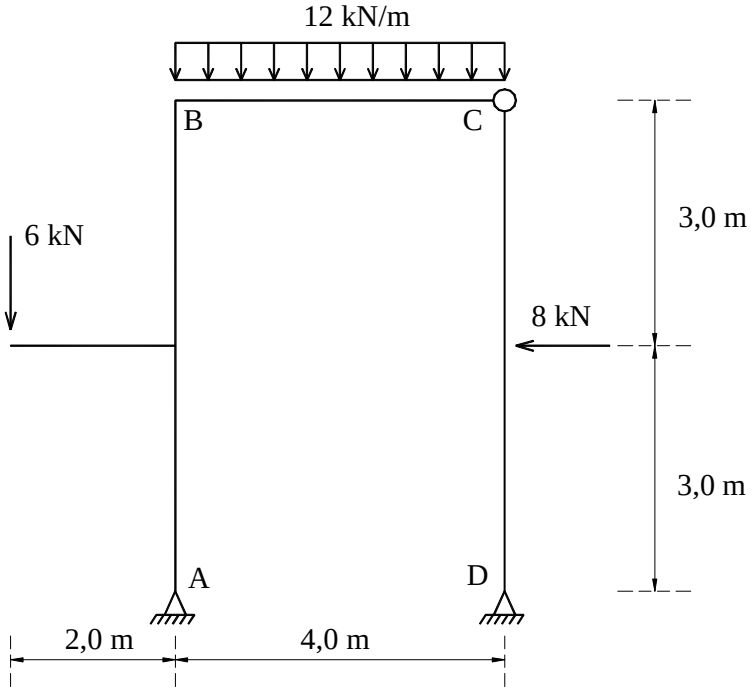
3.



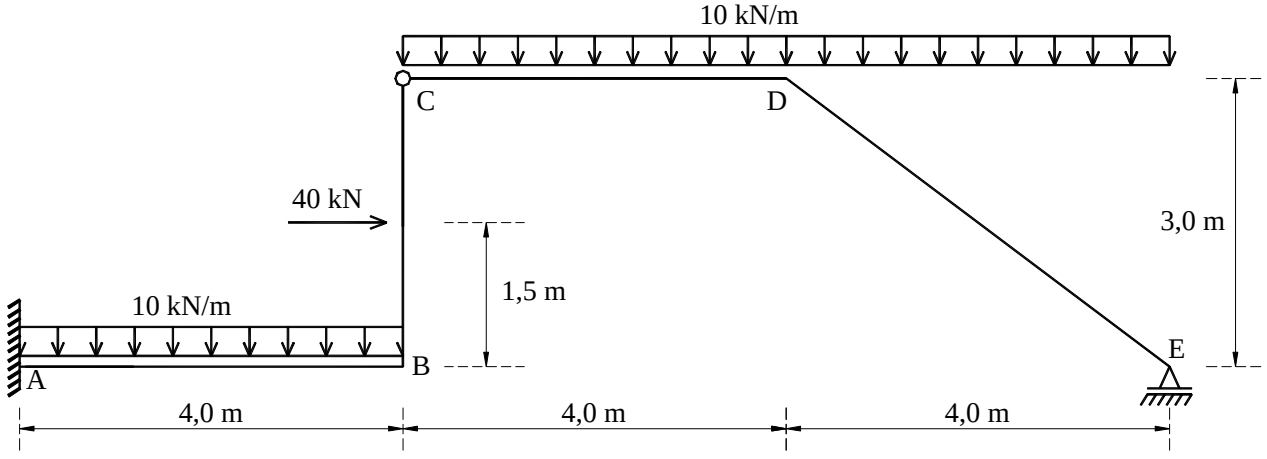
4.


1,0 m
3,0 m
B
C
D
4,0 m
10 kN/m
30 kN
E
4,0 m
A
F
4,0 m

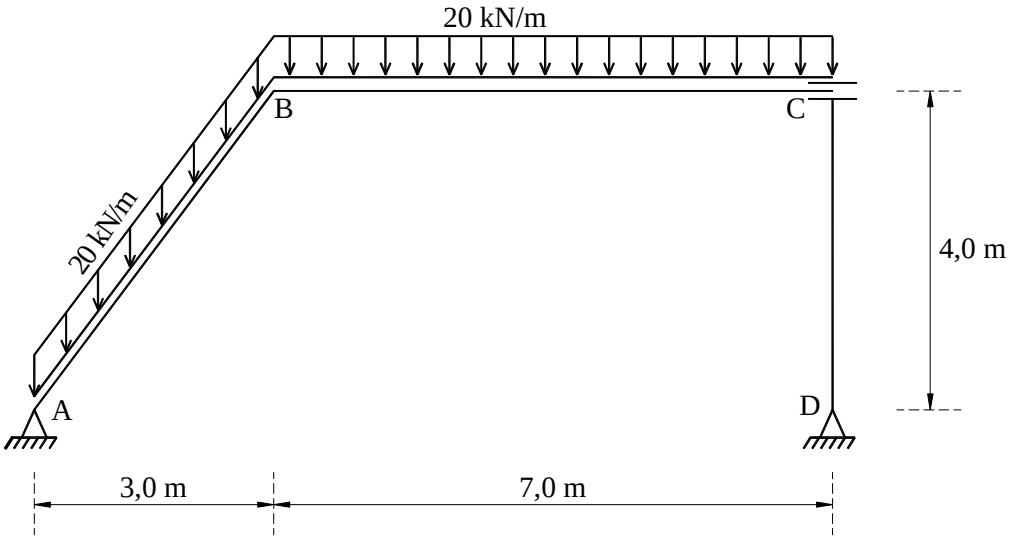
5.


12 kN/m
B
C
3,0 m
6 kN
8 kN
3,0 m
A
D
2,0 m
4,0 m

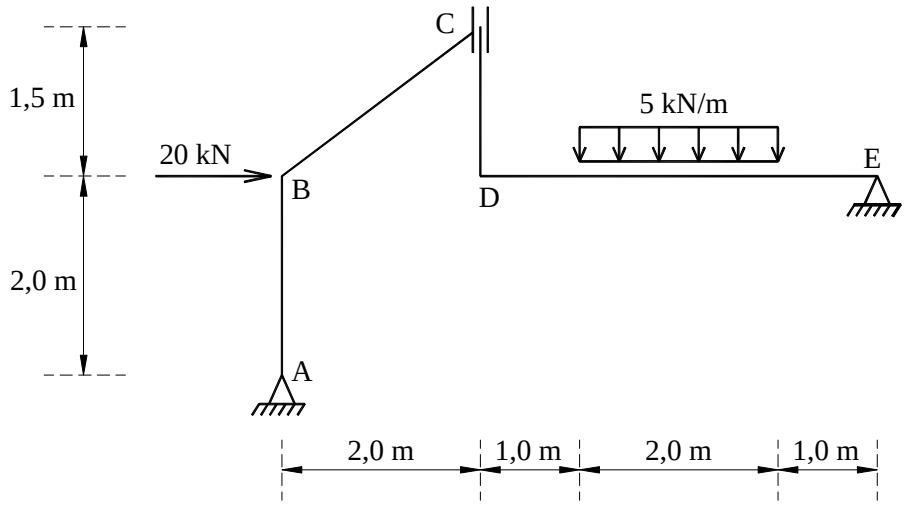
6.


10 kN/m
C
D
40 kN
3,0 m
1,5 m
10 kN/m
E
A
B
4,0 m
4,0 m
4,0 m

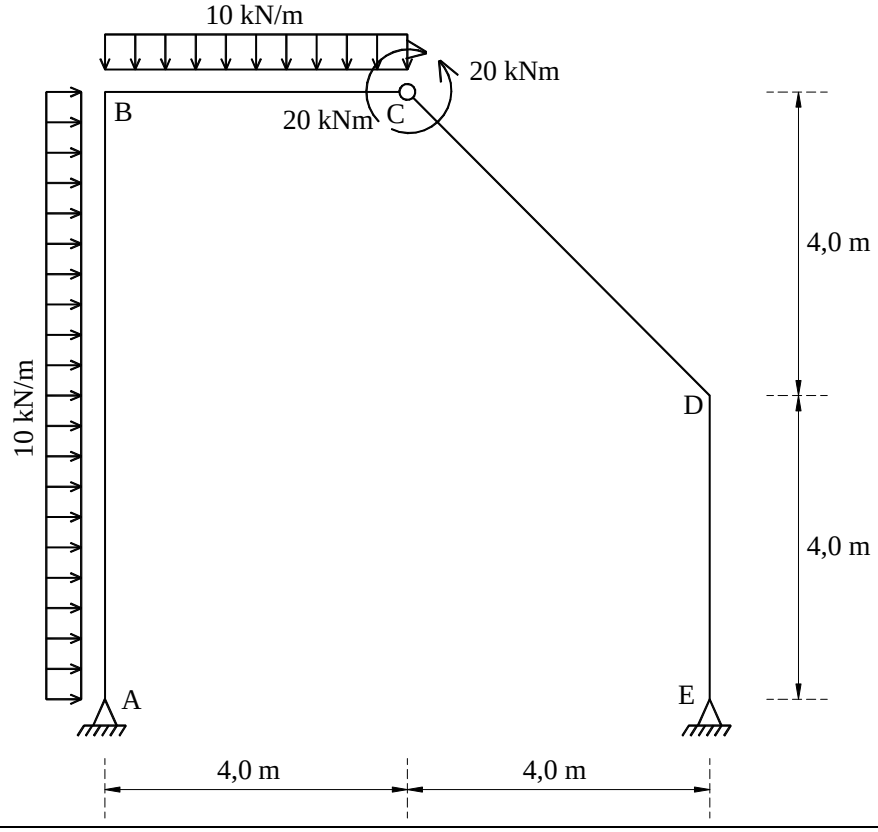
7.


20 kN/m
B
C
20 kN/m
4,0 m
A
D
3,0 m
7,0 m

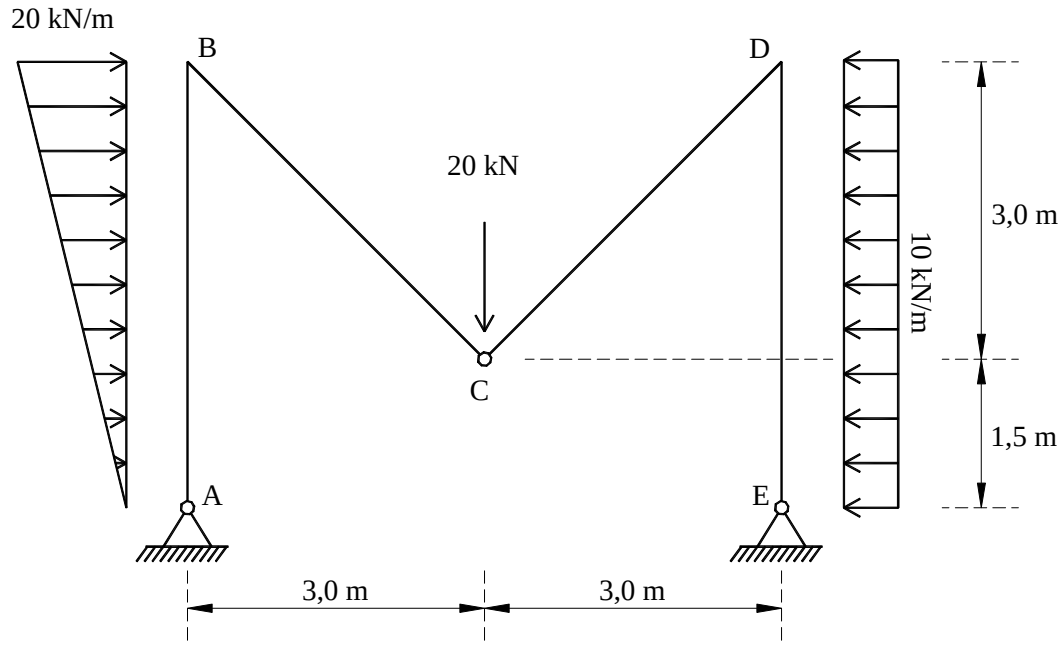
8.


C
1,5 m
5 kN/m
20 kN
B
D
E
2,0 m
A
2,0 m
1,0 m
2,0 m
1,0 m

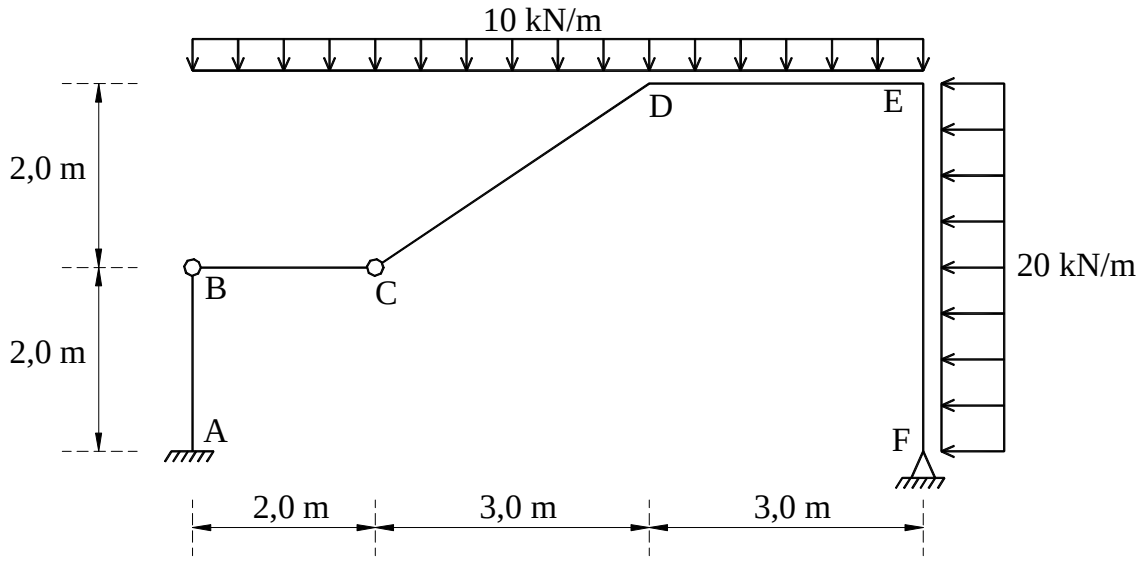
9.


10 kN/m
20 kNm
B
20 kNm
C
4,0 m
10 kN/m
D
4,0 m
A
E
4,0 m
4,0 m

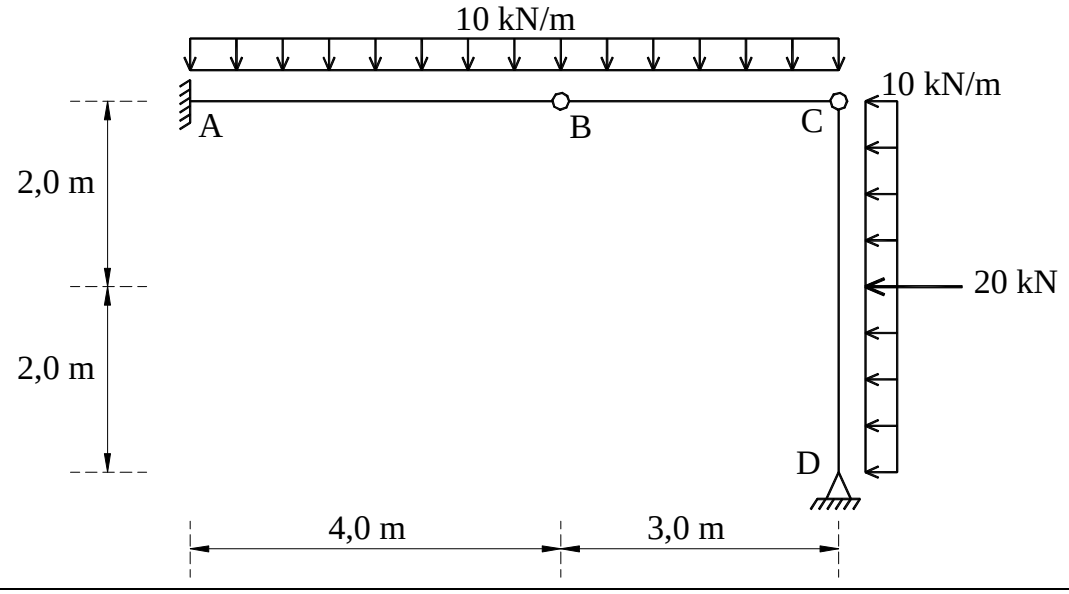
10.


20 kN/m
B
D
20 kN
C
10 kN/m
3,0 m
1,5 m
A
E
3,0 m
3,0 m

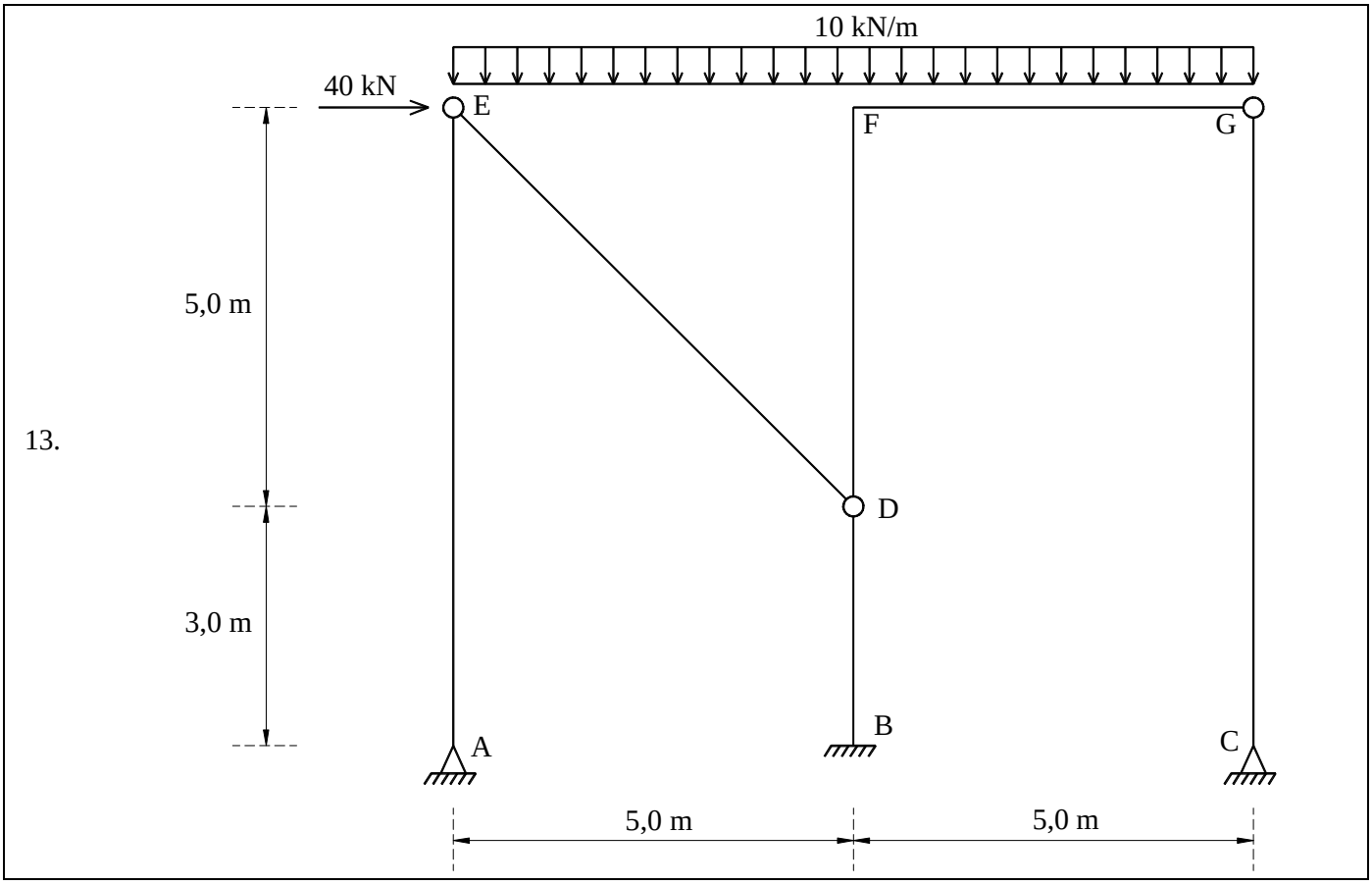
11.


10 kN/m
D
E
2,0 m
B
C
20 kN/m
2,0 m
A
F
2,0 m
3,0 m
3,0 m

12.


10 kN/m
10 kN/m
A
B
C
2,0 m
20 kN
2,0 m
D
4,0 m
3,0 m

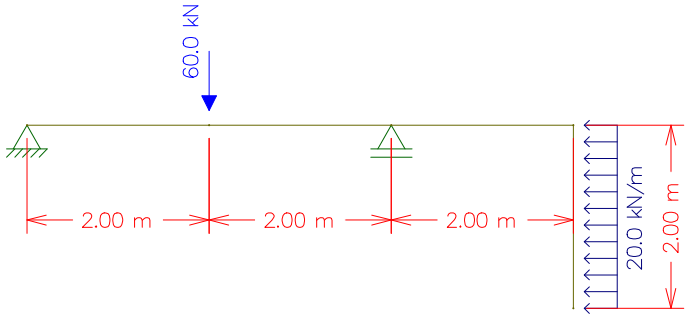
13.



