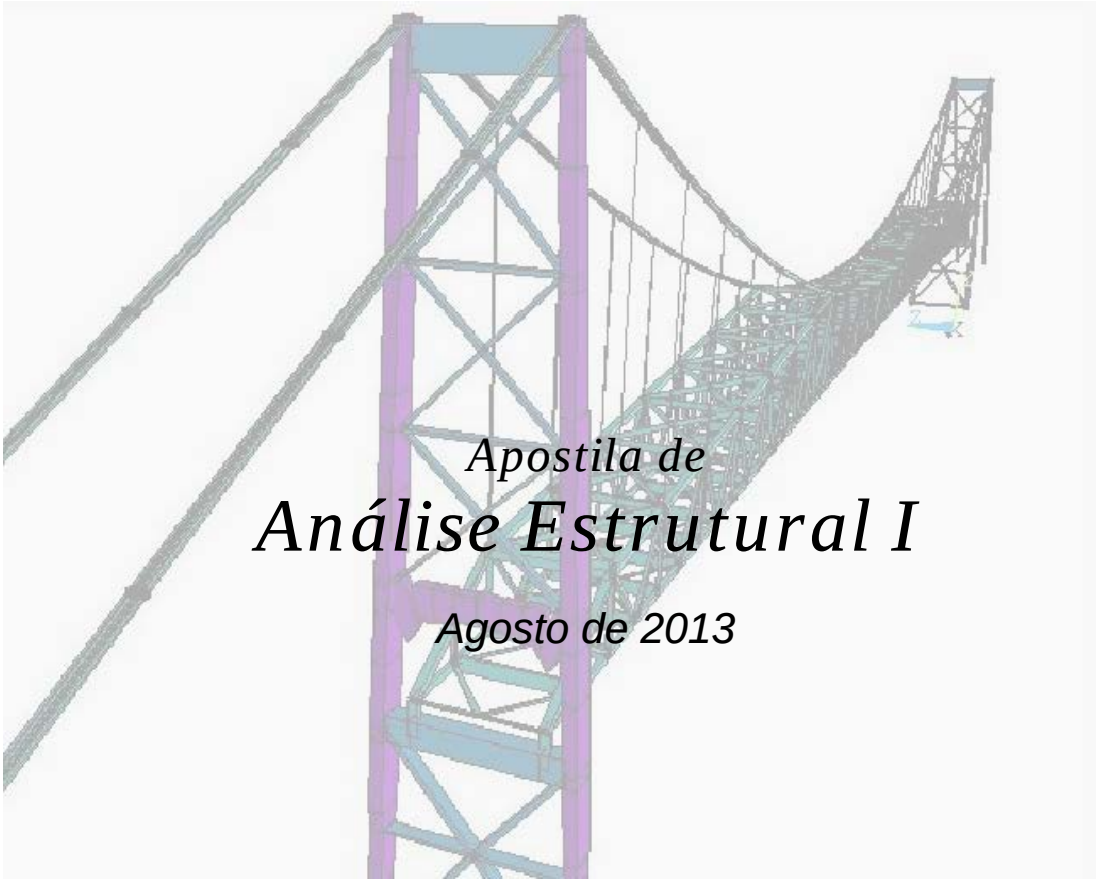
Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Civil



Apostila de

Análise Estrutural I

Agosto de 2013

Grupo de Experimentação em Estruturas – GRUPEX

Programa de Educação Tutorial – PET

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Civil

Apostila de

Análise Estrutural I

Ângela do Valle

Henriette Lebre La Rovere

Nora Maria De Patta Pillar

Colaboração dos Bolsistas PET: Alex Willian Buttchevitz
Alexandre Garghetti
André Ricardo Hadlich
Helen Berwanger
Stephanie Thiesen
Talita Campos Kumm
Valmir Cominara Júnior
Vanessa Pfleger
Andrei Nardelli
Brunela Francine da Cunha

Colaboração dos Monitores: Artur Dal Prá (2006-1)
Willian Pescador (2007-1)
Gabriel Ferreira (2013-1)

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 1
1.1 Parâmetros que influenciam a concepção de sistemas estruturais 1
1.2 Classificação das peças estruturais quanto à geometria 1
1.3 Tipos de Vínculos 3
1.3.1 Vínculos no plano 3
1.4 Estaticidade e Estabilidade 9
1.5 Reações de apoio em estruturas planas 16
1.5.1 Estrutura Aporticada 16
1.5.2 Pórtico Isostático 17
1.5.3 Treliça Isostática 17
1.5.4 Pórtico Triarticulado Isostático 18
1.6 Reações de Apoio no Espaço 22
1.6.1 Treliça Espacial 22
1.6.2 Pórtico Espacial 23
2. ESFORÇOS INTERNOS EM ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS 24
2.1 Treliças 24
2.1.1 Método de Cremona 30
2.1.2 Método de Ritter 40
2.2 Vigas 46
2.2.1 Vigas Simples – Método Direto para Diagramas 46
2.2.2 Vigas Gerber 52
2.2.3 Vigas Inclinadas 58
2.3 Pórticos 65
2.3.1 Estruturas Aporticadas 66
2.3.2 Pórticos Simples 73
2.3.3 Pórtico com Articulação e Tirante 80
2.3.4 Pórticos Compostos 82
2.4 Cabos 86
2.4.1 Reações de Apoio para Cabos 91
2.4.2 Esforços Normais de Tração Atuantes em Cabos 96
2.4.3 Conformação Geométrica Final do Cabo 101
2.5 Arcos 110
2.5.1 Arcos Biapoiados 119
2.5.2 Pórticos com Arcos (ou Barras Curvas) 122
2.5.3 Arcos Triarticulados 124
2.6 Grelhas 134
3. ESTUDO DE CARGAS MÓVEIS EM ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS 143
3.1 Cargas Móveis – Trem-Tipo 143
3.2 O Problema a Resolver 143
3.3 Linhas de Influência – Definição 145
3.4 Obtenção dos Efeitos, Conhecidas as L.I. 149
3.5 Exemplos em Estruturas Isostáticas Simples 150
3.5.1 Viga Engastada e Livre 150
3.5.2 Viga Biapoiada 152
3.6 Análise de Efeitos 155
3.6.1 Teorema Geral 155
3.6.2 Obtenção de Momento Fletor Máximo em uma Seção S de uma Viga Biapoiada para um dado Trem-tipo Constituído de Cargas Concentradas 155
LISTAS DE EXERCÍCIOS 175
Graus de estaticidade 176
Treliças 178
Vigas 187
Cabos 193
Arcos 195
Grelhas 198

1. INTRODUÇÃO

1.1. Parâmetros que influenciam a concepção de sistemas estruturais

A estrutura é conjunto formado pelas partes resistentes que garantem a estabilidade de um objeto de projeto, por exemplo, uma edificação. Quando se projeta uma estrutura, a análise do comportamento estrutural exige que sejam feitas algumas simplificações que conduzem a modelos estruturais. Para que se defina o sistema estrutural mais adequado, para uma determinada situação de projeto, devem ser considerados vários fatores. Os principais são:

- Projeto arquitetônico:

-Aspectos funcionais (dimensão do espaço interno, iluminação, limitações do espaço exterior, etc.);

-Aspectos estéticos (sistemas diferentes geram formas diferentes).

- Carregamento atuante:

-Permanente;

-Variável { Acidental;
Efeito do vento.

- Condições de fabricação, transporte e montagem da estrutura (vias de acesso, içamento);
- Material estrutural a ser utilizado (cada material possui características mecânicas peculiares): o material deve estar adequado aos tipos de esforços solicitantes pelas estruturas.

Para identificação do sistema estrutural mais adequado deve-se:

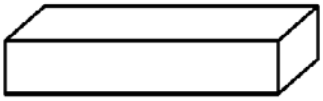
1º) Identificar as possíveis opções;
2º) Analisar e comparar as vantagens e inconvenientes de cada um.

1.2. Classificação das peças estruturais quanto à geometria

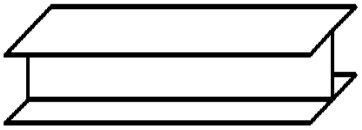
Os sistemas estruturais são modelos de comportamento idealizados para representação e análise de uma estrutura tridimensional. Estes modelos obedecem a uma convenção. Esta convenção pode ser feita em função da geometria das peças estruturais que compõem o conjunto denominado sistema estrutural.

Quanto à geometria, um corpo pode ser identificado por três dimensões principais que definem seu volume. Conforme as relações entre estas dimensões, surgem quatro tipos de peças estruturais:

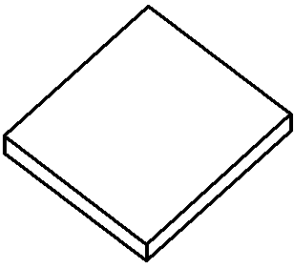
Barra: duas dimensões da mesma ordem de grandeza e uma terceira maior que as outras duas.



Barra de elementos delgados: as três dimensões principais são de diferentes ordens de grandeza. É o caso dos perfis metálicos, onde a espessura é muito menor que as dimensões da seção transversal, que é menor que o comprimento da peça. As barras de elementos delgados são tratadas, sob o ponto de vista estrutural, da mesma forma que as barras, exceção feita à solicitação por torção.



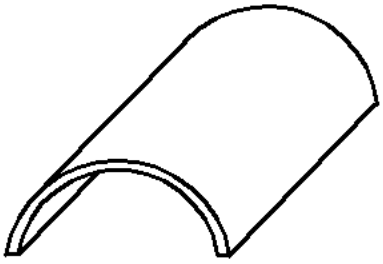
Folhas ou lâminas: duas dimensões de mesma ordem de grandeza, maiores que a terceira dimensão. Subdividem-se em:



Placas: carregamento perpendicular ao plano médio.

Chapas: carregamento contido no plano médio.

Cascas: superfície média curva.



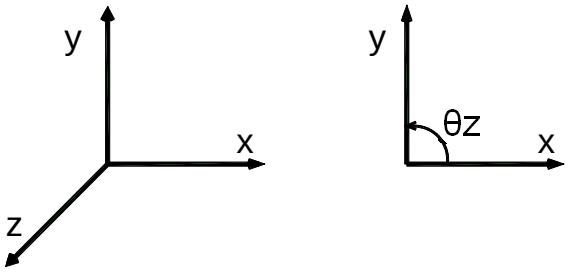
Bloco: as três dimensões são da mesma ordem de grandeza.

1.3. Tipos de Vínculos

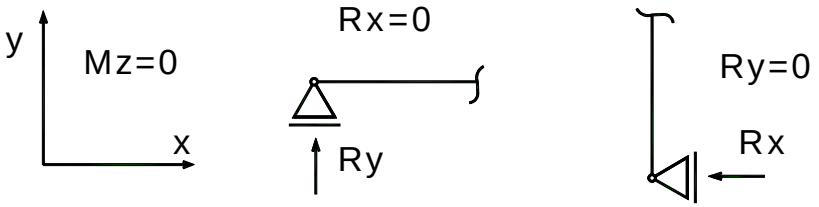
Vínculos são elementos que impedem o deslocamento de pontos das peças, introduzindo esforços nesses pontos correspondentes aos deslocamentos impedidos. Os deslocamentos podem ser de translação ou de rotação.

1.3.1 Vínculos no plano

No plano, um corpo rígido qualquer tem três graus de liberdade de movimento: deslocamento em duas direções e rotação.



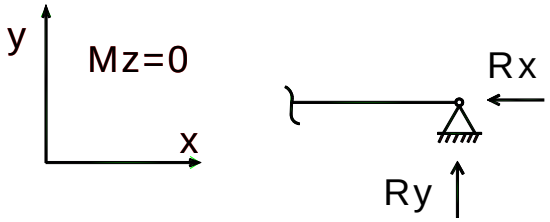
a) Apoio simples ou de primeiro gênero:



Reação na direção do movimento impedido.

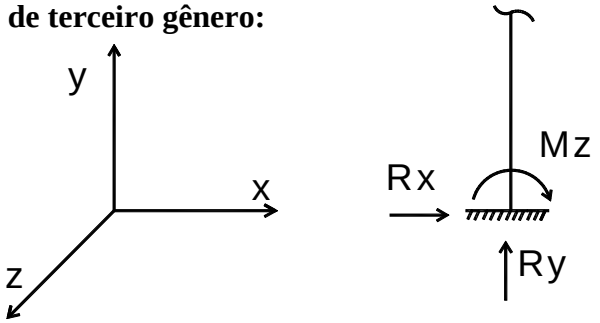
Exemplo de movimento: rolete do skate.

b) Articulação, rótula ou apoio do segundo gênero:



Exemplo de movimento: dobradiça.

c) Engaste: ou apoio de terceiro gênero:

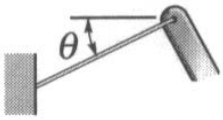


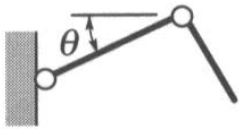
Exemplo de movimento: poste enterrado no solo.

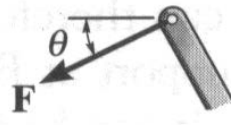
Vínculos no Plano

Tipo de Vínculo	Símbolo	Reações

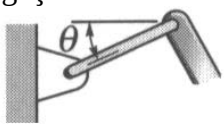
Cabo



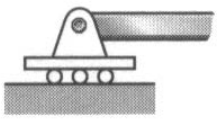


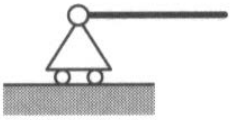


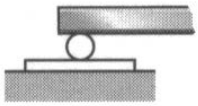
Ligação esbelta

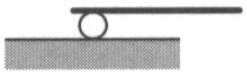


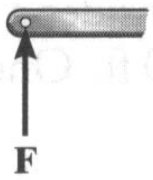
Roletes



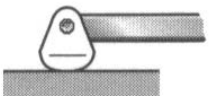


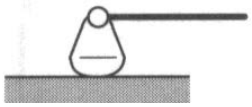




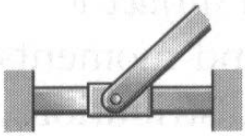


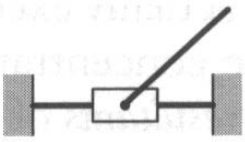
Rótula





Luva com articulação

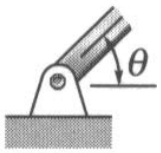


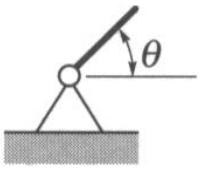


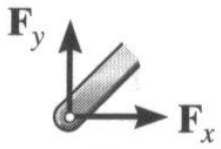


Tipo de Vínculo	**Símbolo**	**Reações**

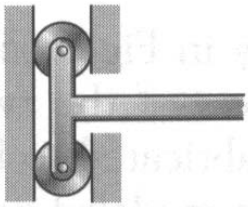
Articulação

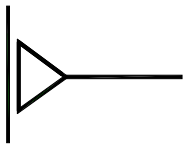




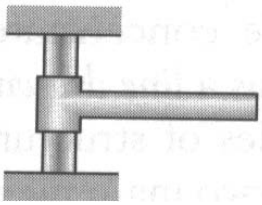


Apoio deslizante

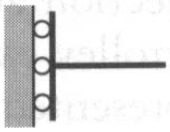




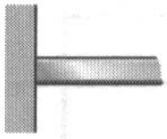




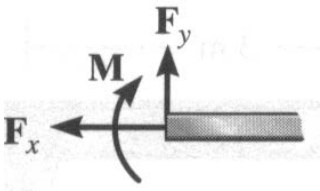
Luva rígida



Apoio rígido (engaste)

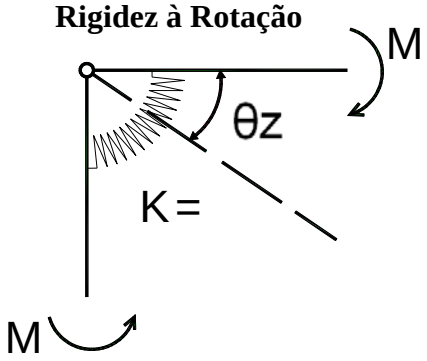






Rigidez de uma Ligação

Rigidez à Rotação



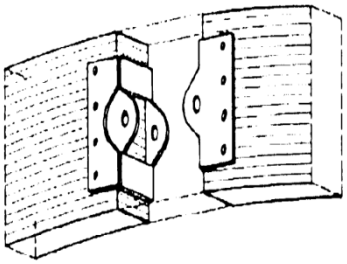
$$K = \frac{M}{\theta}$$

geometria indeformada

geometria deformada

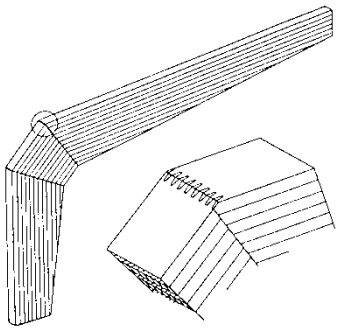
- **Ligação Articulada**

$K \rightarrow 0$



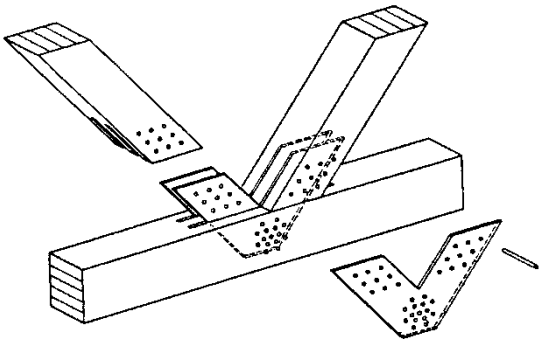
- **Ligação Rígida**

$K \rightarrow \infty \quad \theta \approx 0^{o}$

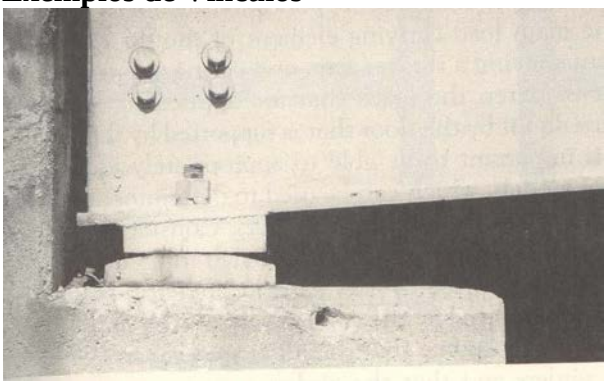


- **Ligação Semi-Rígida**

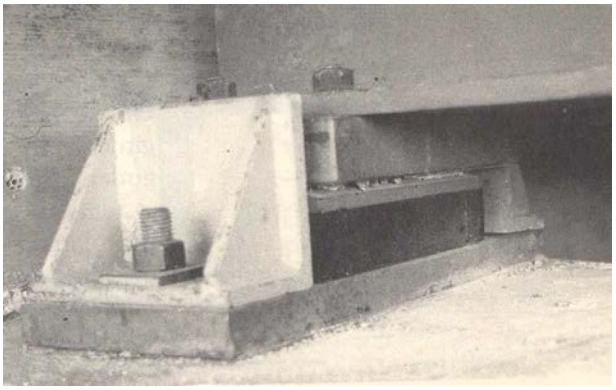
$0 < K < \infty$



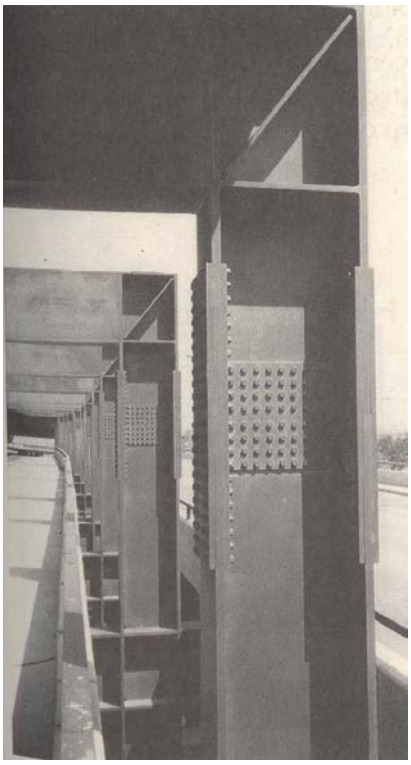
Exemplos de Vínculos



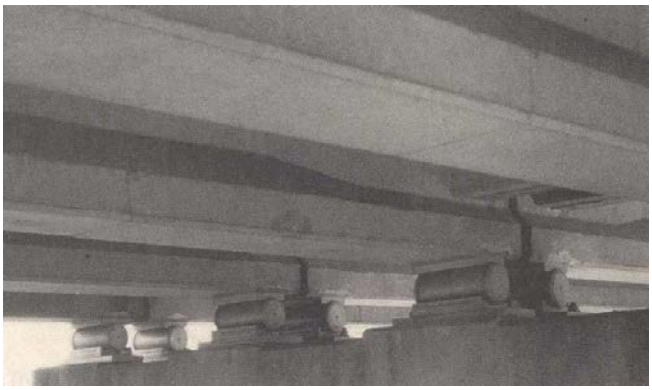
Apoio rotulado em viga de ponte.



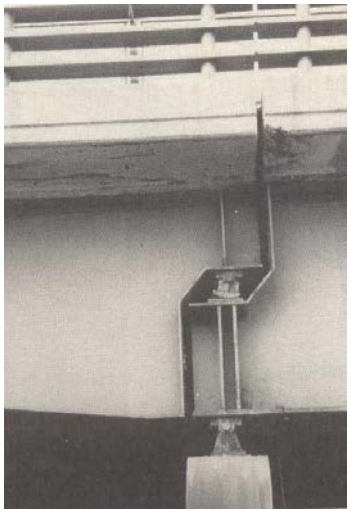
Apoio com material de baixo coeficiente de atrito, funcionando como roletes.



Ligação de canto rígida de um pórtico de aço. Observam-se as chapas formando uma ligação rígida com os pilares.

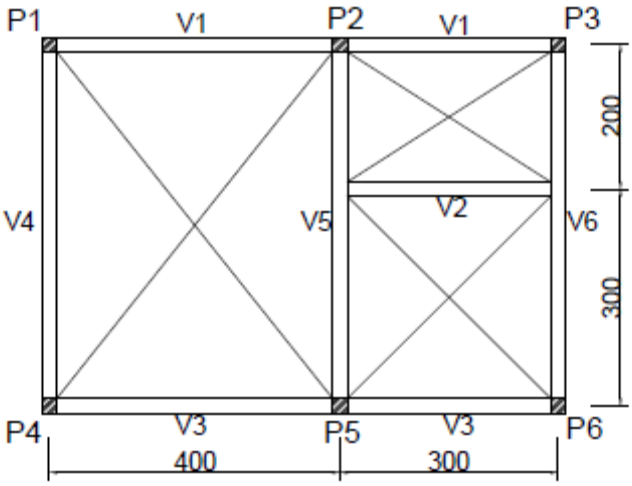


Rolete nos apoios de vigas de concreto protendido de uma ponte rodoviária.

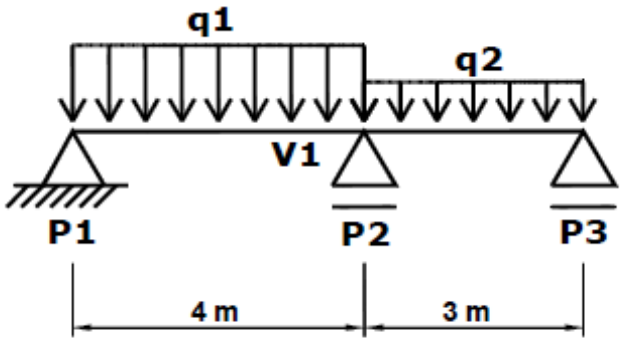


A inclinação da rótula de apoio entre as duas vigas indica a expansão térmica do tabuleiro da ponte. Os enrijecedores verticais na região de apoio previnem a flambagem local causadas pelas altas reações de apoio.

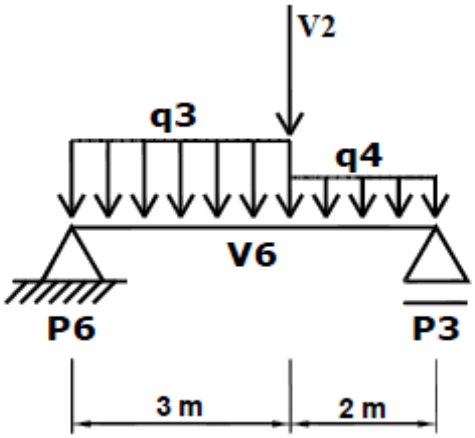
Exemplo de planta baixa de uma construção:



Forças que atuam na viga 1 e na viga 6:



Nesse caso, as cargas distribuídas q1 e q2 são provenientes das lajes que se apoiam na viga 1.



As cargas distribuídas q3 e q4 são provenientes das lajes que se apoiam na viga 6 e a carga concentrada V2 representa a carga da viga 2 apoiada na viga 6.

1.4 Estaticidade e Estabilidade

a) A estrutura é restringida e o número de incógnitas é igual ao número de equações de equilíbrio: ISOSTÁTICA.
b) A estrutura é restringida e o número de incógnitas é maior que o número de equações de equilíbrio: HIPERESTÁTICA.
c) A estrutura não é restringida ou o número de incógnitas é menor que o número de equações de equilíbrio: HIPOSTÁTICA.

Uma estrutura está restringida quando possui vínculos para restringir todos os movimentos possíveis da estrutura (translação e rotação) como um corpo rígido.

Uma forma de calcular o grau de hiperestaticidade, a fim de descobrir se a estrutura é restringida, é usando a seguinte fórmula:

$$gh = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3 \cdot m$$

Sendo C_1 = número de vínculos de 1ª classe;
C_2 = número de vínculos de 2ª classe;
C_3 = número de vínculos de 3ª classe;
m = número de hastes presentes na estrutura.

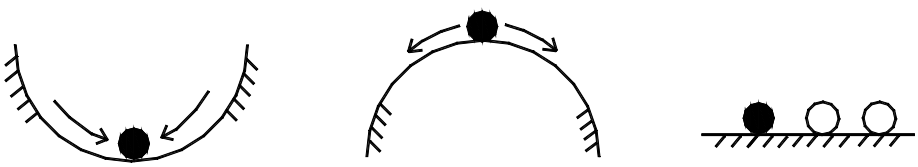
Outra maneira de calcular é utilizando o critério apresentado por Sussekind:

$$gh = g_e + g_i,$$

Sendo gh = grau de estaticidade ou hiperestaticidade;
g_e = grau de hiperestaticidade externa;
g_i = grau de hiperestaticidade interna.

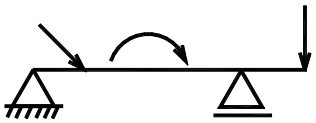
Tipos de Equilíbrio:

Estável Instável Indiferente



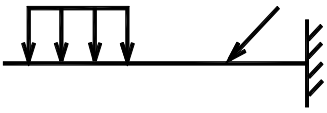
Exemplos: Estruturas Planas

Vigas:



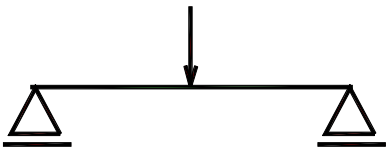
Quantidade de apoios:
$C_1 = 1 \quad C_2 = 1$
Número de barras:
$m = 1$

$gh = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3 \cdot m$
$gh = (1) + 2 \cdot (1) + 3 \cdot (0) - 3 \cdot (1)$
$gh = 1 + 2 - 3$
$gh = 0$
ISOSTÁTICA



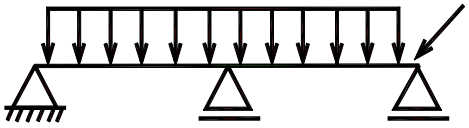
Quantidade de apoios:
$C_3 = 1$
Número de barras:
$m = 1$

$gh = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3 \cdot m$
$gh = (0) + 2 \cdot (0) + 3 \cdot (1) - 3 \cdot (1)$
$gh = 3 - 3$
$gh = 0$
ISOSTÁTICA



Quantidade de apoios:
$C_1 = 2$
Número de barras:
$m = 1$

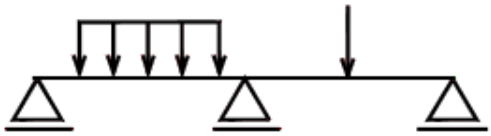
$gh = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3 \cdot m$
$gh = (2) + 2 \cdot (0) + 3 \cdot (0) - 3 \cdot (1)$
$gh = 2 - 3$
$gh = - 1$
HIPOSTÁTICA
(não restringida)



Quantidade de apoios:
$C_1 = 2 \quad C_2 = 1$
Número de barras:
$m = 1$

$gh = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3 \cdot m$
$gh = (2) + 2 \cdot (1) + 3 \cdot (0) - 3 \cdot (1)$
$gh = 2 + 2 – 3$
$gh = 1$

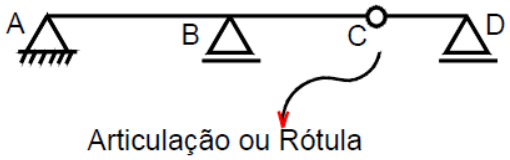
HIPERESTÁTICA



Quantidade de apoios:
$C_1 = 3$
Número de barras:
$m = 1$

$gh = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3 \cdot m$
$gh = (3) + 2 \cdot (0) + 3 \cdot (0) - 3 \cdot (1)$
$gh = 3 – 3$
$gh = 0$

ISOSTÁTICA



Quantidade de apoios:
$C_1 = 2 \quad C_2 = 1$
Número de barras:
$m = 2$
Ligações internas:
$C_2 = 2 - 1 = 1$ A rótula interna é uma conexão C_2

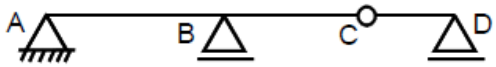
$$gh = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3 \cdot m$$
$$gh = (2) + 2 \cdot (2) + 3 \cdot (0) - 3 \cdot (2)$$
$$gh = 2 + 4 - 6$$
$$gh = 0$$

ISOSTÁTICA

Outra forma de resolver exercícios de grau de hiperestaticidade é através do grau de hiperestaticidade externa (ge) e do grau de hiperestaticidade interna (gi). Partindo do princípio que:

$$gh = ge + gi$$

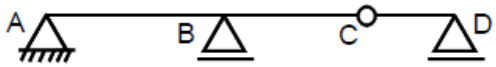
i)Classificar os apoios e calcular o ge:



$$ge = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3$$
$$ge = (2) + 2 \cdot (1) + 3 \cdot (0) - 3$$
$$ge = 2 + 2 - 3$$
$$ge = + 1$$

Para calcular o ge utiliza-se sempre m = 1. As ligações internas não entram no cálculo do ge.

ii)Classificar as ligações internas e calcular o gi:



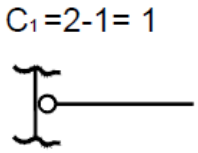
$gi = - 1$
$gh = ge + gi$
$gh = 1 - 1$
$gh = 0$

A rótula interna baixa o gi no valor do seu respectivo grau de conexão C_2.

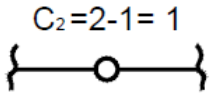
ISOSTÁTICA

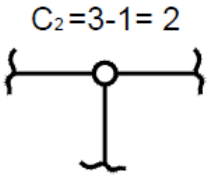
Ligações internas :	Em ligações internas, considera-se o tipo de ligação e o número de barras conectadas menos 1.

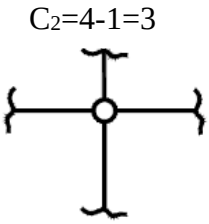
Tirante (C_1)



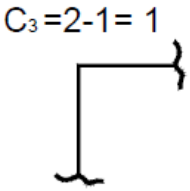
Articulação ou Rótula (C_2)

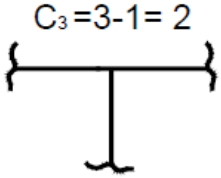


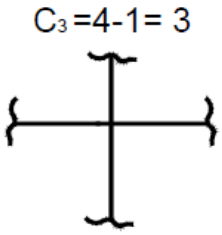




Ligação engastada (C_3)

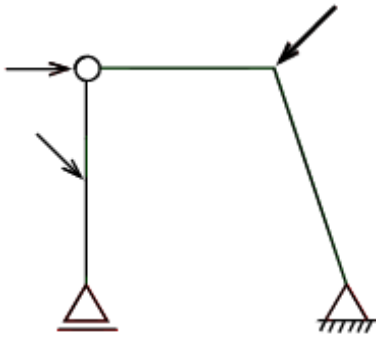






Exemplos: Pórticos, Arcos;

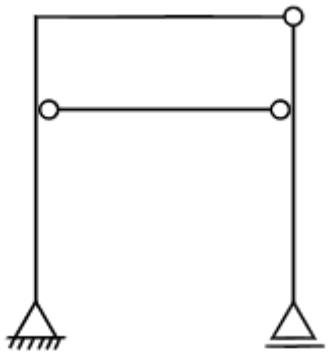
Pórticos:



Quantidade apoios:
$C_1 = 1 \quad C_2 = 1$
Número de barras:
$m = 3$
Ligações internas:
$C_2 = 2 - 1 = 1$
$C_3 = 2 - 1 = 1$

$gh = C_1 + 2 \,.\, C_2 + 3 \,.\, C_3 - 3 \,.\, m$
$gh = (1) + 2 \,.\, (2) + 3 \,.\, (1) - 3 \,.\, (3)$
$gh = 1 + 4 + 3 - 9$
$gh = -1$

HIPOSTÁTICA



Quantidade apoios:
$C_1 = 1$ $C_2 = 1$
Número de barras:
$m = 3$
Ligações internas:
$C_1 = 2 – 1 = 1$
$C_2 = 2 – 1 = 1$
$C_3 = 2 – 1 = 1$

$gh = C_1 + 2 . C_2 + 3 . C_3 - 3 . m$
$gh = (2) + 2 . (2) + 3 . (1) - 3 . (3)$
$gh = 2 + 4 + 3 - 9$
$gh = 0$

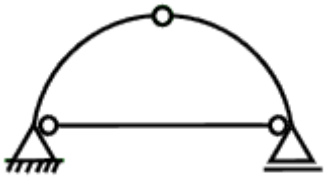
ISOSTÁTICA



Quantidade de apoios:
$C_2 = 1$ $C_3 = 1$
Número de barras:
$m = 1$

$gh = C_1 + 2 . C_2 + 3 . C_3 - 3 . m$
$gh = (0) + 2 . (1) + 3 . (1) - 3 . (1)$
$gh = 2 + 3 - 3$
$gh = 2$

HIPERESTÁTICA

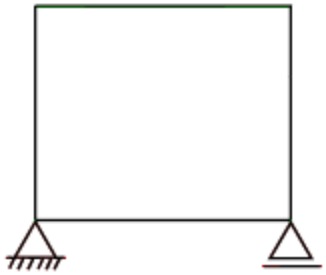


Quantidade de apoios:
$C_1 = 1$ $C_2 = 1$
Número de barras:
$m = 2$
Ligações internas:
$C_1 = 2 – 1 = 1$
$C_2 = 2 – 1 = 1$

$gh = C_1 + 2 . C_2 + 3 . C_3 - 3 . m$
$gh = (2) + 2 . (2) + 3 . (0) - 3 . (2)$
$gh = 2 + 4 - 6$
$gh = 0$

ISOSTÁTICA

Quadros:



$gh = C_1 + 2 . C_2 + 3 . C_3 - 3 . m$
$gh = (1) + 2 . (1) + 3 . (4) – 3 . (4)$
$gh = 1 + 2 + 12 – 12$
$gh = 3$

$ge = C_1 + 2 . C_2 + 3 . C_3 - 3$
$ge = (1) + 2 . (1) + 3 . (0) - 3$
$ge = 1 + 2 - 3$
$ge = 0$

Logo: $gh = ge + gi$
$(3) = (0) + gi$
$gi = 3$

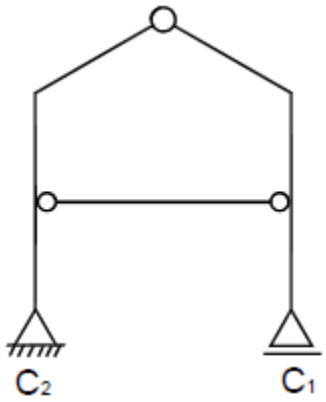
A partir do exemplo acima, pode-se notar que o gi de uma estrutura fechada, nesse caso um quadro, é igual a 3. Independentemente de sua forma geométrica.

OBS: Um tipo especial de pórtico é a *viga Virendel*, exemplificada na figura anterior. A *viga Vierendel* constitui um painel retangular formado por barras engastadas ortogonalmente.

Utilizando o conhecimento em quadros, calcula-se o grau de hiperestacidade externa (ge) e o grau de hiperestacidade interna (gi) separadamente com a finalidade de obter o valor do grau de hiperestacidade (gh).

$$\mathbf{gh = ge + gi}$$

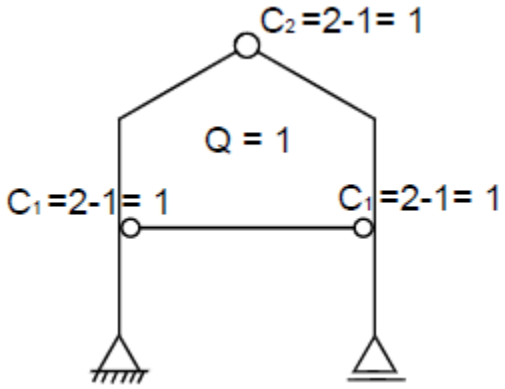
i)Classificar os apoios e calcular o ge:



$$\mathbf{ge = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3}$$

ge = (1) + 2 . (1) + 3 . (0) - 3
ge = 1 + 2 - 3
ge = 0

ii)Classificar as ligações internas, contar o número de quadros e calcular o gi:



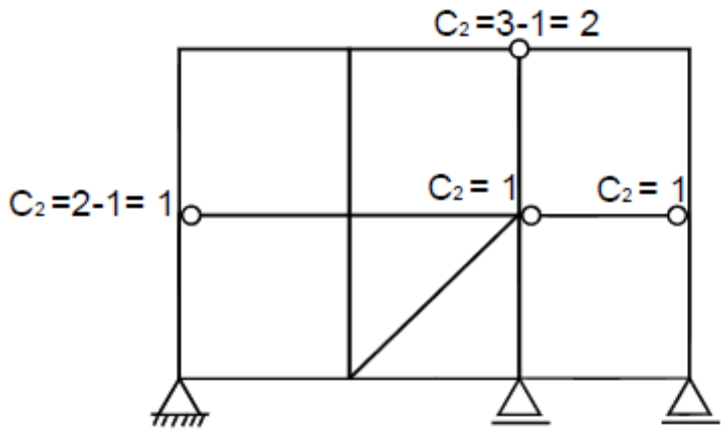
$$\mathbf{gi = 3 \cdot Q - C_1 - C_2}$$

gi = 3 . (1) – (2) – (1)
gi = 3 – 2 - 1
gi = 0

gh = ge + gi
gh = (0) + (0)
gh = 0

ISOSTÁTICA

Exemplos:

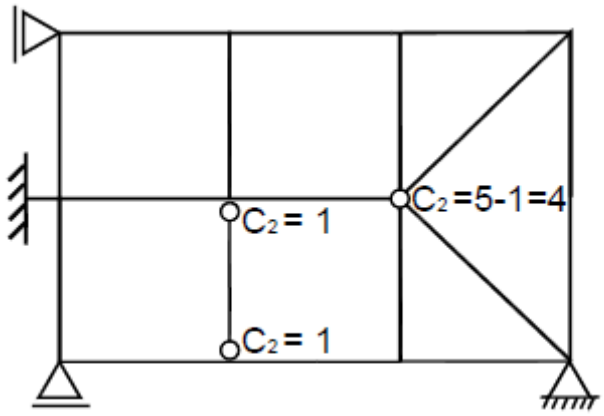


ge = C_1 + 2 . C_2 + 3 . C_3 – 3
ge = (2) + 2 . (1) – (3) = 1

gi = 3 . Q – C_1 – C_2
gi = 3 . (7) – (2) – (3) = 16

gh = ge + gi
gh = (1) + (16) = 17

HIPERESTÁTICA
Restringida

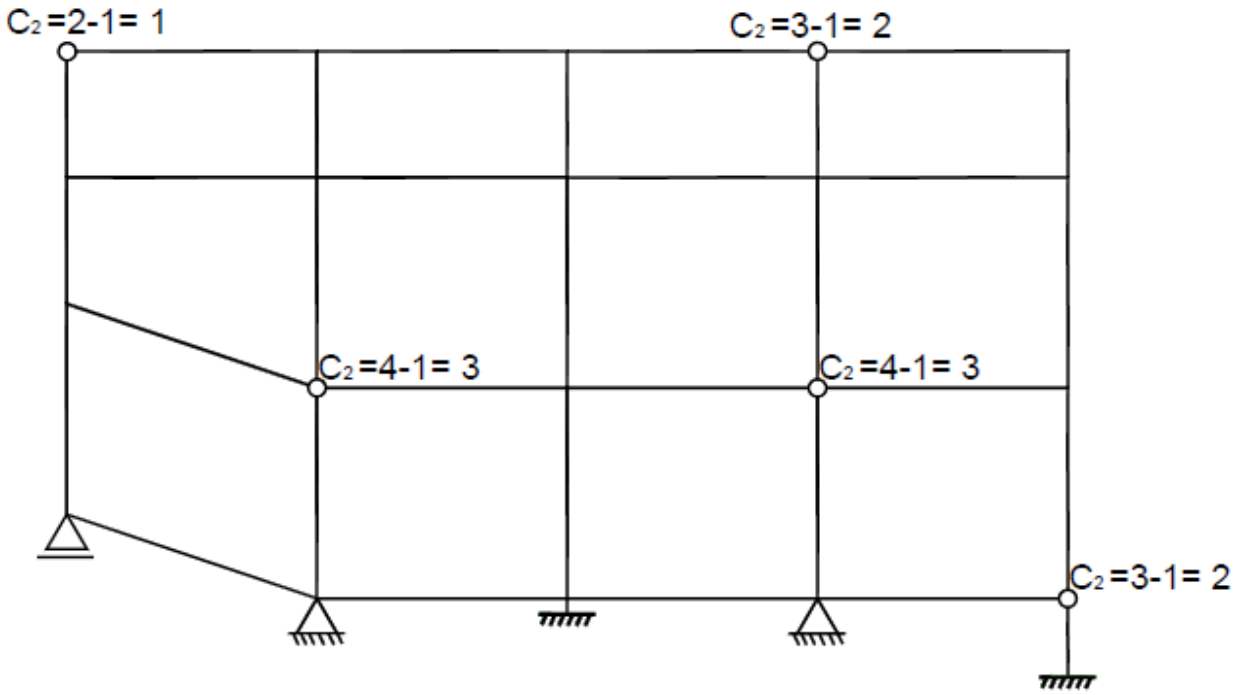


$ge = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3$
$ge = (2) + 2 \cdot (1) + 3 \cdot (1) - (3) = 4$

$gi = 3 \cdot Q - C_1 - C_2$
$gi = 3 \cdot (7) - (2) - (4) = 16$

$gh = ge + gi$
$gh = (4) + (16) = 20$

HIPERESTÁTICA
Restringida



$ge = C_1 + 2 \cdot C_2 + 3 \cdot C_3 - 3$
$ge = (1) + 2 \cdot (2) + 3 \cdot (2) - (3) = 8$

$gi = 3 \cdot Q - C_2$
$gi = 3 \cdot (12) - (11) = 25$

$gh = ge + gi$
$gh = (8) + (25) = 33$

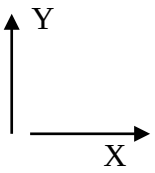
HIPERESTÁTICA
Restringida

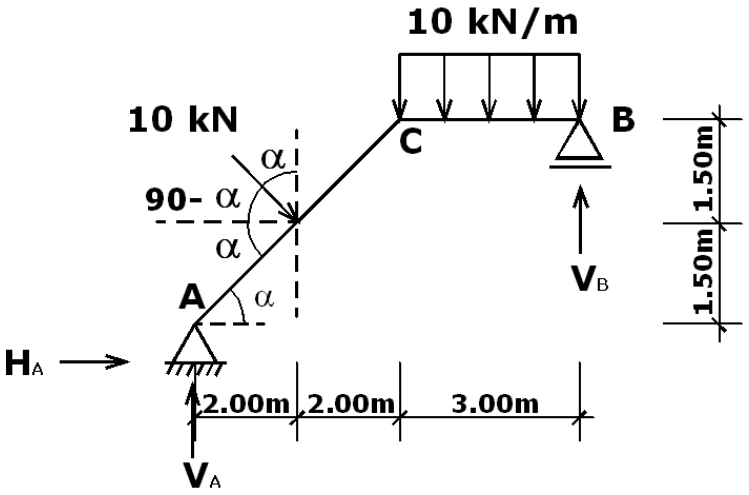
1.5. Reações de apoio em estruturas planas

1.5.1. Estrutura Aporticada

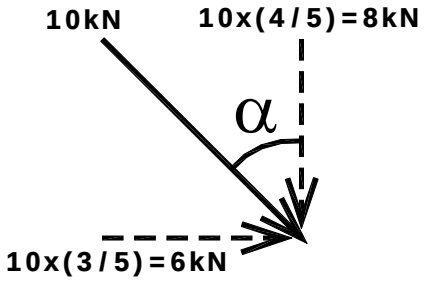
Cos α =4/5

Sen α =3/5





Decompor a força de 10kN nas direções x e y:



i) $\sum F_X = 0$ $\quad H_A + 6kN = 0 \quad \therefore H_A = -6kN$

ii) $\sum F_Y = 0$ $\quad V_A + V_B = (10x3) + 8 = 38kN$

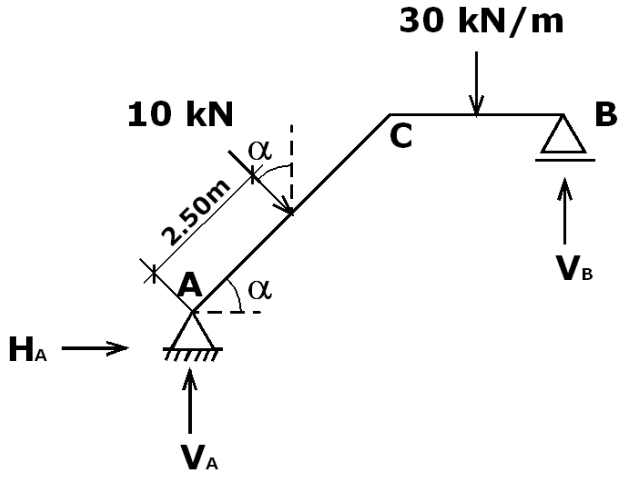
iii) $\sum M_A = 0$ $\quad 7xV_B – (30x\ 5,5)- (8x2) – (6x1,5) = 0$

$\therefore 7V_B = 190 \qquad \therefore V_B = 27,14kN$

0

Logo, $V_A = 38kN – 27,14kN = 10,86kN$

Outra maneira seria:



$\sum M_A = 0$

$7V_B – (30x\ 5,5)- (10x2,5) = 0$

$\therefore 7V_B = 165+25 = 190$

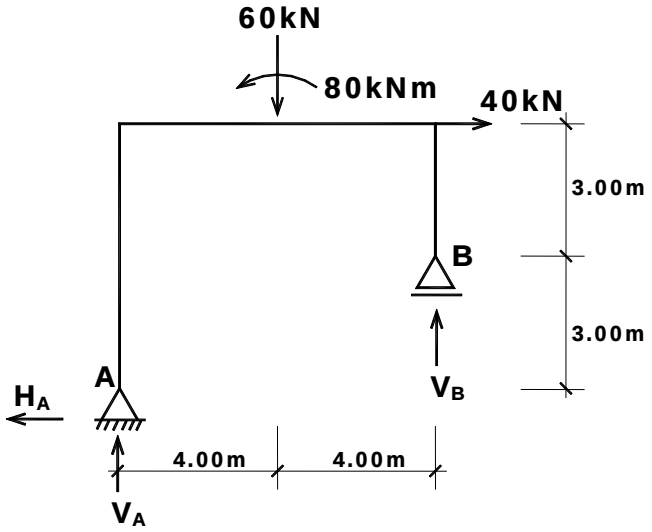
$\therefore V_B = 27,14kN$

Verificação: $\sum M_B = 0$ 

$(10,86x7) + (6x3) – (30x1,5) – (8x5) – (6x1,5) = 0$

$76 + 18 – 45 – 40 – 9 = 0$

1.5.2. Pórtico Isostático



i) $\sum F_X = 0$ $\quad -H_A + 40 = 0 \quad \therefore H_A = 40kN$

ii) $\sum F_Y = 0$ $\quad V_A + V_B = 60kN$

iii) $\sum M_A = 0$ $\quad 8V_B + 80 - (40x6) – (60x4) = 0$

$\quad \therefore 8V_B = 400 \quad \therefore \quad V_B = 50kN$

$\quad \therefore V_A = 60 – 50 = 10kN$

Verificação: $\sum M_B = 0$ $\quad (10x8) + (40x3) – 80 – (60x4) + (40x3) = 0$

$\quad 120 + 120 – 240 = 0$

1.5.3. Treliça Isostática

i) $\sum F_X = 0$ $\quad H_B + 4 - 12 = 0 \quad \therefore H_B = 8kN$

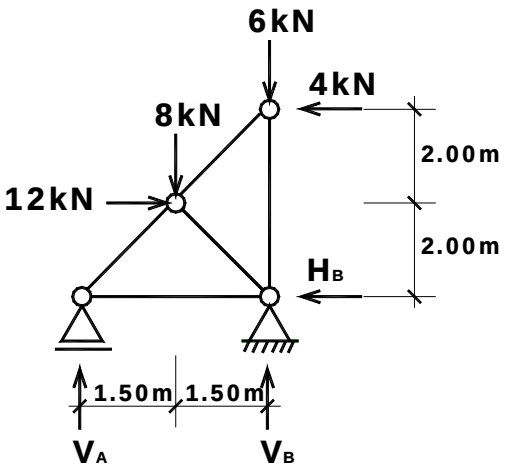
ii) $\sum F_Y = 0$ $\quad V_A + V_B = 6 + 8 = 14kN$

iii) $\sum M_B = 0$ $\quad (4x4) + (8x1,5) – (12x2) – 3V_A = 0$

$\quad \therefore 3V_A = 16 + 12 – 24 = 4$

$\quad \therefore V_A = (4/3) = 1,33kN$

$\quad \therefore V_B = 12,67kN$

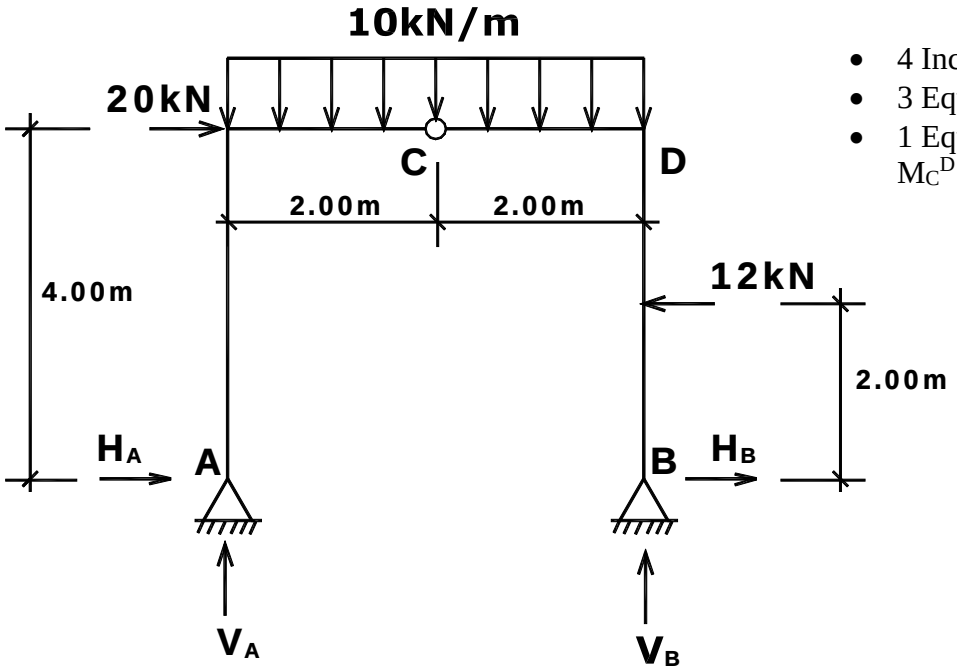


Verificação: $\sum M_A = 0$

$(12,67x3) + (4x4) – (6x3) – (8x1,5) - (12x2) = 0$

$38 + 16 - 18 - 12 – 24 = 0$

1.5.4. Pórtico Triarticulado Isostático



- 4 Incógnitas (Reações)
- 3 Equações Estáticas (Plano)
- 1 Equação interna (Rótula)
  $M_C^D = M_C^E = 0$

Isostática

i) $\sum F_X = 0$ $(\rightarrow^+)$ $\quad H_A + H_B + 20 - 12 = 0 \quad \therefore H_A + H_B = -8kN$

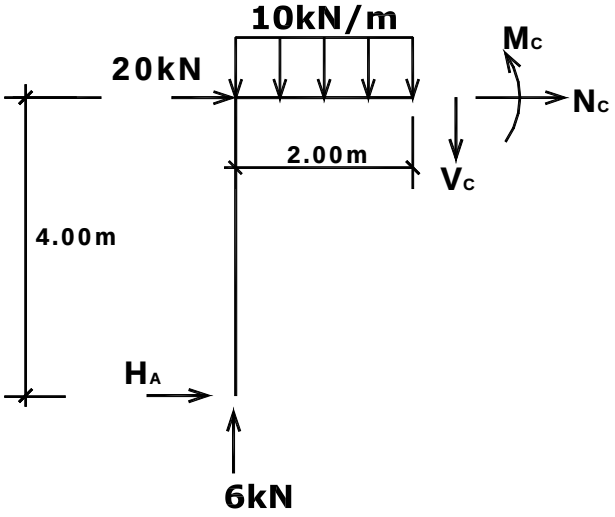
ii) $\sum F_Y = 0$ $(\uparrow^+)$ $\quad V_A + V_B = 10x4 = 40kN$

iii) $\sum M_A = 0$ $\quad 4V_B - (40x2) + (12x2) - (20x4) = 0$

$\therefore 4V_B = 80 - 24 + 80 \quad \therefore \quad V_B = 34kN$

$\therefore V_A = 40 - 34 = 6kN$

iv) Momento Fletor em C é nulo (Esq. Ou Dir.)



Análise da Estrutura à Esquerda da Rótula:

$M_C - (6x2) + (20x1) + (H_A x4) = 0$

ou $\quad M_C = (6x2) - (20x1) - (4H_A)$

mas $\quad M_C = 0 \rightarrow 4H_A = 12 - 20 = -8$

$\therefore H_A = -2kN$

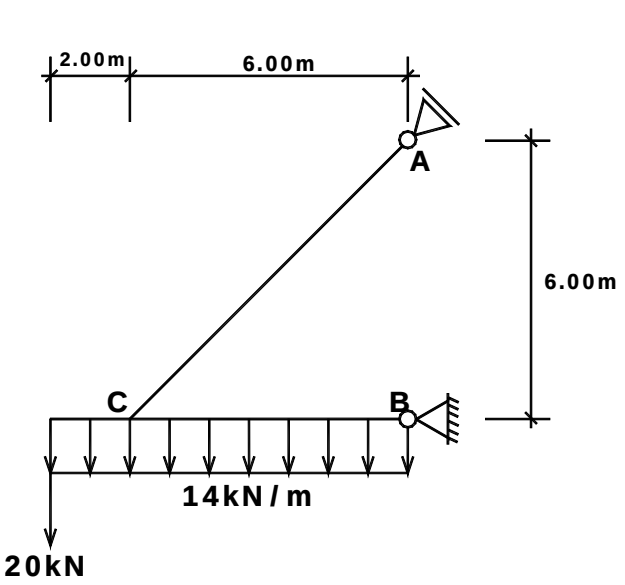
$\therefore H_B = -8 + 2 = -6kN$

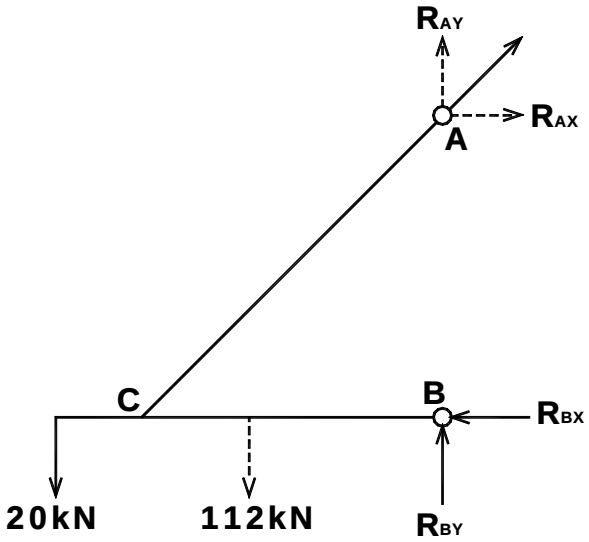
Verif. $\sum M_D = 0$ $\quad (6 + 2)x4 + (12x2) + (6x4) - (40x2) = 0$

$32 + 24 + 24 - 80 = 0$

Exercícios: Determinar a reação de apoio.

a)





i) $\sum F_X = 0$ $(\rightarrow^+)$ $\quad R_{AX} - R_{BX} = 0 \quad \therefore R_{AX} = R_{BX}$ (I)

ii) $\sum F_Y = 0$ $(\uparrow^+)$ $\quad R_{AY} - R_{BY} - 20 - 112 = 0 \quad \therefore R_{AY} + R_{BY} = 132$ (II)

iii) $\sum M_A = 0$ $\quad (20x8) + (112x4) - (6xR_{BX}) = 0$

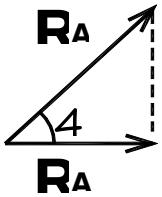
$$R_{BX} = \frac{160 + 448}{6} \qquad \therefore R_{BX} = 101{,}33kN$$

$R_{AX} = R_{BX}$ (I) $\quad \therefore R_{AX} = 101{,}33kN$

$R_{AX} = R_{AY}$ (45º) $\quad \therefore R_{AY} = 101{,}33kN$

$R_{BY} = 132 - R_{AY}$ (II) $\quad \therefore R_{BY} = 30{,}67kN$

$R_A = R_{AX}/\cos 45º \quad \therefore R_A = (R_{AX}) x \frac{2}{\sqrt{2}} = 143{,}30kN$



Conferindo

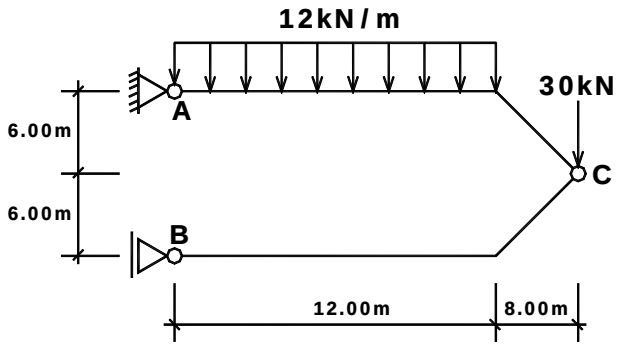
$\sum M_C = 0$ $\quad (20x2) - (112x2) + (6xR_{BY}) - (6xR_{AX}) + (6xR_{AY}) = 0$

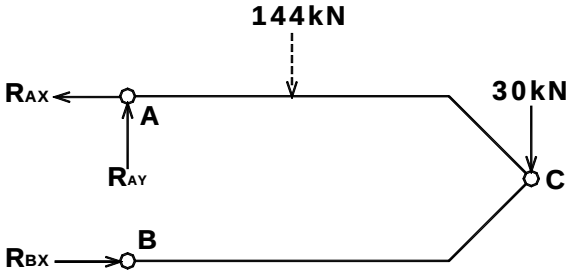
$40 - 224 + (30{,}67x6) - (101{,}33x6) + (101{,}33x6) = 0$

$-184 + 184 - 608 + 608 = 0$

$184 - 184 = 0$

b)





i) $\sum F_X = 0$ $(\rightarrow^+)$ $\quad R_{AX} = R_{BX}$

ii) $\sum F_Y = 0$ $(\uparrow^+)$ $\quad R_{AY} - 12(12) - 30 \quad \therefore R_{AY} = 174kN$

iii) $\sum M_A = 0$ $\quad 12xR_{BX} - 30x20 - 144x6 = 0$

$$R_{BX} = \frac{600 + 864}{12} \quad \therefore R_{BX} = 122kN \quad \therefore R_{AX} = 122kN$$

Conferindo

$\sum M_B = 0$ $\quad 12xR_{AX} - 144x6 - 30x20 = 0$

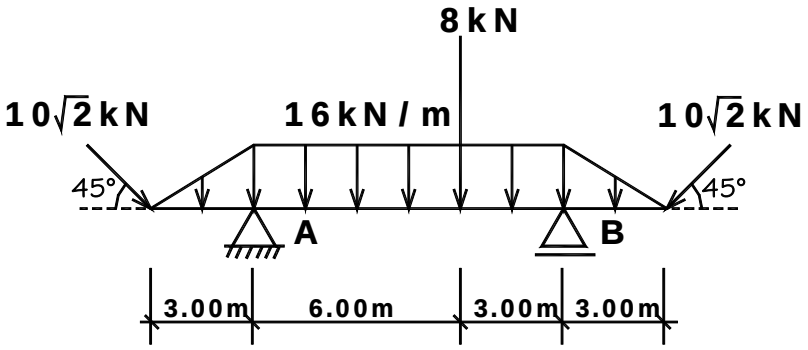
$\quad 1464 - 864 - 600 = 0$

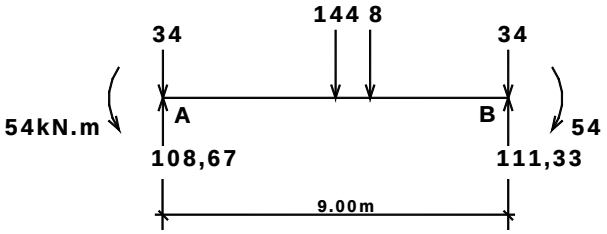
$\sum M_C = 0$ $\quad 6xR_{BX} - 144x14 + 6xR_{AX} - 20xR_{AY} = 0$

$\quad 122x6 + 2016 + 122x6 - 174x20 = 0$

$\quad 732 + 2016 + 732 - 3480 = 0$

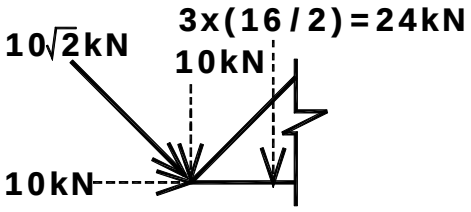
c) Achar as reações de apoio para a viga abaixo :



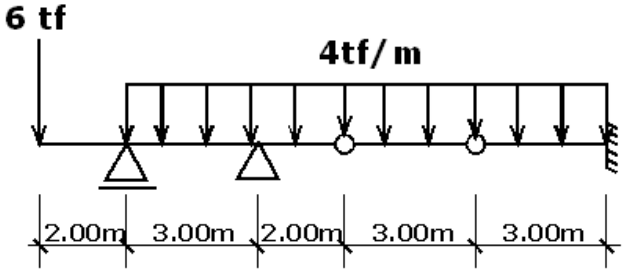


Balanço

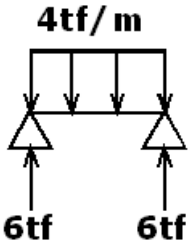
72 ↑	↑ (144/2) = 72
34 ↑	↑ 10 + 24 = 34
(8x3)/9 = 2,67 ↑	↑ (8x6)/9 = 5,33
108,67 ↑	↑ 111,33

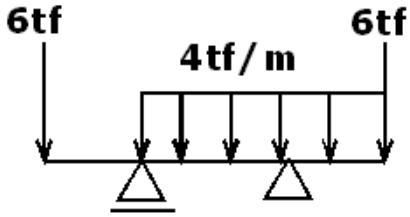


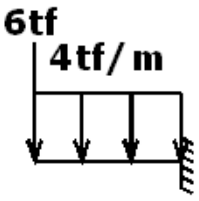
d) Determinar as reações de apoio para a viga:



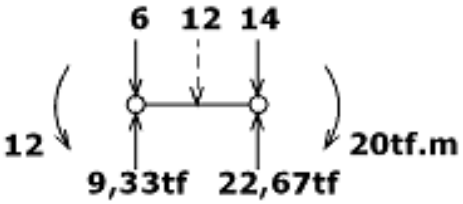
Viga entre as rótulas internas:

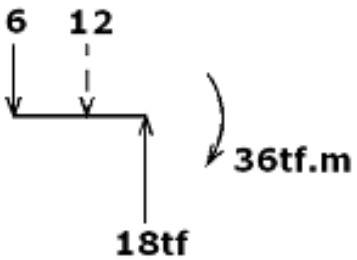






As forças aplicadas nos balanços foram transferidas para os apoios como momentos e forças verticais.