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO E ESTRUTURAS
ENG 114 – HIPERESTÁTICA

Solução da lista de exercícios sobre diagramas dos esforços solicitantes

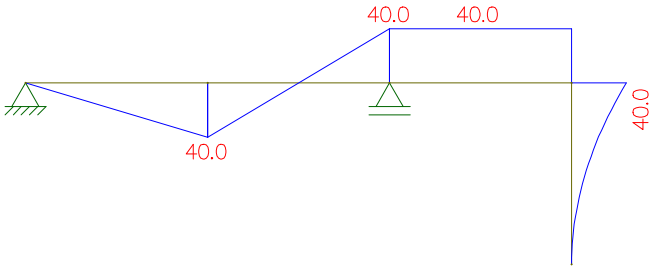
1)



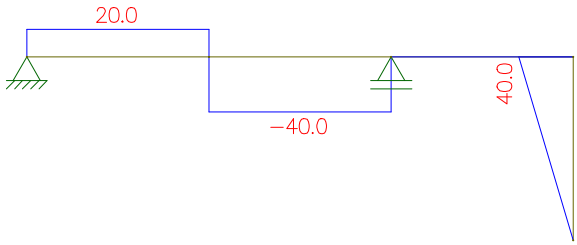
Reações de Apoio



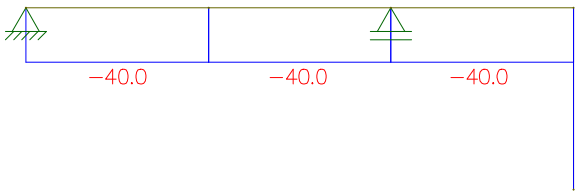
Momentos Fletores



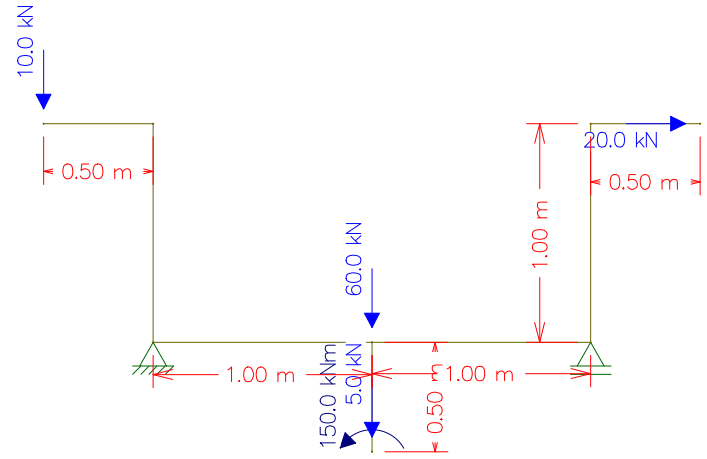
Esforços Cortantes



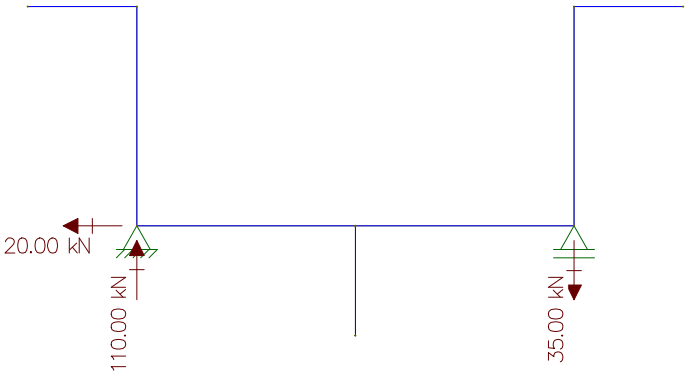
Esforços Normais



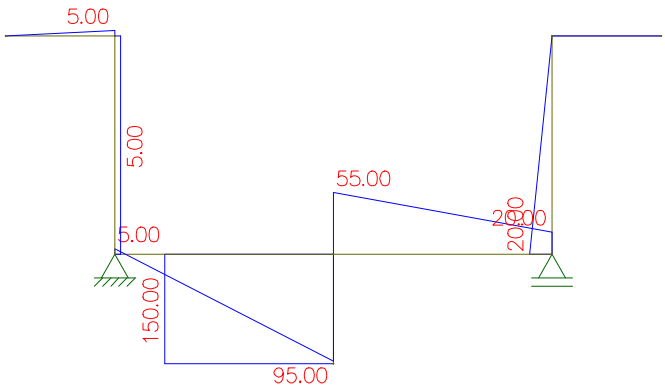
2)



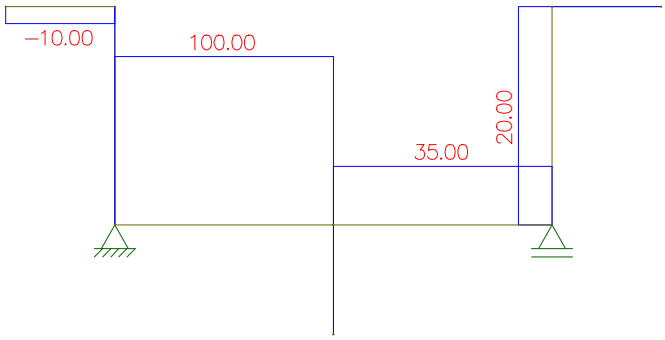
Reações de Apoio



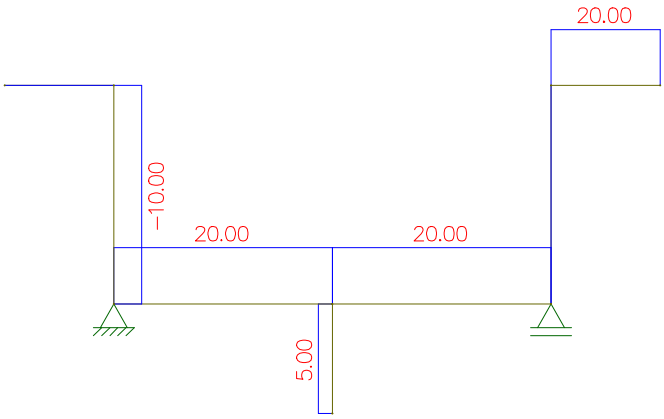
Momentos Fletores



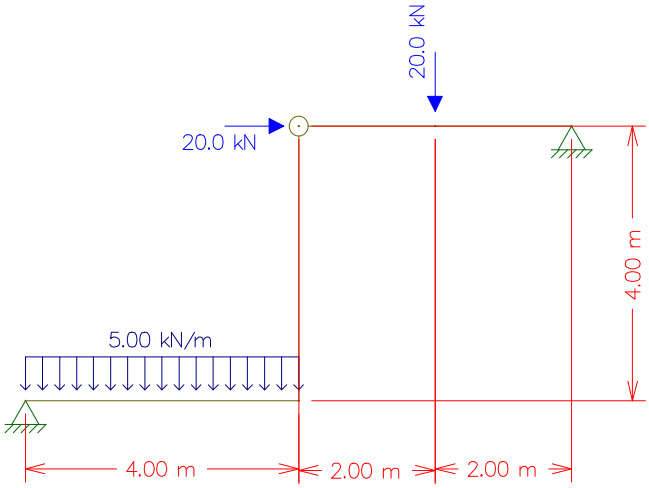
Esforços Cortantes



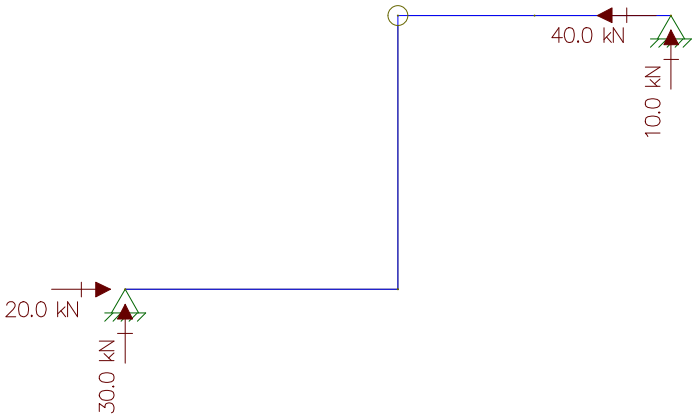
Esforços Normais



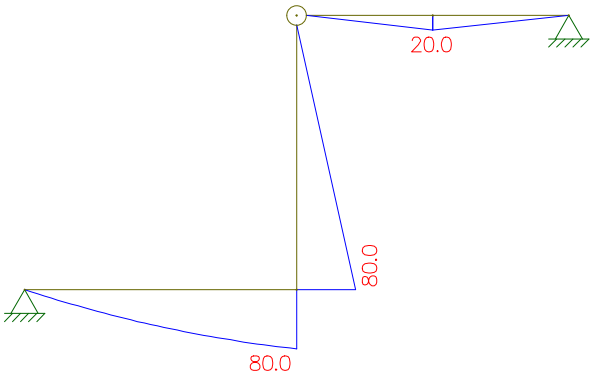
3)



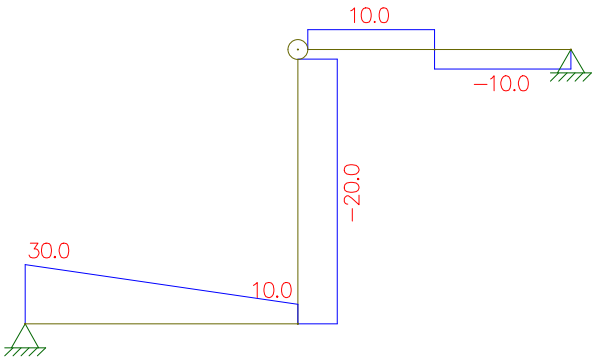
Reações de Apoio



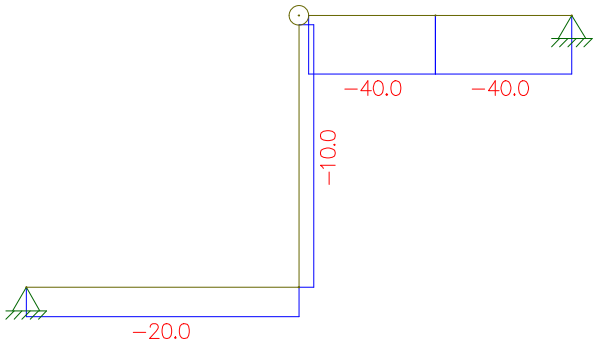
Momentos Fletores



Esforços Cortantes

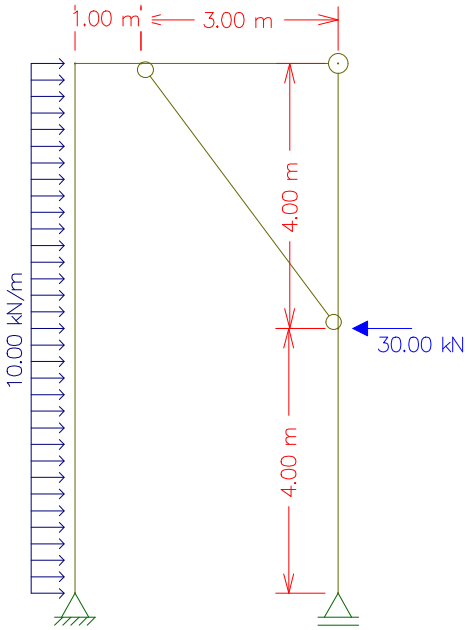


Esforços Normais

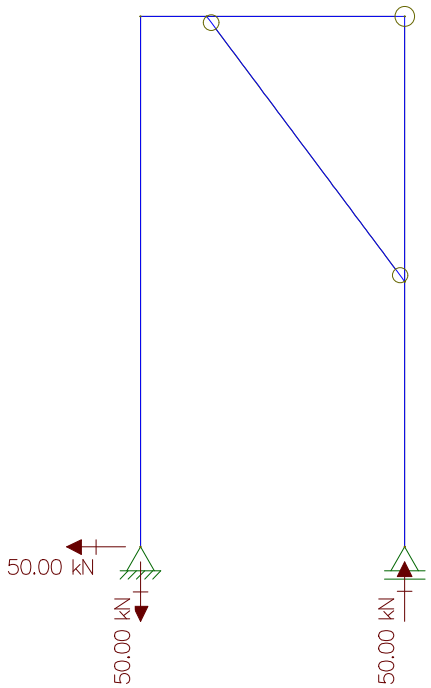


4)

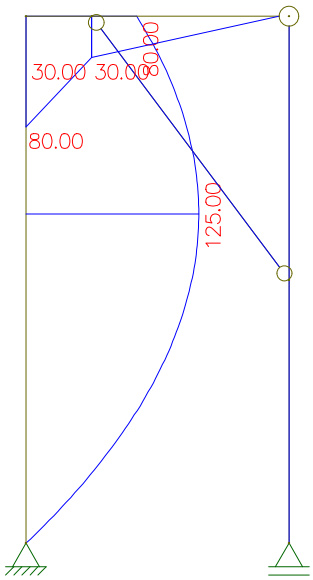
Estrutura



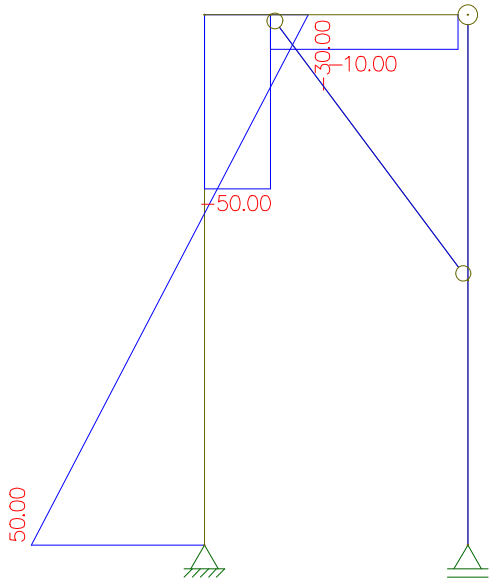
Reações de Apoio



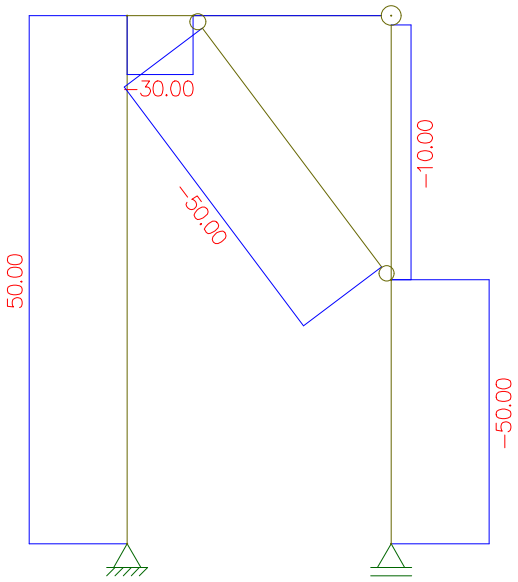
Momentos Fletores



Esforços Cortantes

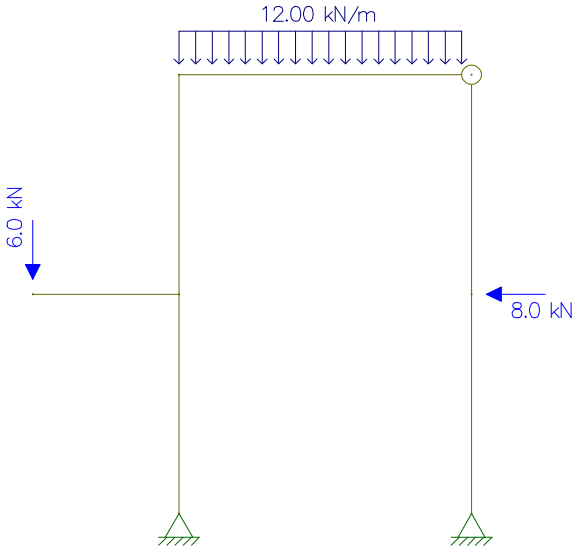


Esforços Normais

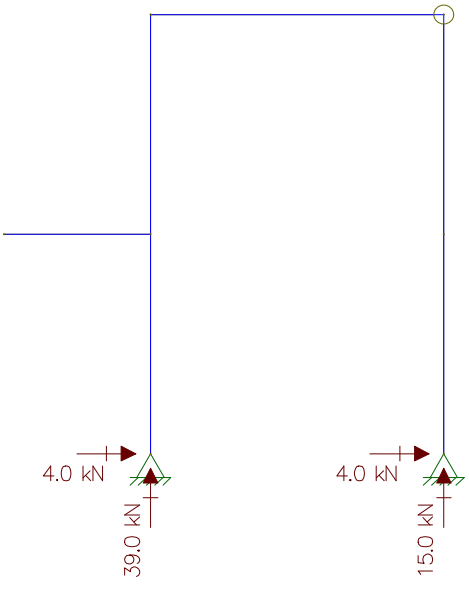


5)

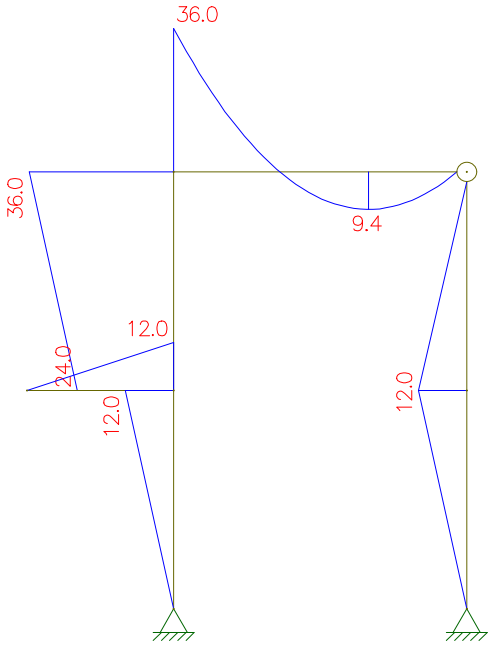
Estrutura



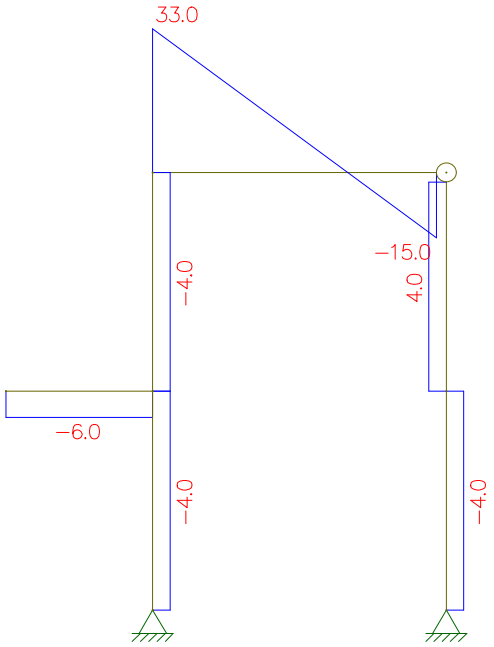
Reações de Apoio



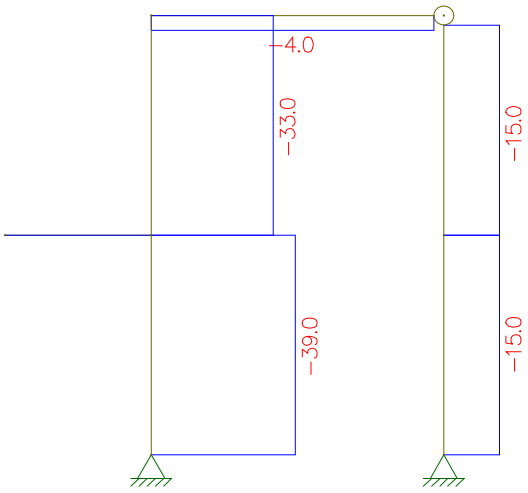
Momentos Fletores



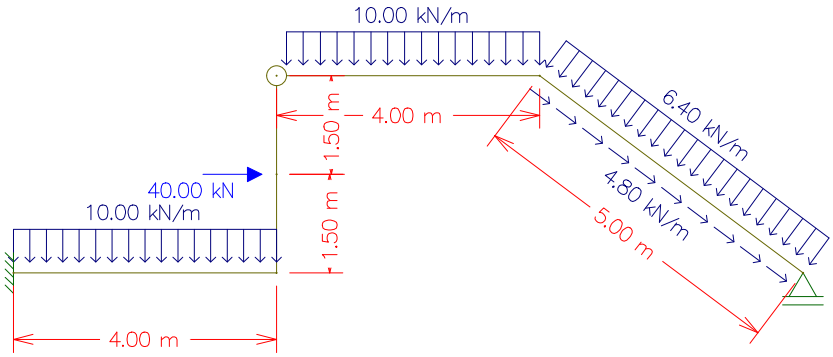
Esforços Cortantes



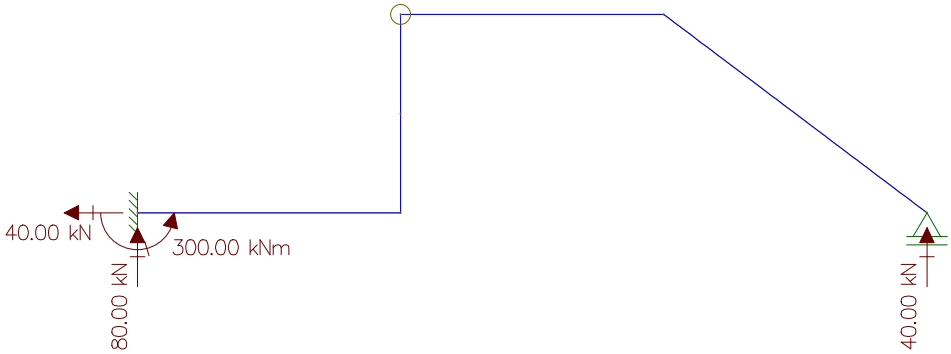
Esforços Normais



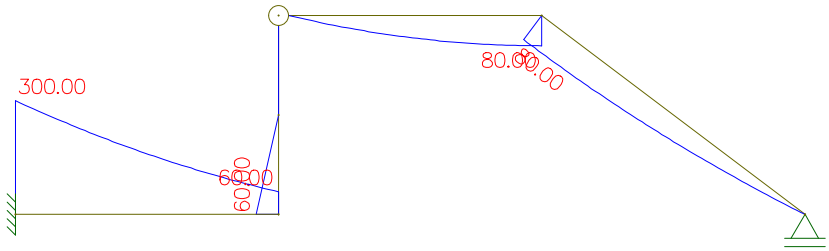
6)