6 ↑	↑ (12/2) = 6
6 ↑	↑ 6 + 8 = 14
2,67 ↑	↑ (20-12)/3=2,67

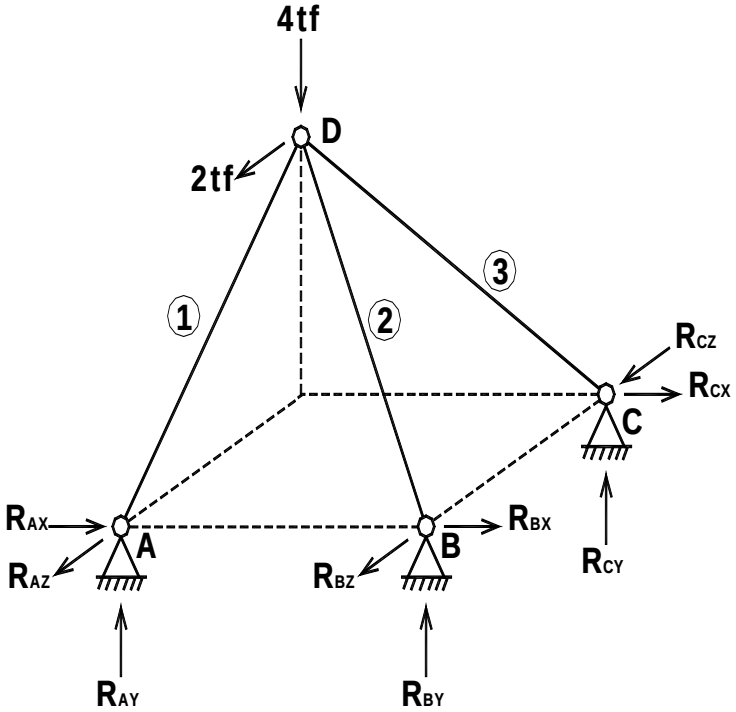
1.6. Reações de apoio no espaço

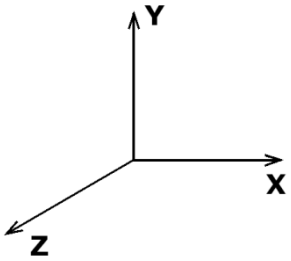
6 Equações de Equilíbrio:

$\sum F_X = 0$; $\sum F_Y = 0$; $\sum F_Z = 0$; $\sum M_X = 0$; $\sum M_Y = 0$; $\sum M_Z = 0$

1.6.1. Treliça Espacial

Isostática $r + b = 3n$
Restringida





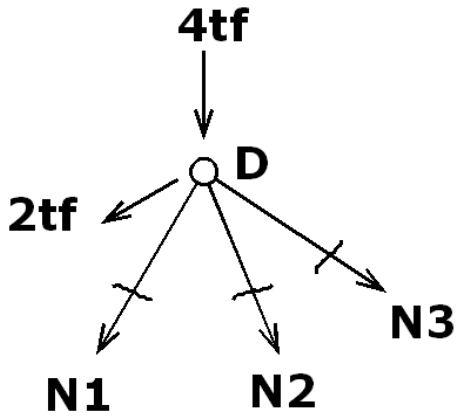
n=4

r+b=3n

9+3 = 3x4

12=12

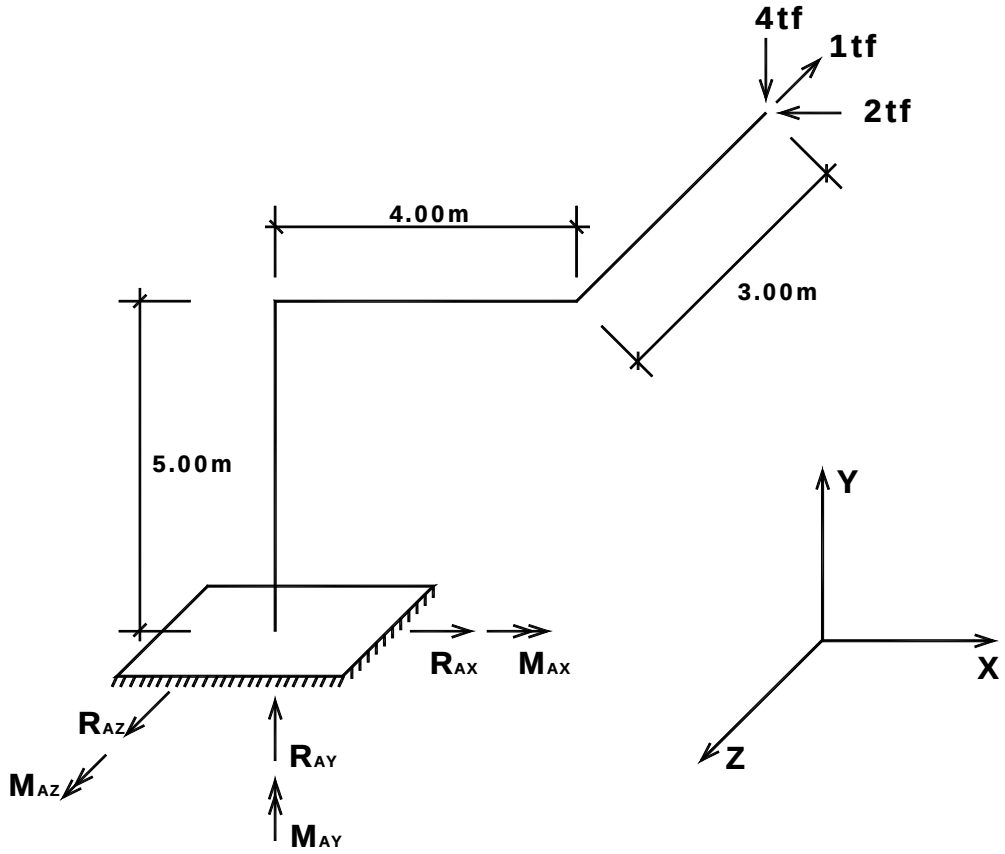
Inicia-se pelo equilíbrio do nó D:



3 incógnitas
N1, N2, N3
3 equações: $\sum F_X = 0$, $\sum F_Y = 0$, $\sum F_Z = 0$

Em seguida passa-se aos nós com apoios: Conhecidos agora os esforços N1, N2 e N3, para cada nó A, B ou C existem 3 incógnitas (Reações) e 3 equações de equilíbrio.

1.6.2. Pórtico Espacial



Isostática { 6 reações; 6 equações de equilíbrio; Restringida

i) $\sum F_X = 0$ $\quad R_{AX} - 2tf = 0$ $\quad \therefore R_{AX} = 2tf$

ii) $\sum F_Y = 0$ $\quad R_{AY} - 4tf = 0$ $\quad \therefore R_{AY} = 4tf$

iii) $\sum F_Z = 0$ $\quad R_{AZ} - 1tf = 0$ $\quad \therefore R_{AZ} = 1tf$

iv) $\sum M_X = 0$ $\quad M_{AX} - (4x3) - (1x5) = 0$ $\quad \therefore M_{AX} = 17tfm$

v) $\sum M_Y = 0$ $\quad M_{AY} + (2x3) + (1x4) = 0$ $\quad \therefore M_{AY} = -10tfm$

vi) $\sum M_Z = 0$ $\quad M_{AZ} + (2x5) - (4x4) = 0$ $\quad \therefore M_{AZ} = 6tfm$

2. ESFORÇOS INTERNOS EM ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS

2.1. Treliças

Treliças - Estruturas reticuladas, ou seja formadas por barras (em que uma direção é predominante) de eixo reto, ligadas por rótulas ou articulações (nós).

Quando submetidas a cargas aplicadas nos nós apenas, as barras estão submetidas somente a esforços axiais.

Estaticidade e Estabilidade:

Condições para obtenção de uma treliça isostática:

1. equilíbrio Estável (Restringida, nós indeslocáveis);
2. número de incógnitas (*) igual ao número de equações de equilíbrio da estática (**).

* O número de incógnitas é dados por:

número de reações (r) + número de barras (b).
(Incógnitas Externas) (Incógnitas Internas)

** Número de equações de equilíbrio é o resultado do:

- número de nós (n) x 2 (o valor é multiplicado devido a existência de uma equação no eixo x e outra no y).

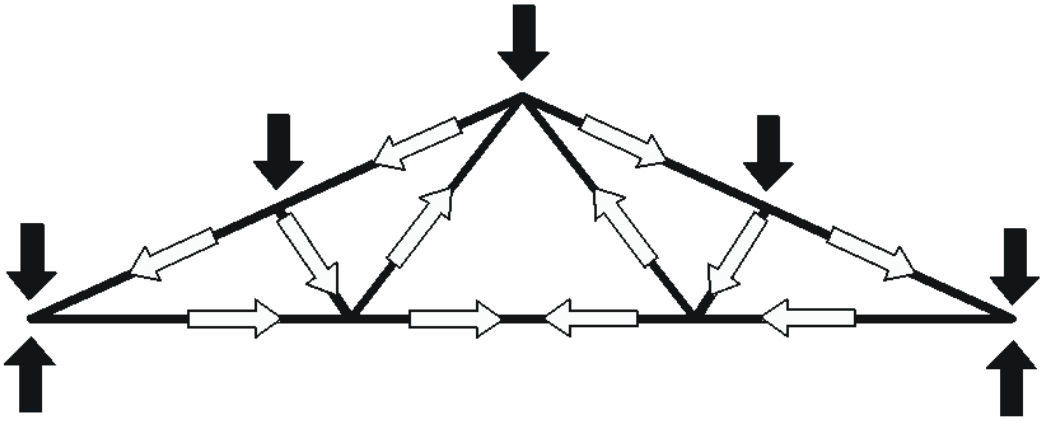
Desta forma, podemos classificá-las da seguinte maneira:

1ª. Condição		2ª. Condição	Classificação
indeslocável	e	r + b = 2n	Isostática
indeslocável	e	r + b > 2n	Hiperestática
deslocável	ou	r + b < 2n	Hipostática

Os métodos de obtenção de esforços em treliças são:

1. Equilíbrio dos Nós;
2. Cremona (Maxwell);
3. Ritter.

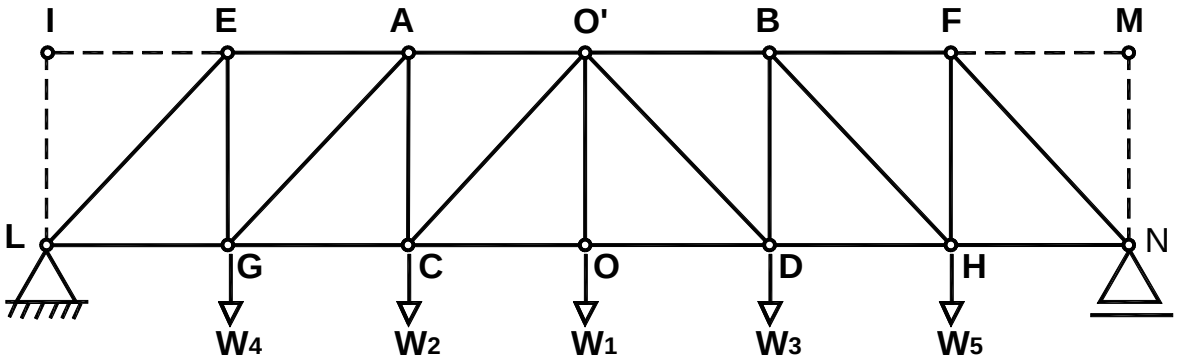
Treliças Planas



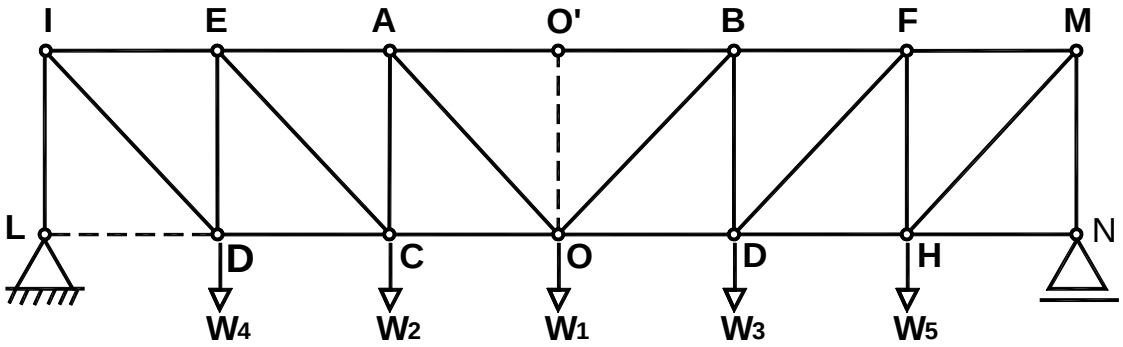
Fonte: Engel, Heino, 1981

Sentido dos Esforços

Treliça com diagonais comprimidas



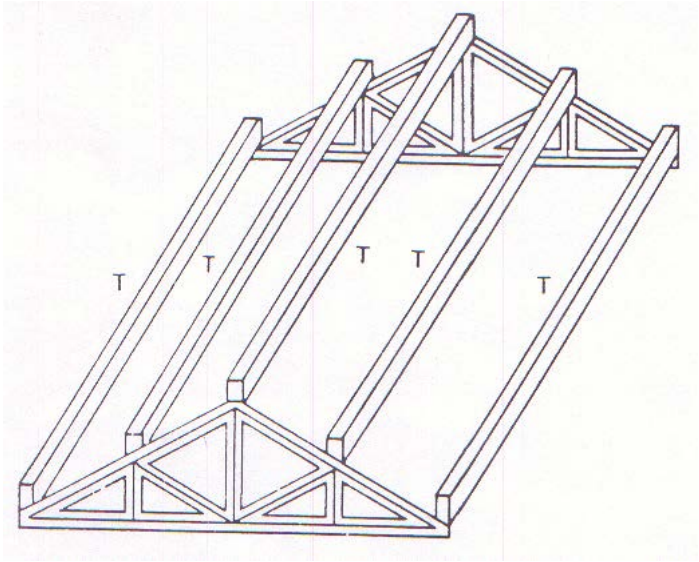
Treliça com diagonais tracionadas



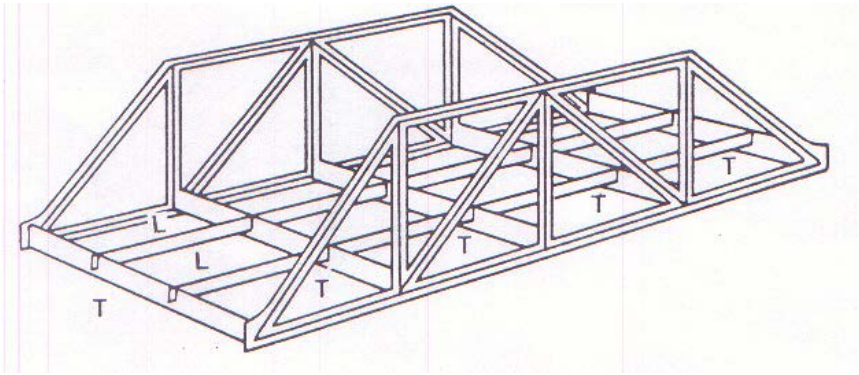
Fonte: Salvadori, Heller, 1975

Transmissão de Cargas para as Treliças

Treliça de Cobertura

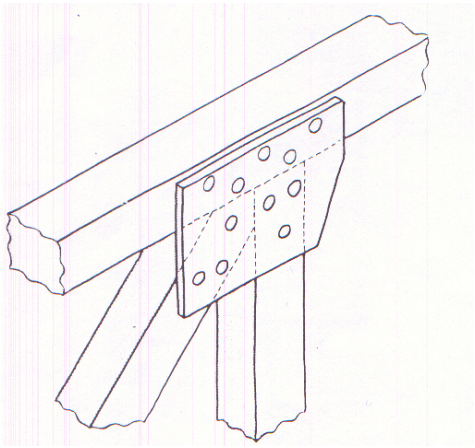


Treliça de Ponte

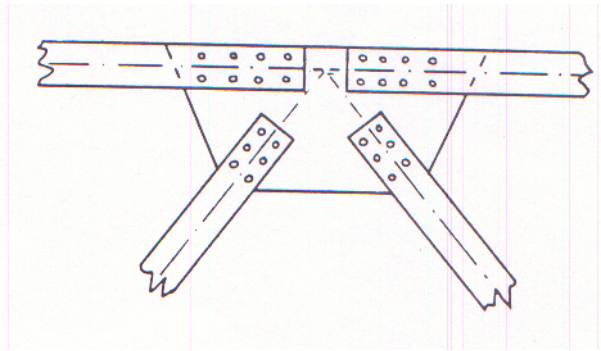


Fonte: Süssekind, José Carlos, 1979, vol.1

Ligações das Extremidades das Barras



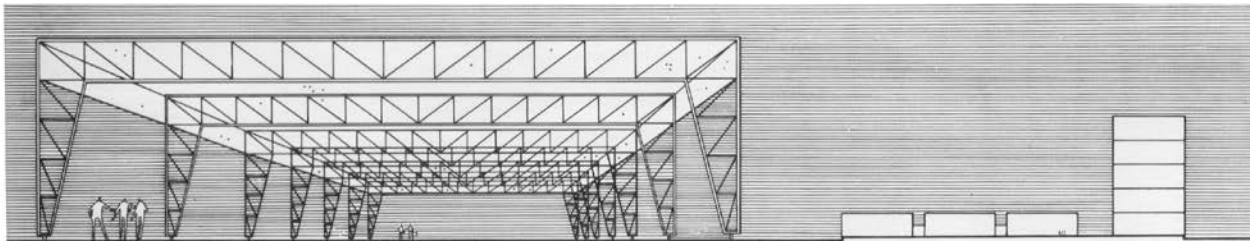
Fonte: Salvadori, Heller, 1975



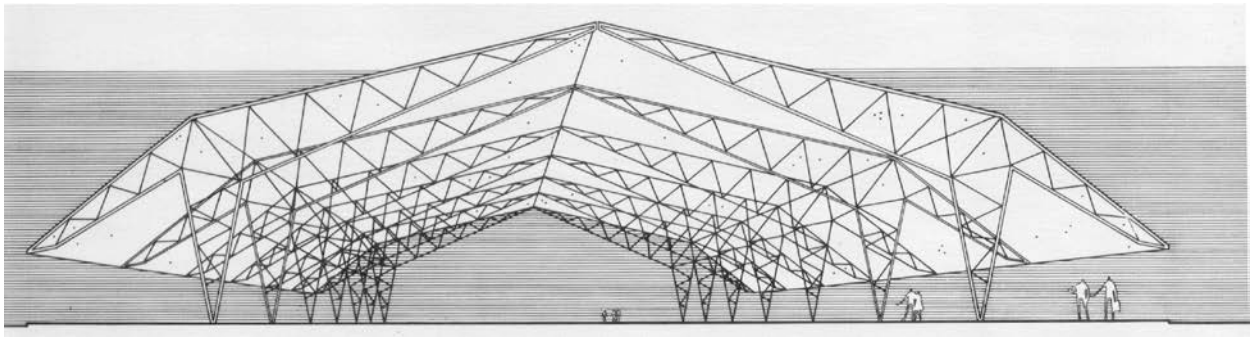
Fonte: Süssekind, José Carlos, 1979, vol.1

Mecanismo de Treliças Aplicado a Outros Sistemas Estruturais

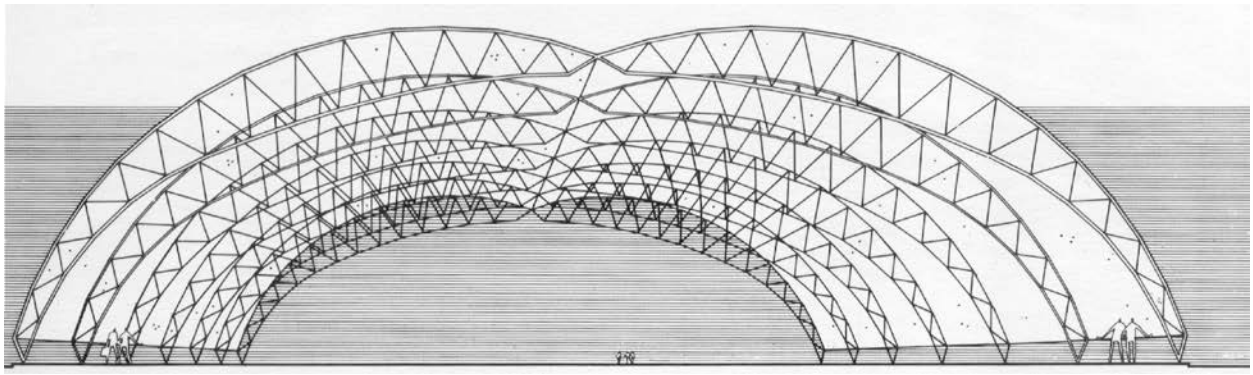
Pórtico de Treliça Biarticulado



Pórticos de Treliça Triarticulado com Balanços

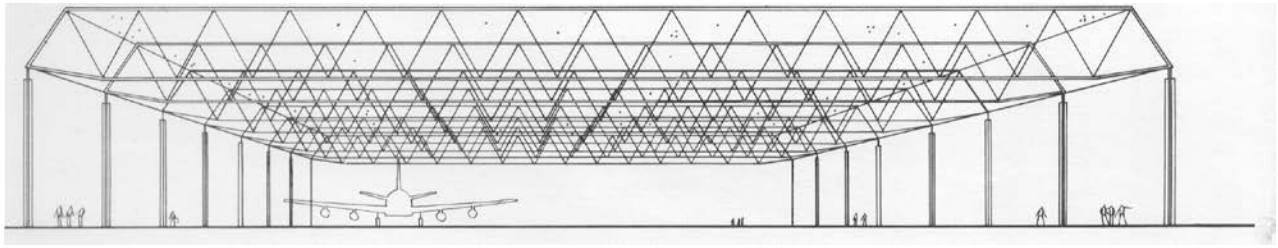


Arco de Treliça Triarticulado

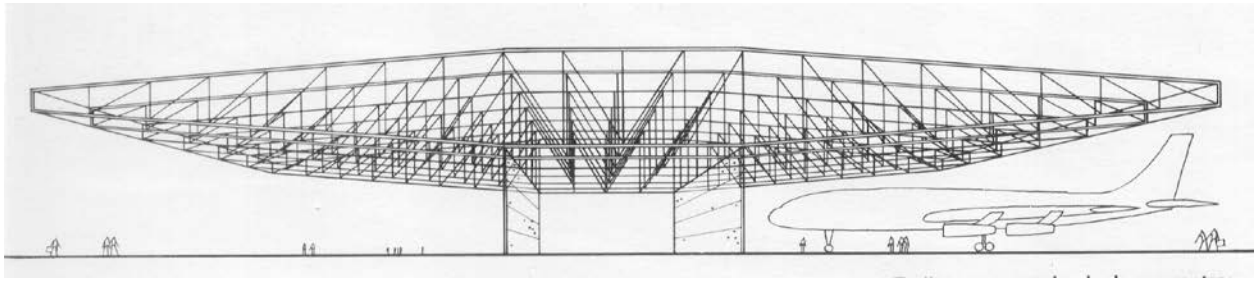


Treliças com Diferentes Condições de Apoios

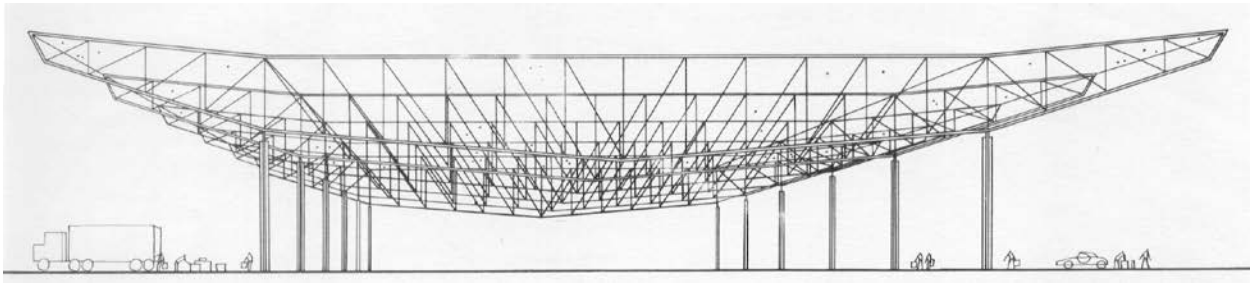
Treliças apoiadas nas duas extremidades: Estrutura de vão livre



Treliças com Apoio Duplo no Centro: Estruturas em Balanço

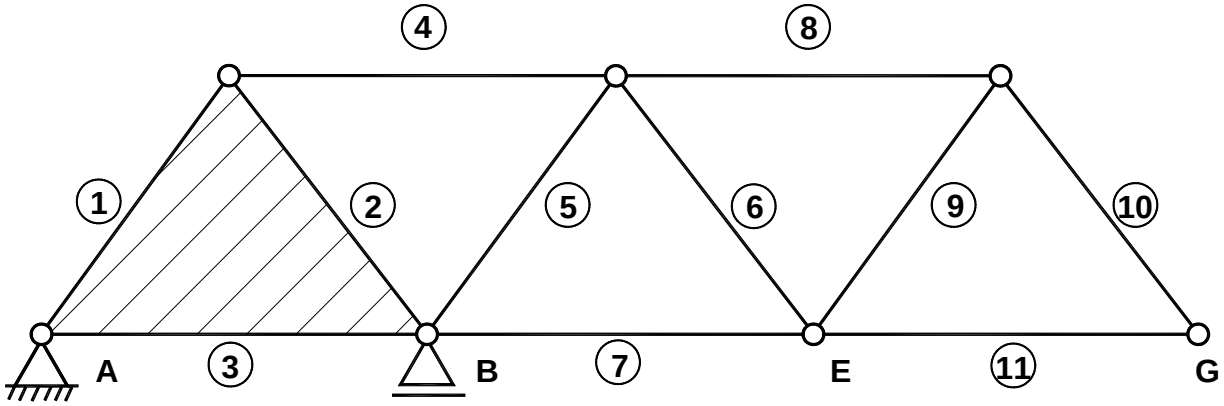


Treliças com Extremidades em Balanço: Estrutura com Vão Livre e Balanço



Fonte: Engel, Heino, 1981

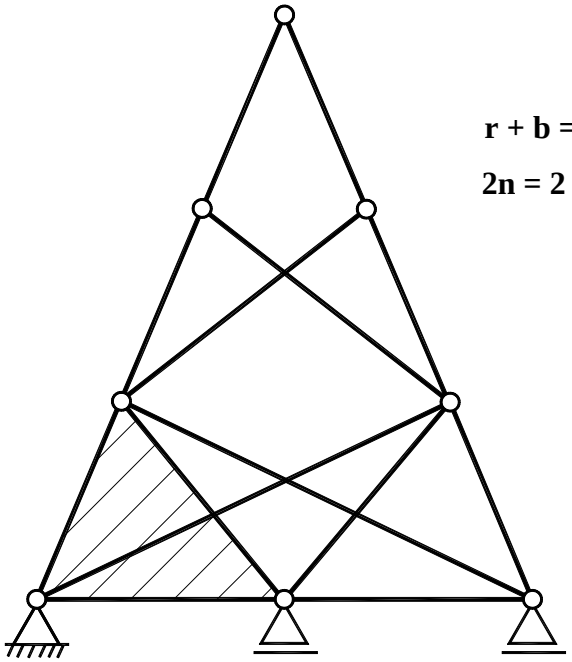
Lei de Formação de Treliças Isostáticas:



r + b = 3 + 11 = 14

2n = 2 x 7 = 14

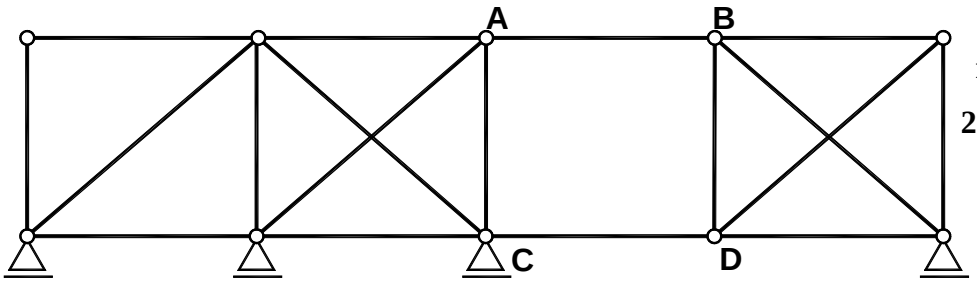
Treliça Hiperestática:



r + b = 4 + 14 = 18

2n = 2 x 8 = 16

Treliça Hipostática:



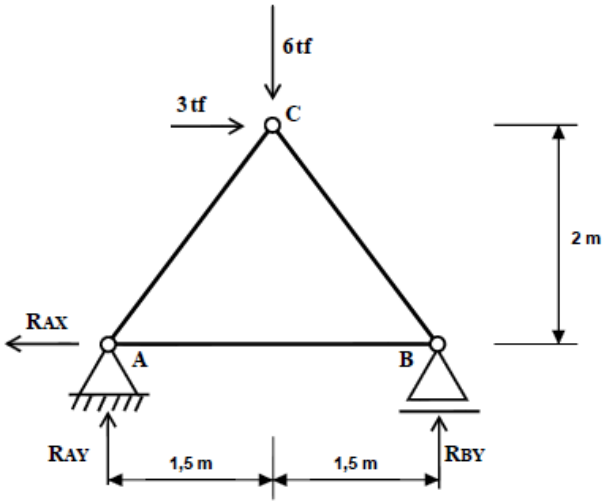
r + b = 4 + 18 = 22

2n = 2 x 10 = 20

Treliça não restringida

2.1.1. Método de Cremona

Seja a seguinte treliça para a qual serão calculadas as reações e esforços pelo equilíbrio dos nós:



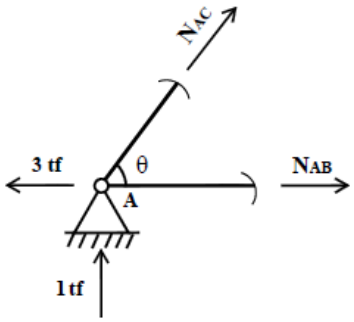
$\sum F_X = 0$ $\quad 3 - R_{AX} = 0$ $\quad$ **R_{AX} = 3tf**

$\sum M_A = 0$ $\quad 3R_{BY} - 6 \times 1,5 - 3 \times 2 = 0$ $\quad$ **R_{BY} = 5tf**

$\sum F_Y = 0$ $\quad R_{AY} + 5 - 6 = 0$ $\quad$ **R_{AY} = 1tf**

$\Theta = 53,13^o$

Nó A



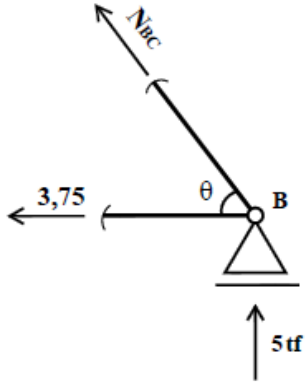
$\sum F_Y = 0$

$1 + N_{AC} \times \text{sen } 53,13^o = 0$ $\quad$ **N_{AC} = -1,25tf**

$\sum F_X = 0$

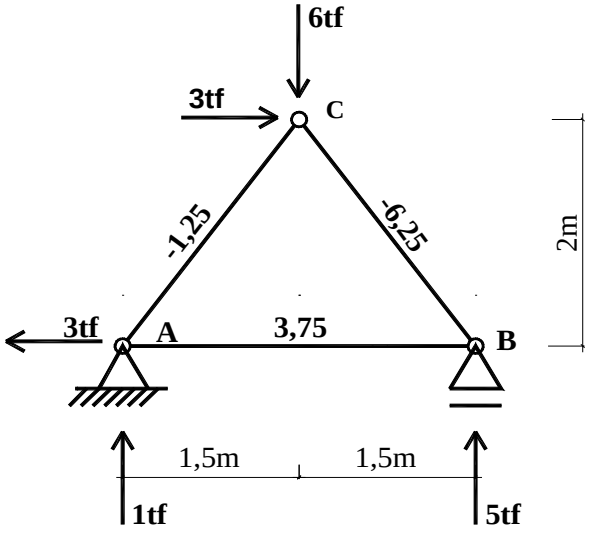
$-3 - 1,25 \times \cos 53,13^o + N_{AB} = 0$ $\quad$ **N_{AB} = 3,75tf**

Nó B



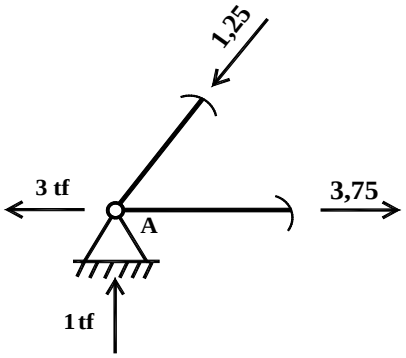
$\sum F_Y = 0$

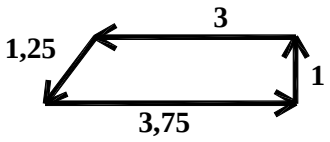
$5 + N_{BC} \times \text{sen } 53,13^o = 0$ $\quad$ **N_{BC} = -6,25tf**



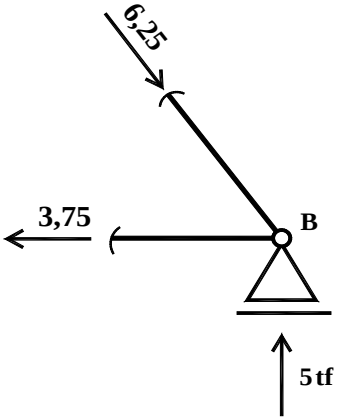
Se um nó está em equilíbrio, a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre ele será nula:

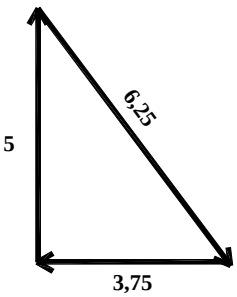
Nó A:



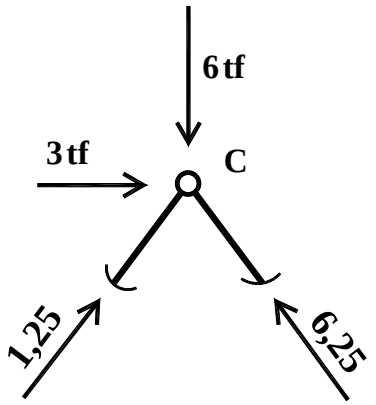


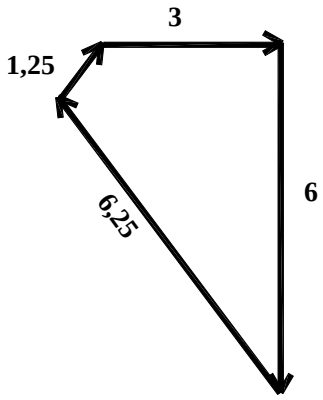
Nó B:





Nó C:





A soma vetorial das forças externas e internas atuantes forma sempre um polígono fechado.

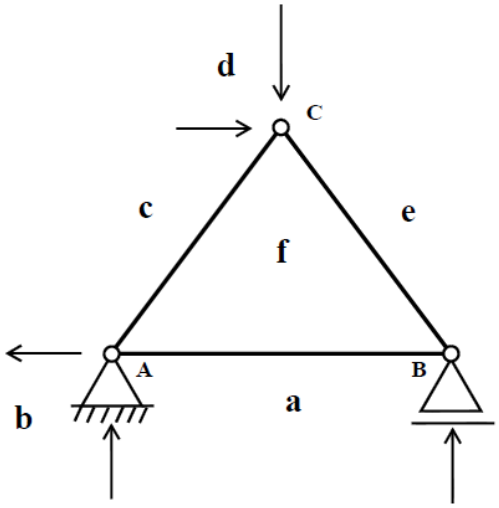
O método de Cremona consiste em encontrar os esforços internos graficamente, a partir do equilíbrio dos nós da treliça, seguem-se os seguintes passos:

- inicia-se por um nó com apenas duas incógnitas;
- marca-se em escala as forças externas atuantes, formando um polígono aberto;
- pelas extremidades deste polígono traçam-se paralelas às barras que concorrem no nó, cujos esforços desejamos conhecer;
- a interseção destas paralelas determinará o polígono fechado de equilíbrio; obtêm-se assim os módulos e sinais dos esforços nas barras;
- Os sinais dos esforços são obtidos verificando-se:
    - se o esforço normal aponta para o nó → negativo (compressão);
    - se o esforço normal sai do nó → positivo (tração);
- O sentido do percurso de traçado de forças é arbitrário, adotaremos o sentido horário;
- Obtém-se 2 a 2 incógnitas na análise → sobrarão 3 equações de equilíbrio, já usadas para as reações.

2.1.1.1. Notação de Bow

Marcar com letras todos espaços compreendidos entre as forças (exteriores e interiores), que serão identificadas pelas duas letras adjacentes. No exemplo:

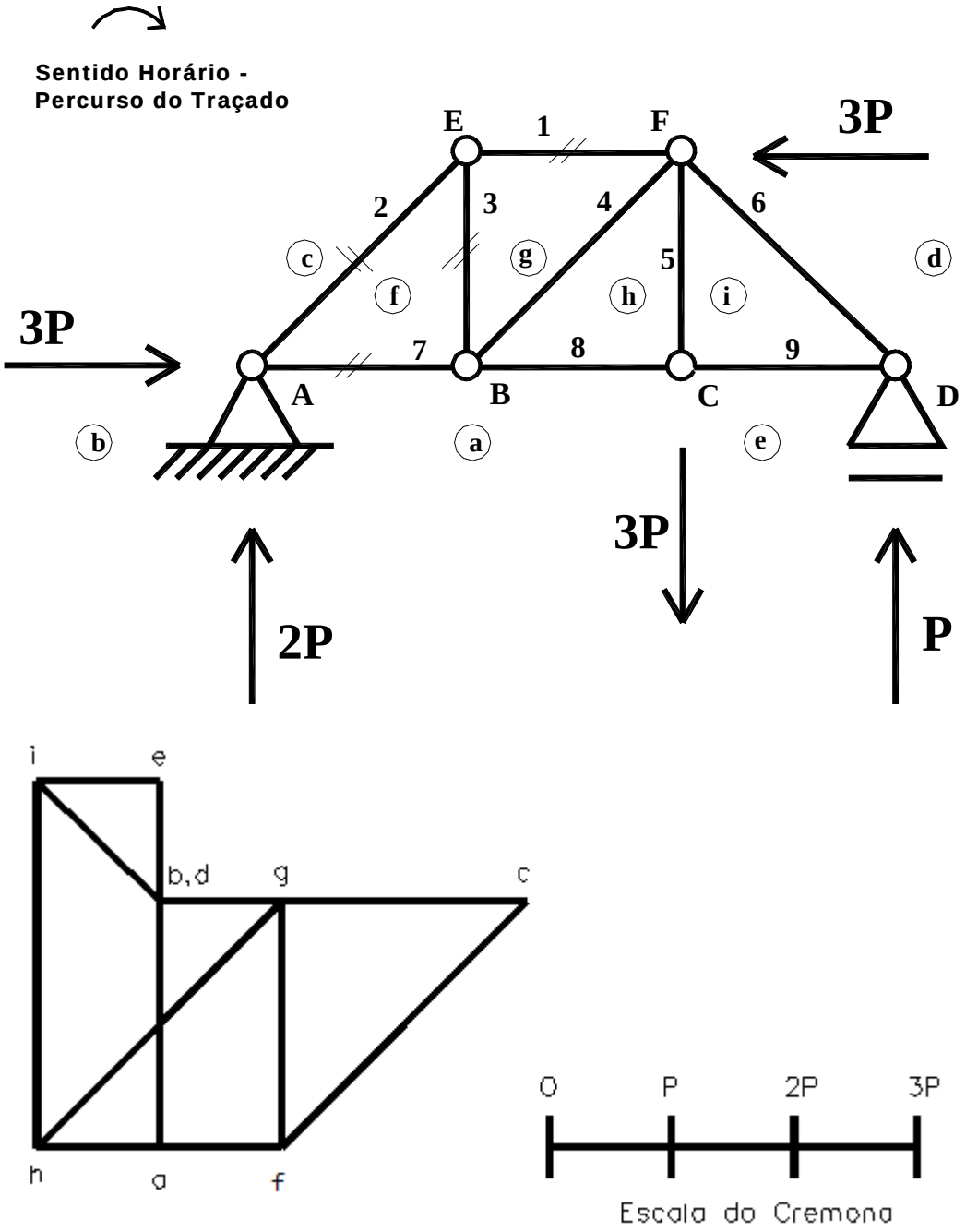
- reação Vertical no nó A : ab;
- reação Horizontal no nó A: bc;
- esforço Normal na Barra AC: cf (ou fc);
- esforço Normal na Barra AB: af (ou fa).



Roteiro do Método:

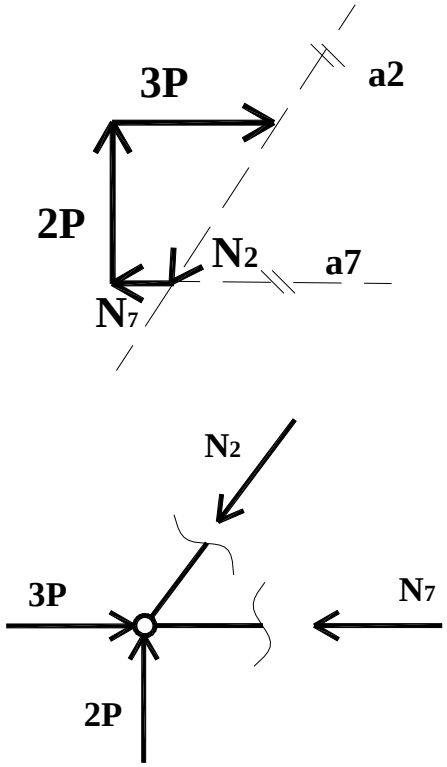
1. Iniciar o traçado do Cremona pelo equilíbrio de um nó que contém somente duas barras com esforços normais desconhecidos (incógnitas);
2. Começar com as forças conhecidas, deixando as incógnitas como forças finais;
3. Todos os nós são percorridos no mesmo sentido (horário ou anti-horário), para o exemplo escolheu-se o horário;
4. Prosseguir o traçado do Cremona pelos nós onde só haja 2 incógnitas a determinar, até esgotar todos os nós, encerrando-se a resolução da treliça.
5. Os valores dos esforços nas barras são medidos no gráfico em escala;
6. Os sinais dos esforços são obtidos verificando-se:
   - se o esforço normal aponta para o nó: COMPRESSÃO (-);
   - se o esforço normal sai do nó: TRAÇÃO (+).

O polígono resultante do traçado do Cremona deverá resultar num polígono fechado para que a treliça esteja em equilíbrio.



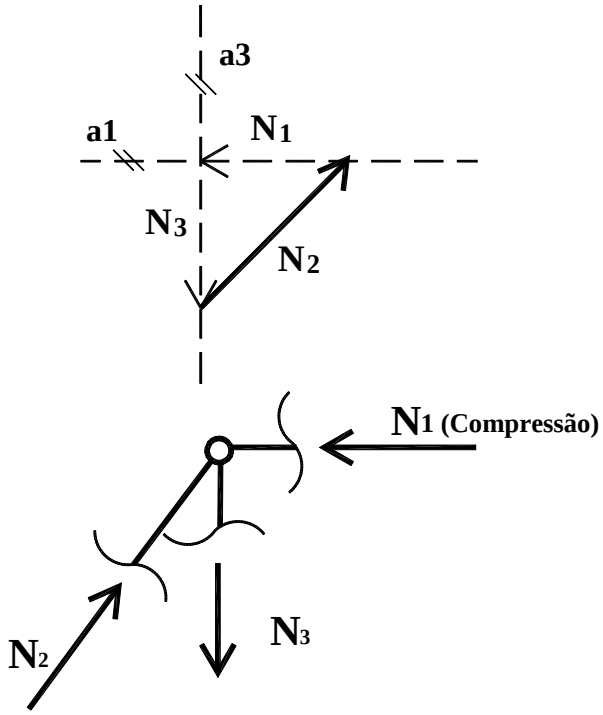
Fonte: Süssekind, José Carlos, 1979, vol.1

Nó A:



Medir em escala N_2 e N_7

Nó E:

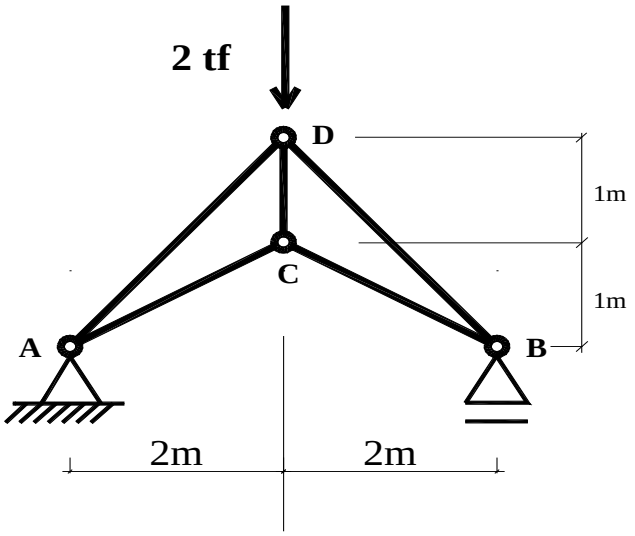


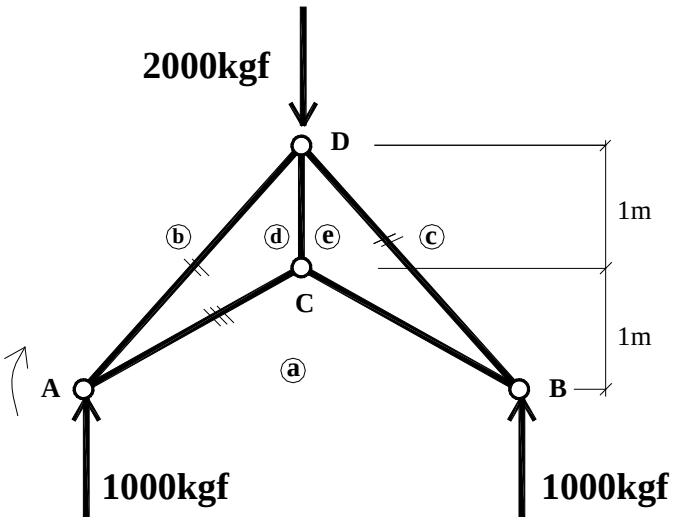
N_2 conhecido - N_3,N_1 incógnitas:

mede-se em escala

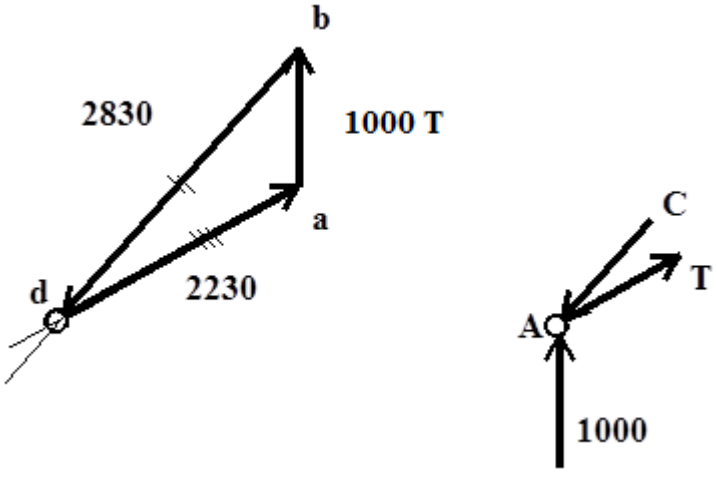
Exemplos:

1.

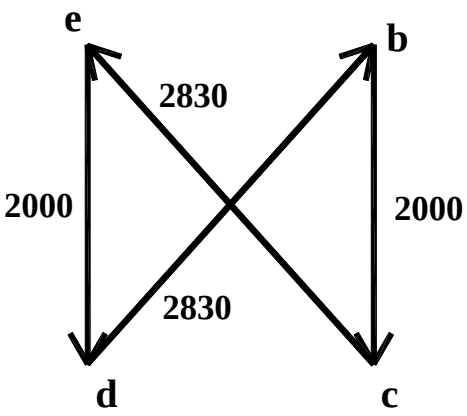


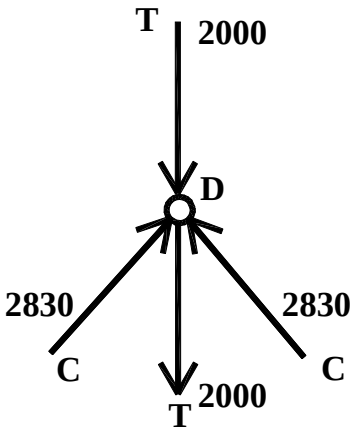


Nó A:

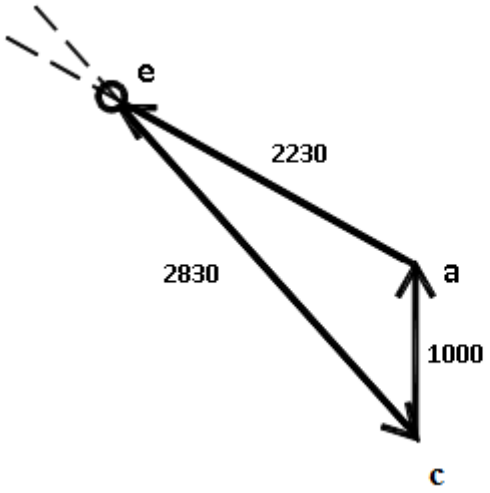


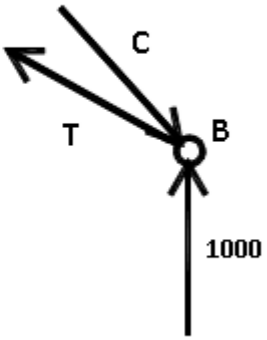
Nó D:

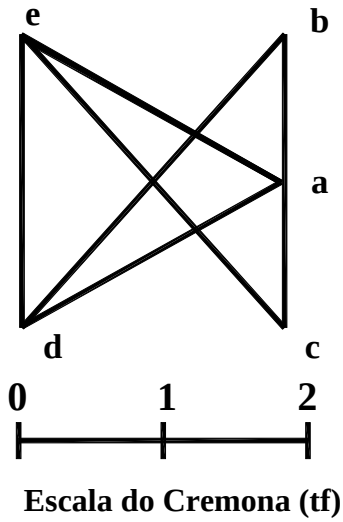




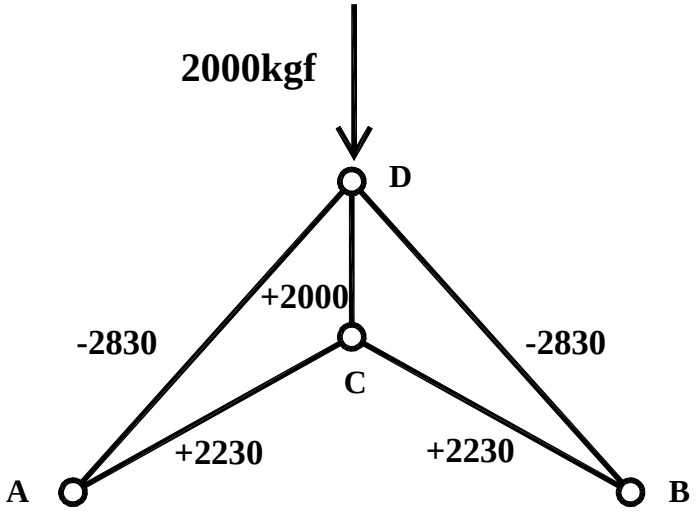
Nó B:



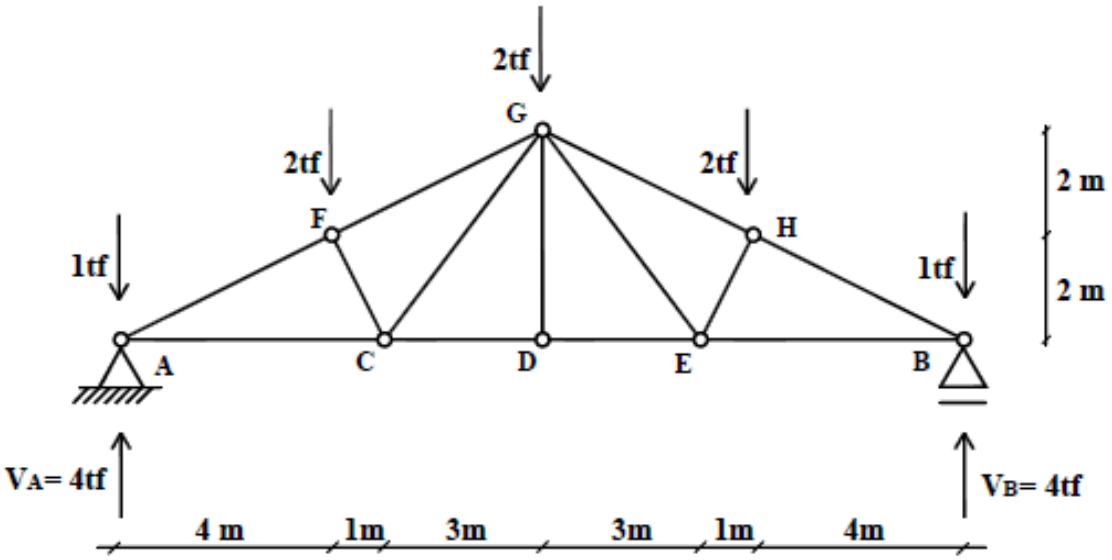


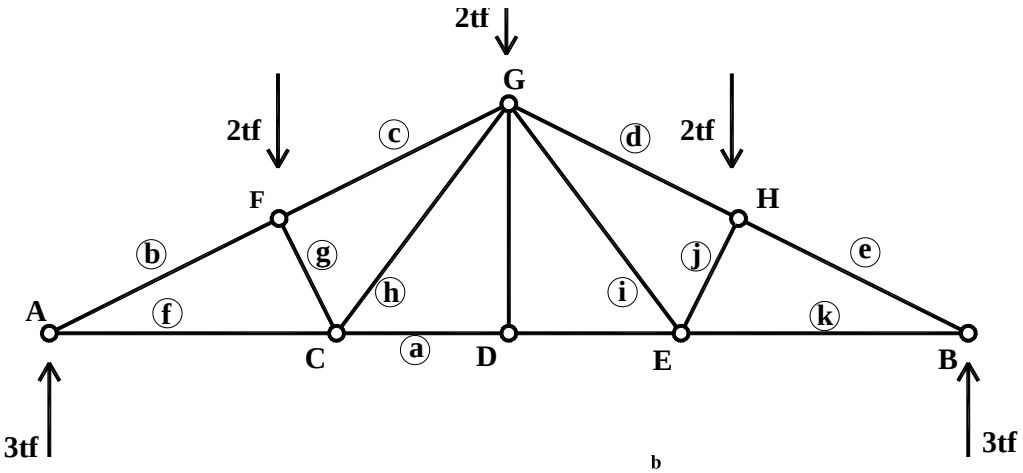


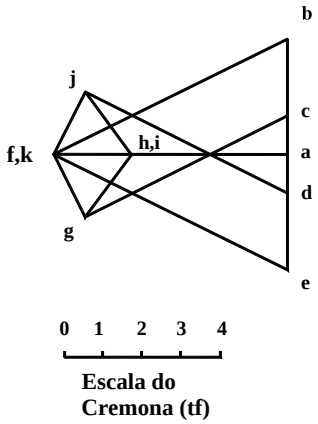
Escala do Cremona (tf)



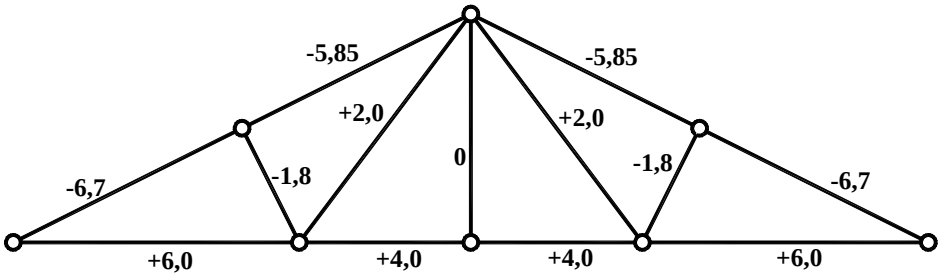
2.



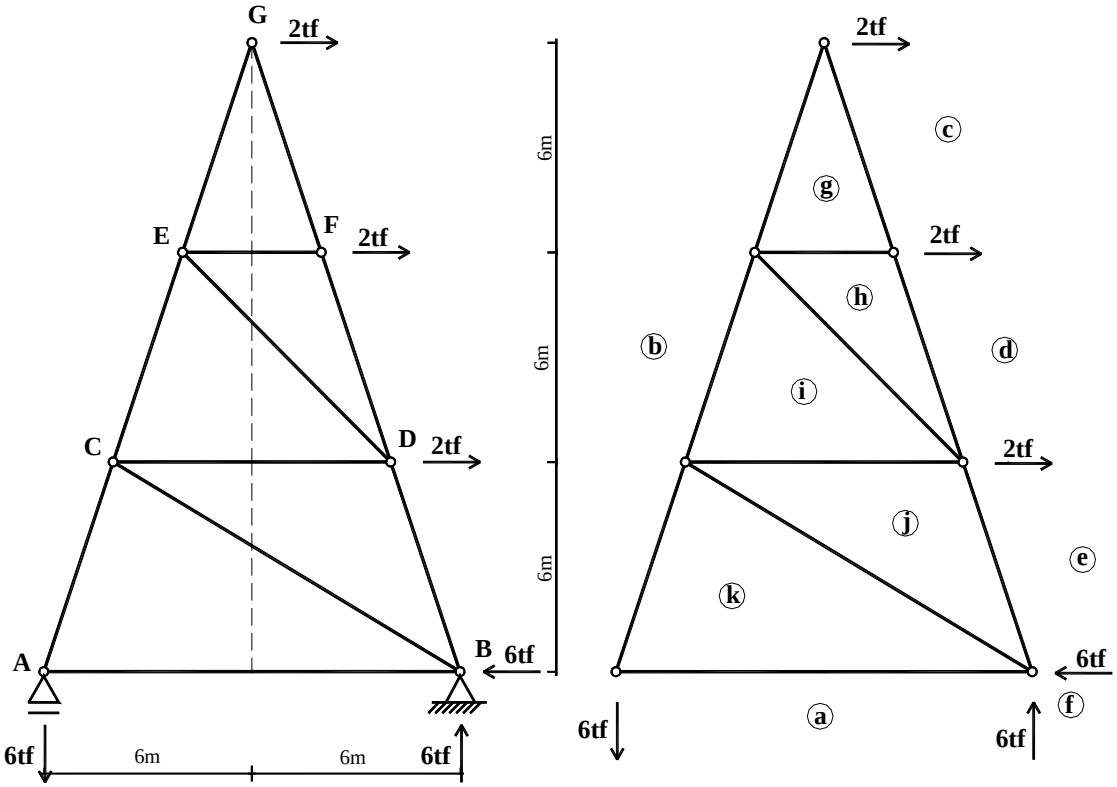


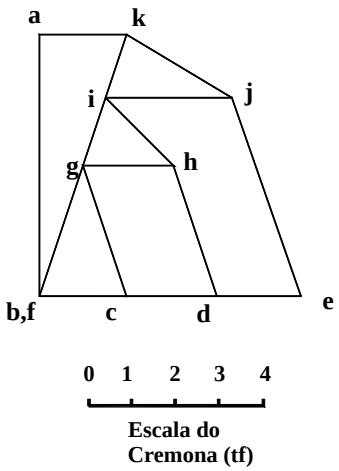


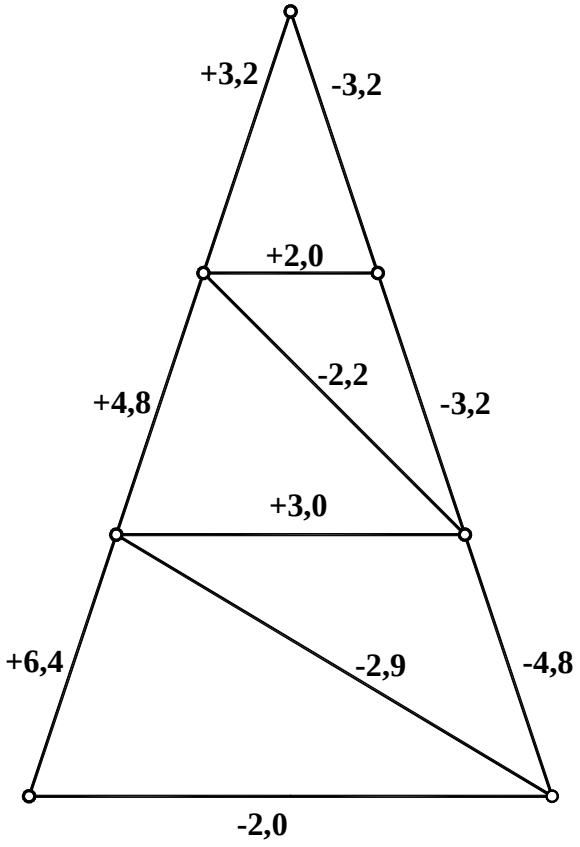
Escala do
Cremona (tf)



3.

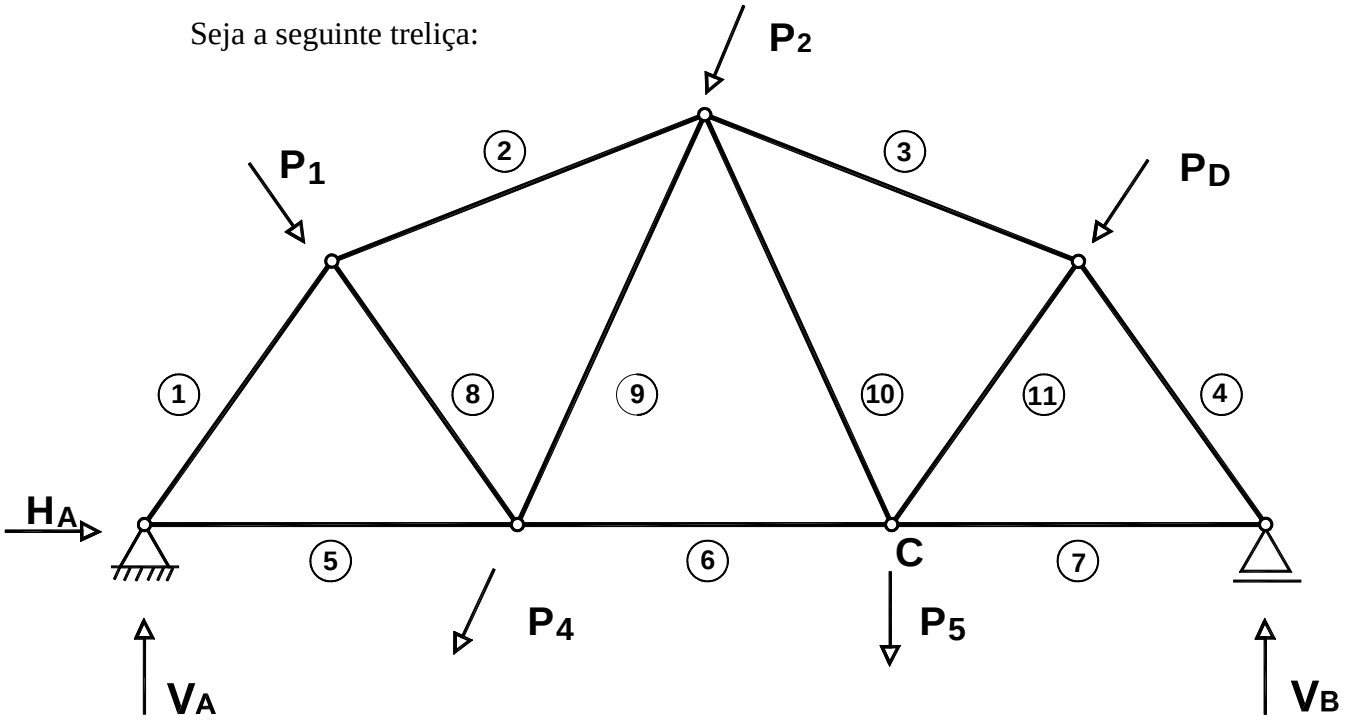

G
2tf
E
F
2tf
C
D
2tf
A
B
6tf
6tf
6m
6m
6tf
6m
6m
2tf
2tf
2tf
2tf
6tf
6tf
6tf
a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k


a
k
i
j
g
h
b,f
c
d
e
0 1 2 3 4
Escala do
Cremona (tf)


+3,2
-3,2
+2,0
-2,2
+4,8
-3,2
+3,0
+6,4
-2,9
-4,8
-2,0

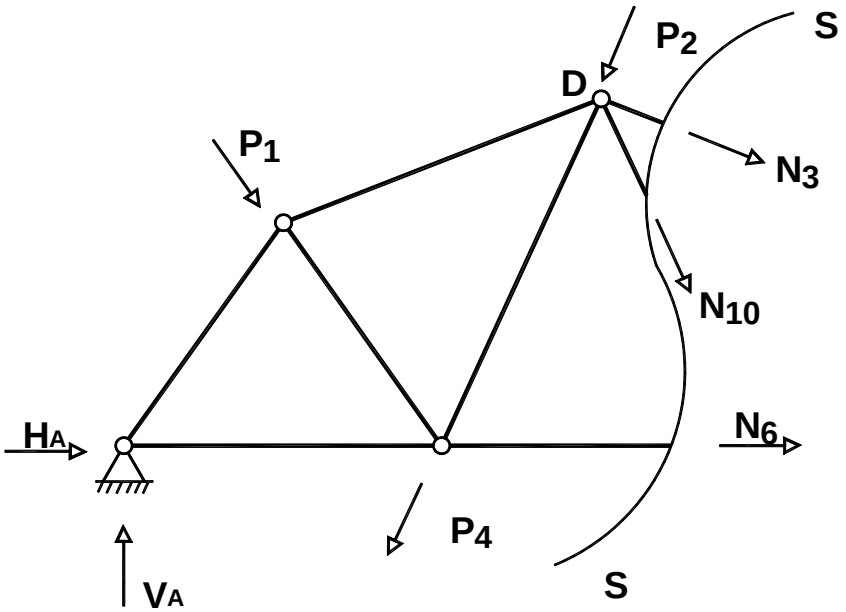
2.1.2. Método de Ritter

Seja a seguinte treliça:



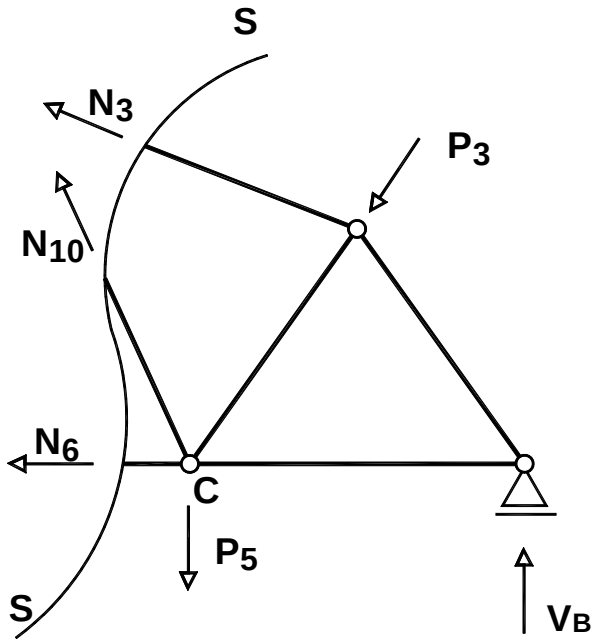
Suponhamos que deseja-se determinar os esforços axiais nas barras 3, 6 e 10. Parte-se a estrutura em duas partes, de forma a partir estas barras, através da seção SS indicada.

Considerando a parte da esquerda, deve-se colocar os esforços internos axiais que surgem nas barras para estabelecer o equilíbrio:



As forças N_3, N_6 e N_{10} representam a ação da parte da direita da treliça sobre a parte da esquerda.

É indiferente considerar a parte da esquerda ou a da direita:



Os esforços indicados N_3, N_6 e N_{10} são iguais em módulo e direção, mas têm os sentidos opostos dos que aparecem na parte esquerda. Representam a ação da parte esquerda sobre a parte da direita.

Para obter os esforços N_3, N_6 e N_{10} utilizam-se as equações da estática, devendo ser escolhidas e usadas numa ordem tal que permita determinar cada incógnita diretamente.

Para o exemplo, pode-se resolver utilizando:

$\Sigma M_C = 0 \rightarrow$ Obtém-se N_3;

$\Sigma M_D = 0 \rightarrow$ Obtém-se N_6;

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$ Obtém-se N_{10}. (tanto faz pela esquerda ou direita)

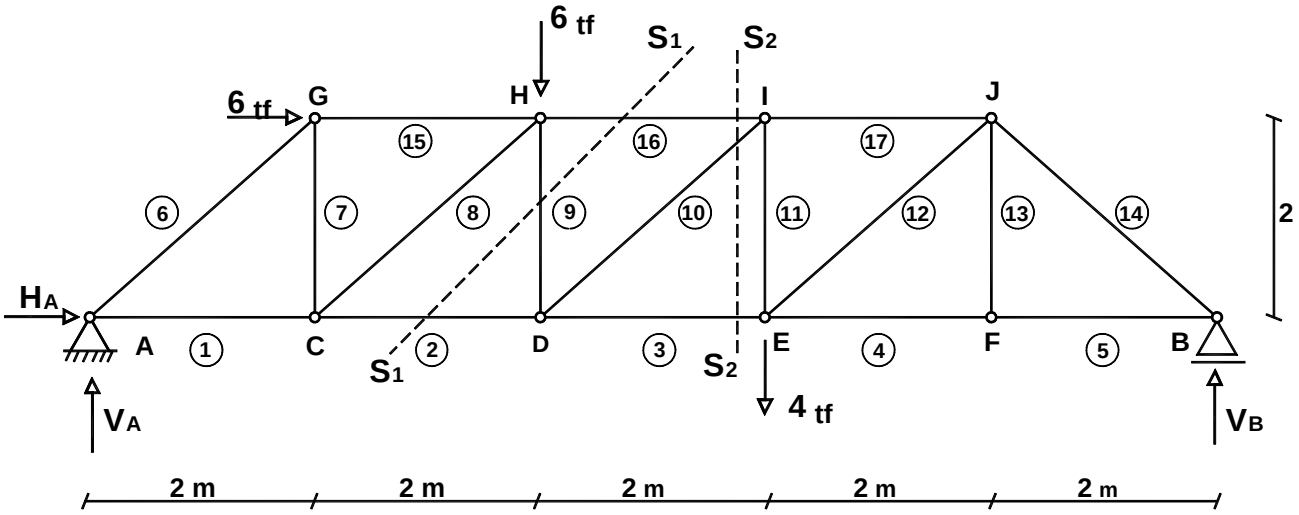
Se os esforços forem positivos terão o sentido indicado (tração) senão terão sentido inverso (compressão).