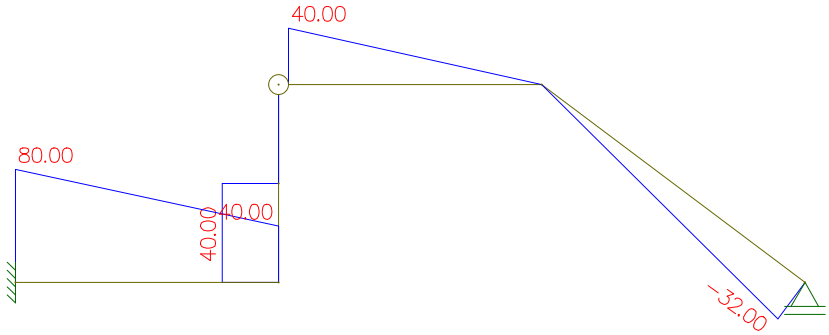
Reações de Apoio



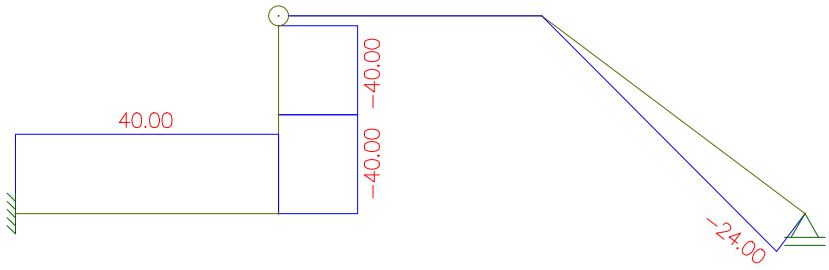
Momentos Fletores



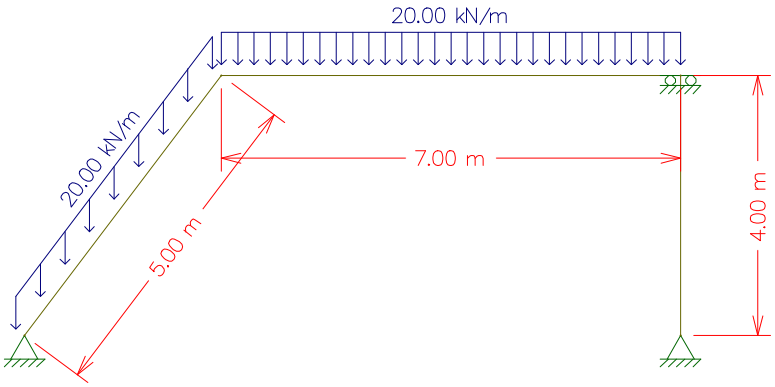
Esforços Cortantes



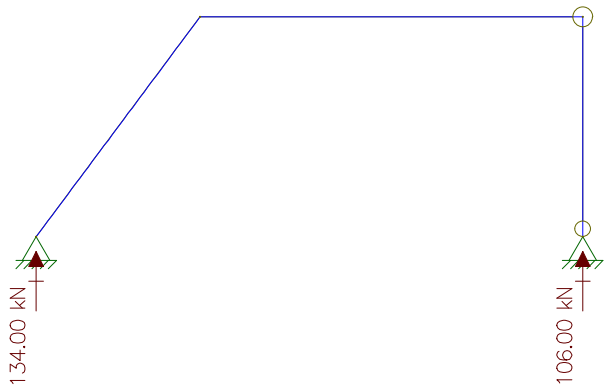
Esforços Normais



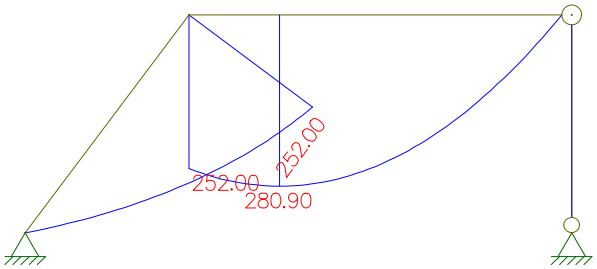
7)



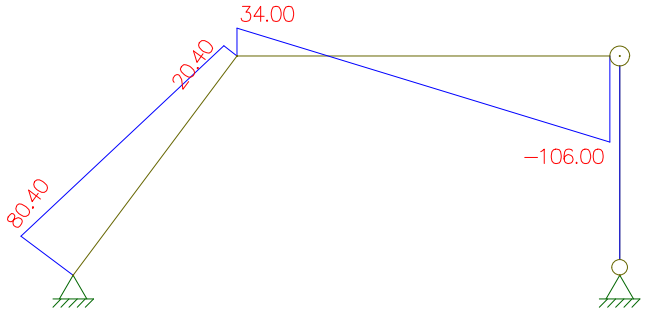
Reações de Apoio



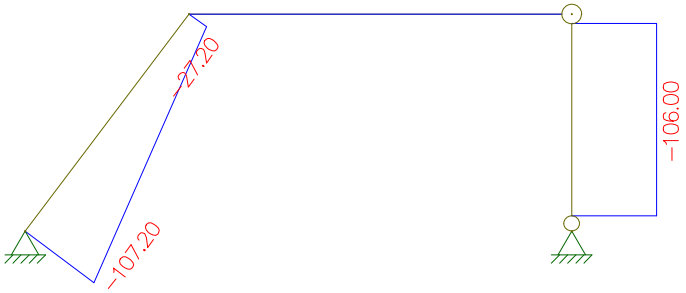
Momentos Fletores



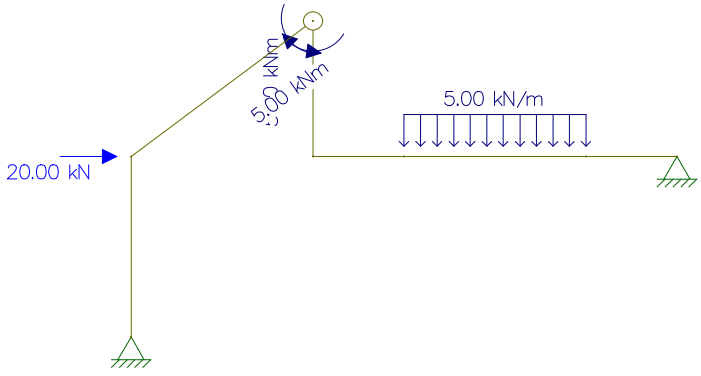
Esforços Cortantes



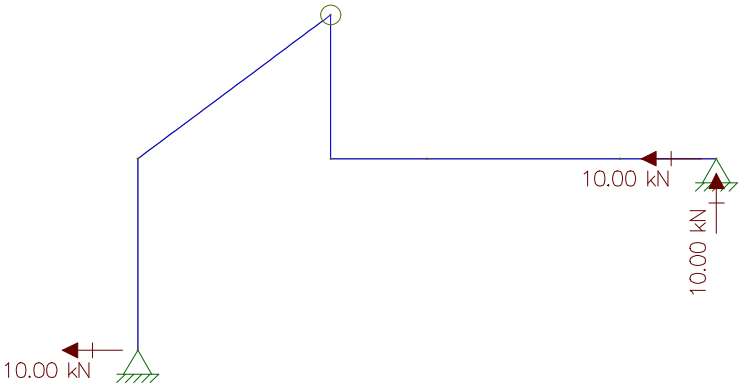
Esforços Normais



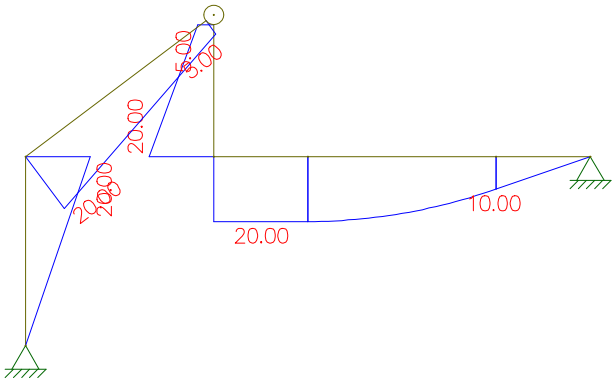
8)



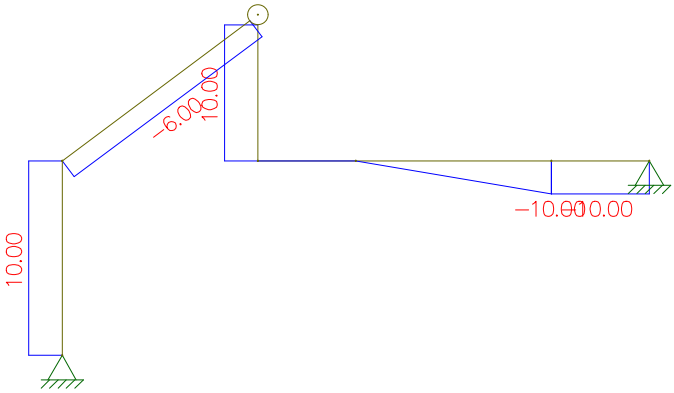
Reações de Apoio



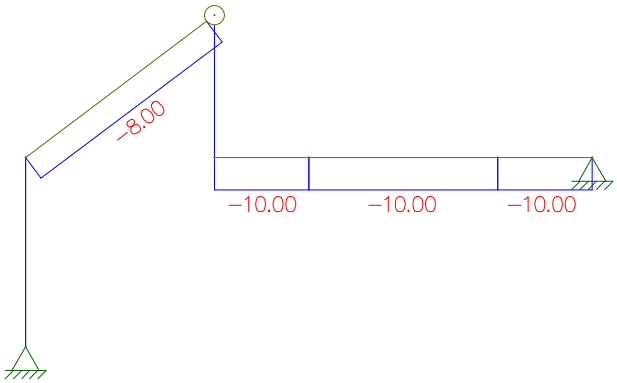
Momentos Fletores



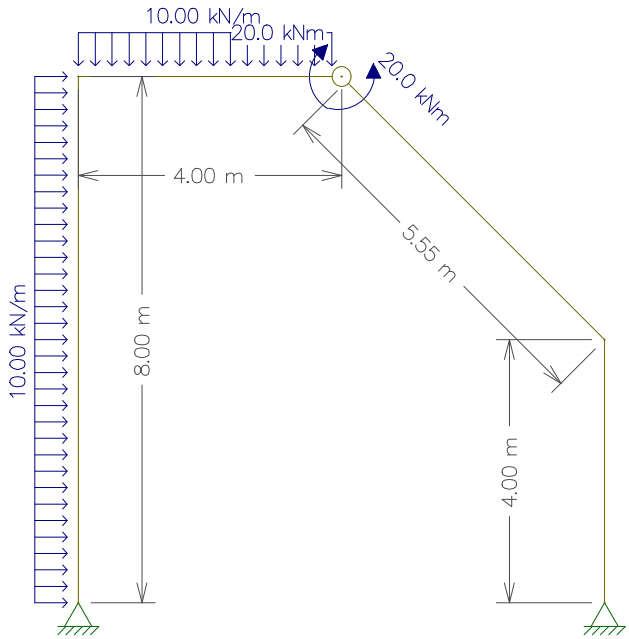
Esforços Cortantes



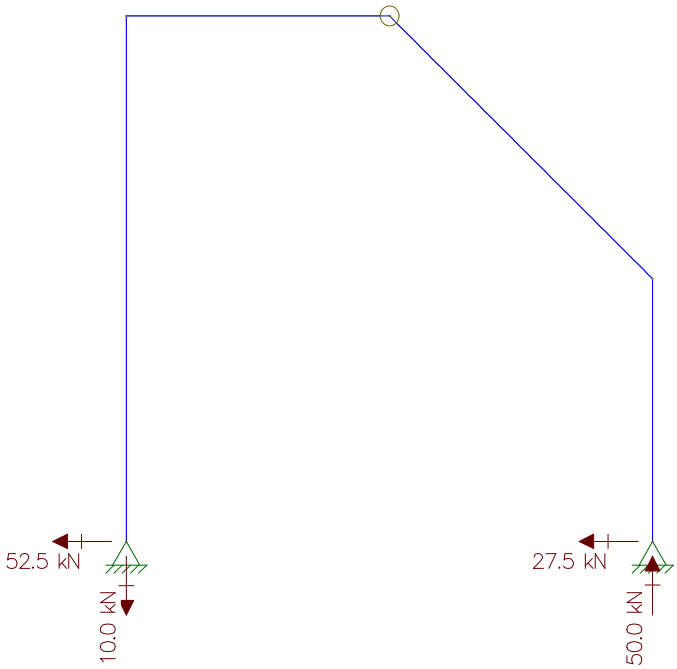
Esforços Normais



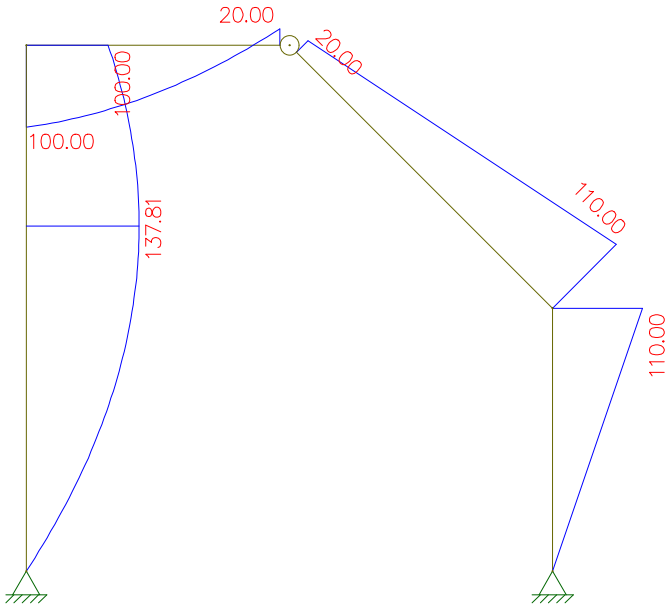
9)



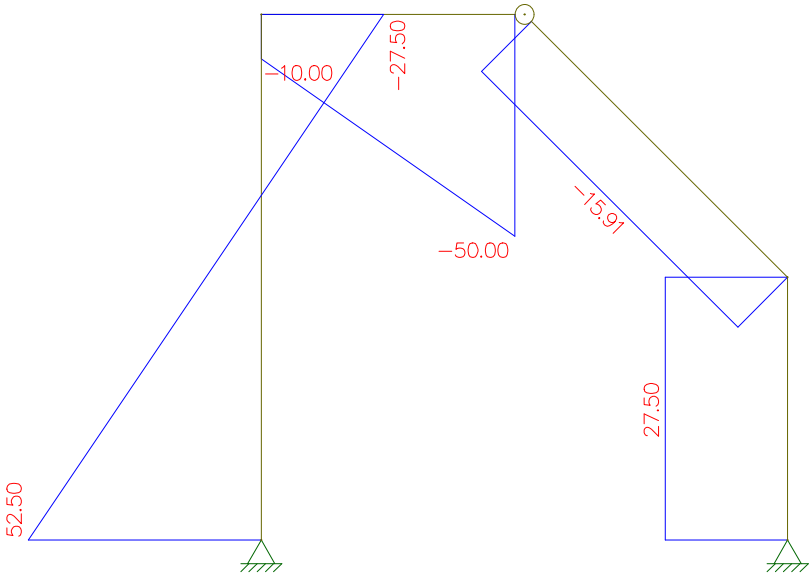
Reações de Apoio



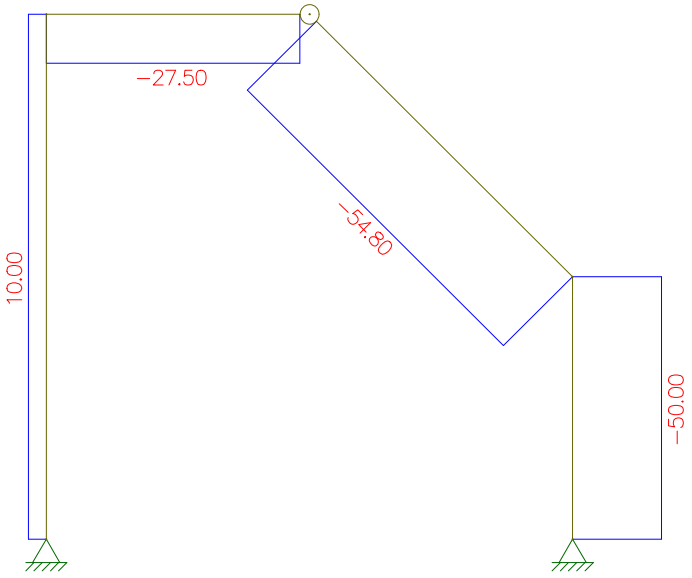
Momentos Fletores



Esforços Cortantes

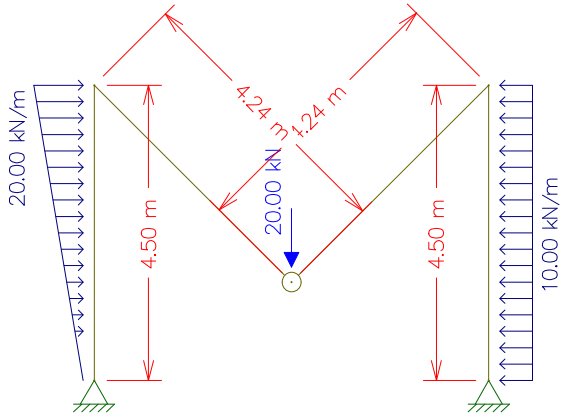


Esforços Normais

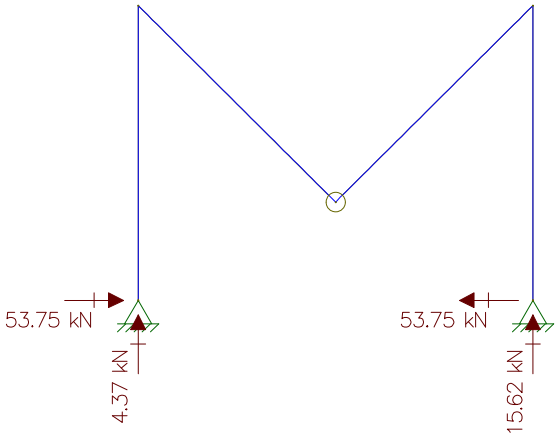


10)

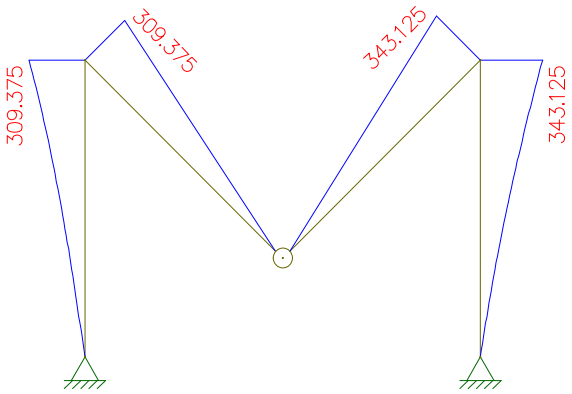
Estrutura



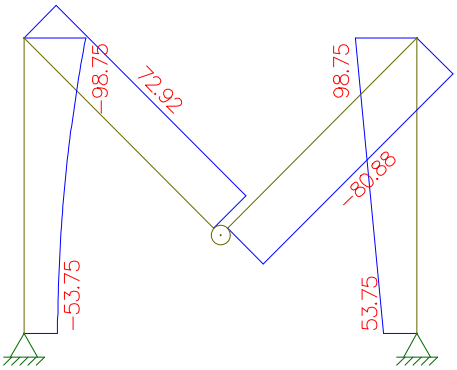
Reações de Apoio



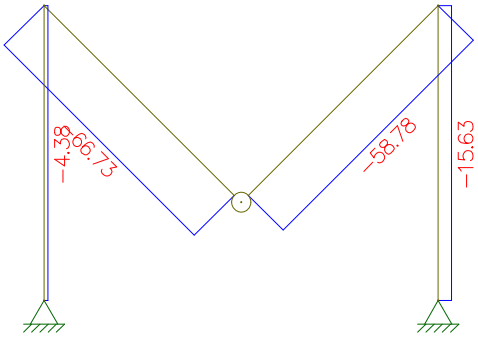
Momentos Fletores



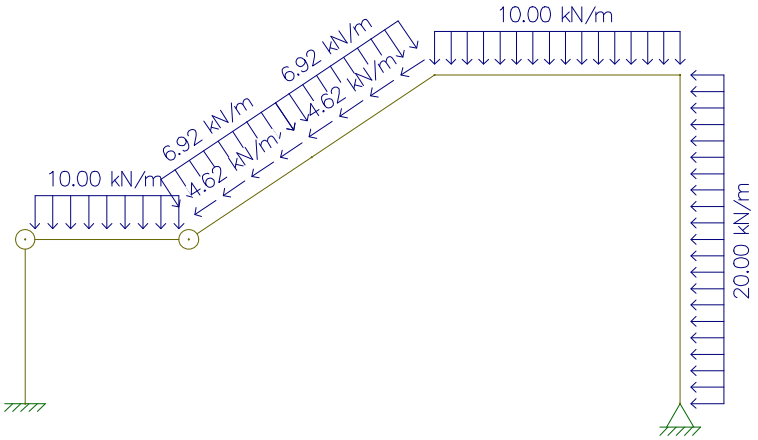
Esforços Cortantes



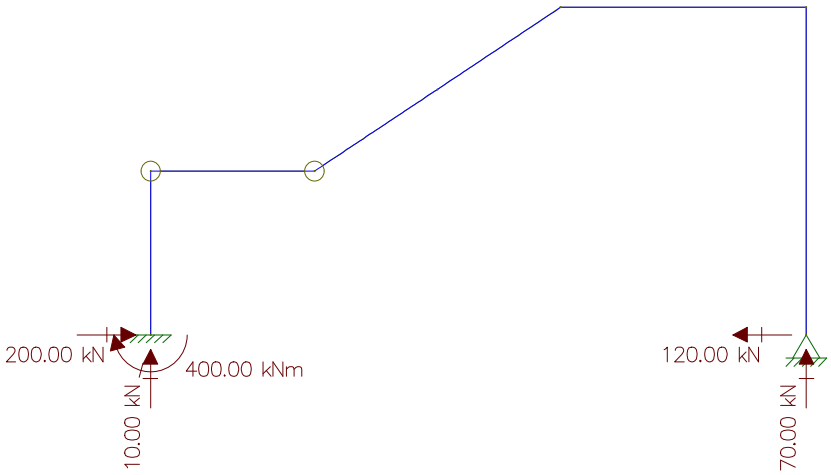
Esforços Normais



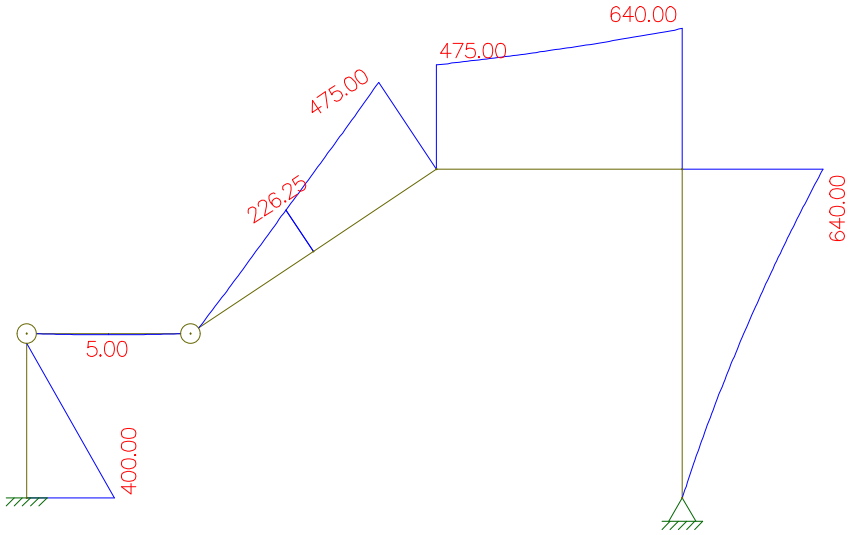
11)