Observações:

1. seções de Ritter não podem interceptar 3 barrras paralelas, nem 3 barras concorrentes no mesmo ponto;
2. as seções podem ter forma qualquer (não necessitando ser retas);
3. para barras próximas às extremidades da treliça (no exemplo, barras 1, 5, 4 e 7), pode ocorrer que a seção de Ritter só intercepte 2 barras → neste caso obter os esforços fazendo equilíbrio dos nós.

Exemplos:

1. Obter os esforços nas barras 2, 3, 9 e 10.



I. Obter as reações de apoio:

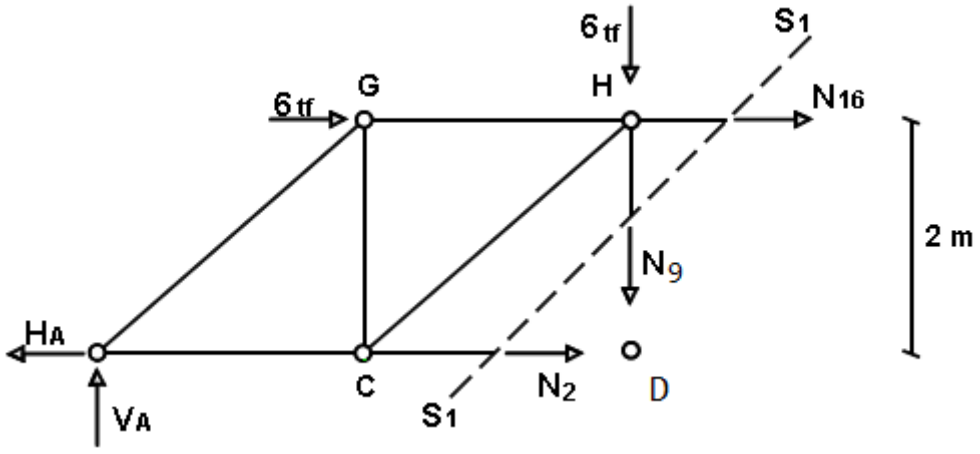
$\Sigma F_x = 0$ → $H_A = -6$ tf;

$\Sigma F_y = 0$ → $V_A + V_B = 10$ tf;

$\Sigma M_A = 0$ → $V_B \cdot 10 - 6 \times 4 - 4 \times 6 - 6 \times 2 = 0$;

$V_B = 6$ tf e $V_A = 4$ tf.

II. Seção S_1S_1

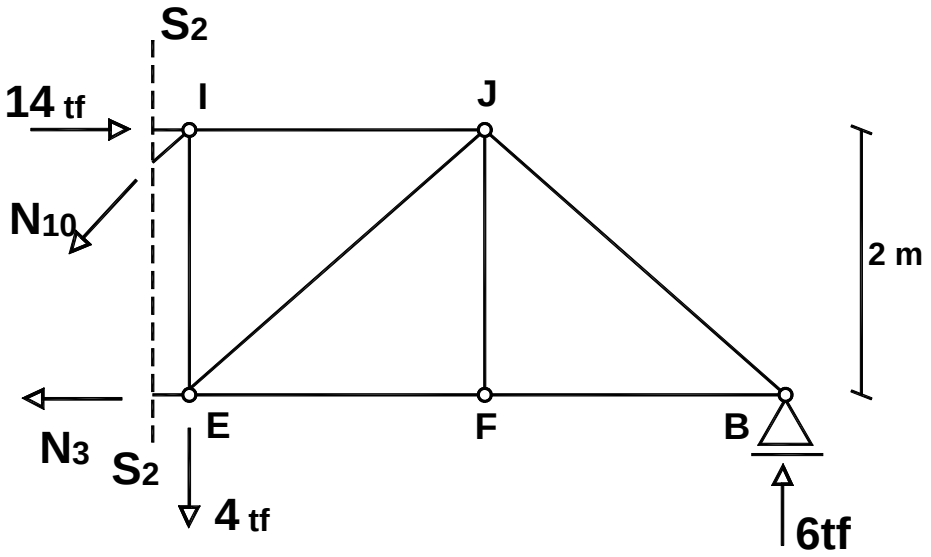


$\Sigma M_H = 0$ → $N_2 \times 2 - 6 \times 2 - 4 \times 4 = 0$ $N_2 = 14$ tf (tração);

$\Sigma M_D = 0$ → $-N_{16} \times 2 - 6 \times 2 - 4 \times 4 = 0$ $N_{16} = -14$ tf (compressão);

$\Sigma F_y = 0$ → $- N_9 - 6 + 4 = 0$ $N_9 = -2$ tf (compressão).

III. Seção S_2S_2

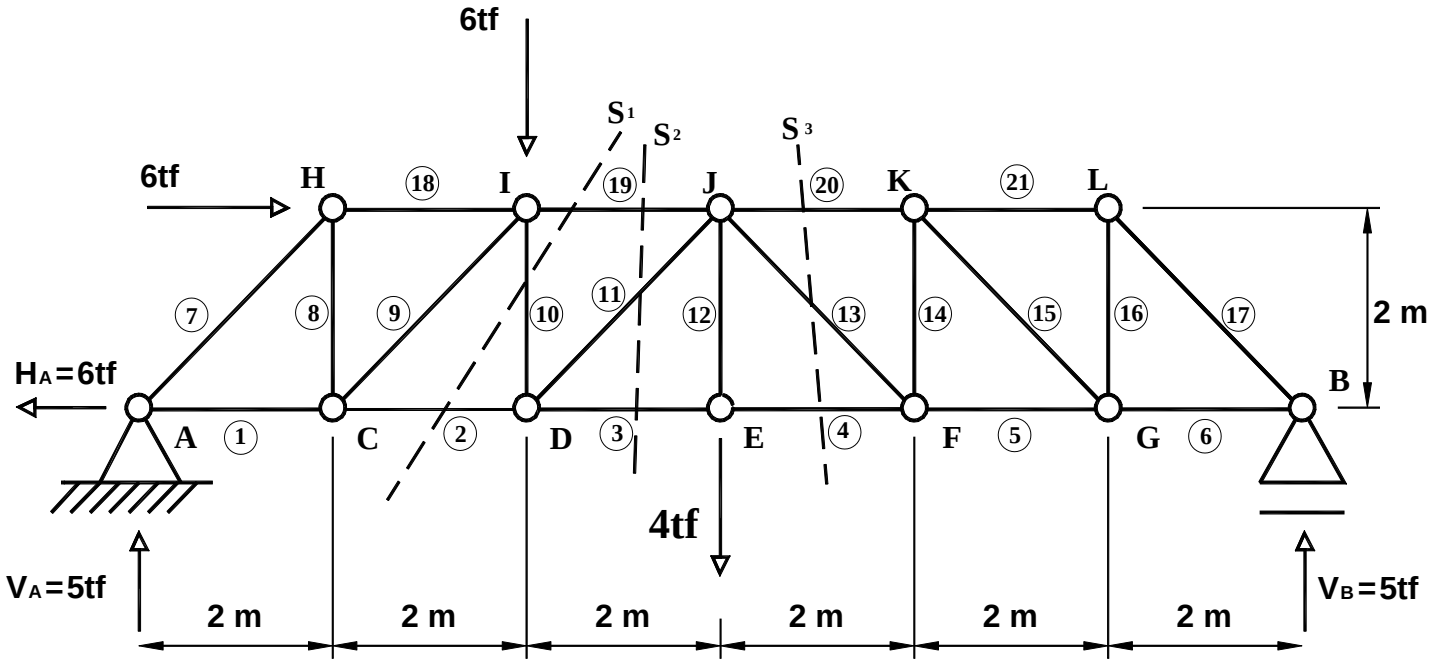


$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow N_3 + N_{10} \cos 45^o = 14$ tf;

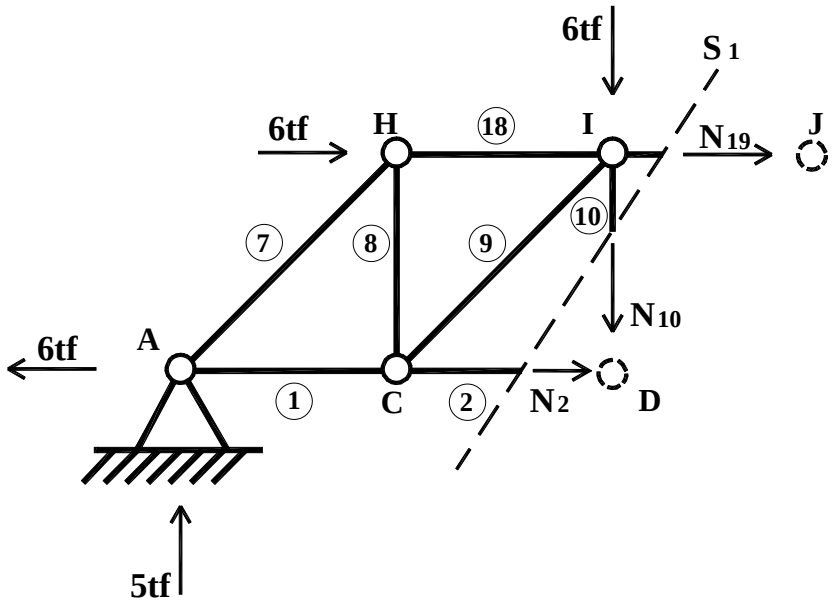
$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow N_{10} \text{ sen}45^o + 4 - 6 = 0$;

$N_{10} = 2{,}83$ tf e $N_3 = 12$ tf.

Obter os esforços nas barras 2, 10, 19, 3 e 13.



I. Seção S_1S_1

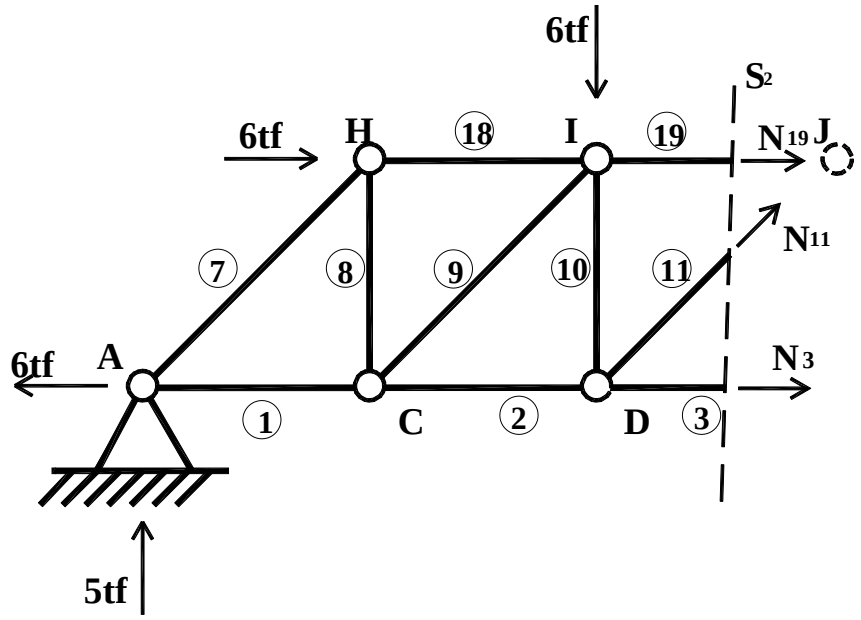


$\Sigma M_D = 0$ → $N_{19} \times 2 + 6 \times 2 + 5 \times 4 = 0$ $N_{19} = -16$ tf (compressão);

$\Sigma F_x = 0$ → $N_{19} + N_2 = 0$ $N_2 = 16$ tf (tração);

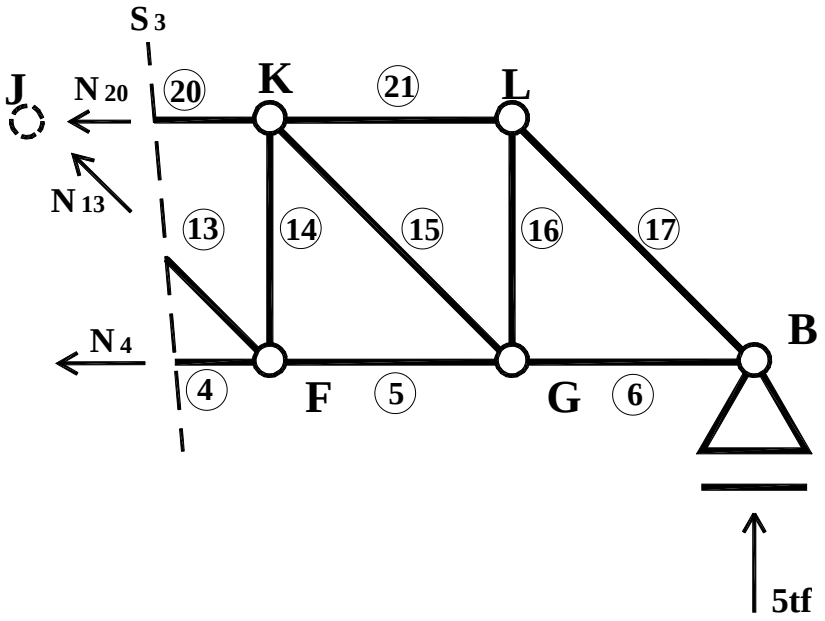
$\Sigma F_y = 0$ → $N_{10} + 6 - 5 = 0$ $N_{10} = -1$ tf (compressão);

II. Seção S_2S_2



$\Sigma M_J = 0$ → $N_3 \times 2 + 6 \times 2 - 5 \times 6 - 6 \times 2 = 0$ $N_3 = 15$ tf (tração);

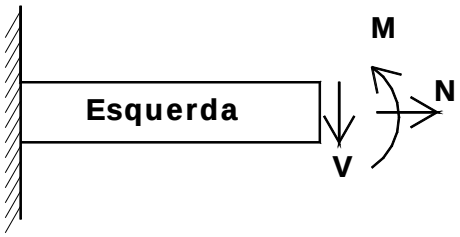
II. Seção S_3S_3

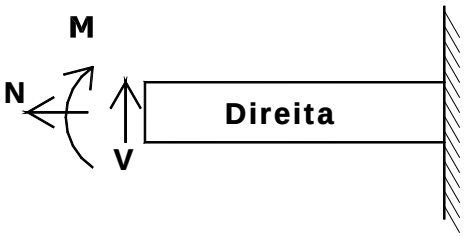


$\Sigma F_y = 0$ → $N_{13} \cos 45^o + 5 = 0$; $N_{13} = -7{,}1$ tf (compressão);

2.2. Vigas

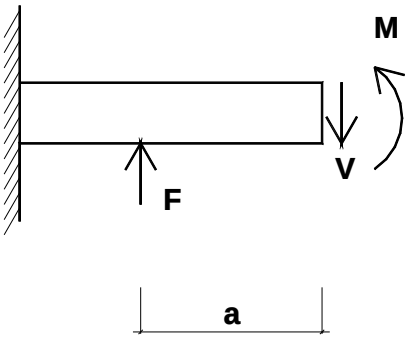
2.2.1. Vigas Simples - Método Direto para Diagramas





Convenção de sinais:

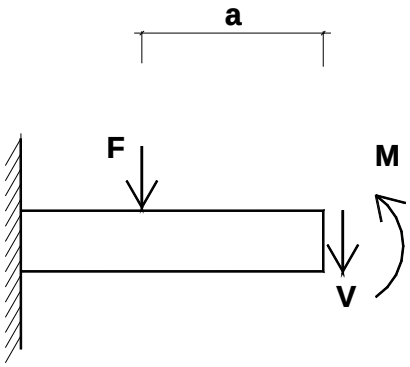
Revisão:



Esquerda com carga para cima

$V - F = 0 \rightarrow V = +F$ positivo.

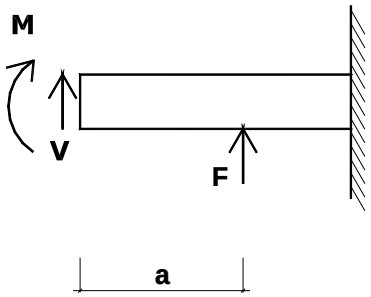
$M - F.a = 0 \rightarrow M = +F.a$ positivo.



Esquerda com carga para baixo

$V + F = 0 \rightarrow V = - F$ negativo.

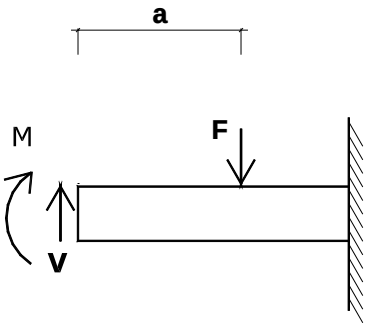
$M + F.a = 0 \rightarrow M = - F.a$ negativo.



Direita com carga para cima

$V + F = 0 \rightarrow V = - F$ negativo.

$M - F.a = 0 \rightarrow M = +F.a$ positivo.



Direita com carga para baixo

$V - F = 0 \rightarrow V = +F$ positivo.

$M + F.a = 0 \rightarrow M = - F.a$ negativo.

- Traçar DEC diretamente vindo pela esquerda.

- Traçar DMF vindo pela esquerda, calculando M nos pontos de aplicação de força concentrada.

Lembrando:

- Força Concentrada: Descontinuidade no DEC
- Binário Aplicado: Descontinuidade no DMF

$$-q = \frac{dV}{dx} \qquad V = \frac{dM}{dx} \qquad -q = \frac{d^2M}{dx^2}$$

q=0 ; (entre cargas conc.)

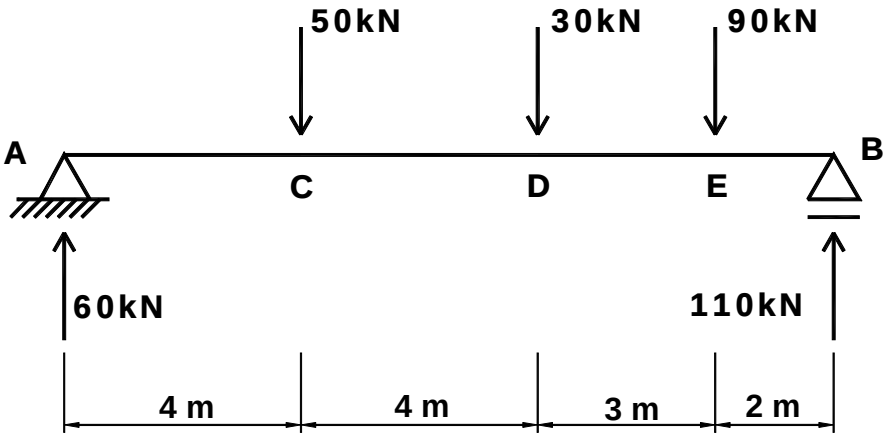
- V Constante
- M Varia Linearmente em x

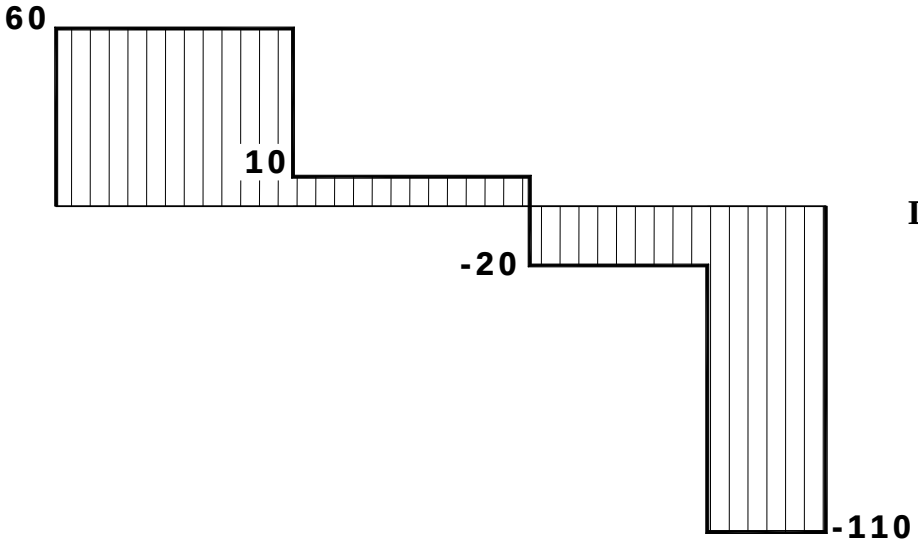
q= k ;

- V Varia Linearmente em x
- M Varia Parabolicamente em x

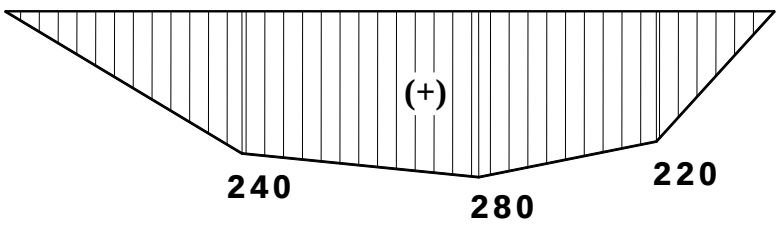
Integrando q → V; Integrando V → M.

Exemplo 1:





DEC (kN)



DMF (kN.m)

$M_C^{Esq} = 60.4 = 240$ kN;

$M_D^{Esq} = 60.8 – 50.4 = 280$ kN;

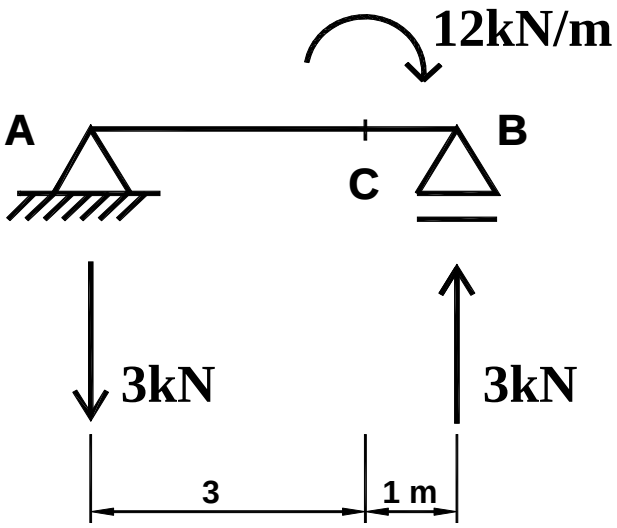
ou $M_D = M_C + V_C$ x4m

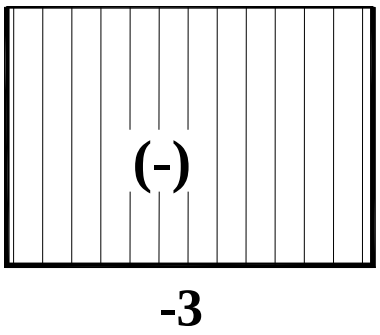
$M_E^{Dir.} = 110.2 = 220$ kN ou

$M_E^{Esq.} = 60.11 – 50.7 – 30.3 = 220$ kN

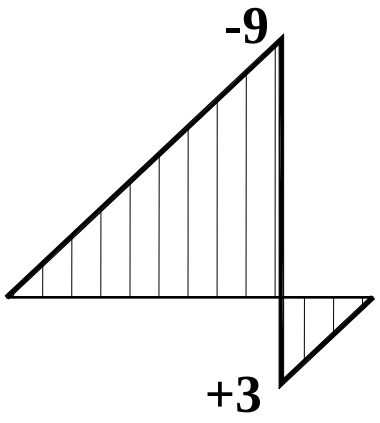
ou $M_E^{Esq.} = M_D + V_D$ x3m

Exemplo 2:





DEC (kN)

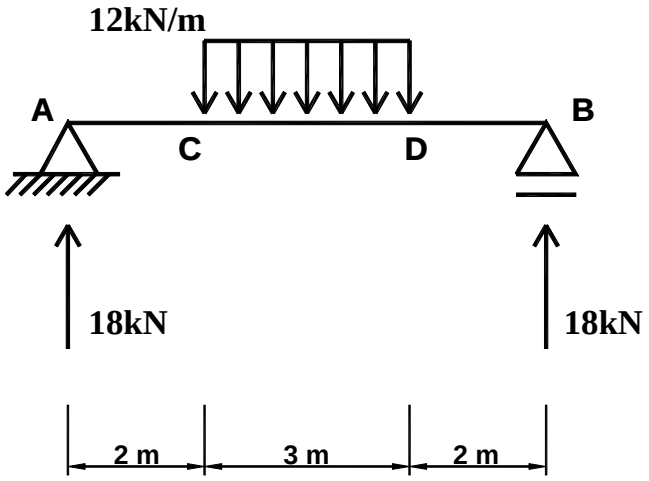


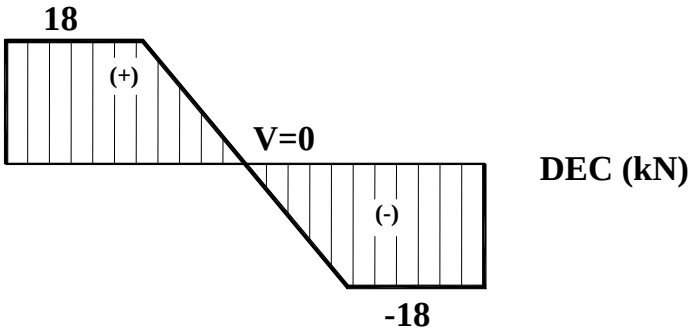
DMF (kN.m)

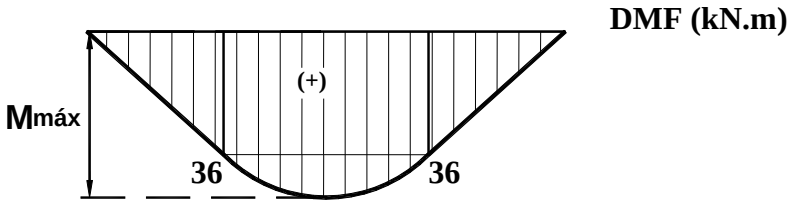
$M_C^{Esq} = - 3.3 = - 9$ kN;

$M_C^{Dir.} = 3.1 = 3$ kN;

Exemplo 3:





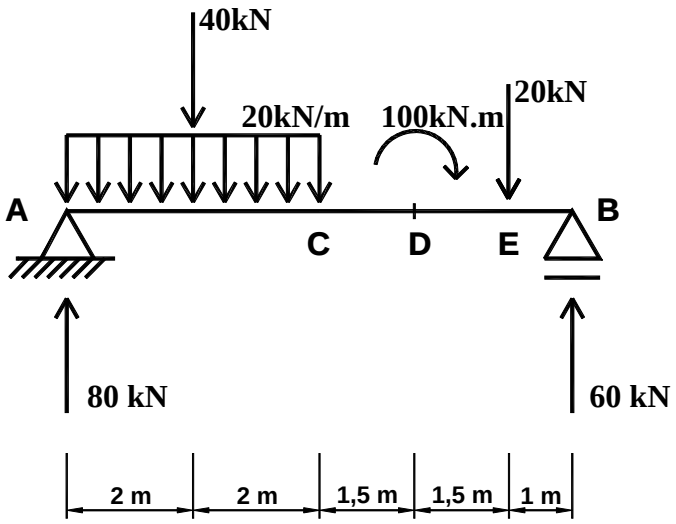


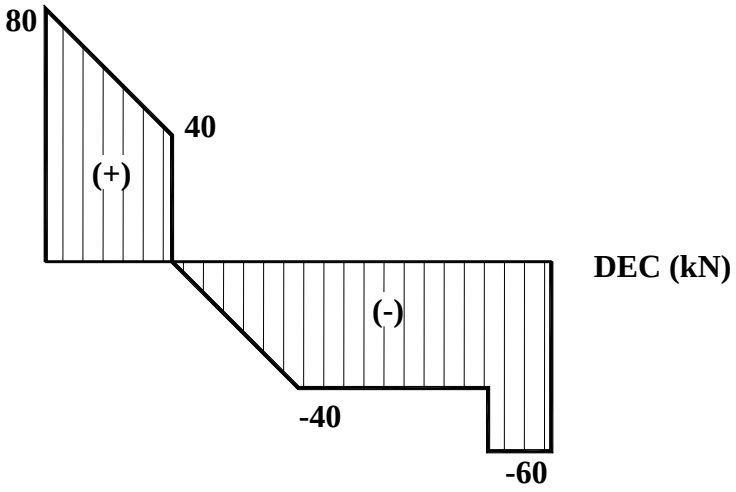
$M_C^{Esq} = 18.2 = 9$ kN;

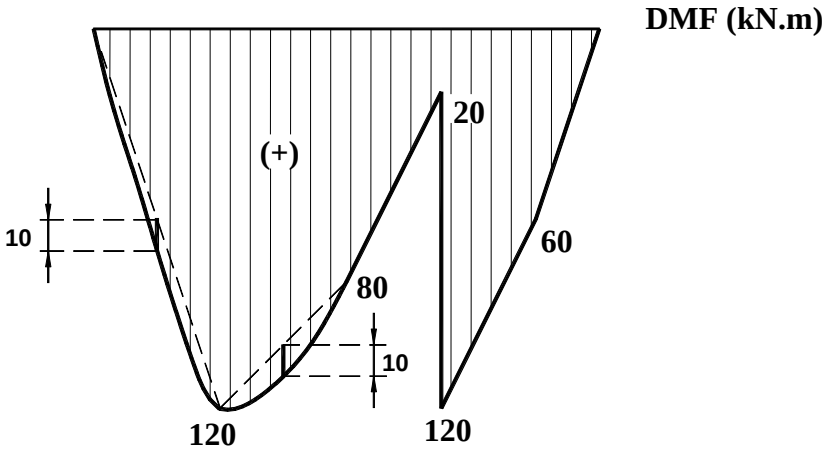
$M_{MÁX} = q.l^2/8 + 36 = 12.3^2/8 + 36 = 13,5 + 36$

$M_{MÁX} = 49,5$ kN.m

Exemplo 4:







$M_{V=0}^{Esq}$ = 80.2 – 40.1 = 120 kN;

M_C^{Esq} = 80.4 – 80.2 – 40.2 = 80 kN;

M_D^{Esq} = 80.5,5 – 80.3,5 – 40.3,5 = 20 kN;

M_E^{Dir} = 60.1 = 60 kN;

M_D^{Dir} = 60.2,5 – 20.1,5 = 120 kN;

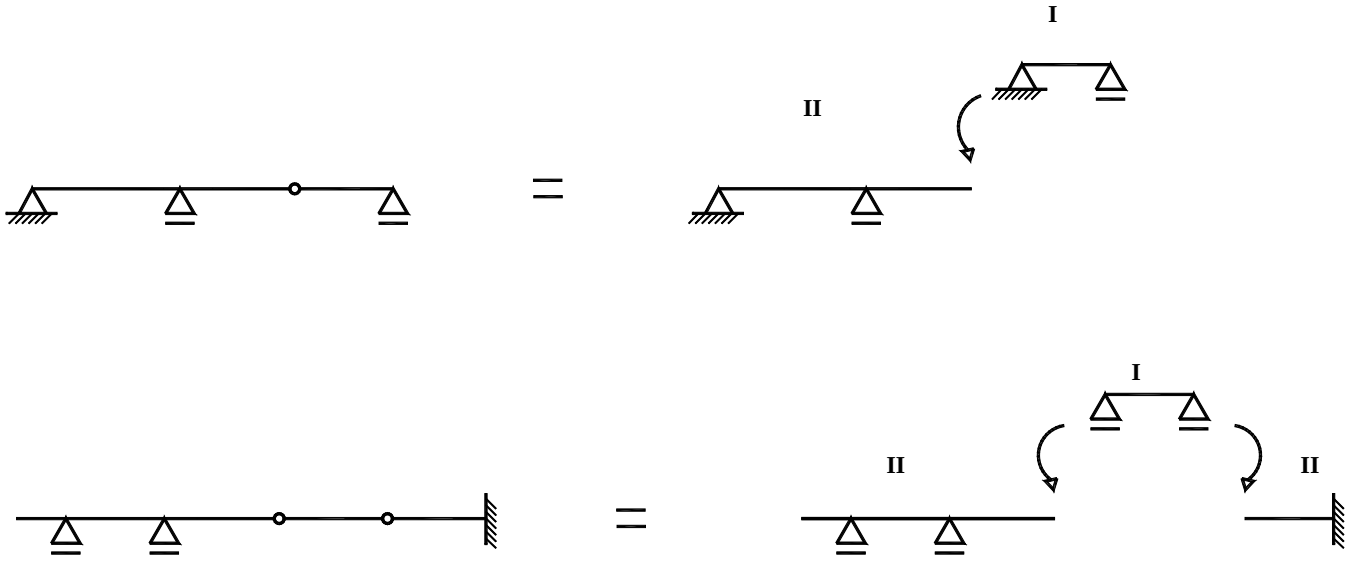
2.2.2. Vigas Gerber

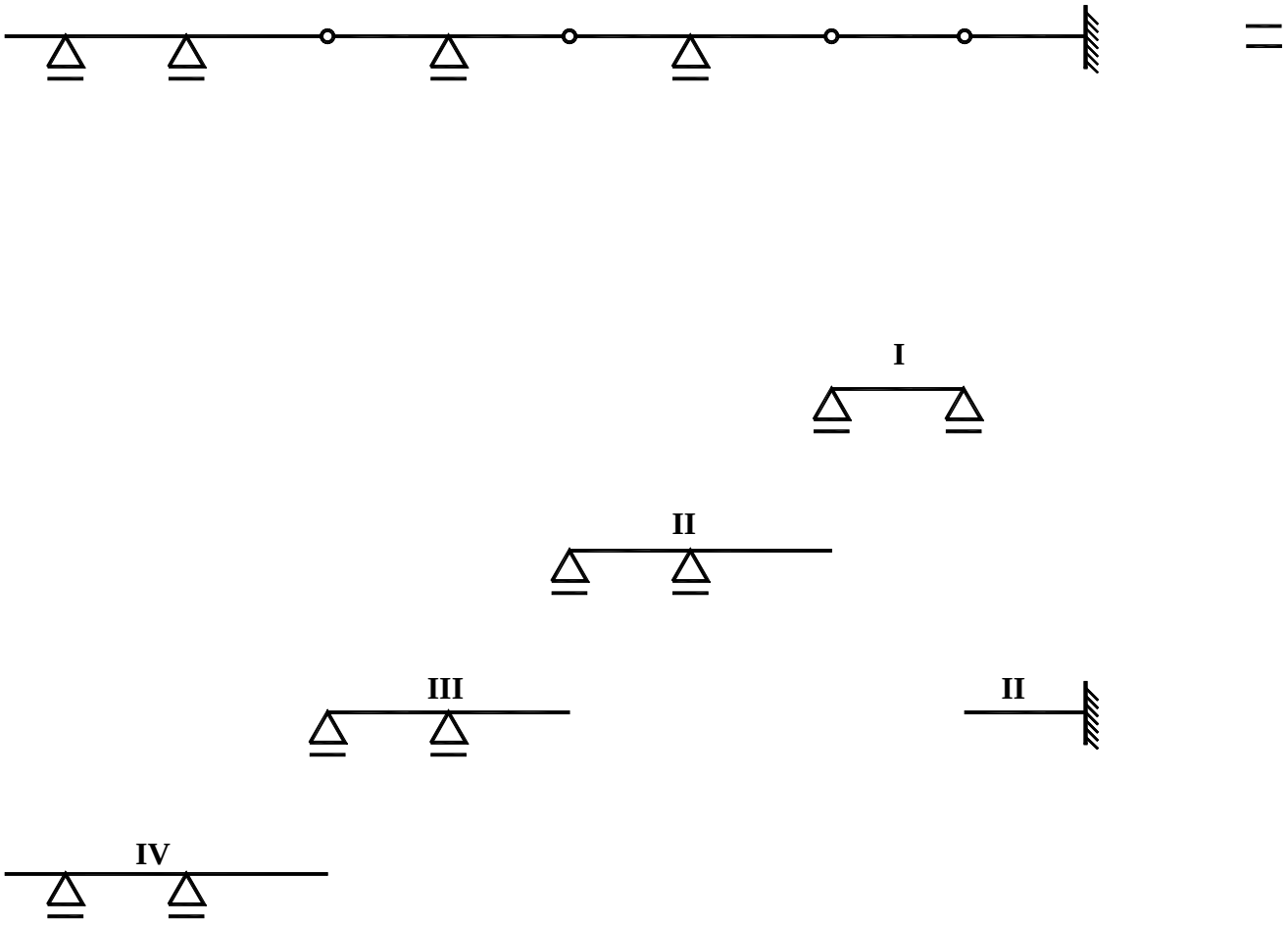
- Aplicações principais – Pontes;
- Surgiram por motivos de ordem estrutural e de ordem construtiva;
- Vigas Gerber Isostáticas serão decompostas nas diversas vigas isostáticas que as constituem:
    - Vigas com estabilidade própria;
    - Vigas que se apoiam sobre as demais;

Exemplos de Decomposição:

Os algarismos romanos I, II, III e IV indicam a ordem de resolução, para obtenção das reações de apoio.

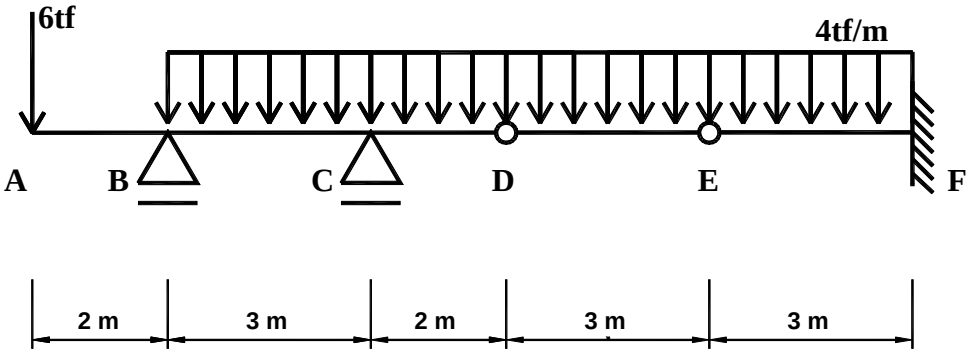
- Começa-se a resolver as vigas sem estabilidade sem estabilidade própria;
- Os diagramas podem ser traçados separadamente, juntando-os em seguida;
- As rótulas transmitem forças verticais e horizontais, mas não transmitem momento;
- Basta que um dos apoios resista a forças horizontais na viga Gerber. Apenas as cargas verticais provocam esforço cortante e momento fletor nas vigas, portanto, na decomposição não é necessário distinguir apoios do 1º ou 2º gênero. Usaremos apenas: Δ

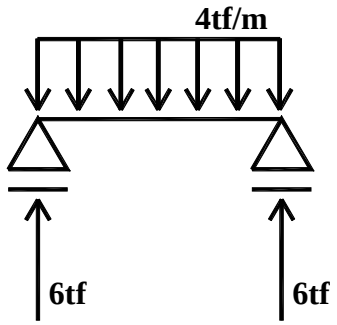


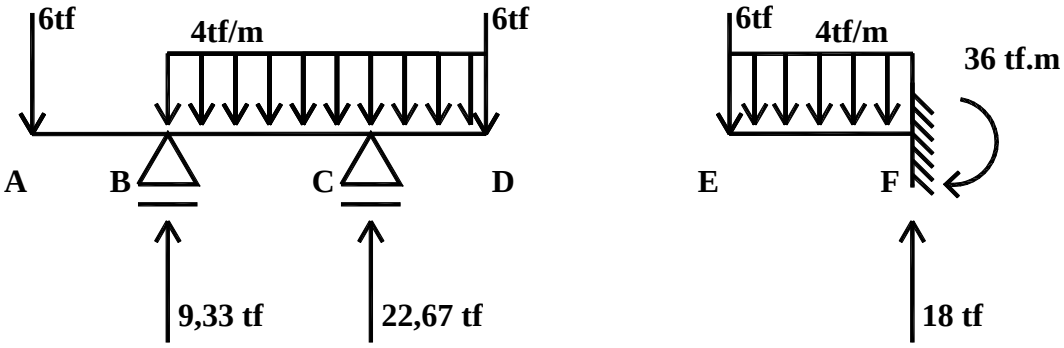

I
II
III
II
IV

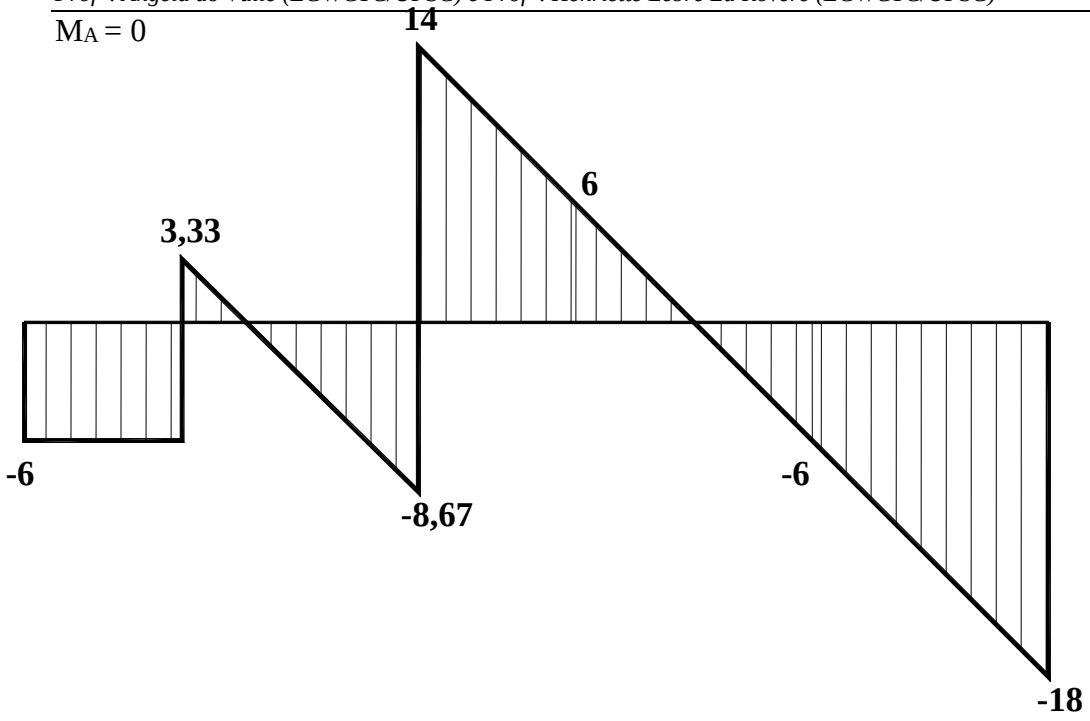
Esforços Internos – Diagramas – Exemplos:

1.

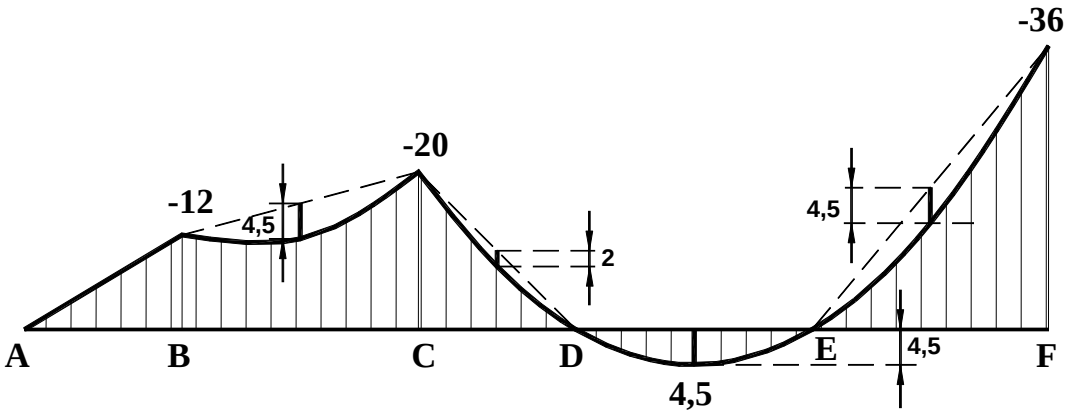








DEC (tf)



DMF (tf.m)

$M_B^{esq} = -6 \times 2 = -12$

$M_C^{esq} = -6 \times 5 + 9{,}33 \times 3 - 12 \times 1{,}5 = -20$

$M_D^{esq} = -6 \times 7 + 9{,}33 \times 5 - 20 \times 2{,}5 + 22{,}67 \times 2 = -0{,}01 \approx 0$ → OK

O momento fletor na rótula é sempre nulo, a não ser que haja um binário aplicado na rótula.

$M_E^{dir} = -36 + 18 \times 3 - 12 \times 1{,}5 = 0$ → OK

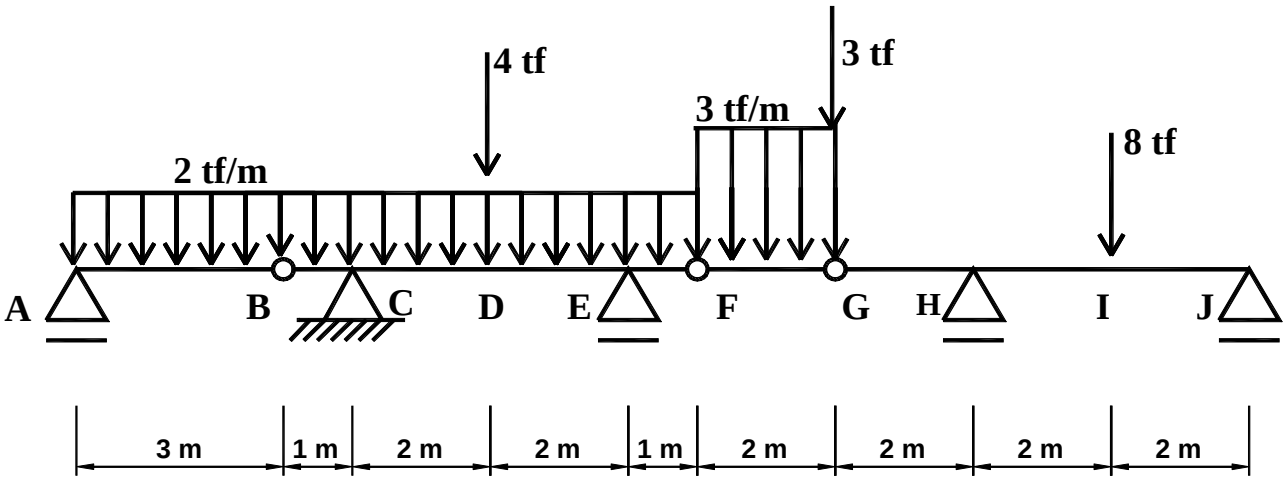
$M_F^{dir} = -36$

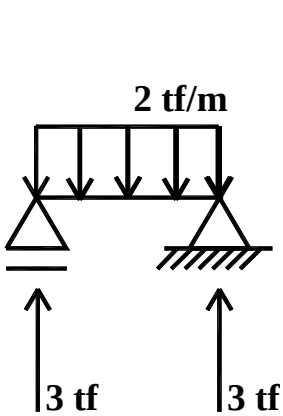
Quando na rótula não há força concentrada:

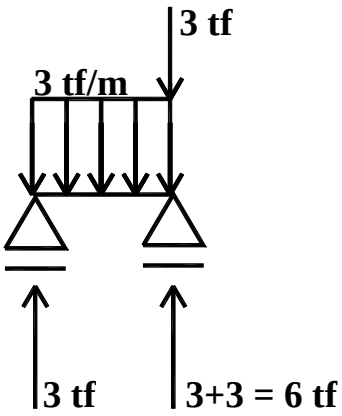
$$V_d^{esq} = V_d^{dir}$$

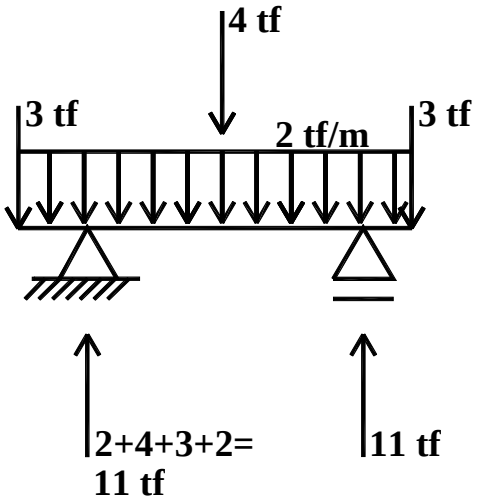
$$V_e^{esq} = V_e^{dir}$$

2.

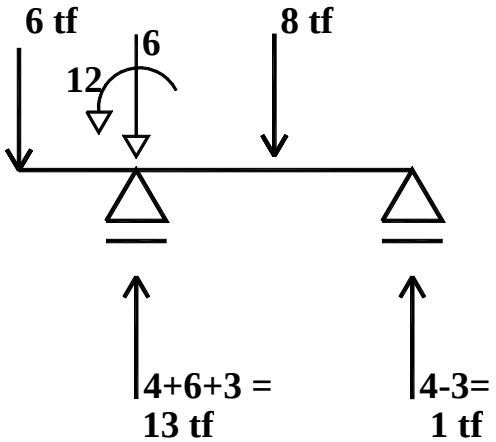


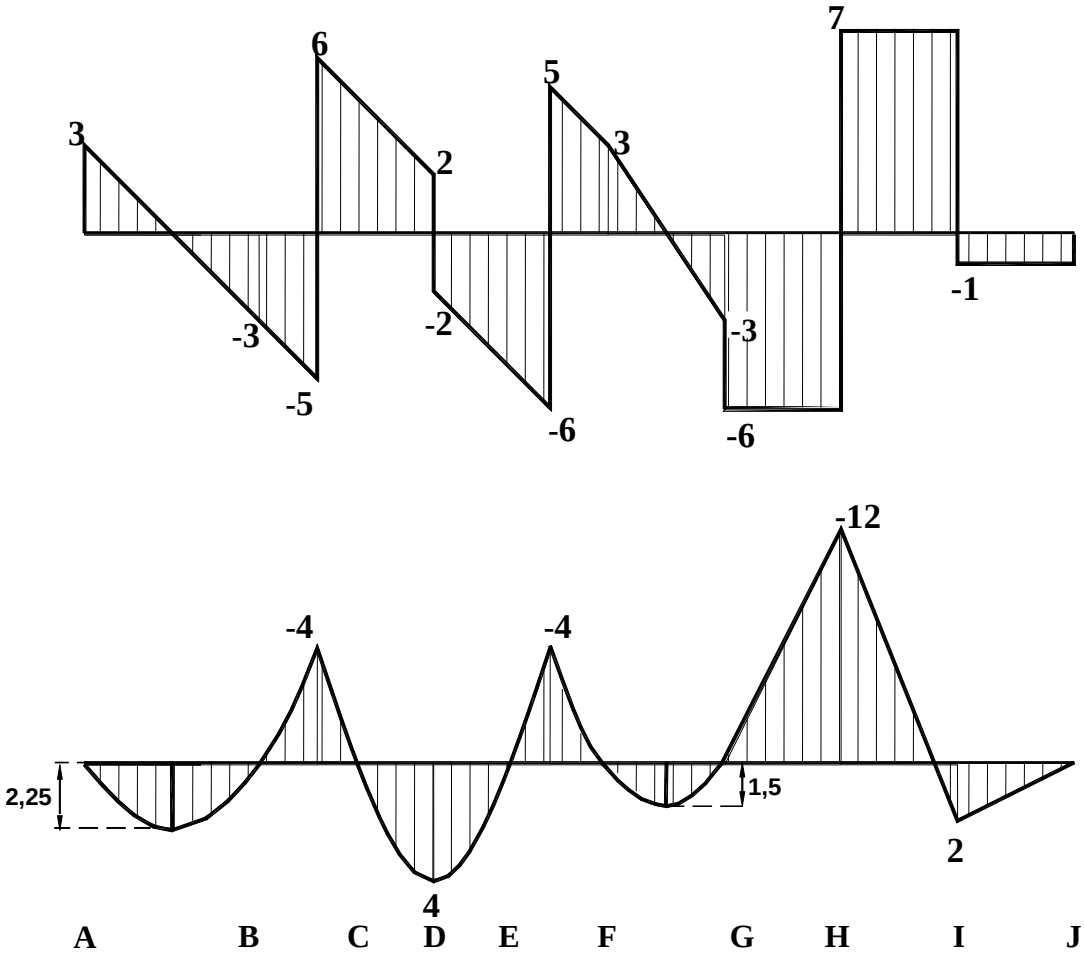






Transfere-se a força de 6 tf:





Pela esquerda:

$M_A = 0$

$M_B = 0$

$M_{A/B}^{esq} = (q\ l^2) / 8 = (2.3^2) / 8 = 2,25$

$M_C^{esq} = - 3.1.- 2.0,5 = - 4$

$M_D^{esq} = -4+ (2.4^2)/8 + (4.4)/4 = 4$

Pela direita:

$M_J = 0$

$M_I^{dir} = 1.2 = 2$

$M_H^{dir} = 1.4 – 8.2 = -12$

$M_G = 0$

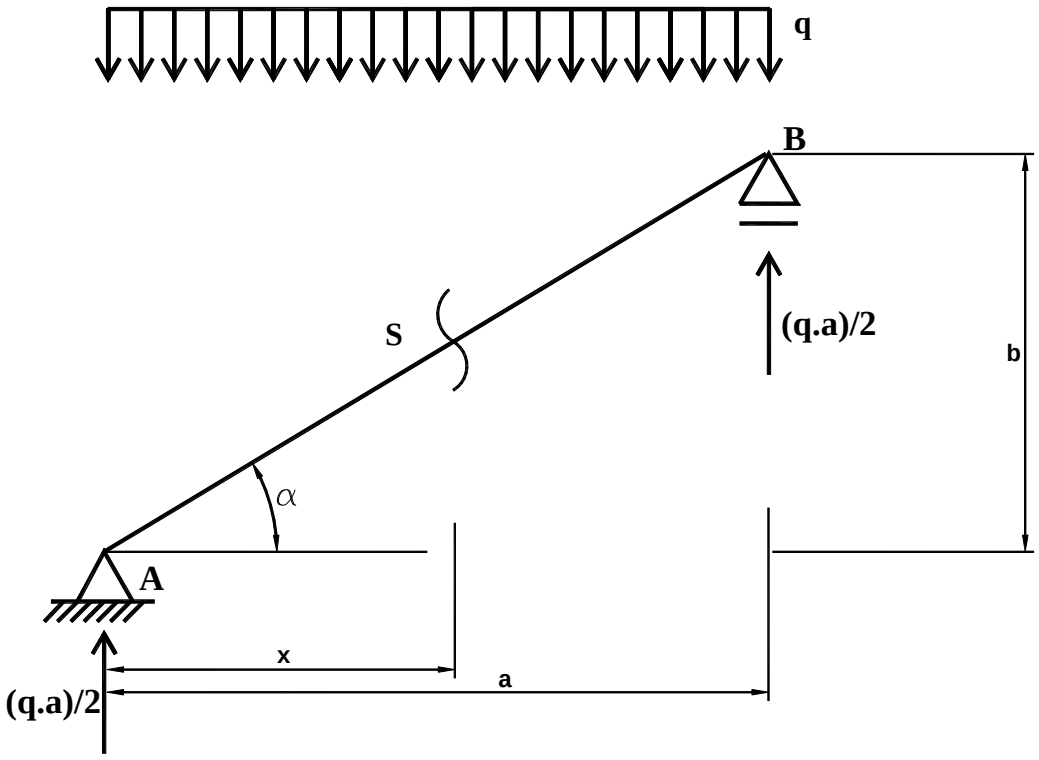
$M_{F/G} = (q\ l^2) / 8 = (3.2^2)/8 = 1,5$

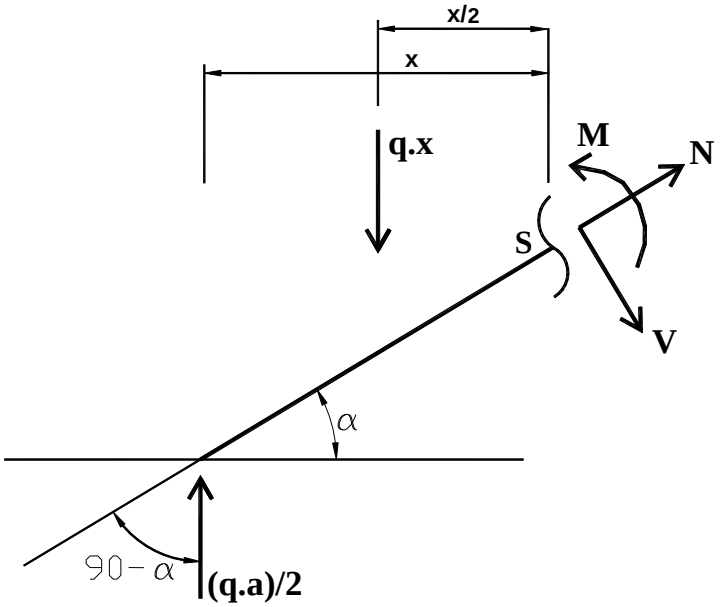
$M_F = 0$

2.2.3. Vigas Inclinadas

Independente do valor de b, as reações verticais serão iguais (= q.a / 2)

1.



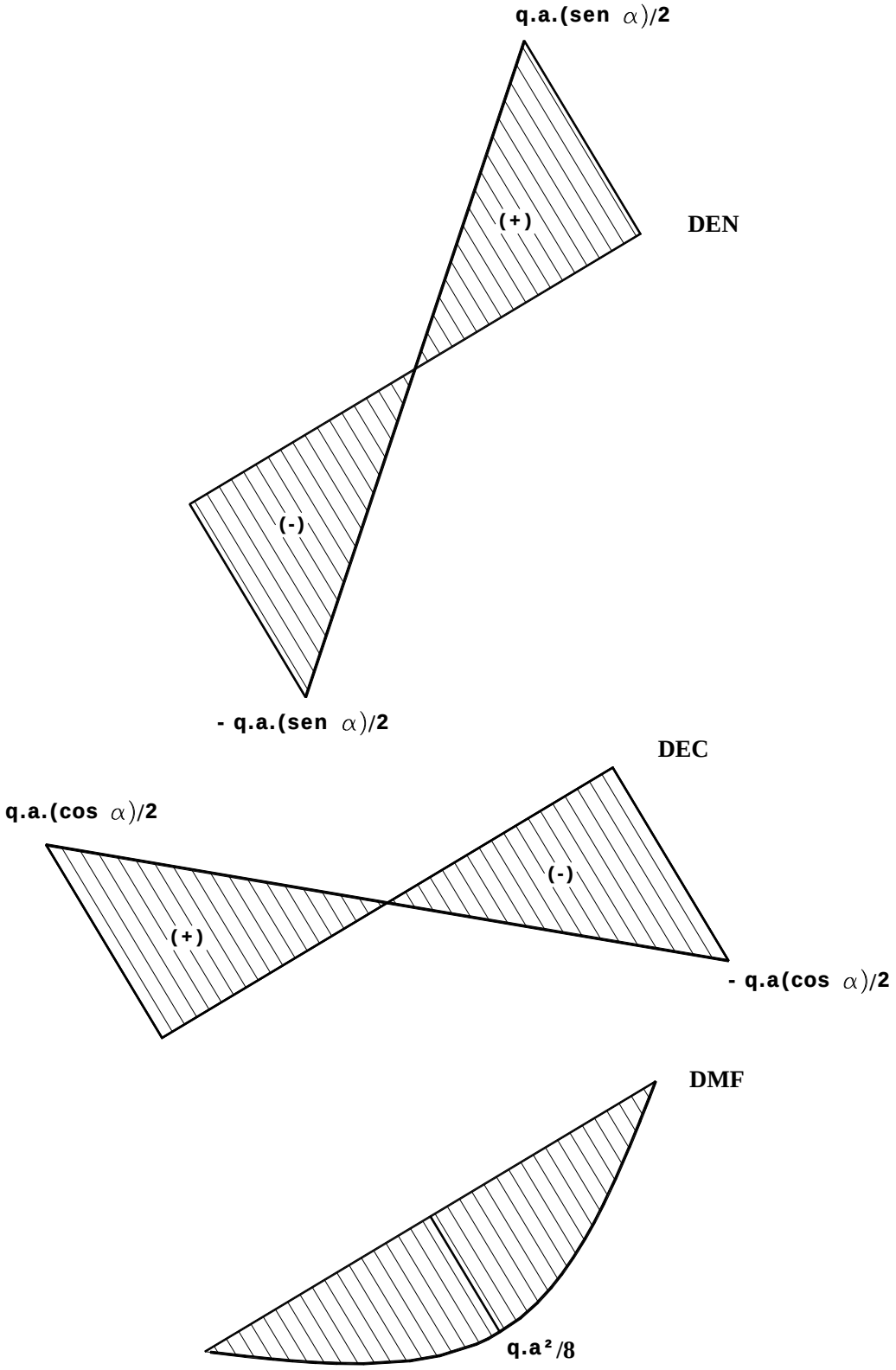


Esforços Internos: Seção S (a x do apoio A)

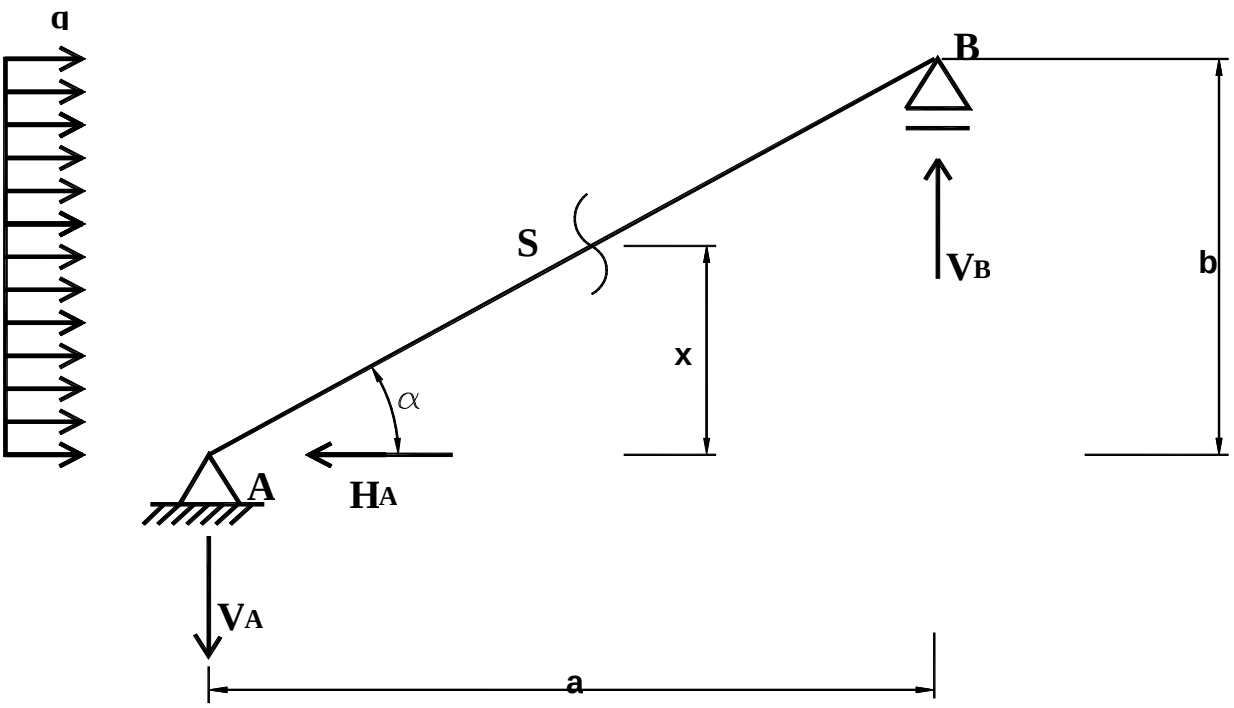
$$V = \left(\frac{q.a}{2} - q.x\right).\cos\alpha \qquad N = -\left(\frac{q.a}{2} - q.x\right).\text{sen}\,\alpha \qquad M = \left(\frac{q.a}{2}.x - \frac{q.x^2}{2}\right)$$

(para fins de momento fletor a viga se comporta como se fosse horizontal)

Diagramas:



2.