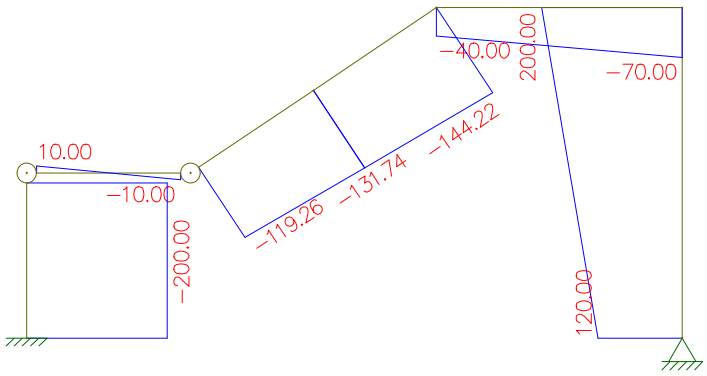
Reações de Apoio



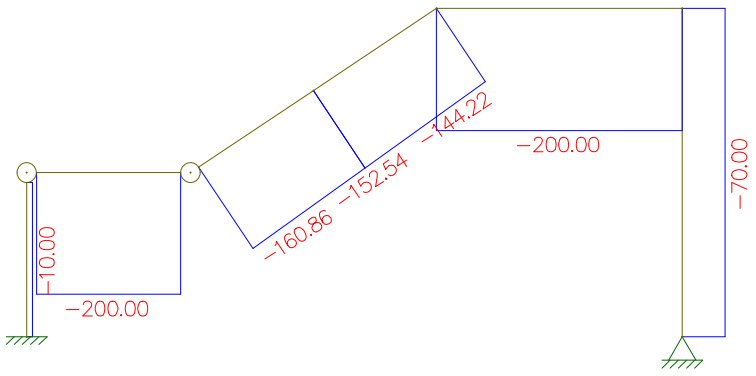
Momentos Fletores



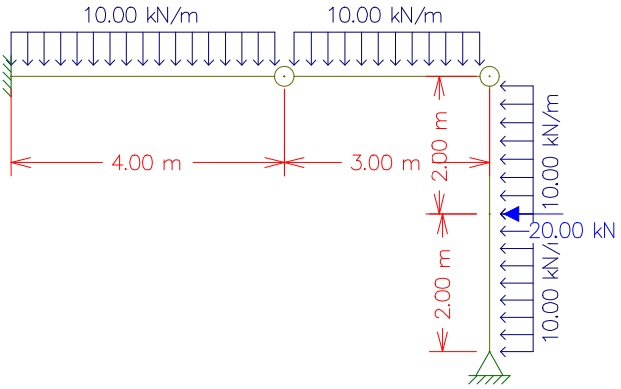
Esforços Cortantes



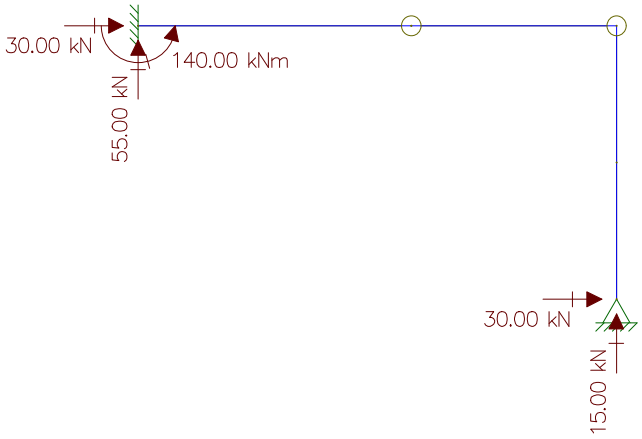
Esforços Normais



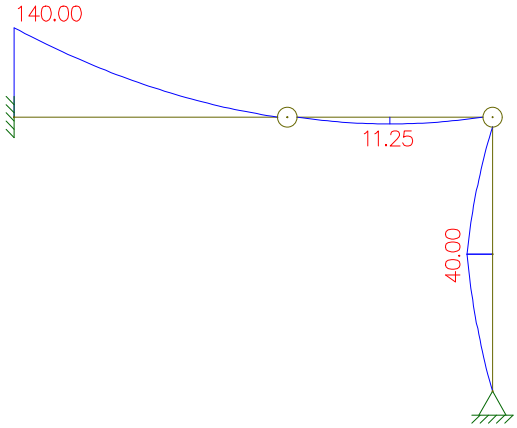
12)



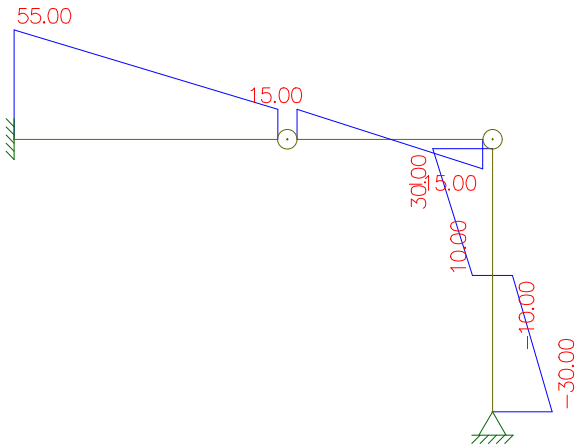
Reações de Apoio



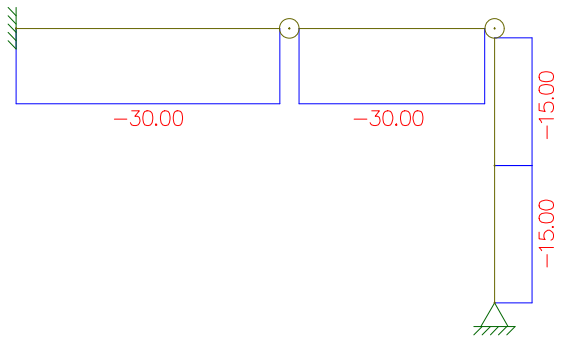
Momentos Fletores



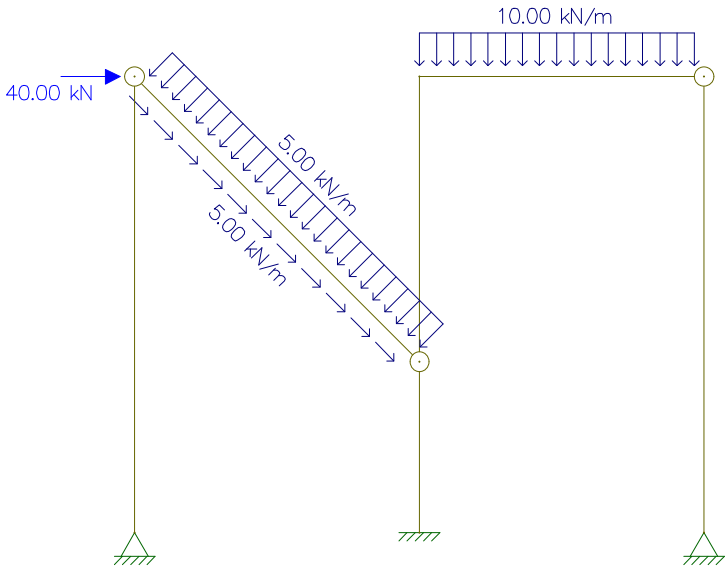
Esforços Cortantes



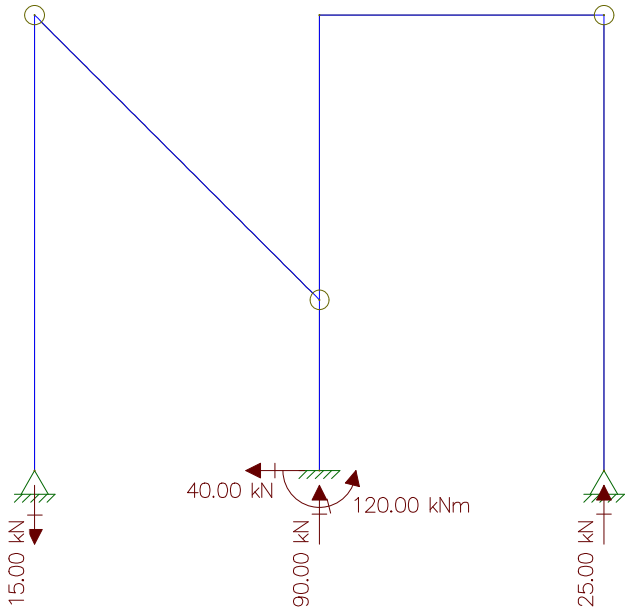
Esforços Normais



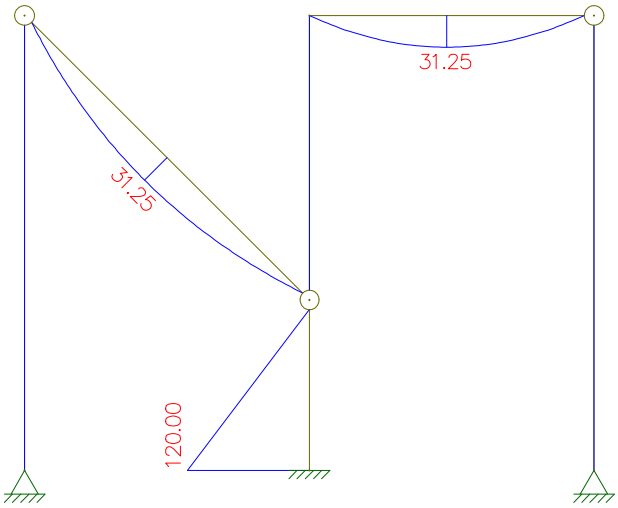
13)



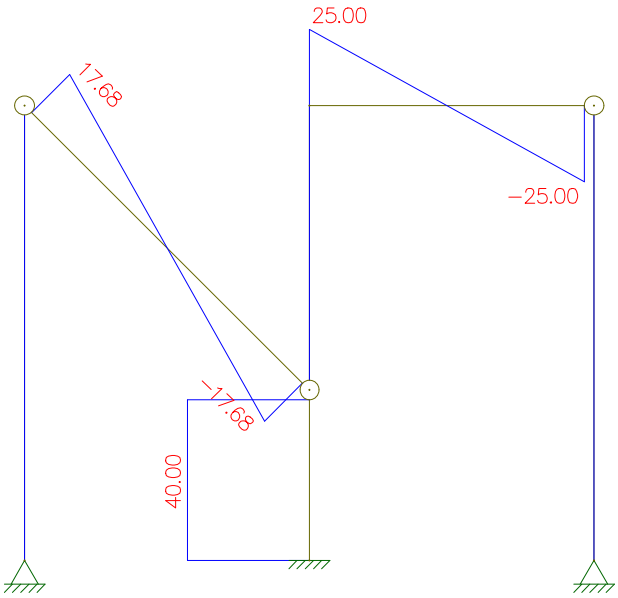
Reações de Apoio



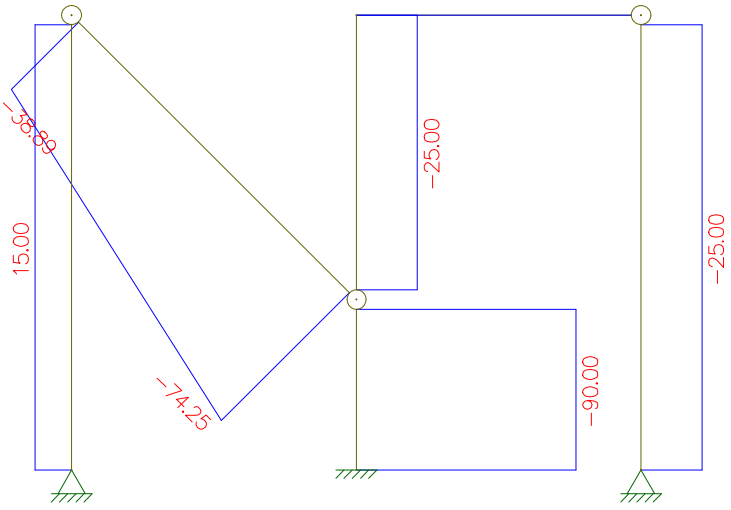
Momentos Fletores



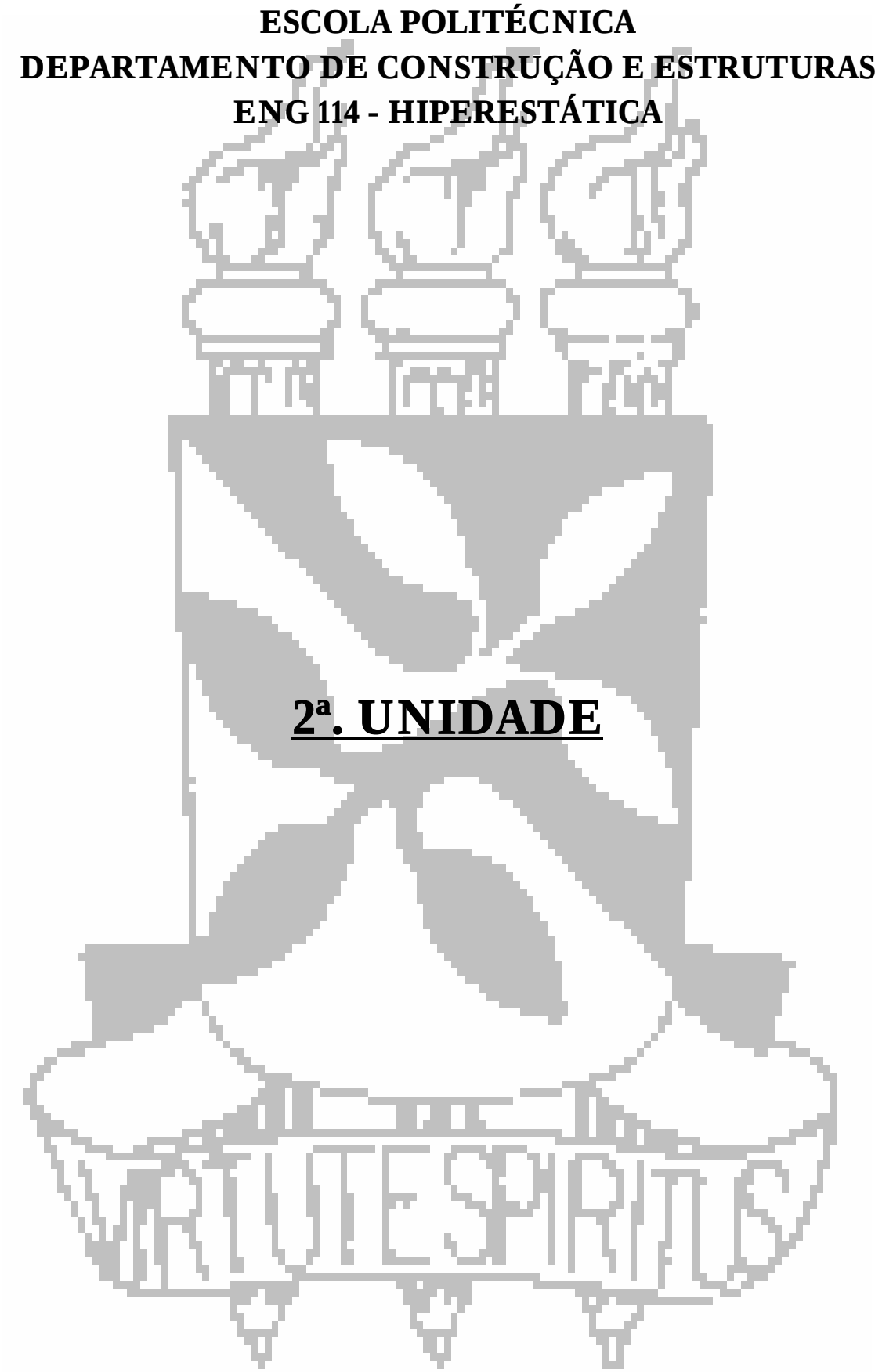
Esforços Cortantes



Esforços Normais



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO E ESTRUTURAS
ENG 114 - HIPERESTÁTICA



2ª. UNIDADE

PROCESSO DOS ESFORÇOS

1 INTRODUÇÃO

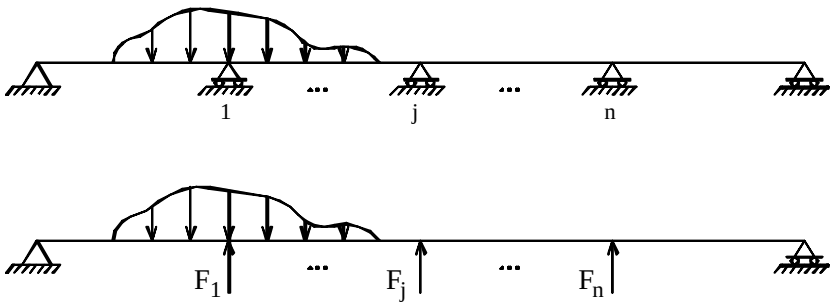
Em uma estrutura hiperestática, as condições de equilíbrio não são suficientes para a determinação dos esforços internos e das reações de apoio. Existem infinitas possibilidades de se obter o equilíbrio, daí a necessidade de se gerar equações adicionais (condições de compatibilidade ou de coerência de deslocamentos) para resolver o problema.

O Processo dos Esforços se caracteriza por procurar determinar esforços em número igual ao grau de hiperestaticidade da estrutura. Conhecidos esses esforços, chamados de incógnitas hiperestáticas, a partir das condições de equilíbrio, se determinam os esforços internos e as reações de apoio.

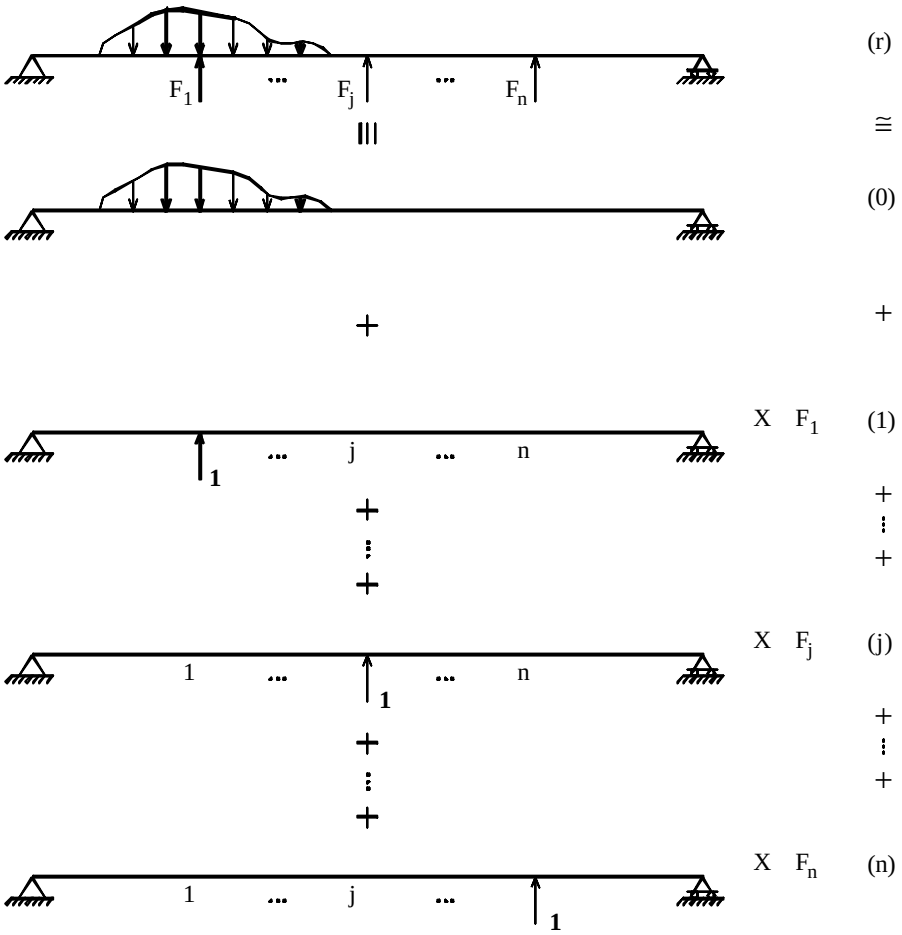
2 DESENVOLVIMENTO

Seja uma estrutura com grau de hiperestaticidade igual a n e submetida a uma ação externa qualquer (problema real). Pelo Processo dos Esforços, retira-se n vínculos para se obter uma estrutura isostática. Como o problema real não pode alterado, devem ser adicionados os esforços correspondentes aos vínculos retirados $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, ... , $\mathbf{F_j}$, ... , $\mathbf{F_n}$, que são as incógnitas hiperestáticas.

O problema real (r) é agora um conjunto de ações em uma estrutura isostática (ação externa qualquer mais cada uma das incógnitas hiperestáticas $\mathbf{F_j}$). Pela superposição de efeitos, esse problema real pode ser a soma da ação externa (problema 0), mais a superposição dos problemas correspondentes à aplicação de cada um dos $\mathbf{F_j}$ separadamente (problema 1, problema 2, ... , problema j, ..., problema n).



O valor de $\mathbf{F_j}$ pode ser colocado em evidência e superposto a um problema (j) correspondente a uma força unitária na direção e sentido de $\mathbf{F_j}$.



Assim,

$$(r) = (0) + F_1(1) + \cdots + F_j(j) + \cdots + F_n(n) \tag{1}$$

e,

$$E = E(0) + F_1 \cdot E(1) + \cdots + F_j E(j) + \cdots + F_n E(n) \tag{2}$$

Sabe-se do problema real (r) que os vínculos retirados existem, isto é, os deslocamentos na direção dos vínculos retirados são conhecidos, nulos ou não.

Sendo d_{jk} o deslocamento na direção e sentido de Fj no problema (k) qualquer, pelas condições de compatibilidade ou de coerência de deslocamentos, tem-se:

$$\begin{cases} \delta_{1r} = \delta_{10} + F_1\delta_{11} + \cdots + F_j\delta_{1j} + \cdots + F_n\delta_{1n} \\ \vdots \\ \delta_{jr} = \delta_{j0} + F_1\delta_{j1} + \cdots + F_j\delta_{jj} + \cdots + F_n\delta_{jn} \\ \vdots \\ \delta_{nr} = \delta_{n0} + F_1\delta_{n1} + \cdots + F_j\delta_{nj} + \cdots + F_n\delta_{nn} \end{cases} \tag{3}$$

Pelo Teorema da Reciprocidade dos Deslocamentos (ou Teorema de Maxwell), sabe-se que:

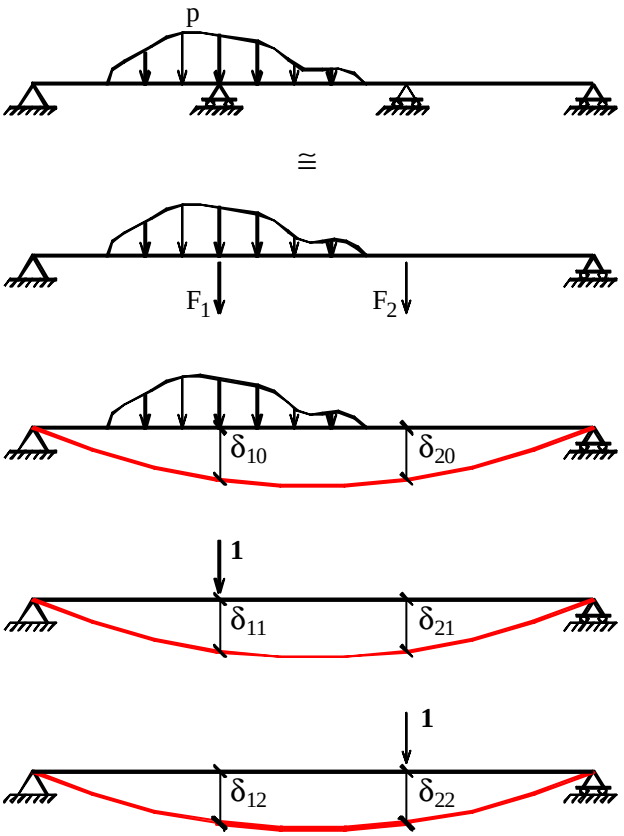
$$\delta_{jk} = \delta_{kj}$$

Os deslocamentos d_{jr} são definidos no problema real (r) e conhecidos d_{jk} podem ser determinados pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Portanto, pode-se resolver o sistema de equações (Eq.3) e determinar as incógnitas hiperestáticas F1, ..., Fj, ... ,Fn. E com a solução do problema real (r), que consiste na solução de uma estrutura isostática, obtém-se os esforços internos e as reações de apoio da estrutura hiperestática, utilizando-se a eq.(2)

Exemplo: Resolver a viga da figura abaixo, com grau de hiperestaticidade igual a 2.



Retirando-se os vínculos internos correspondentes à força vertical, tem-se:



De acordo com os vínculos retirados, as condições de compatibilidade de deslocamentos são:

$$\begin{cases} \delta_{1r} = 0 \\ \delta_{2r} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta_{1r} = \delta_{10} + F_1\delta_{11} + F_2\delta_{12} = 0 \\ \delta_{2r} = \delta_{20} + F_1\delta_{21} + F_2\delta_{22} = 0 \end{cases}$$

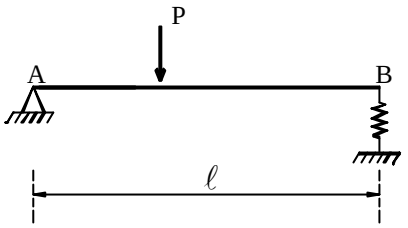
Calculando-se os d_{jk} utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais e resolvendo-se o sistema de equações determinam-se as incógnitas hiperestáticas F1 e F2. Então, a partir da eq.(2), podem ser obtidos os esforços internos e as reações de apoio da estrutura hiperestática.

ESTRUTURAS SOBRE APOIOS ELÁSTICOS

1 APOIOS ELÁSTICOS DISCRETOS

a) APOIO EM MOLA (Equivale estaticamente a um apoio móvel)

Um apoio é dito elástico quando, sob a ação de uma força **F**, sofre um deslocamento d na direção desta força.



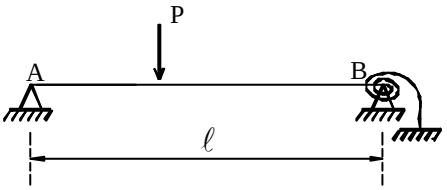
O apoio em mola, representado pelo apoio **B** da figura acima, é definido numericamente pela constante **r** (constante de mola), que representa a razão entre a força aplicada na mola e o deslocamento nela produzido por esta força. **r** é constante, por se considerar comportamento linear, e é chamado de rigidez da mola.

$$r = \frac{F}{\delta} \tag{1}$$

na qual, **F** é a força absorvida pelo apoio e d é o deslocamento sofrido pelo apoio

b) ENGASTE ELÁSTICO (Equivale estaticamente a um engaste perfeito)

Um engaste é dito elástico quando, sob a ação de um momento M, sofre uma rotação ? . Ele é representado como indicado no apoio B da figura abaixo.



O engaste elástico é definido pela constante de engastamento elástico R, ou rigidez da mola. R é dado por:

$$R = \frac{M}{\theta} \tag{2}$$

na qual, **M** é o momento absorvido pelo engaste e q é a rotação sofrida pelo engaste.

2 TRABALHO INTERNO DOS APOIOS ELÁSTICOS

a) APOIO EM MOLA

Seja $\mathbf{F_a}$ uma força virtual (estado de força conveniente) e d_b um deslocamento real (estado de deslocamento) de um apoio em mola. Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, o trabalho interno é dado por:

$$W = F_a \delta_b = \frac{F_a F_b}{r}$$

Já que, a partir de (1), tem-se que:

$$\delta_b = \frac{F_b}{r}$$

b) ENGASTE ELÁSTICO

Seja $\mathbf{M_a}$ um momento virtual (estado de força conveniente) e q_b uma rotação real (estado de deslocamento) de um engaste elástico. Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, o trabalho interno é dado por:

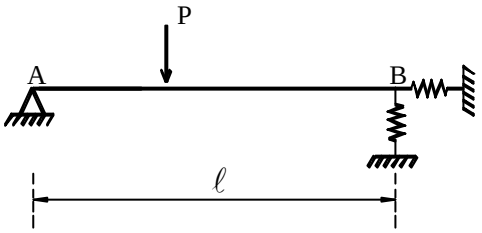
$$W = M_a \theta_b = \frac{M_a M_b}{R}$$

Já que, a partir de (2), tem-se que:

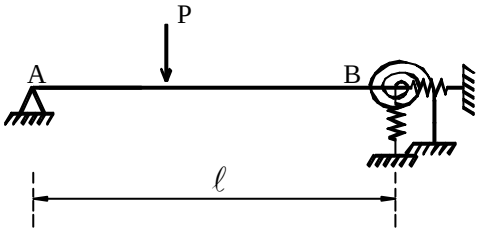
$$\theta_b = \frac{M_b}{R}$$

OBSERVAÇÕES

a) O apoio elástico estaticamente equivalente ao apoio fixo é resultante da associação de duas molas

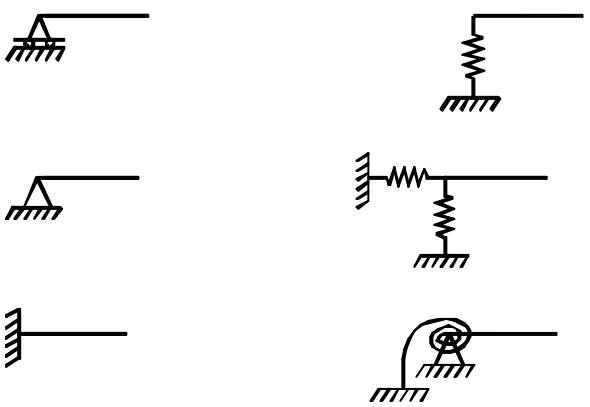


b) Pode-se ter um apoio totalmente elástico



c) Associação entre apoio rígido e apoio elástico

Apoio Rígido Apoio Elástico

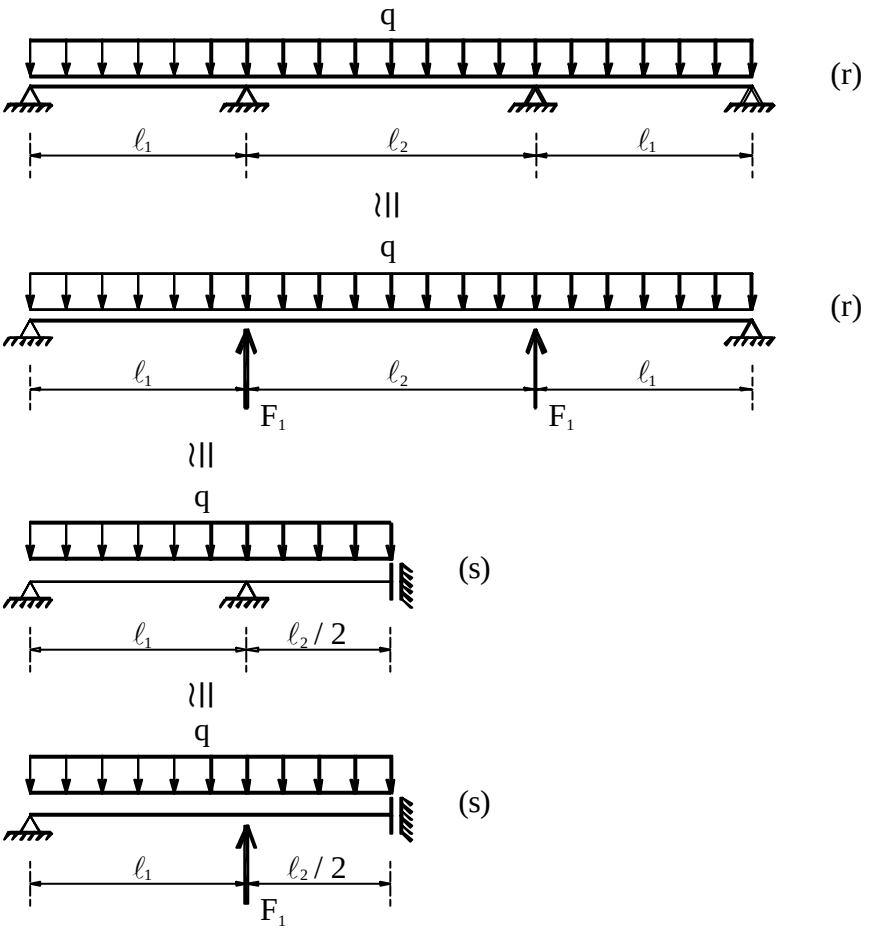


SIMPLIFICAÇÕES DEVIDAS À SIMETRIA

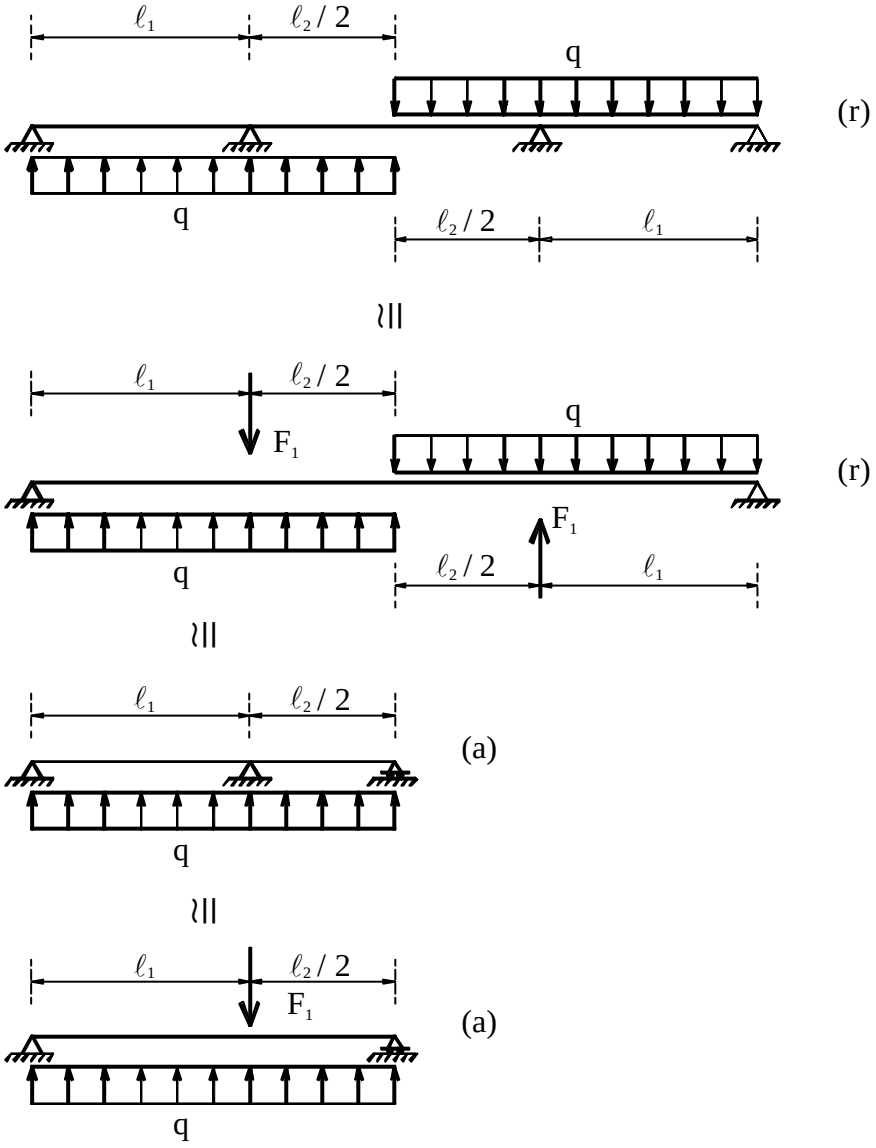
1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No caso de estruturas simétricas, com carregamento simétrico ou antimétrico, é possível se fazer algumas simplificações que podem implicar na diminuição do número de incógnitas hiperestáticas, ou mesmo reduzir a estrutura de tal forma que se possa calcular uma estrutura muito menor que a original.

1.1 Estrutura Simétrica com Carregamento Simétrico

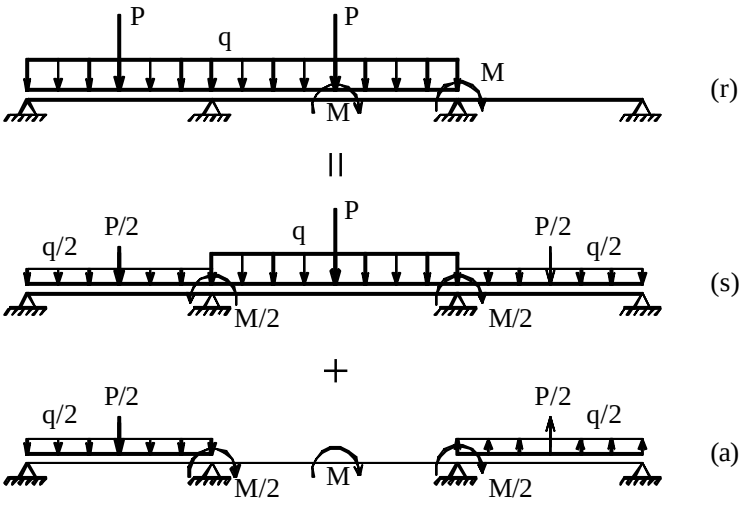


1.2 Estrutura Simétrica com Carregamento Antimétrico



1.3 Estrutura Simétrica com Carregamento Qualquer

O carregamento real (r) de uma estrutura simétrica pode ser colocado como a soma de um carregamento simétrico (s) e um carregamento antimétrico (a)

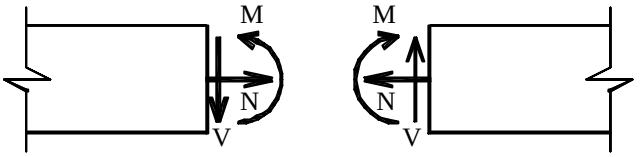


2 ALGUMAS REGRAS PARA A REDUÇÃO DA ESTRUTURA

2.1 Plano de Simetria Perpendicular a uma Barra

Os esforços internos, no plano de simetria, podem ser classificados como simétricos e antimétricos.

Esforços simétricos: M e N
Esforços antimétricos: V



Regras:

- No problema simétrico são nulos os esforços antimétricos no plano de simetria.
- No problema antimétrico são nulos os esforços simétricos no plano de simetria.
- No plano de simetria são nulos os deslocamentos correspondentes aos esforços não nulos do problema simétrico ou antimétrico:

Problema	Esforços não nulos	Deslocamentos nulos	Apoio Equivalente
Simétrico	M e N	ϕ e δ_H	Engaste móvel
Antimétrico	V	δ_V	Apoio móvel

2.2 Plano de Simetria Contendo o Eixo de uma Barra

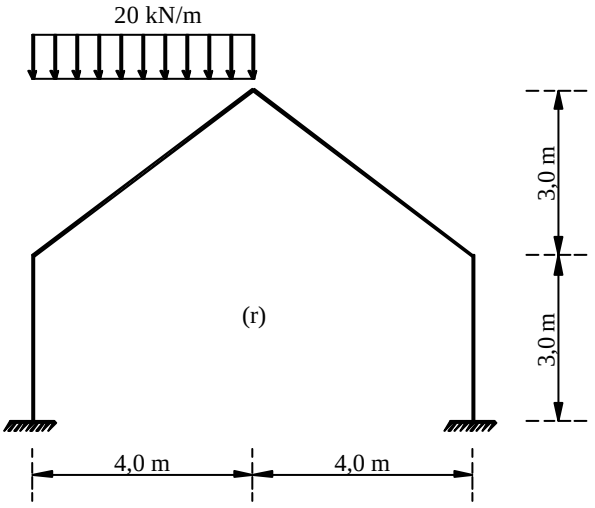
Estrutura espacial

2.3 Grau de Hiperestaticidade das Estruturas Reduzidas

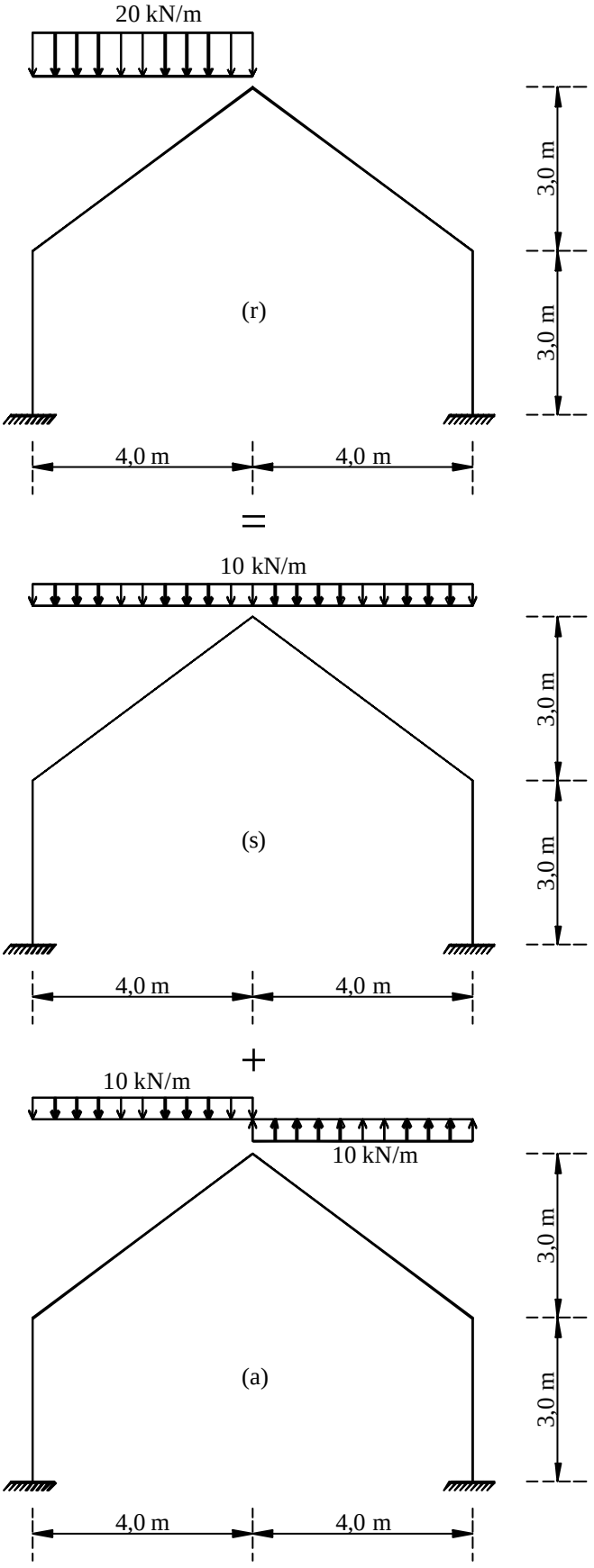
Numa estrutura simétrica submetida a um carregamento qualquer, a soma dos graus de hiperestaticidade da estrutura simétrica reduzida com o grau de hiperestaticidade da estrutura antimétrica reduzida é igual ao grau de hiperestaticidade da estrutura original.

3 EXEMPLO

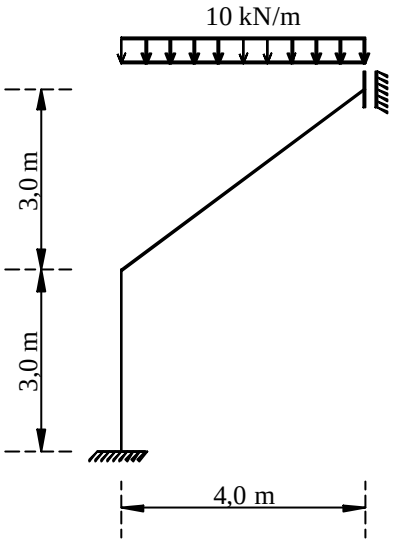
Traçar o diagrama de momentos fletores para o pórtico abaixo. EI = cte.