I. $\Sigma F_x = 0$

$H_A = q.b$

II. $\Sigma F_y = 0$

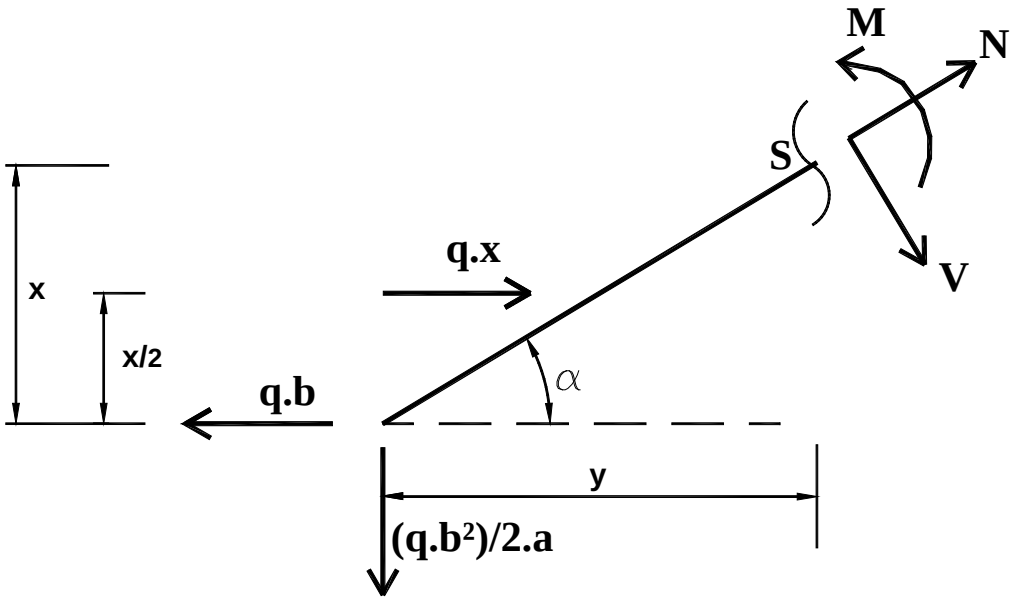
$V_A = V_B$

III. $\Sigma M_A = 0$

$a.V_B - qb.b/2 = 0$

$V_B = qb^2/2a = V_A$

Esforços Internos:



$N = (qb - qx)\cos\alpha + (qb^2/2.a) \cdot \text{sen}\alpha$

$V = (qb - qx)\text{sen}\alpha - (qb^2/2.a) \cdot \cos\alpha$

$M = x.qb - qx^2/2 - y.(qb^2/2.a)$

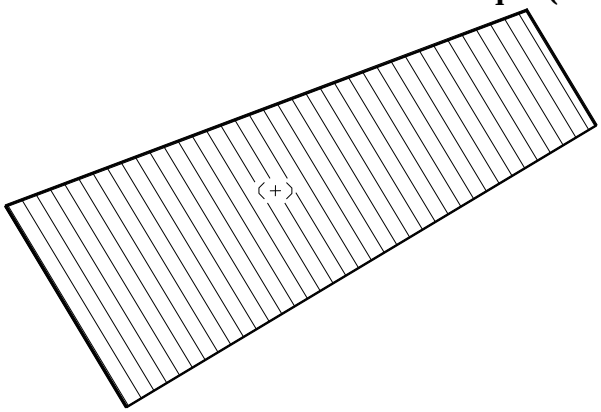
$M = x.qb - qx^2/2 - x.(a/b).(qb^2/2.a)$

$M = qbx/2 - qx^2/2$

Diagramas:

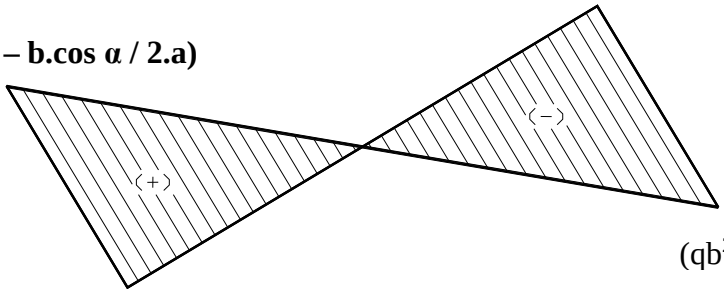
$q.b^2.(\text{sen}\,\alpha)/2.a$

$q.b.[\cos\alpha+(b.\text{sen}\alpha)/2.a$



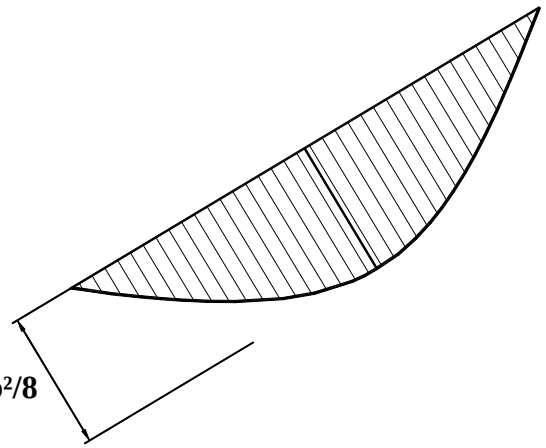
DEN

$q.b.(\text{sen}\,\alpha - b.\cos\alpha / 2.a)$



DEC

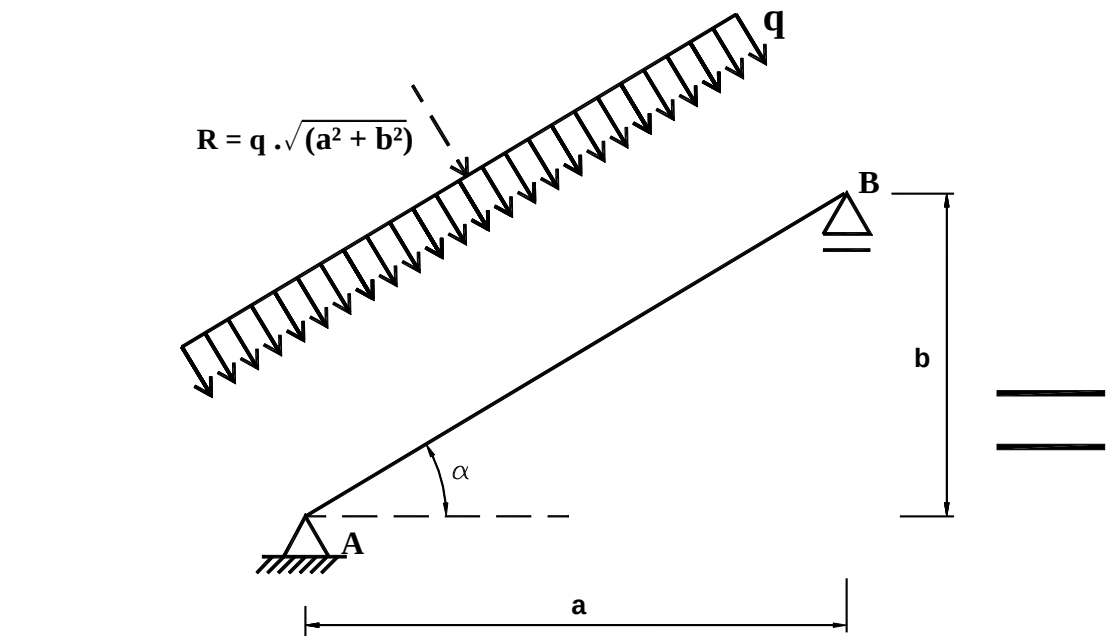
$(qb^2/2.a) \cdot \cos\alpha$

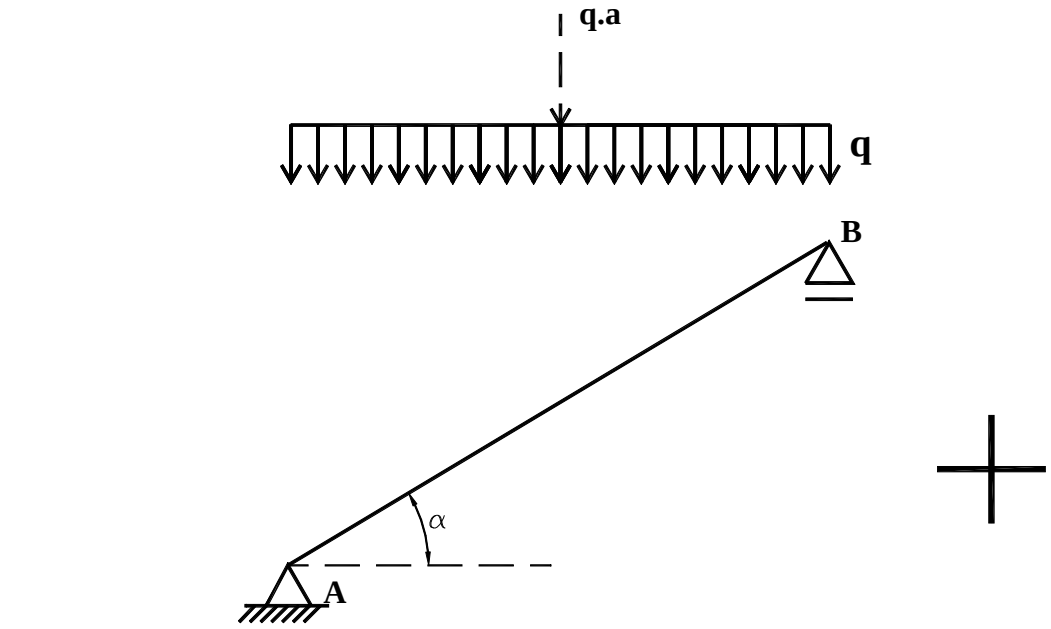


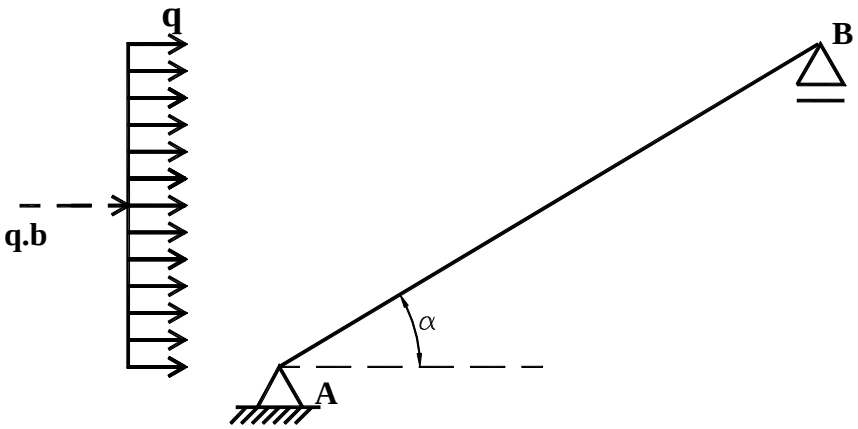
DMF

$q.b^2/8$

3.

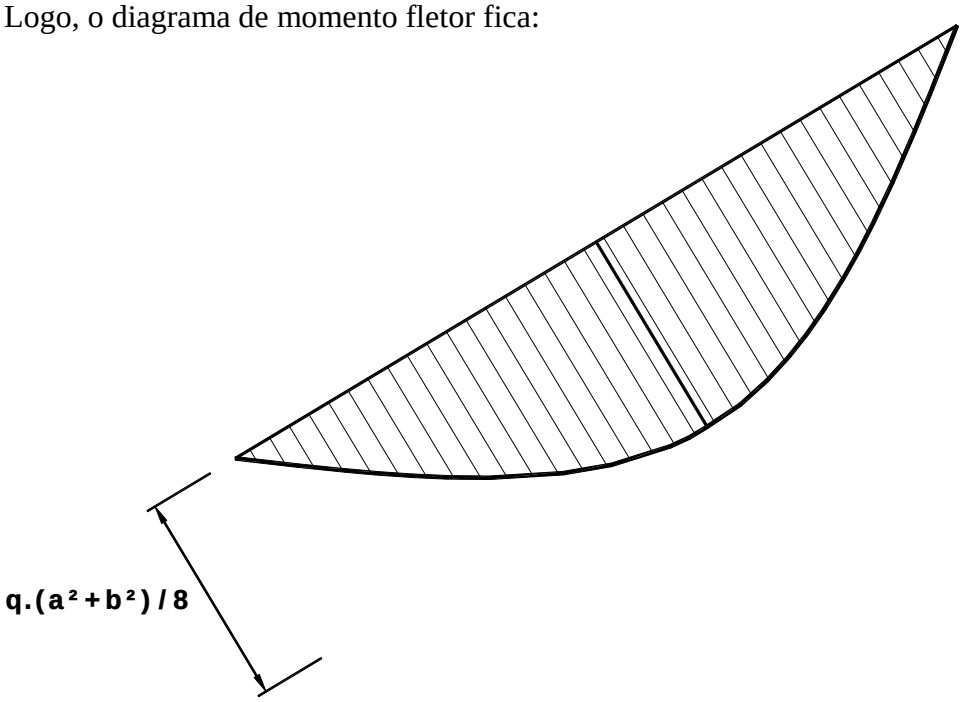




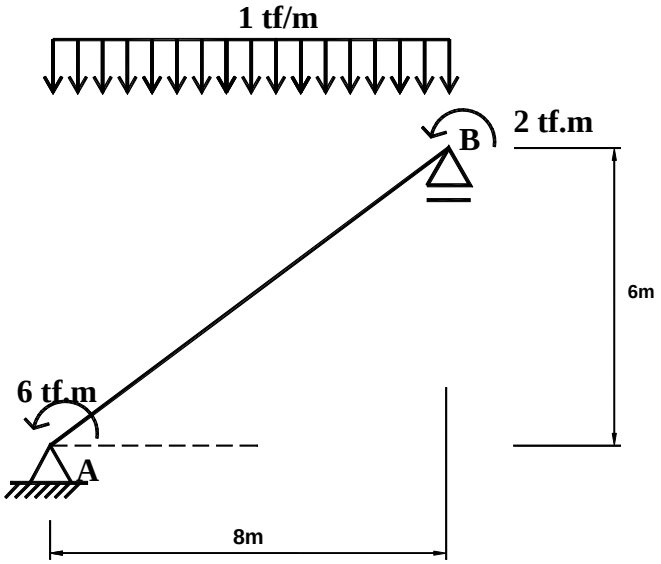


Logo, o diagrama de momento fletor fica:

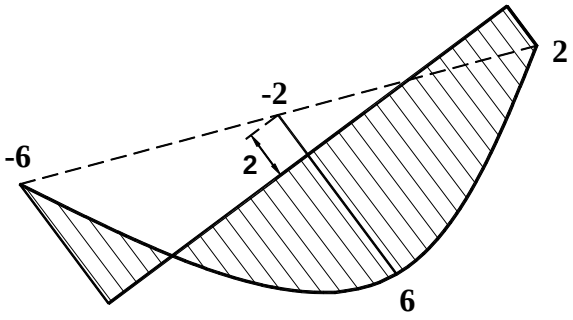
DMF

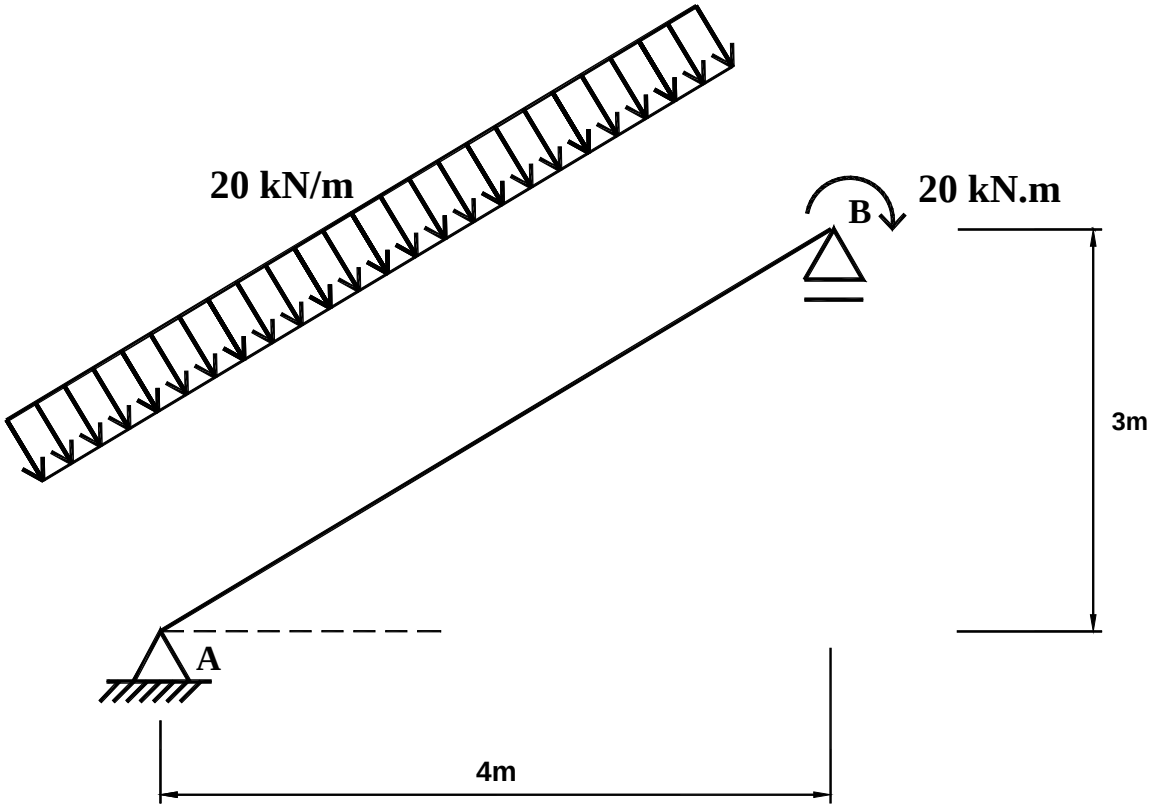


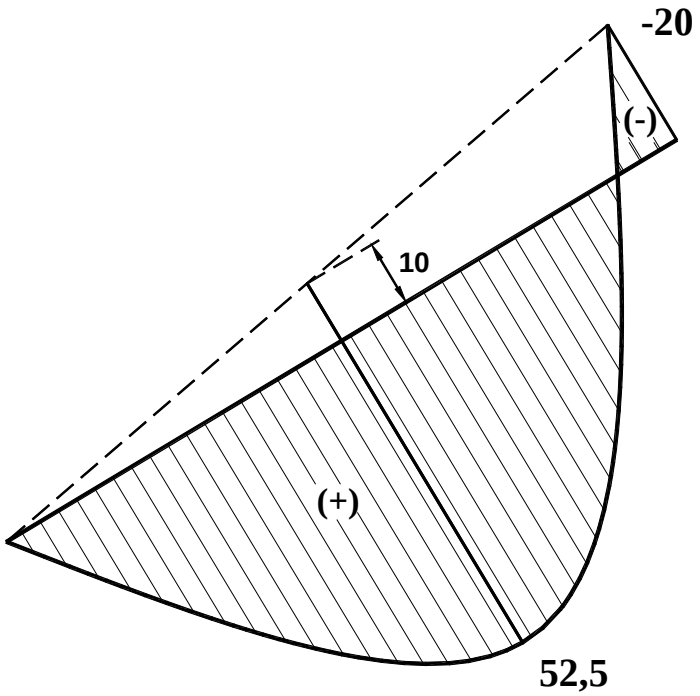
Se tivermos, por exemplo, as estruturas:



DMF







DMF

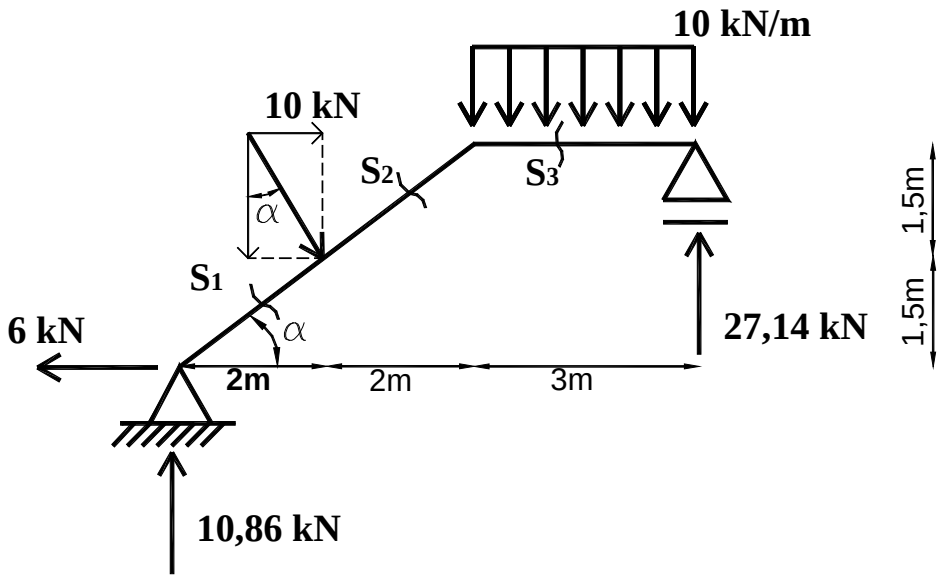
2.3. Pórticos

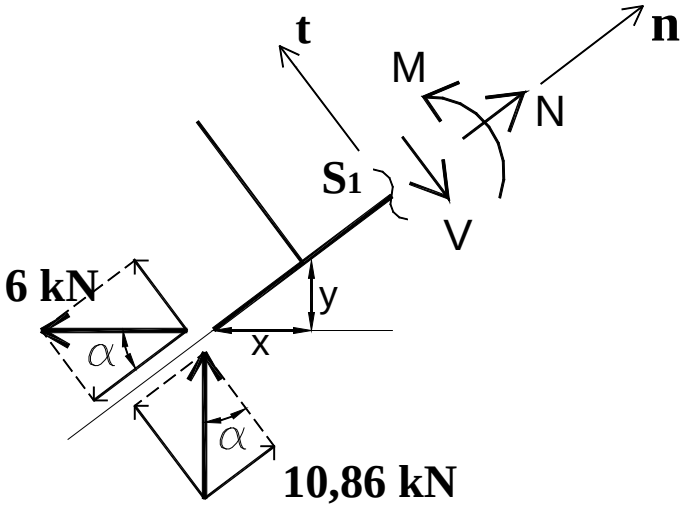
Pórticos são estruturas lineares constituídas por barras retas ligadas entre si. Eles podem ser planos (bidimensionais) ou espaciais (tridimensionais). Nesta apostila trabalharemos apenas com pórticos planos.

Nos pórticos, as ligações entre as barras são engastes ou rótulas internas. Isso faz com que sua estrutura trabalhe em conjuntos e não de forma individual como acontece em estruturas de colunas e vigas.

Os Diagramas de Esforço Normal (DEN) e Diagramas de Esforço Cortante (DEC) não precisam ser feitos para o mesmo lado da barra que foram feitos nessa apostila, apenas ter os mesmos valores e sinais. Já os Diagramas de Momento Fletor (DMF) devem estar sempre no lado tracionado da barra, podendo os sinais dos resultados serem diferentes dos sinais utilizados nesta apostila.

2.3.1. Estruturas Aporticadas





Seção S_1:

$\Sigma F_n = 0$

$N - 6.\cos\alpha + 10,86.\text{sen}\alpha = 0$

$N = 6.\cos\alpha - 10,86.\text{sen}\alpha$

$N = -1,72$ kN (const.)

$\Sigma F_t = 0$

$V = 6.\text{sen}\alpha + 10,86.\cos\alpha = 12,29$ kN (const.)

$\Sigma M_z = 0$

$M = 10,86.x + 6.y \rightarrow y = x.\text{tg}\alpha$

$M = 10,86.x + 4,5.x = 15,36.x$

Para $x=0$, $M=0$;

$x=2$, $M=30,72$ kN.m;

Seção S_2:

N = -1,72 kN (const.)

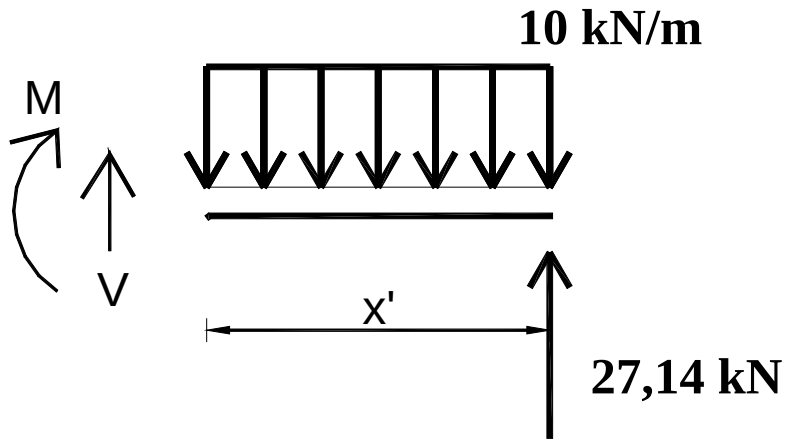
V = 12,29 - 10 = 2,29 kN (const.)

M = 15,36.x –8(x-2) –6(y-1,5) = 2,86.x + 25 → y = x.tgα

Para x=2, M=30,72 kN.m;

x=4, M=36,44 kN.m;

Seção S_3: (direita)



V = 10.x' – 27,14

Para x'=0, V=-27,14 kN;

x'=3, V=2,86 kN;

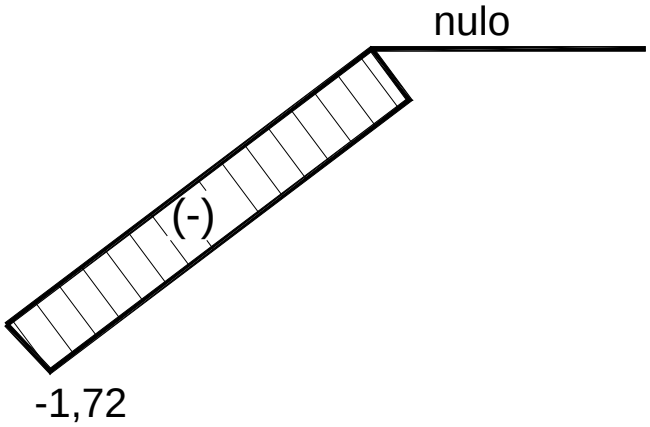
M = 27,14.x' – 10.x'^{2}/2

Para x'=0, M=0 kN.m;

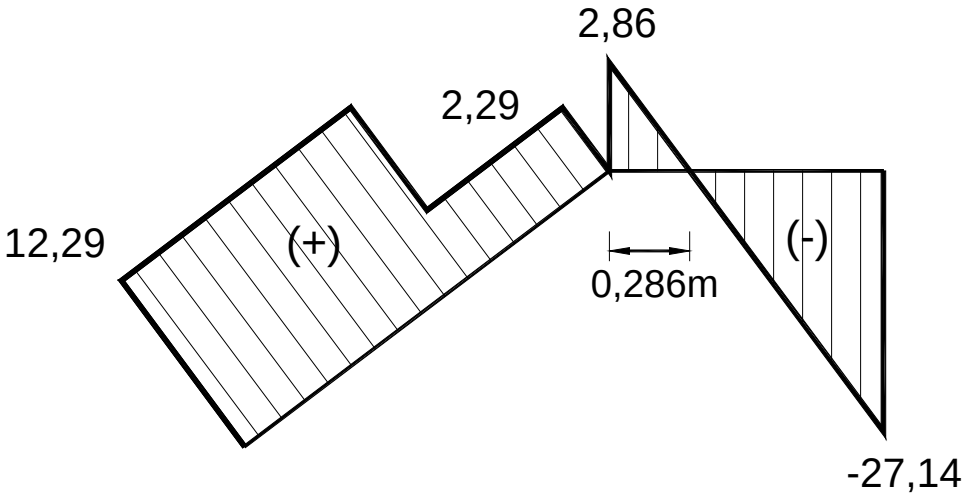
x'=3, M=36,42 kN.m;

Diagramas:

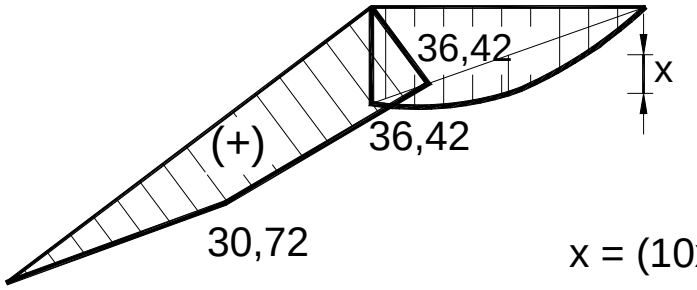
DEN (kN)



DEC (kN)

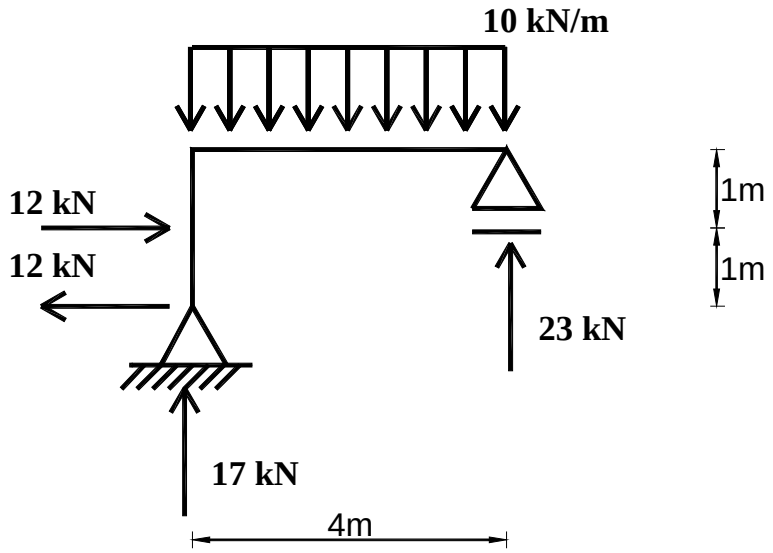


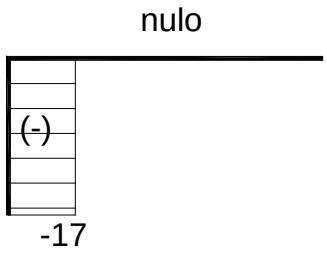
DMF (kN.m)



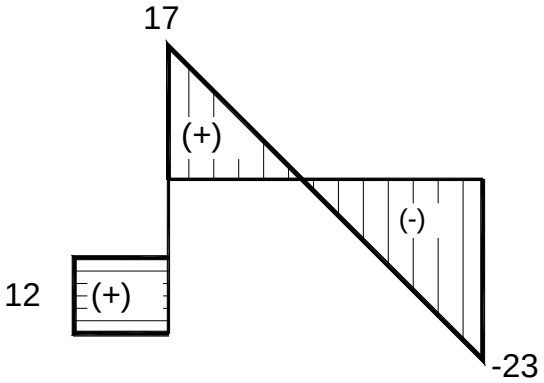
$x = (10x3^2)/8 = 11,25$

Não havendo barras inclinadas, recomeça-se o traçado de diagramas pelo método direto.

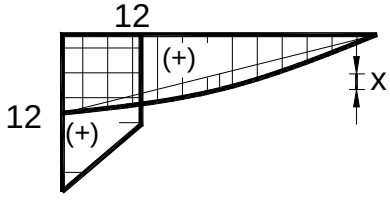




DEN (kN)



DEC (kN)

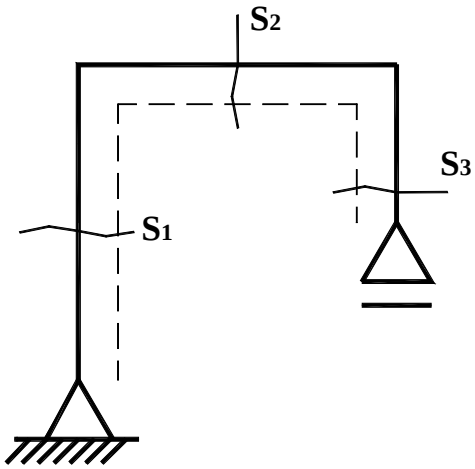


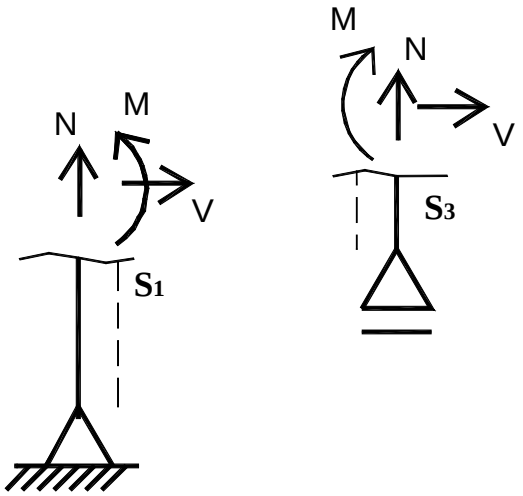
DMF (kN.m)

$x = (10x4^2)/8 = 20$

Considerações Sobre os Sinais dos Diagramas:

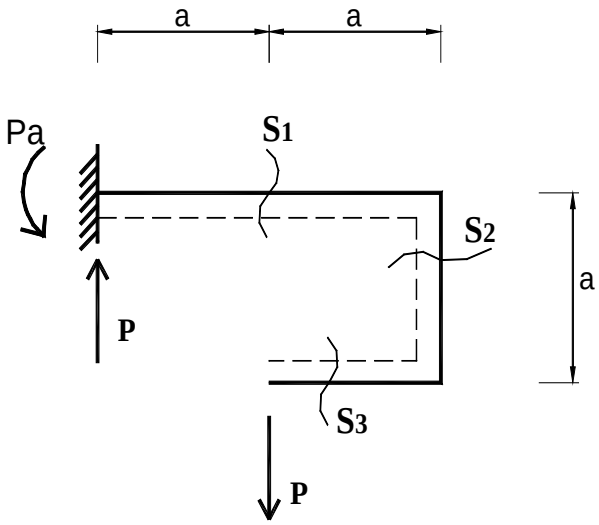
As fibras inferiores serão tracejadas, definindo portanto a parte à esquerda e à direita da seção. Exemplos:

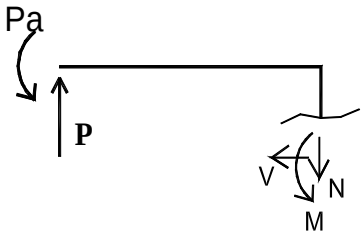


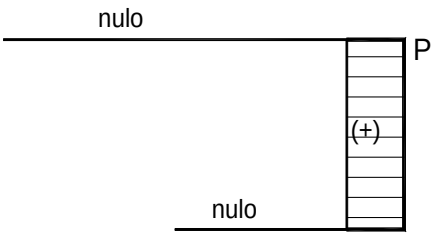


Exemplos:

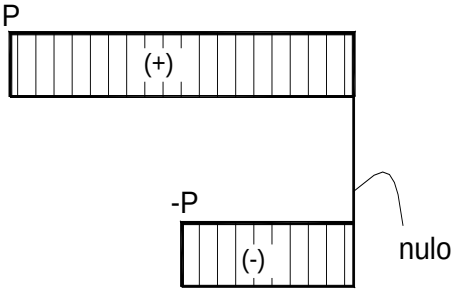
01.



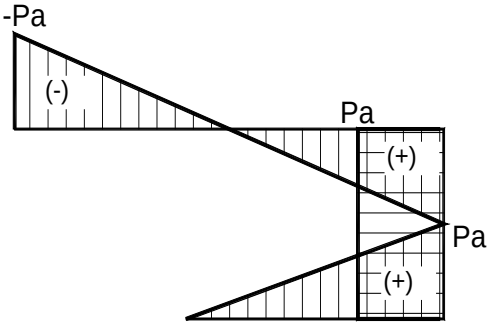




DEN (kN)



DEC (kN)



DMF (kN.m)

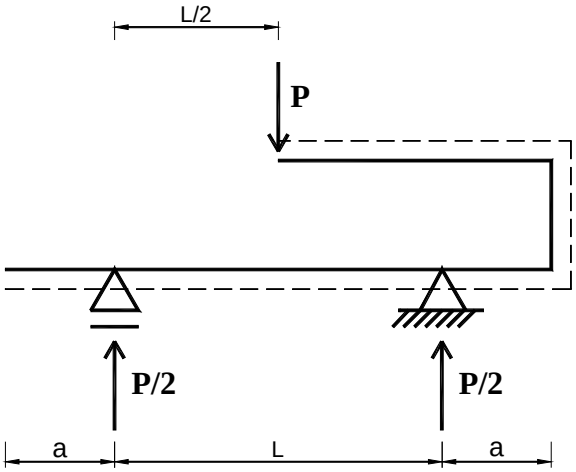
Barra vertical

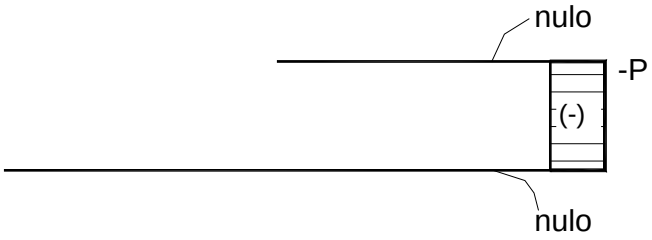
$\Sigma F_y = 0 \therefore N = P$

$\Sigma F_x = 0 \therefore V = 0$

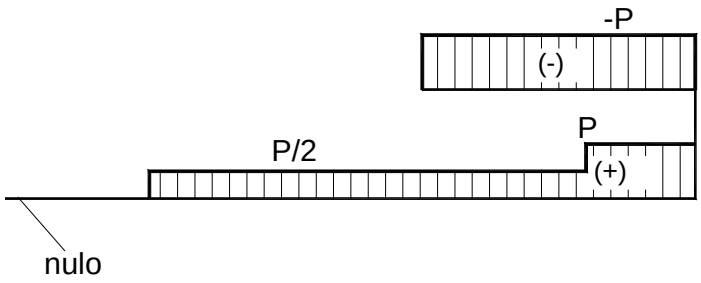
$\Sigma M_z = 0 \therefore M = -P.a + P.2a = P.a$ (constante)

02.