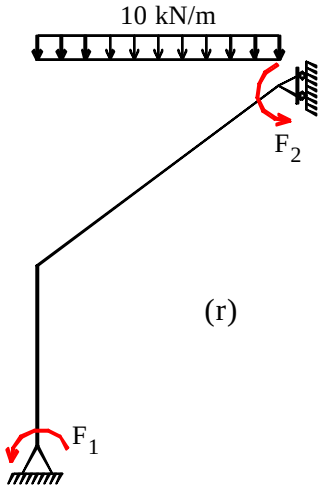
Esquema de solução:



a) Parte Simétrica

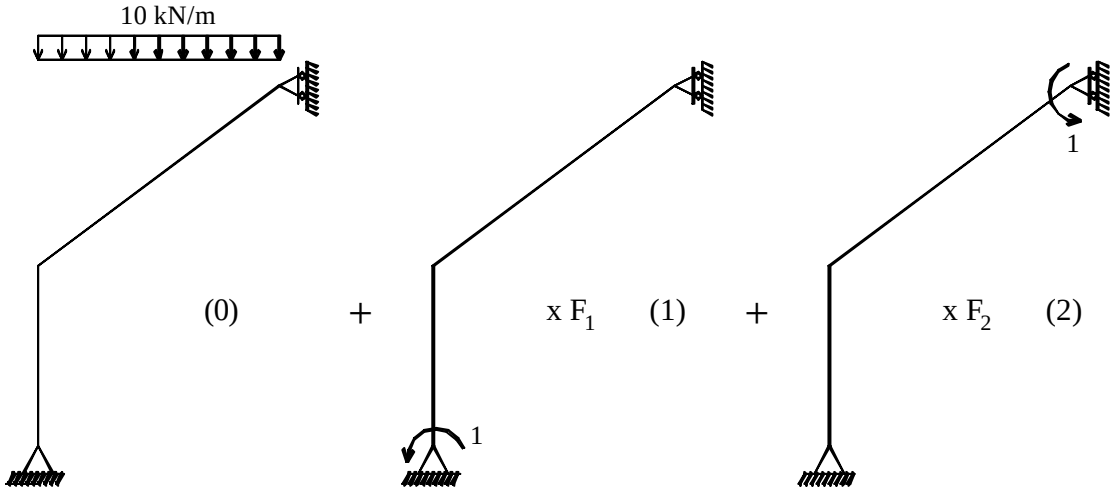


- Estrutura básica e esquema da solução:



(r)

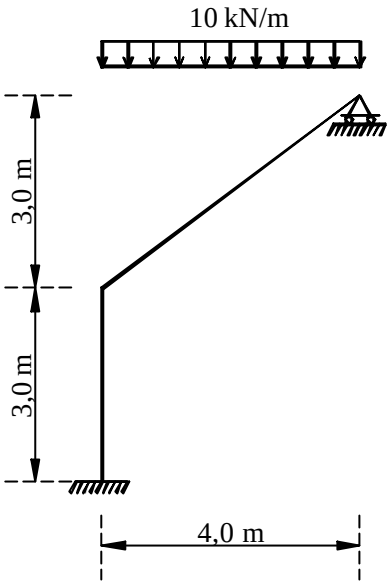
=



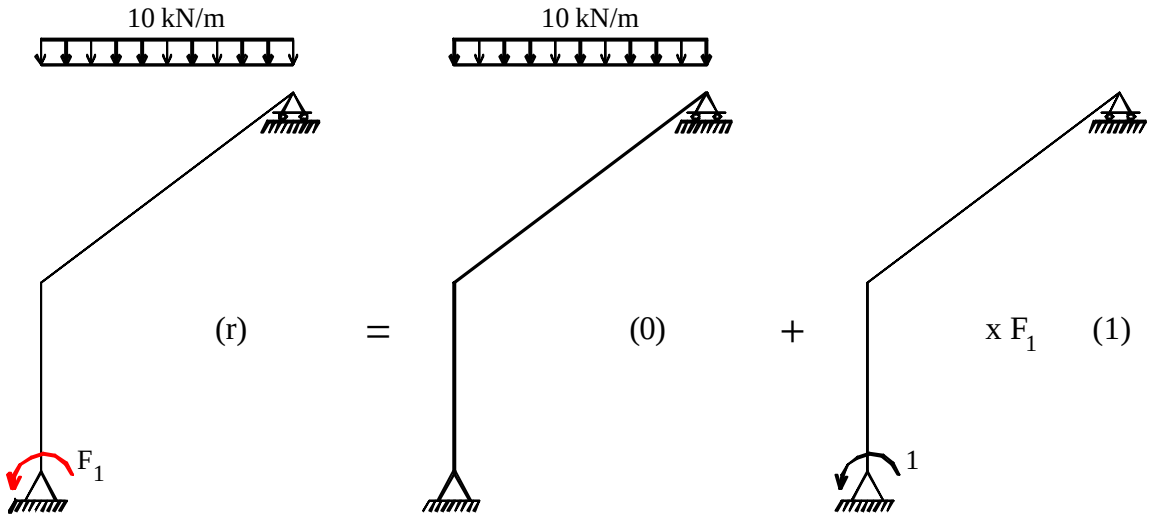
(0) + x F_1 (1) + x F_2 (2)

$$\begin{cases} F_1 = -25{,}6 \ \text{kNm} \\ F_2 = 0{,}80 \ \text{kNm} \end{cases}$$

b) Parte Antimétrica



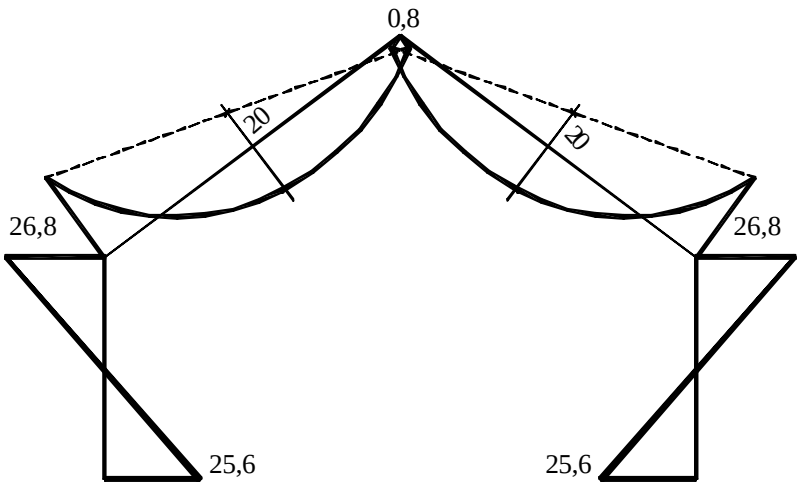
- Estrutura básica e esquema da solução:



$$F_1 = 7{,}1 \text{ kNm}$$

- Diagramas de momentos fletores:

  Parte simétrica (kNm)



Parte antimétrica (kNm)

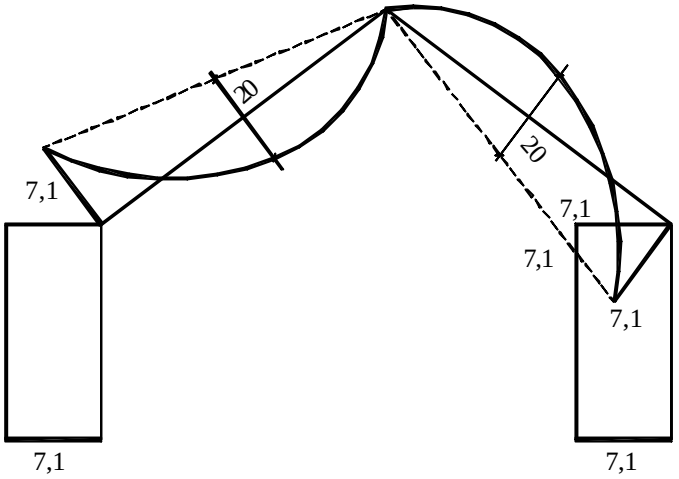
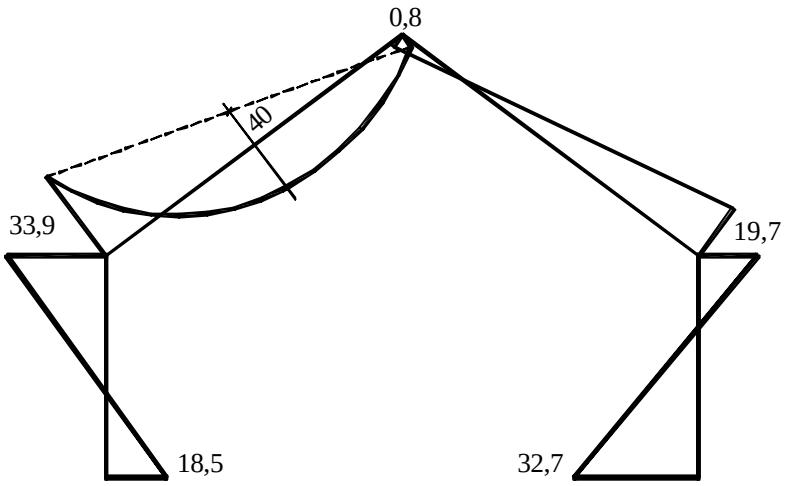


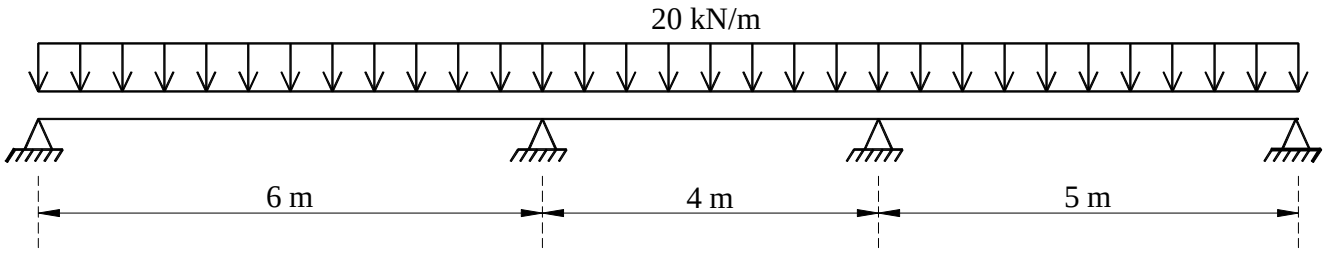
Diagrama final (kNm)



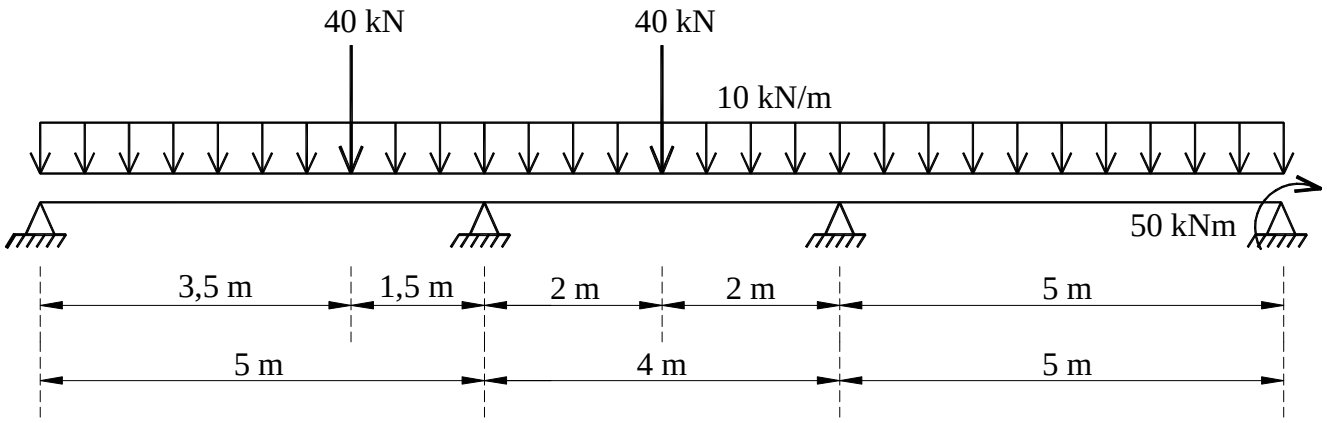
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO E ESTRUTURAS
ENG 114 – HIPERESTÁTICA

Calcular as reações de apoio e traçar os diagramas de esforços solicitantes para as vigas apresentadas a seguir.

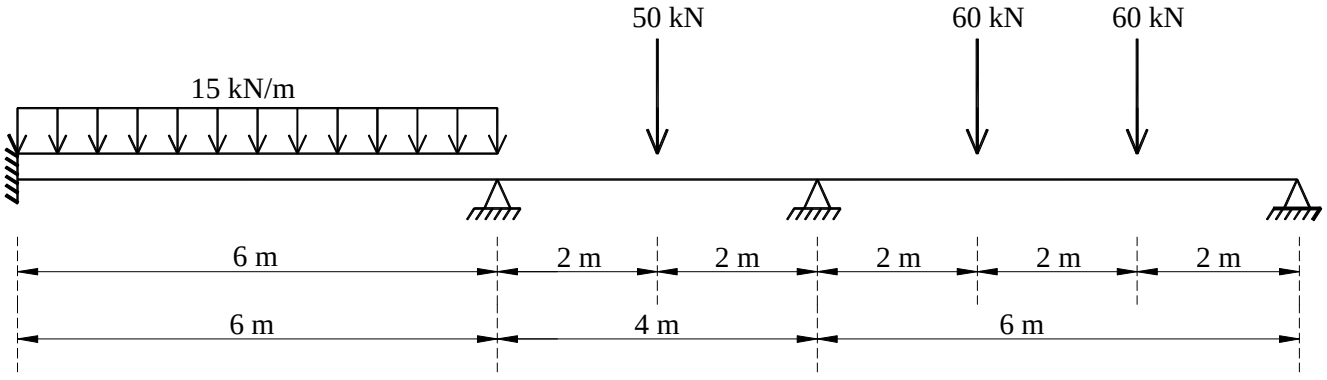
1)



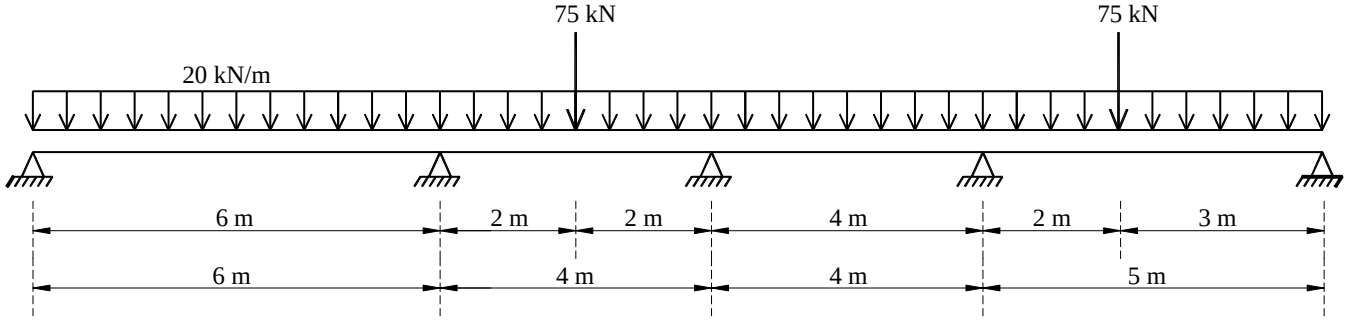
2)



3)



4)



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO E ESTRUTURAS
ENG 114 - HIPERESTÁTICA

3ª. UNIDADE

PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS

1 CONCEITOS BÁSICOS

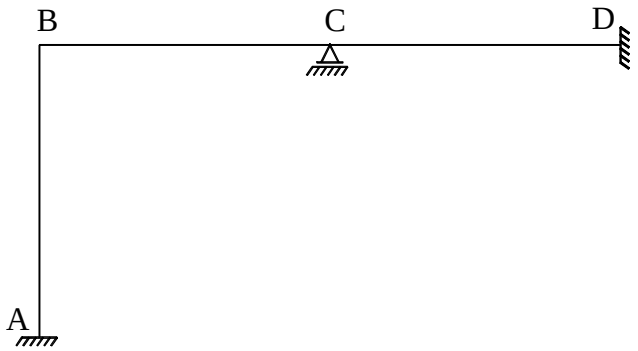
1.1 DESLOCABILIDADE

Para as estruturas planas, cada nó pode apresentar:

- Dois deslocamentos lineares
- Um deslocamento angular (rotação)

1.1.1 Deslocabilidade Interna

Para a estrutura apresentada na figura, são desconhecidos os deslocamentos dos nós B e C.



Para o nó **C**, sabe-se que:

- Não apresenta deslocamento vertical, impedido pelo apoio móvel;
- Não apresenta deslocamento linear horizontal, impedido pelo engaste em **D** (desprezam-se as deformações axiais das barras).

Þ **Única incógnita = rotação**

Para o nó **B**, sabe-se que:

- Não apresenta deslocamento vertical, impedido pelo engaste em **A**;
- Não apresenta deslocamento linear horizontal, impedido pelo engaste em **D**.

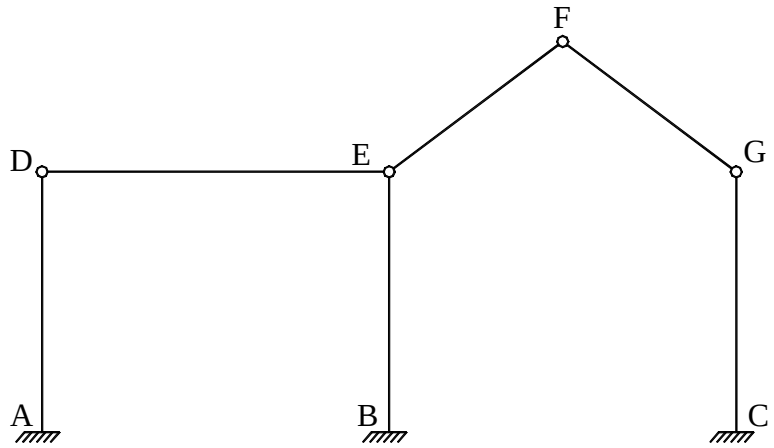
Þ **Única incógnita = rotação**

Portanto, a estrutura apresenta duas deslocabilidades internas que são as rotações dos **B** e **C**. Número igual ao de nós internos rígidos (não rotulados).

Assim, **o número de deslocabilidade interna, d_i, de uma estrutura, é igual ao número de nós internos rígidos que ela possui**.

1.1.2 Deslocabilidade Externa

Seja a estrutura apresentada a seguir.



Ela não possui nós internos rígidos, logo não existem deslocabilidades internas.

Para o nó **D**, sabe-se que:

- Não apresenta deslocamento linear vertical, impedido pelo engaste em **A**.

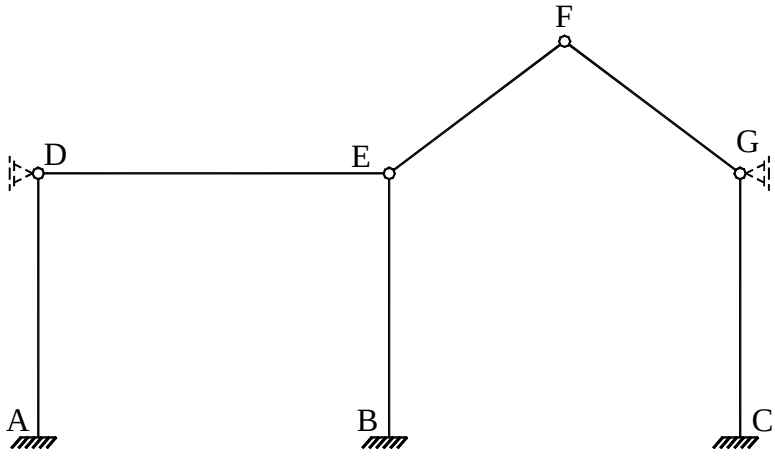
Þ **Única incógnita = deslocamento linear horizontal**

Para o nó **G**, sabe-se que:

- Não apresenta deslocamento linear vertical, impedido pelo engaste em **C**.

Þ **Única incógnita = deslocamento linear horizontal**

Admitindo a existência de apoios adicionais do 1^o gênero nesses nós, eles se tornariam linearmente indeslocáveis, o que acarretaria, também a indeslocabilidade linear dos nós **E** e **F**.



Assim, **o número de deslocabilidade externa, d_e, de uma estrutura é igual ao número de apoios do 1^o gênero que nela precisam ser adicionados, para que todos os seus nós tornem-se indeslocáveis**.

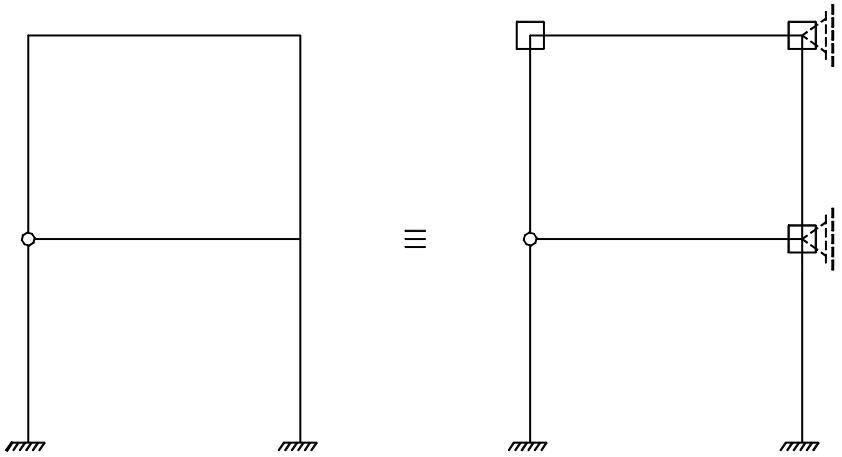
As estruturas que possuem deslocabilidades externas são chamadas de **estruturas deslocáveis**, e aquelas que não as possuem, mesmo apresentando deslocabilidade internas, são chamadas **estruturas indeslocáveis**.

1.1.3 Número Total de Deslocabilidades

O número total de deslocabilidades, **d**, de uma estrutura, é dado pela soma do número de deslocabilidade interna, $\mathbf{d_i}$, e externas, $\mathbf{d_e}$. Assim,

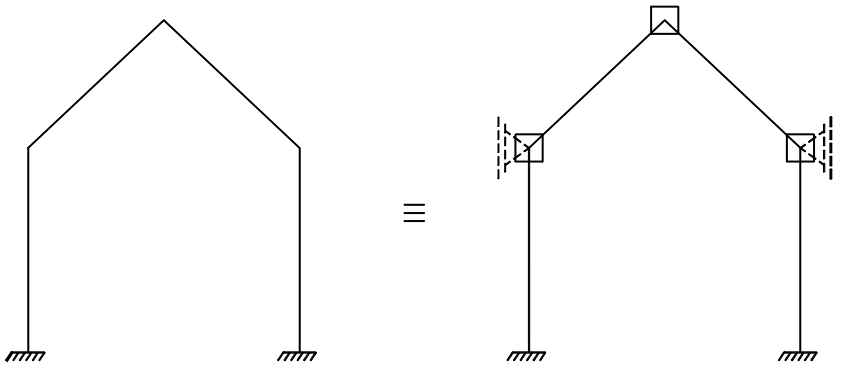
$$d = d_i + d_e$$

1.1.4 Exemplos



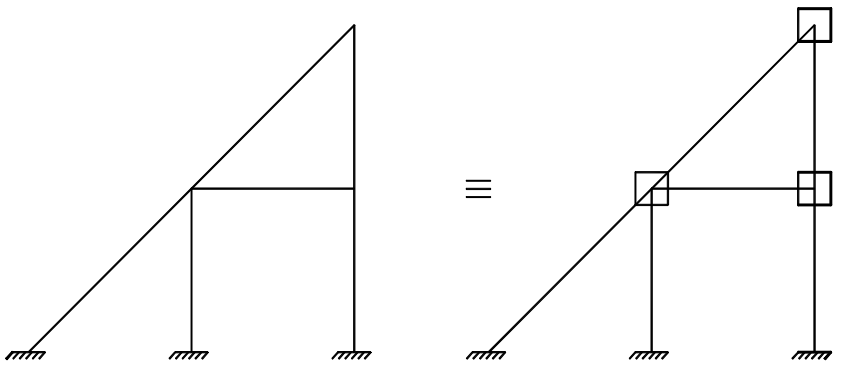
$$d = d_i + d_e$$

$$d = 3 + 2 = 5$$



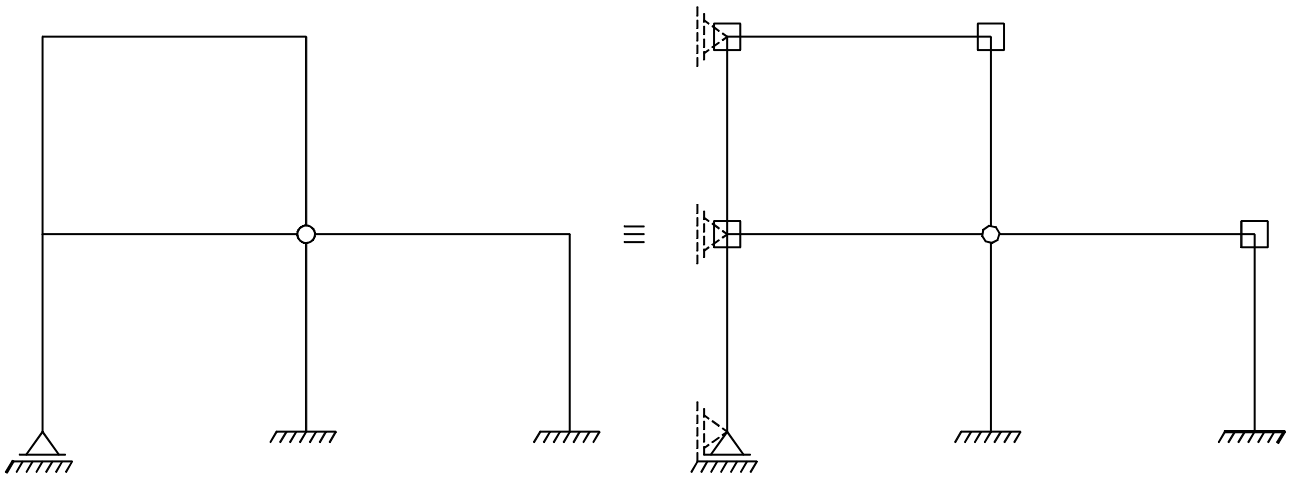
$$d = d_i + d_e$$

$$d = 3 + 2 = 5$$



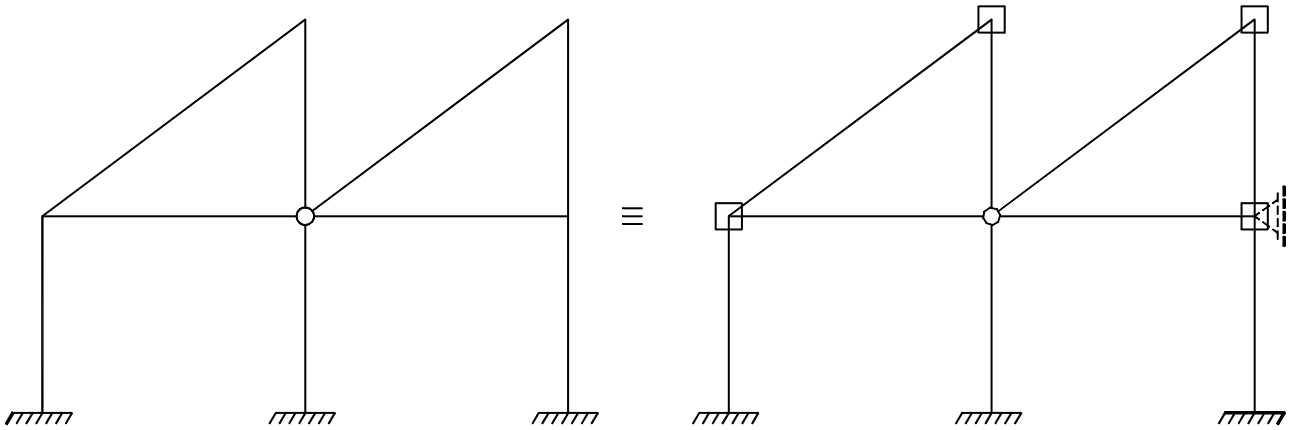
$$d = d_i + d_e$$

$$d = 3 + 0 = 3$$



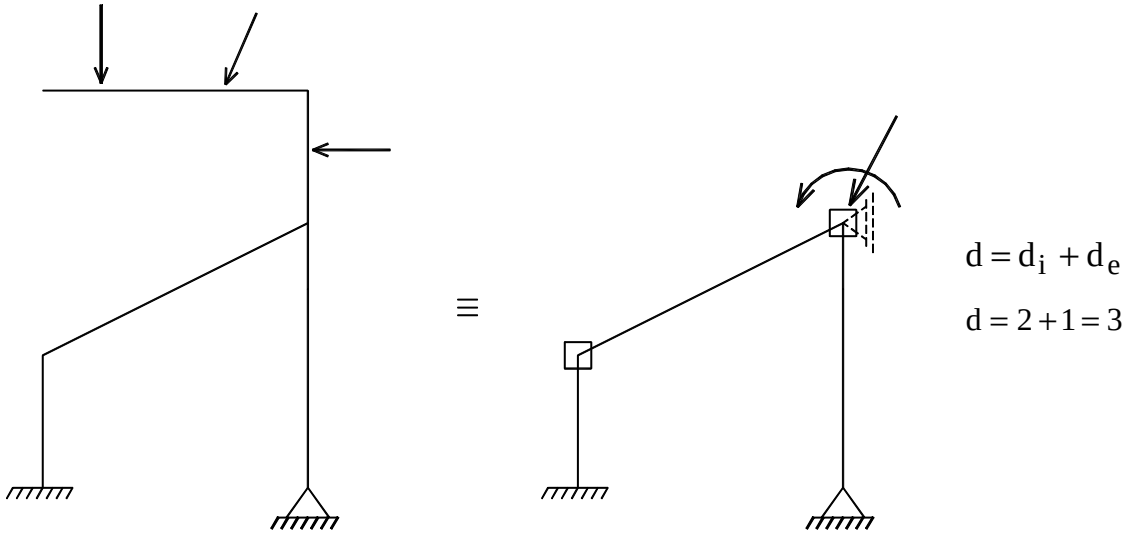
$$d = d_i + d_e$$

$$d = 4 + 3 = 7$$



$$d = d_i + d_e$$

$$d = 4 + 1 = 5$$



$$d = d_i + d_e$$

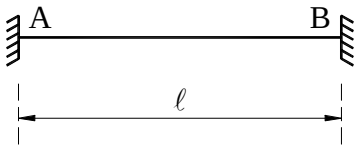
$$d = 2 + 1 = 3$$

1.2 RIGIDEZ DE UMA BARRA

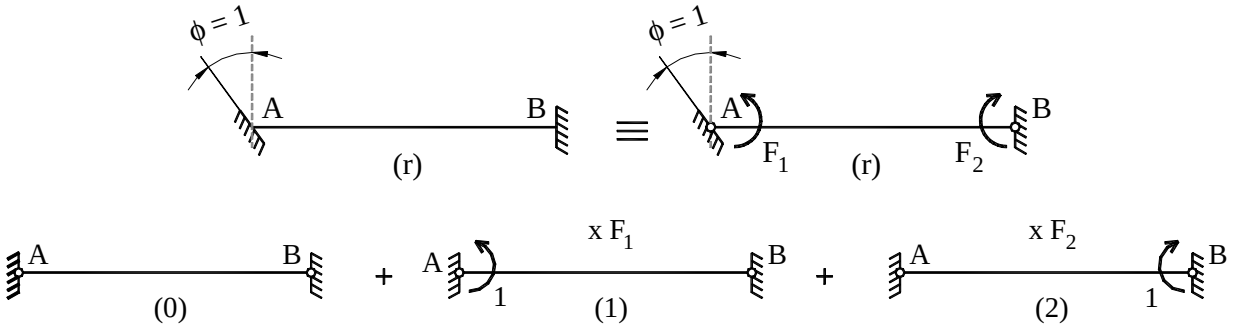
A rigidez de uma barra, em um nó, corresponde ao momento fletor que, aplicado neste nó, suposto livre para girar, provoca uma rotação unitária do mesmo.

1.2.1 Barra Biengastada

Resolvendo a viga abaixo, admitindo-se que em **A** é imposta uma rotação unitária, tem-se



a) Estrutura básica e esquema de solução



b) Equações de compatibilidade de deslocamentos

$$\begin{cases}\phi_{1r}=1\\ \phi_{2r}=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\phi_{10}+\phi_{11}F_1+\phi_{12}F_2=1\\ \phi_{20}+\phi_{21}F_1+\phi_{22}F_2=0\end{cases}$$

c) Cálculo das rotações

M(0) = 0

M(1) M(2)



$EI\phi_{10}=0$ $EI\phi_{20}=0$

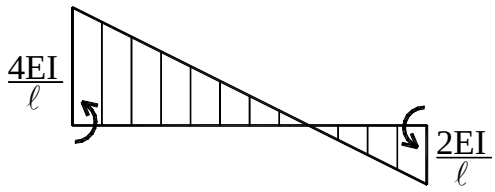
$EI\phi_{11}=\frac{1}{3}\cdot\ell\cdot1\cdot1=\frac{\ell}{3}$ $EI\phi_{22}=\frac{1}{3}\cdot\ell\cdot1\cdot1=\frac{\ell}{3}$

$EI\phi_{12}=EI\phi_{21}=\frac{1}{6}\cdot\ell\cdot1\cdot1=\frac{\ell}{6}$

d) Solução do sistema de equações

$$\begin{cases} EI\phi_{1r} = EI \\ EI\phi_{2r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + \frac{\ell}{3}F_1 + \frac{\ell}{6}F_2 = EI \\ 0 + \frac{\ell}{6}F_1 + \frac{\ell}{3}F_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = \frac{4EI}{\ell} \\ F_2 = \frac{-2EI}{\ell} \end{cases}$$

e) Diagrama de momentos fletores



f) Conclusões

Assim, para uma barra biengastada, com EI = cte, sua rigidez em um nó de sua extremidade é:

$$k = \frac{4EI}{\ell}$$

Pode-se observar que em conseqüência do surgimento do momento fletor igual a $\frac{4EI}{\ell}$, na extremidade que sofreu a rotação unitária, apareceu um momento fletor igual à metade de seu valor, $\frac{2EI}{\ell}$, na outra extremidade da barra, e de mesmo sentido vetorial que a rotação unitária e do momento que o provocou. Portanto, o coeficiente de transmissão de momentos, **t**, de um nó engastado para outro nó também engastado, em uma barra com EI = cte, é dado por:

$$t_{AB} = \frac{M_B}{M_A} = \frac{\frac{2EI}{\ell}}{\frac{4EI}{\ell}} = 0{,}5$$

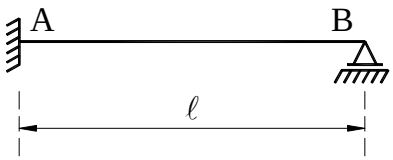
g) Resumindo, para uma barra biengastada tem-se

Rigidez de um nó engastado: $k = \frac{4EI}{\ell}$

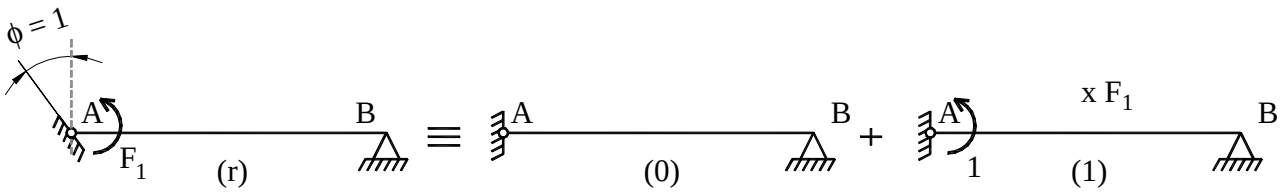
Coeficiente de transmissão de momentos para nós engastados: t = 0,5

1.2.2 Barra Engastada e Apoiada

Seja a viga a seguir, para a qual, no nó **A**, é imposta uma rotação unitária. Tem-se, então:



a) Estrutura básica e esquema de solução



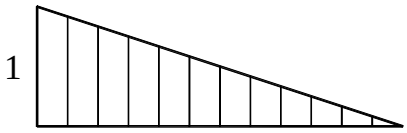
b) Equação de compatibilidade de deslocamentos

$$\phi_{1r} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{10} + \phi_{11} F_1 = 1$$

c) Cálculo das rotações

M(0) = 0

M(1)



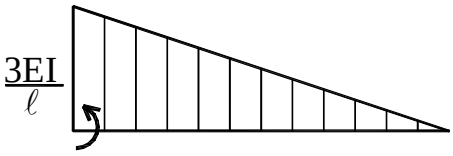
$$EI\phi_{10} = 0$$

$$EI\phi_{11} = \frac{1}{3} \cdot \ell \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\ell}{3}$$

d) Solução do sistema de equações

$$EI\phi_{1r} = EI \qquad \Rightarrow \qquad 0 + \frac{\ell}{3} F_1 = EI \qquad \Rightarrow \qquad F_1 = \frac{3EI}{\ell}$$

e) Diagrama de momentos fletores



f) Conclusões

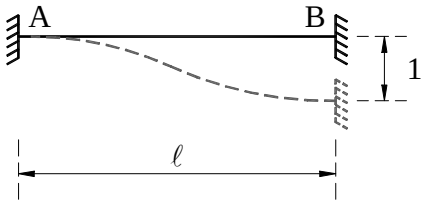
Assim, para o nó engastado de uma barra engastada e rotulada, com EI = cte, sua rigidez é:

$$k = \frac{3EI}{\ell}$$

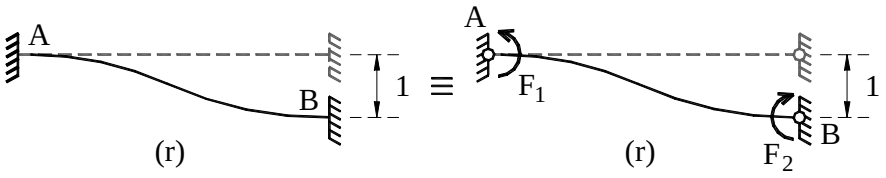
1.3 MOMENTOS FLETORES DEVIDOS A DESLOCAMENTOS ORTOGONAIS

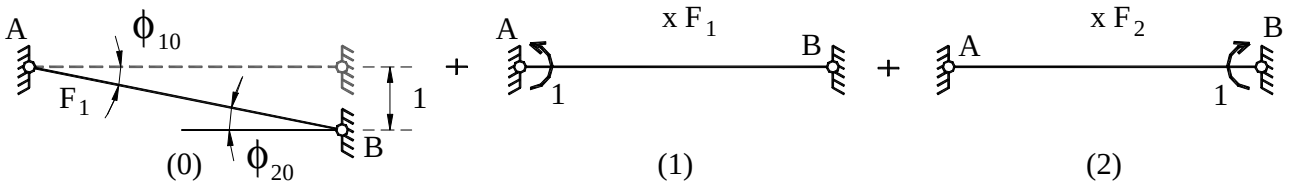
1.3.1 Barra Biengastada

Seja a viga biengastada, apresentada na figura a seguir. Considerando que o apoio em B sofre um deslocamento vertical unitário, para baixo, tem-se



a) Estrutura básica e esquema de solução





b) Equações de compatibilidade de deslocamentos

$$\begin{cases} \phi_{1r} = 0 \\ \phi_{2r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{10} + \phi_{11}F_1 + \phi_{12}F_2 = 0 \\ \phi_{20} + \phi_{21}F_1 + \phi_{22}F_2 = 0 \end{cases}$$

c) Cálculo das rotações

M(0) = 0 M(1) M(2)



$$\phi_{10} = -\frac{1}{\ell} \quad \Rightarrow \quad EI\phi_{10} = -\frac{EI}{\ell}$$

$$\phi_{20} = \frac{1}{\ell} \quad \Rightarrow \quad EI\phi_{20} = \frac{EI}{\ell}$$

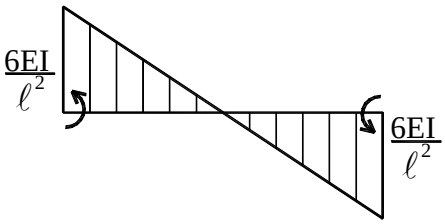
$$EI\phi_{11} = \frac{1}{3}\cdot\ell\cdot 1\cdot 1 = \frac{\ell}{3} \qquad EI\phi_{22} = \frac{1}{3}\cdot\ell\cdot 1\cdot 1 = \frac{\ell}{3}$$

$$EI\phi_{12} = EI\phi_{21} = \frac{1}{6}\cdot\ell\cdot 1\cdot 1 = \frac{\ell}{6}$$

d) Solução do sistema de equações

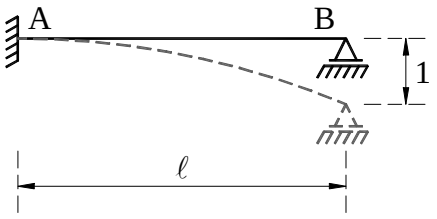
$$\begin{cases} EI\phi_{1r} = 0 \\ EI\phi_{2r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{EI}{\ell} + \frac{\ell}{3}F_1 + \frac{\ell}{6}F_2 = 0 \\ \frac{EI}{\ell} + \frac{\ell}{6}F_1 + \frac{\ell}{3}F_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = \frac{6\,EI}{\ell^2} \\ F_2 = \frac{-6\,EI}{\ell^2} \end{cases}$$

e) Diagrama de momentos

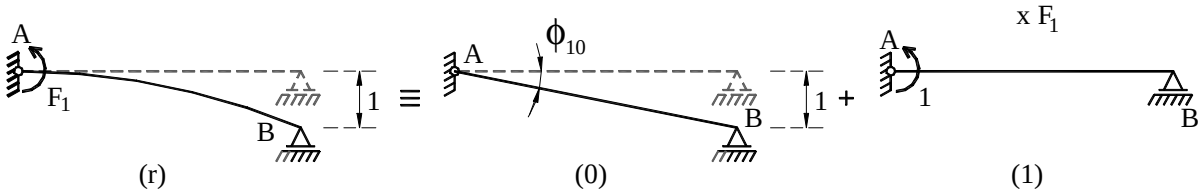


1.3.2 Barra Engastada e Rotulada

Seja a viga, apresentada na figura a seguir. Considerando que o apoio em B sofre um deslocamento vertical unitário, para baixo, tem-se



a) Estrutura básica e esquema de solução

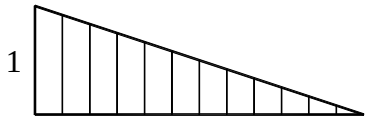


b) Equação de compatibilidade de deslocamentos

$$\phi_{1r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{10} + \phi_{11} F_1 = 0$$

c) Cálculo das rotações

M(0) = 0 M(1)



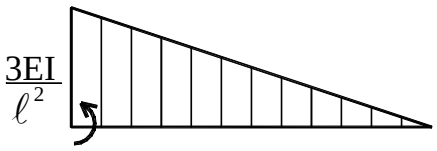
$$\phi_{10} = -\frac{1}{\ell} \qquad \Rightarrow \qquad EI\phi_{10} = -\frac{EI}{\ell}$$

$$EI\phi_{11} = \frac{1}{3} \cdot \ell \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\ell}{3}$$

d) Solução do sistema de equações

$$EI\phi_{1r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{EI}{\ell} + \frac{\ell}{3} F_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_1 = \frac{3EI}{\ell^2}$$

e) Diagrama de momentos fletores



2 O PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS

É semelhante ao processo dos esforços, trocando-se:

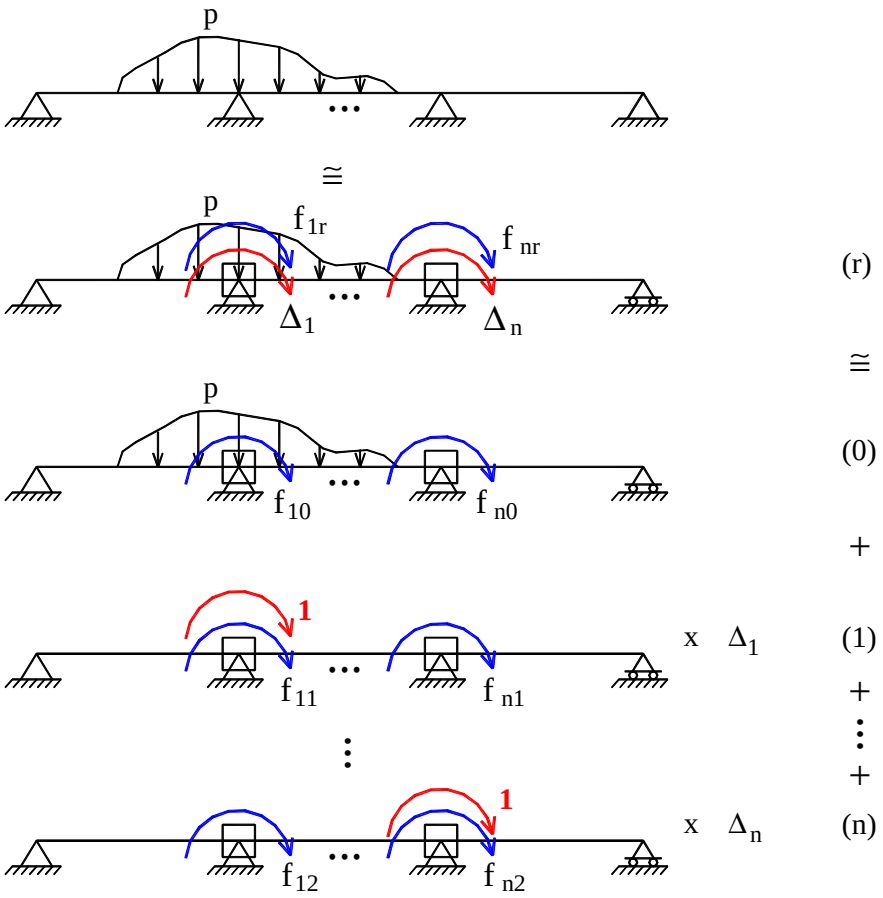
- Retirada de vínculos por introdução de vínculos;
- Esforços por deslocamentos;
- Compatibilidade de deslocamentos por compatibilidade de esforços
- Estrutura básica estaticamente determinada por estrutura básica geometricamente determinada

A idéia básica do processo dos deslocamentos é adicionar vínculos para se recair em uma estrutura básica geometricamente determinada, com grau de hiperestaticidade maior do que a estrutura real, mas mais simples de se resolver.

O número de vínculos que devem ser adicionados é igual ao número total de deslocabilidades, **d**

Seja o caso de se resolver uma estrutura com número total de deslocabilidades igual a **n**, submetida a uma solicitação qualquer.

Adicionam-se n vínculos de forma que a estrutura real r se torne geometricamente determinada. O problema real r não se altera desde que os vínculos imponham exatamente os mesmos deslocamentos D_1, D_2, ..., D_n impedidos. Esses deslocamentos são inicialmente desconhecidos



Valendo a superposição de efeitos e a proporcionalidade entre causa e efeito, o problema real (r) pode ser expandido numa soma de problema, (0), (1), (2), ..., (j), ..., (n), sobre a mesma estrutura básica, cada uma correspondente a uma solicitação, ou seja:

$$(r) = (0) + (1)\,\Delta_1 + (2)\,\Delta_2 + \ldots + (j)\,\Delta_j + \ldots + (n)\,\Delta_n \qquad (A)$$

Qualquer efeito E(r), então, pode ser determinado a partir de:

$$E(r) = E(0) + E(1)\,\Delta_1 + E(2)\,\Delta_2 + \ldots + E(j)\,\Delta_j + \ldots + E(n)\,\Delta_n \qquad (B)$$

Sendo $\mathbf{f_{jk}}$ a força na direção e sentido de D_j no problema (k), tem-se que:

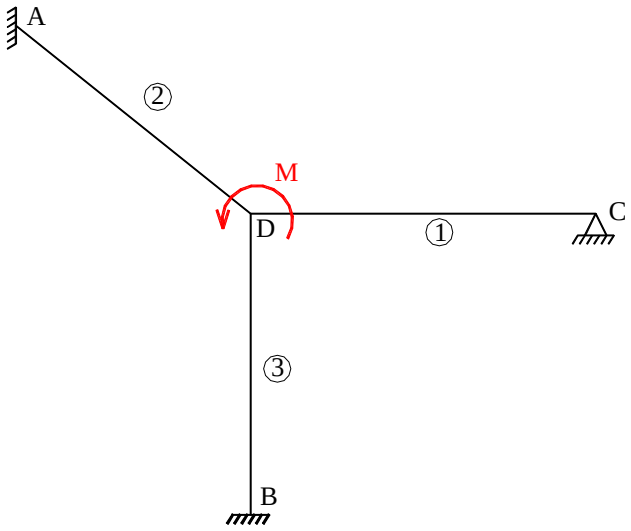
$$\begin{cases} f_{1r} = f_{10} + f_{11}\,\Delta_1 + \cdots + f_{1j}\,\Delta_j + \cdots + f_{1n}\,\Delta_n \\ \vdots \\ f_{jr} = f_{j0} + f_{j1}\,\Delta_1 + \cdots + f_{jj}\,\Delta_j + \cdots + f_{jn}\,\Delta_n \\ \vdots \\ f_{nr} = f_{n0} + f_{n1}\,\Delta_1 + \cdots + f_{nj}\,\Delta_j + \cdots + f_{nn}\,\Delta_n \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

Sendo as forças $\mathbf{f_{jr}}$ definidas, geralmente nulas, e as forças $\mathbf{f_{jn}}$, as forças de bloqueio dos deslocamentos impostos na estrutura básica (reações nos vínculos adicionados), a solução do sistema de equações (C), permite calcular os deslocamentos D_j, e com a equação (B), resolver o problema.

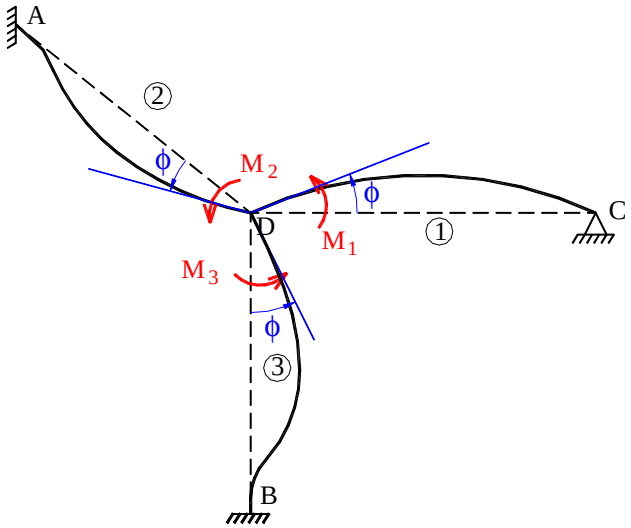
PROCESSO DE CROSS

1 INTRODUÇÃO

Seja o nó **D** da **estrutura indeslocável** abaixo, submetido a um momento **M**.



O nó **D** irá girar de um ângulo ϕ, aparecendo, então, nas extremidades das barras os momentos $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ e $\mathbf{M_3}$.



Pela definição de rigidez:

$$M_1 = K_1^D \phi \qquad M_2 = K_2^D \phi \qquad M_3 = K_3^D \phi \qquad \text{(A)}$$

Por compatibilidade estática:

$$M_1 + M_2 + M_3 = M$$

ou,

$$\left(K_1^D + K_2^D + K_3^D\right)\phi = M$$

logo,

$$\sum K_i^D \phi = M$$

Assim,

$$\phi = \frac{M}{\sum K_i^D} \qquad \text{(B)}$$

Substituindo-se (B) em (A), tem-se:

$$M_1 = \frac{K_1^D}{\sum K_i^D} M \qquad M_2 = \frac{K_2^D}{\sum K_i^D} M \qquad M_3 = \frac{K_3^D}{\sum K_i^D} M$$

Portanto, de uma maneira geral, pode-se escrever:

$$M_i = \frac{K_i}{\sum K_i} M$$

Portanto, uma carga momento, aplicada em um nó de uma estrutura indeslocável, irá se distribuir entre as diversas barras concorrentes neste nó segundo parcelas proporcionais à rigidez, neste nó, da cada uma das barras.

Chamando-se de coeficiente de distribuição de momentos, a relação entre a rigidez de uma barra em um nó e o somatório de todas as rigidezes das barras concorrentes neste nó, ou seja:

$$d_i = \frac{K_i}{\sum K_i}$$

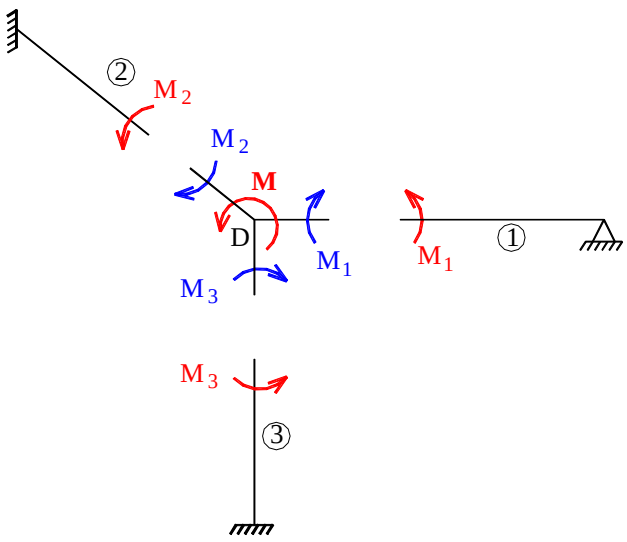
tem-se, desta forma:

$$M_i = d_i M$$

OBSERVAÇÕES:

1. A soma dos coeficientes de distribuição de momentos $\mathbf{d_i}$, em torno de um nó, é sempre igual a 1.
2. Com **M** no sentido anti-horário, para que haja equilíbrio M_1, M_2 e M_3, no nó **D**, têm sentido horário, conseqüentemente, M_1, M_2 e M_3, nas barras 1, 2 e 3, respectivamente, têm sentido anti-horário. Portanto, os momentos equilibrantes em torno de um nó têm sinais opostos ao do momento atuante no nó, sendo seus módulos dados por:

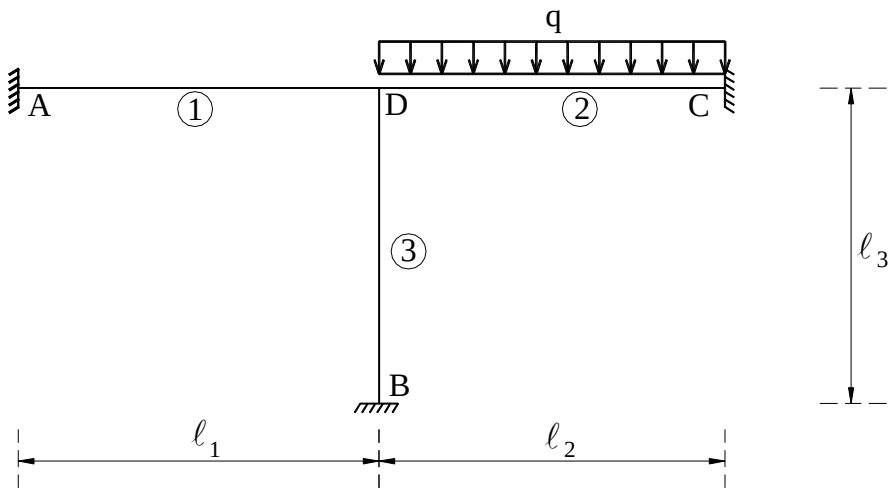
$$M_i = d_i M$$



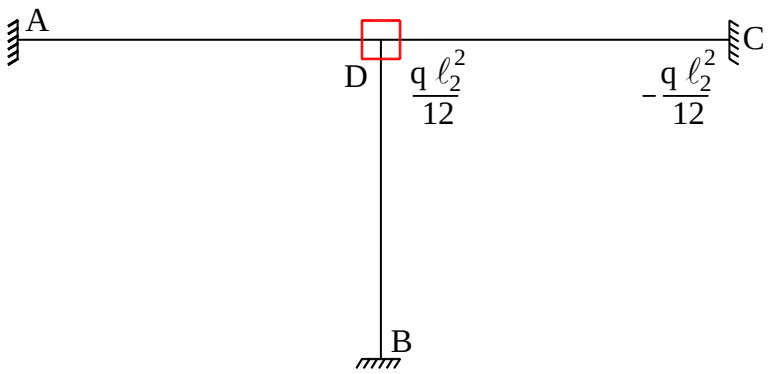
2 DESENVOLVIMENTO

O procedimento descrito a seguir só é válido para estruturas indeslocáveis.

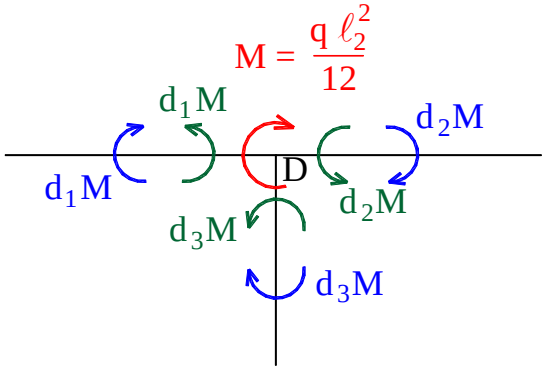
Resolver o seguinte pórtico para o qual EI = constante



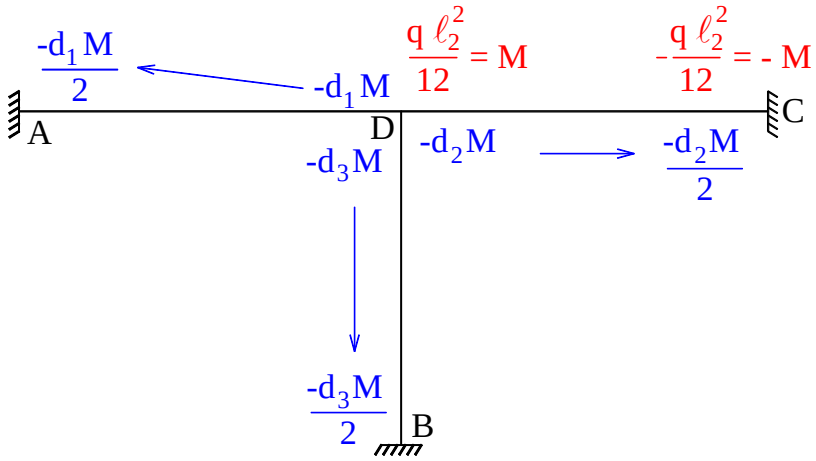
O pórtico possui uma deslocabilidade interna no nó D. Assim, colocando-se uma chapa neste nó, obtem-se:



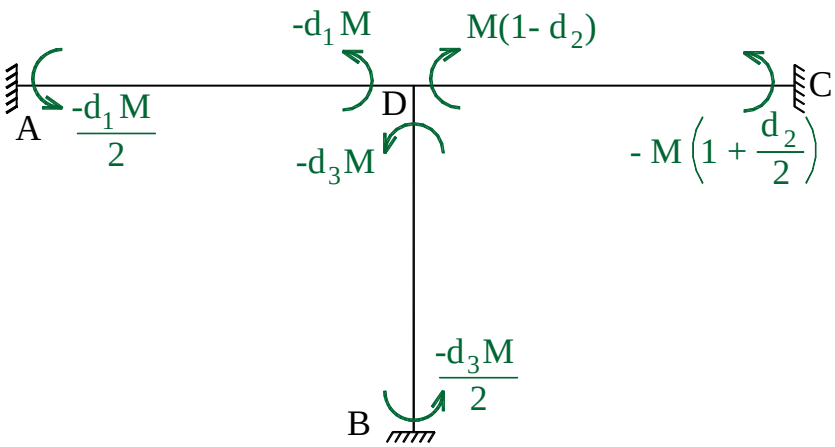
Liberando-se a rotação da chapa, o nó D funcionará como tendo uma carga momento igual a $M = \frac{q\ell^2}{12}$, no sentido horário, (ação da barra 2 sobre o nó A). Assim, para que haja equilíbrio surgem os momentos d_1M, d_2M e d_3M, no nó **D**, no nó D, e, conseqüentemente d_1M, d_2M e d_3M, nas barras 1, 2 e 3, respectivamente.



Assim, obtêm-se os seguintes momentos nas extremidades das barras:



E, a estrutura está, assim, resolvida, sendo os momentos nos nós apresentados a seguir.



E o diagrama de momentos fletores assume a seguinte forma:

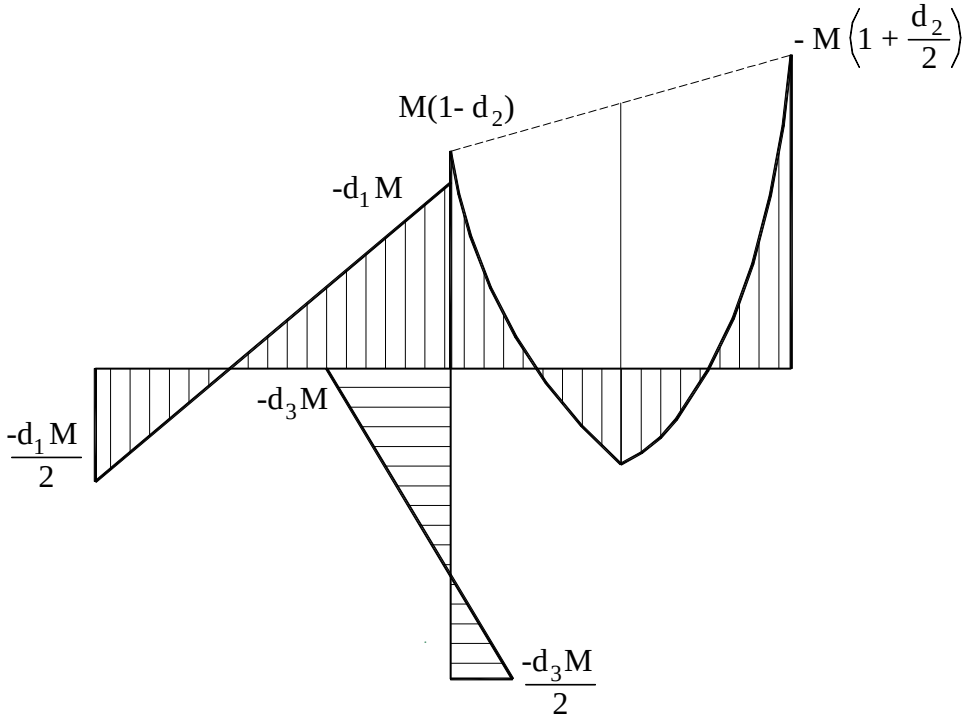
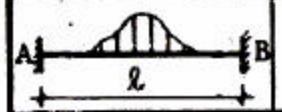
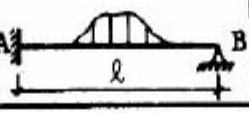
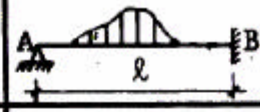
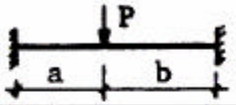
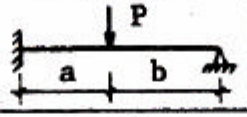
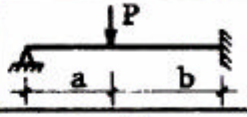
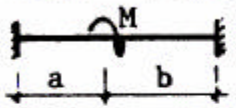
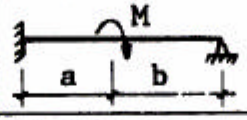
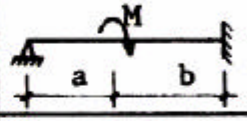
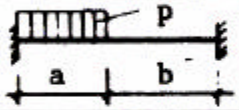
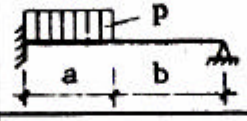
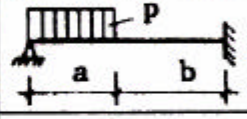
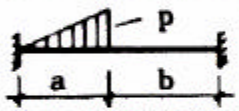
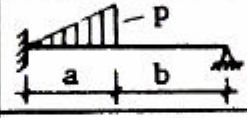
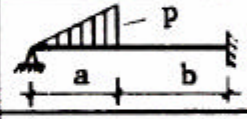
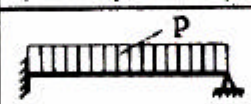
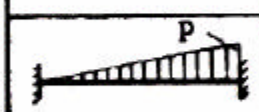
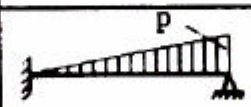
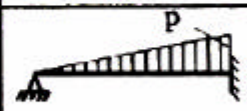
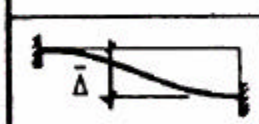
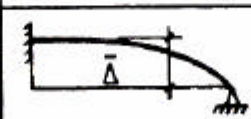
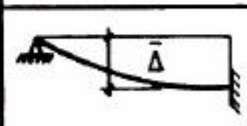
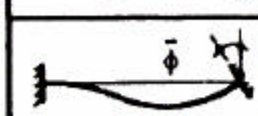
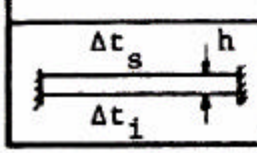
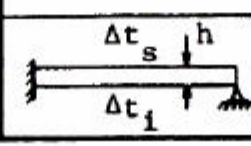
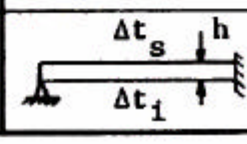


TABELA 3 : MOMENTOS DE EXTREMIDADE DE UMA BARRA A-B COM COMPRIMENTO ℓ

	M_{AB}	M_{BA}		M'_{AB}		M'_{BA}
						
	$\frac{Pab^2}{\ell^2}$	$-\frac{Pa^2b}{\ell^2}$		$\frac{Pab}{2}\frac{\ell+b}{\ell^2}$		$-\frac{Pab}{2}\frac{\ell+a}{\ell^2}$
	$\frac{Mb}{\ell^2}(3b-2\ell)$	$-\frac{Ma}{\ell^2}(2\ell-3a)$		$\frac{M}{2\ell^2}(3b^2-\ell^2)$		$-\frac{M}{2\ell^2}(\ell^2-3a^2)$
	$\frac{pa^2}{12\ell^2}(6\ell^2-8\ell a+3a^2)$	$-\frac{pa^3}{12\ell^2}(4\ell-3a)$		$\frac{pa^2}{8\ell^2}(2\ell-a)^2$		$-\frac{pa^2}{8\ell^2}(2\ell^2-a^2)$
	$\frac{pa^2}{30\ell^2}(10\ell^2-15\ell a+6a^2)$	$-\frac{pa^3}{20\ell^2}(5\ell-4a)$		$\frac{pa^2}{120\ell^2}(40\ell^2-45\ell a+12a^2)$		$-\frac{pa^2}{30^2}(5\ell^2-3a^2)$
	$+\frac{p\ell^2}{12}$	$-\frac{p\ell^2}{12}$		$+\frac{p\ell^2}{8}$		$-\frac{p\ell^2}{8}$
	$+\frac{p\ell^2}{30}$	$-\frac{p\ell^2}{20}$		$+\frac{7p\ell^2}{120}$		$-\frac{p\ell^2}{15}$
	$+\frac{6EI\bar{\Delta}}{\ell^2}$	$+\frac{6EI\bar{\Delta}}{\ell^2}$		$+\frac{3EI\bar{\Delta}}{\ell^2}$		$+\frac{3EI\bar{\Delta}}{\ell^2}$
	$+\frac{2EI\bar{\phi}}{\ell}$	$+\frac{4EI\bar{\phi}}{\ell}$		$-\frac{3EI\bar{\phi}}{\ell}$		$+\frac{3EI\bar{\phi}}{\ell}$
	$+\frac{EI}{h}\alpha_t(\Delta t_i-\Delta t_s)$	$-\frac{EI}{h}\alpha_t(\Delta t_i-\Delta t_s)$		$+\frac{3EI}{2h}\alpha_t(\Delta t_i-\Delta t_s)$		$-\frac{3EI}{2h}\alpha_t(\Delta t_i-\Delta t_s)$

CONVENÇÃO DE GRINTER