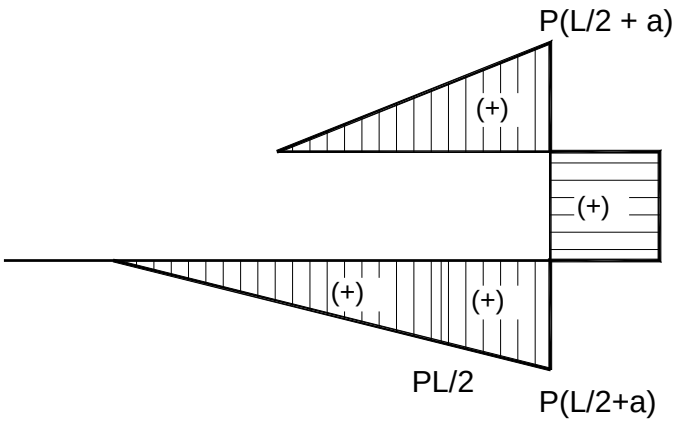




DEN (kN)

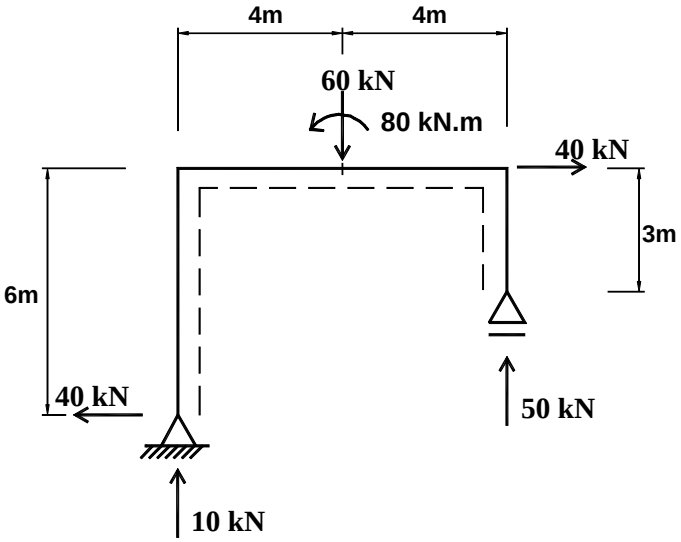


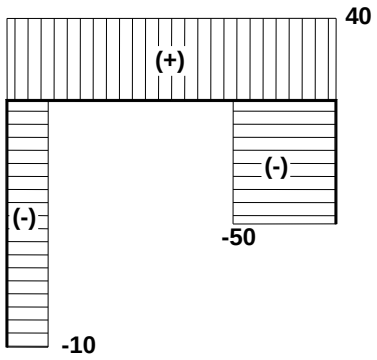
DEC (kN)



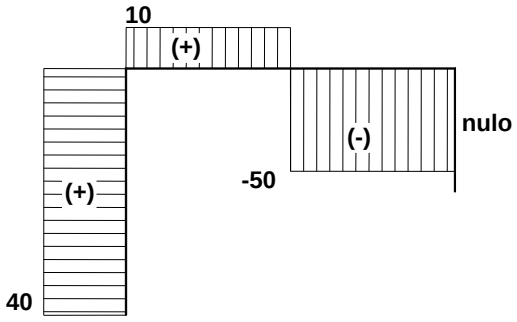
DMF (kN.m)

2.3.2. Pórticos Simples

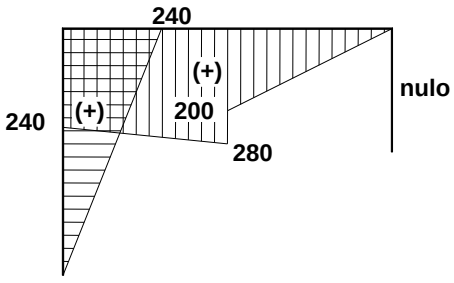




DEN (kN)



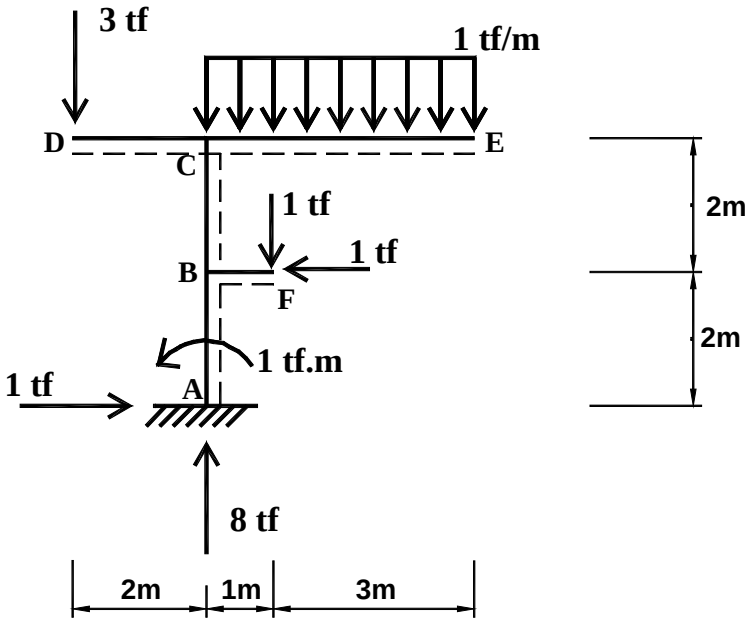
DEC (kN)



DMF (kN.m)

Pelo Método Direto:

Obter os diagramas solicitantes para o quadro abaixo:



Reações:

$\Sigma F_x = 0 \therefore \quad R_{Ax} = 1$ tf

$\Sigma F_y = 0 \therefore \quad R_{Ay} = 3 + 1.4 + 1$

$R_{Ay} = 8$ tf

$\Sigma M_A = 0 \therefore \quad 3.2 - 1.4.2 - 1.1 + 1.2 + M_A = 0$

$M_A = 1$ tf.m

Seção S1: trecho DC

N = 0;

V = -3 tf

$M_C = -6$ tf.m

Seção S2: trecho CE

N = 0;

V = 1.x

Para x = 0; V = 0;

x = 4; V = 4 tf;

$M = -1.x^2/2$

Para x = 0; M = 0;

x = 4; M = -8 tf.m;

Seção S3: trecho FB

N = -1 tf

V = 1 tf

M = -1.x

Para x = 0; M = 0;

x = 1; M = -1 tf.m;

Seção S4: trecho BC

N = -7 tf

V = 0

M = -2 tf.m

Seção S5: trecho AB

N = -8 tf

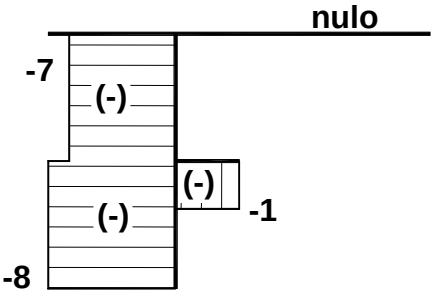
V = -1 tf

M = -1 – 1 . x

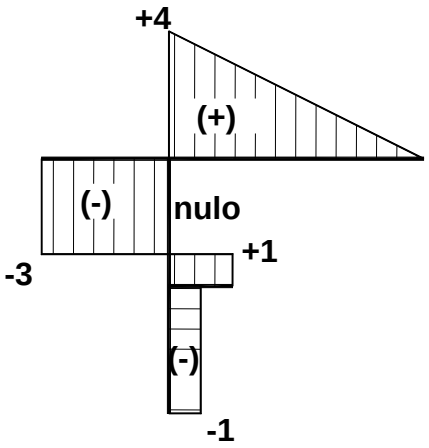
Para x = 0; M = -1 tf.m;

x = 2; M = -3 tf.m

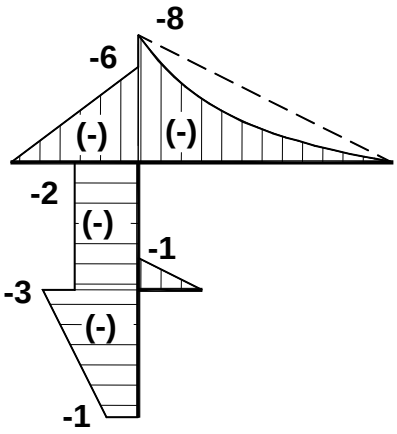
Diagramas:



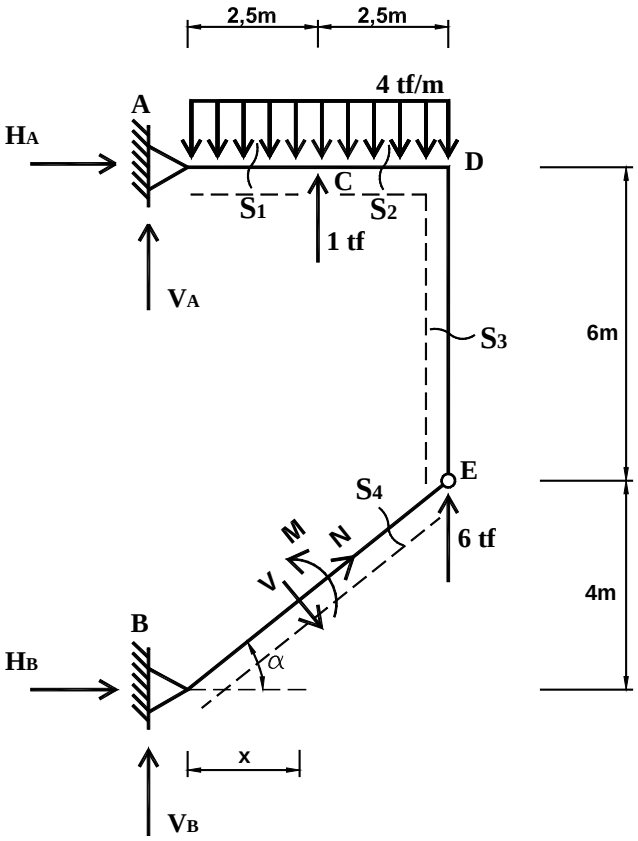
DEN (kN)



DEC (kN)



DMF (kN.m)



Reações:

$\Sigma F_y = 0 \therefore \quad 1 + 6 - 4.5 + V_A + V_B = 0$

$V_A + V_B = 13$

$\Sigma M_A = 0 \therefore \quad 1.2{,}5 - 4.5.2{,}5 + 6.5 + H_B.10 = 0$

$H_B = 1{,}75$ tf

$\Sigma F_x = 0 \therefore \quad H_B = - H_A \rightarrow H_A = - 1{,}75$ tf

$\Sigma M_E^{Dir} = 0 \therefore \quad H_B.4 - V_B.5 = 0$

(embaixo) $\quad V_B = 1{,}4$ tf $\rightarrow V_A = 11{,}6$ tf

Seção S1: [0 ☐x ☐2,5]

N = + 1,75 tf;

V = 11,6 - 4.x

Para x = 0; V = 11,6;

x = 2,5; V = 1,6 tf;

$M = 11{,}6.x - 2.x^2$

Para x = 0; M = 0;

x = 2,5; M = 16,5 tf.m;

Seção S2: [2,5 ☐x ☐5,0]

N = + 1,75 tf;

V = 12,6 - 4.x

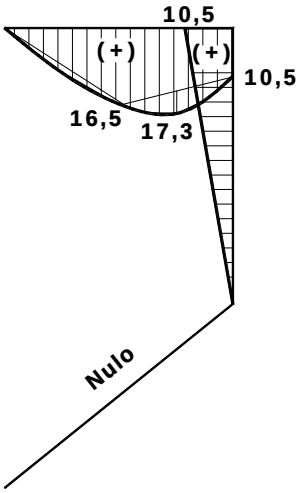
Para x = 2,5; V = 2,6 tf;

x = 5; V = -7,4 tf;

M = 11,6.x +1.(x–2,5) – 2 x^2 = 12,6.x - 2.x^2 – 2,5

Para x = 2,5; M = 16,5 tf.m;

x = 5; M = 10,5 tf.m;



DMF (tf.m)

Seção S4: [0 ☐x ☐5,0]

tgα = 4/5 senα = 4/√41

N + 1,75.cosα + 1,4 senα = 0 → N = - 2,24 tf;

V + 1,75.senα - 1,4.cosα = 0 → V = 0;

M = 1,4.x – 1,75.y → M = 0;

Seção S3: [0 ☐x' ☐6,0]

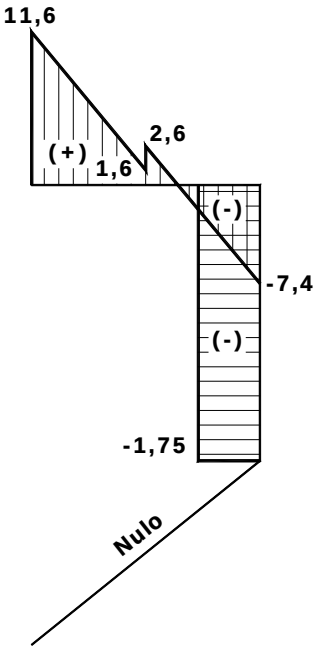
N = - 7,4 tf;

V = -1,75 tf;

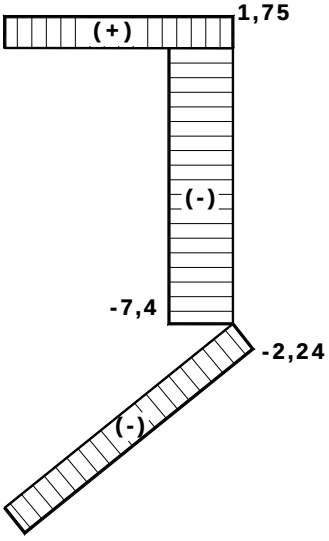
M = 1,75.(x+4) – 1,4.5 = 1,75.x'

Para x' = 0; M = 0;

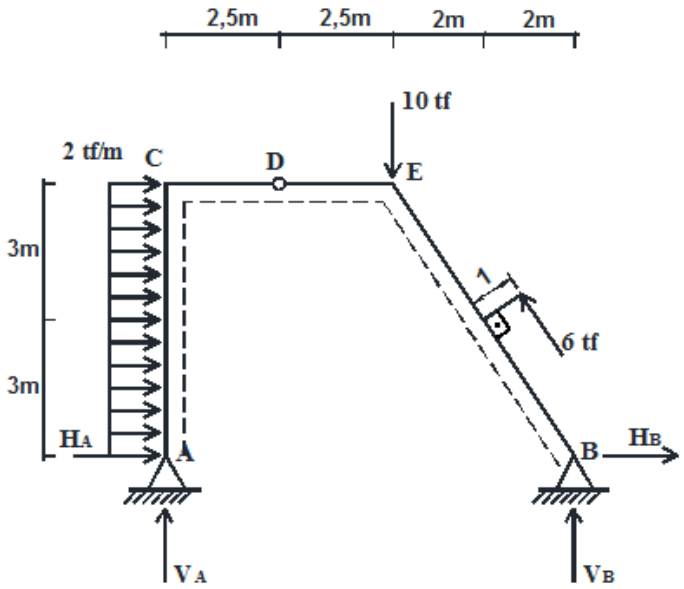
x' = 6; M = 10,5 tf.m;

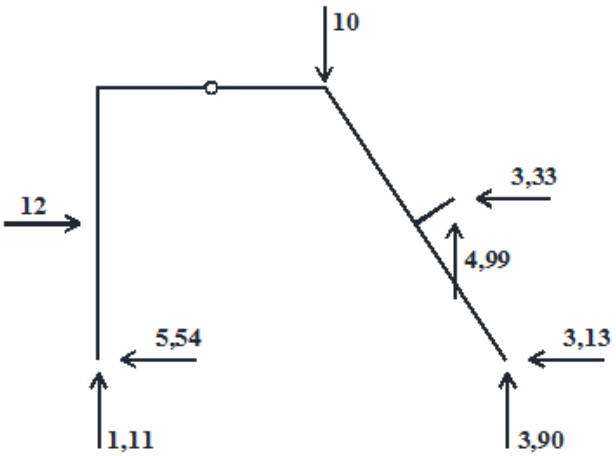


DEC (tf)



DEN (tf)





Reações:

$\Sigma F_x = 0 \therefore$ $H_A + H_B + 12 - 3{,}33 = 0$

$H_A + H_B = -8{,}67$ tf

$\Sigma F_y = 0 \therefore$ $-10 + 4{,}99 + V_A + V_B = 0$

$V_A + V_B = 5{,}01$ tf

$\Sigma M_B = 0 \therefore$ $6.1 + 10.4 - 12.3 - 9.V_A = 0$

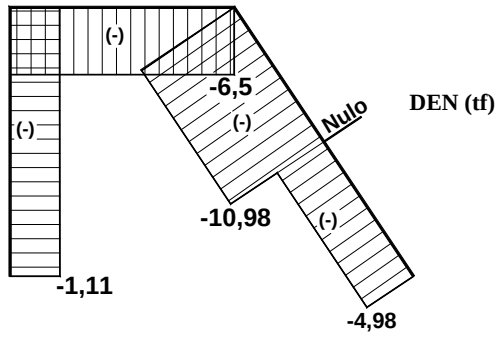
$V_A = 1{,}11$ tf → $V_B = 3{,}9$ tf;

$\Sigma M_E^{Esq} = 0 \therefore$ $- H_A.6 + V_A.2{,}5 - 12.3 = 0$

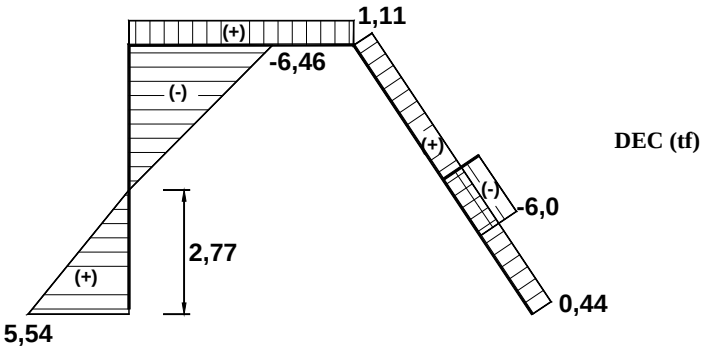
$H_A = -5{,}54$ tf → $H_B = -3{,}13$ tf

Determinação dos esforços solicitantes:

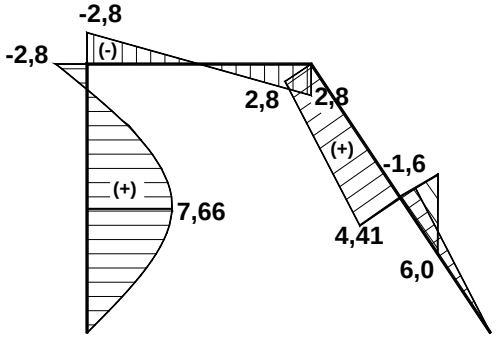
Diagramas:



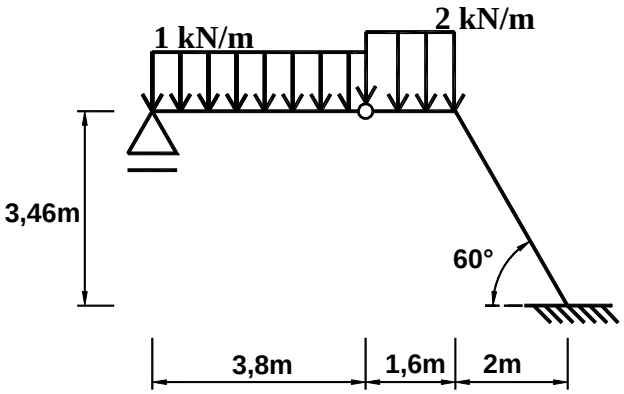
DEN (tf)

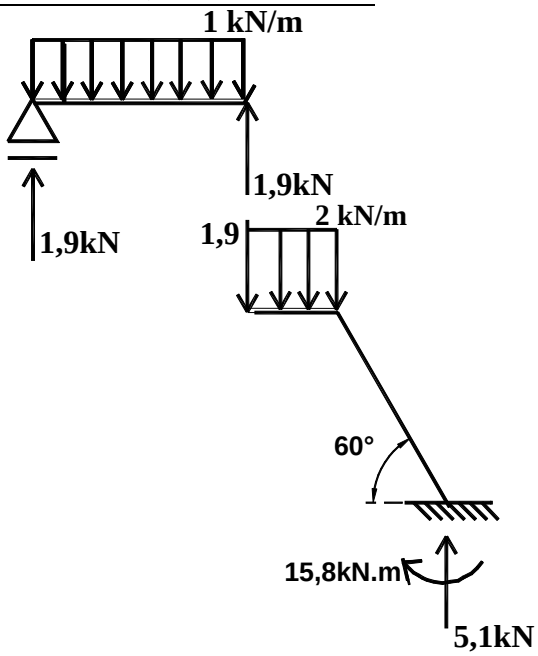


DEC (tf)



DMF (tf.m)





Para a barra inclinada:

N = - 5,1.sen 60˚ = - 4,42 kN

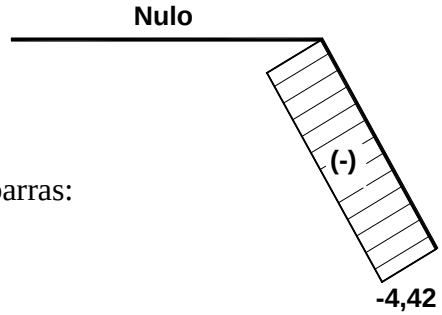
V = - 5,1 cos 60˚ = - 2,55 kN

Momento no apoio engastado:

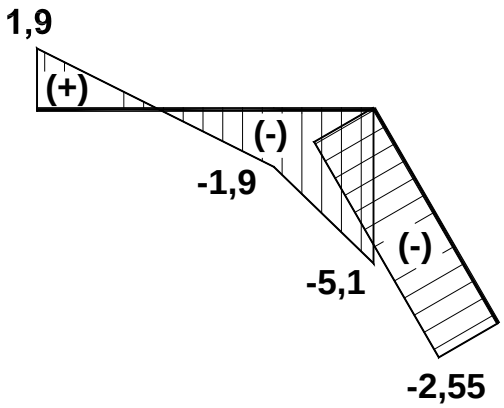
M = – 15,8 kN.m;

Momento na conexão engastada entre barras:

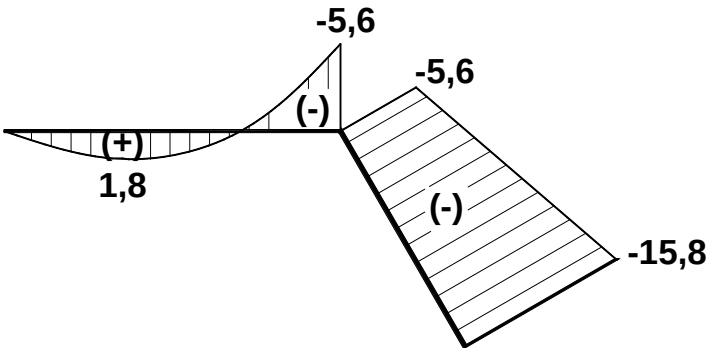
M = -15,8 + 5,1. 2 = -5,6 kN.m;



DEN (kN)

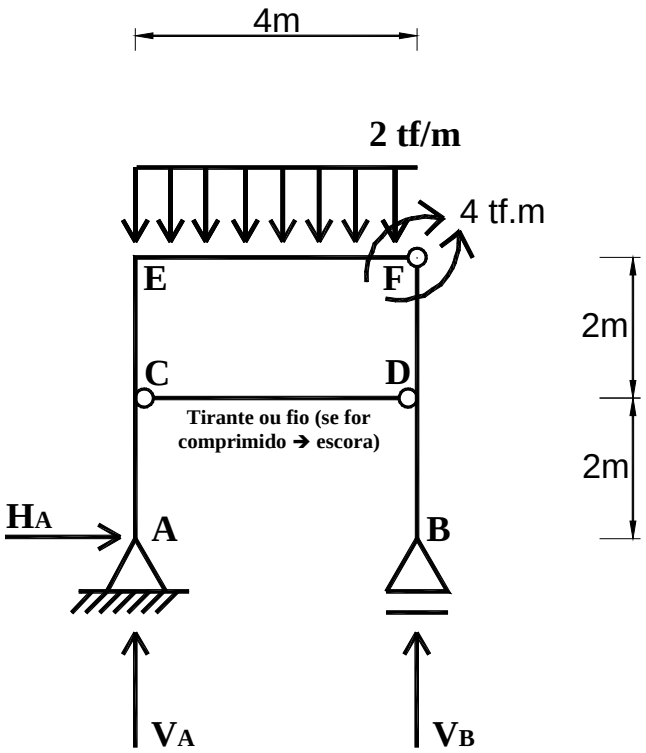


DEC (kN)



DMF (kN.m)

2.3.3. Pórtico com Articulação e Tirante



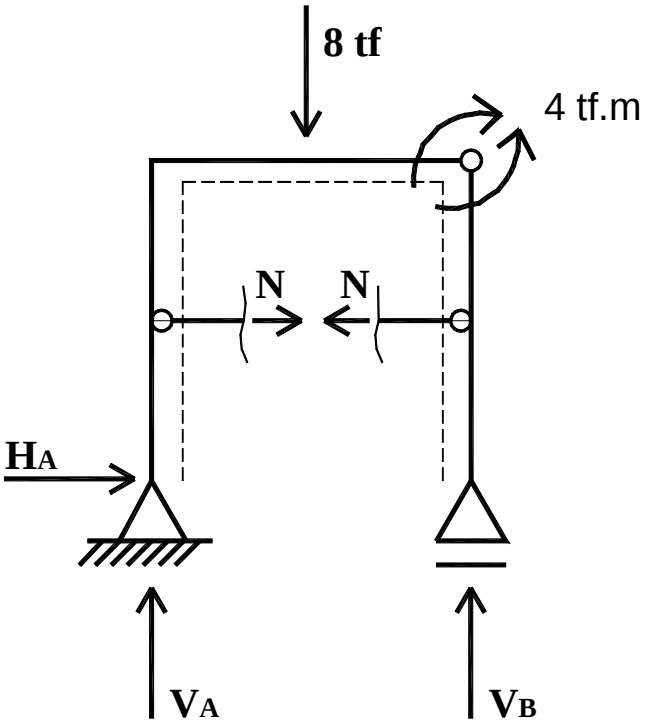
Análise da estaticidade:

ge = 2 + 1 – 3 = 0

gi = 3.1 – 1 – 1 - 1 = 0

gh = gi + ge = 0

Substitui-se a barra CD pelo par de esforços N:



Reações e N:

$\Sigma F_x = 0 \therefore \quad H_A = 0;$

$\Sigma F_y = 0 \therefore \quad V_A + V_B = 8$ tf

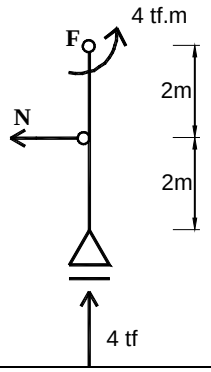
$\Sigma M_z = 0$ (A) $\therefore V_B.4 – 8.2 = 0$

$V_B = 4$ tf.m → $V_A = 4$ tf.m

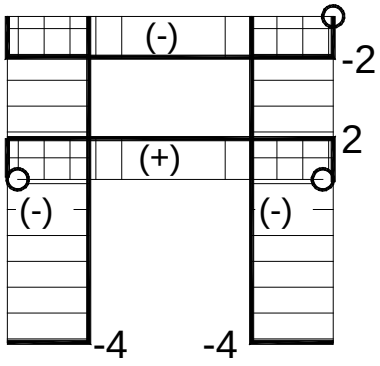
Momento Fletor em F, pela direita:

$M_F^D = 0 \therefore \quad 4 – 2.N = 0$

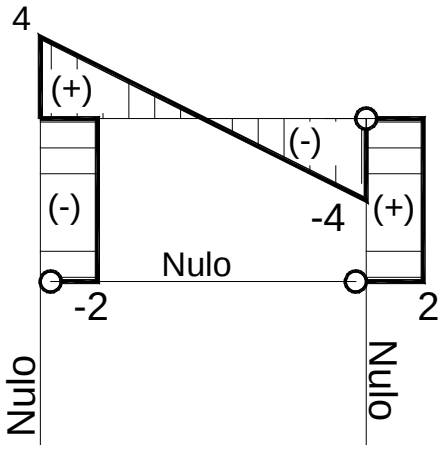
↺ + $\quad N = 2$ tf.



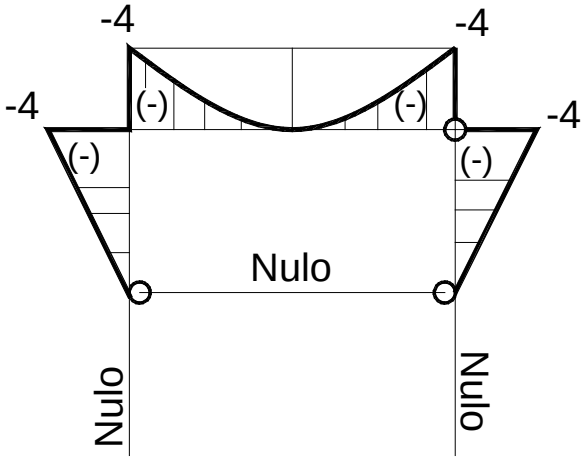
Diagramas:



DEN (kN)



DEC (kN)





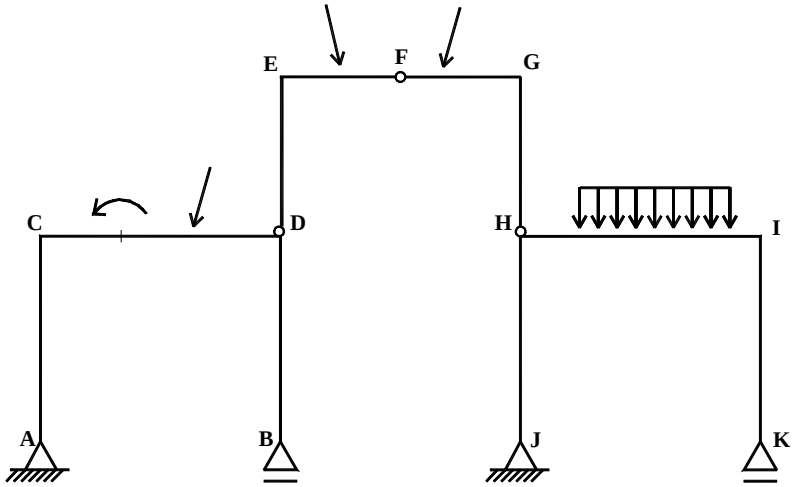
DMF (kN.m)

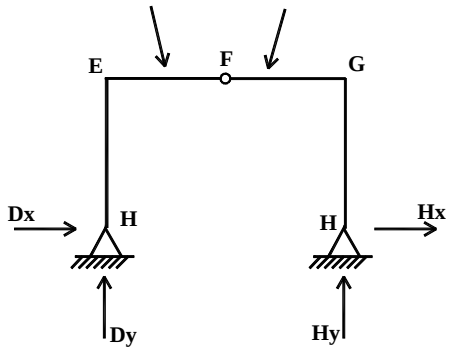
$x = (2 \times 4^2) / 8 = 4$

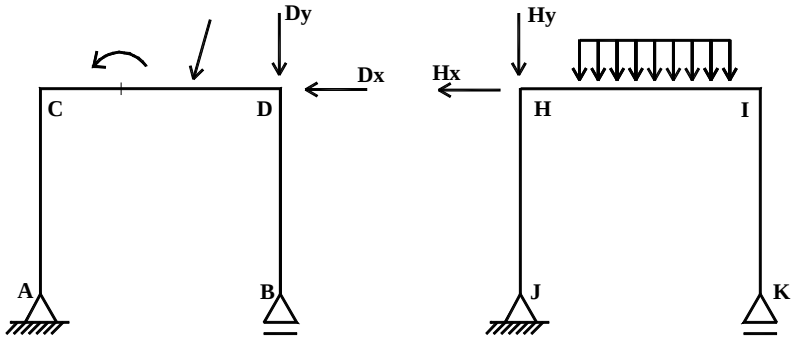
2.3.4. Pórticos Compostos

Pórticos Compostos são uma associação de pórticos simples. Assim como a viga Gerber é uma associação de vigas simples. Se forem isostáticos, o resultado será uma Associação de Pórticos Simples Isostáticos.

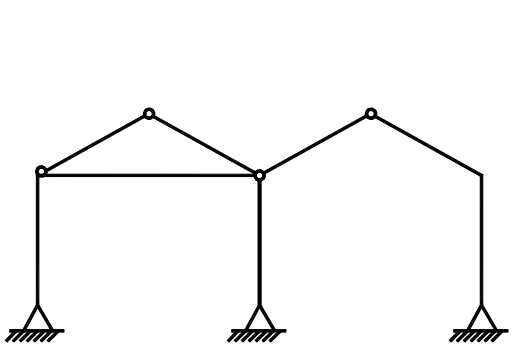
1.

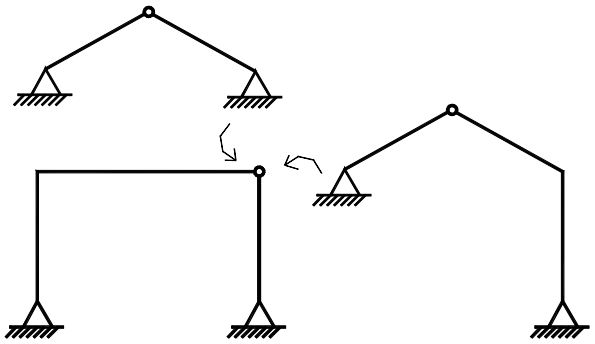




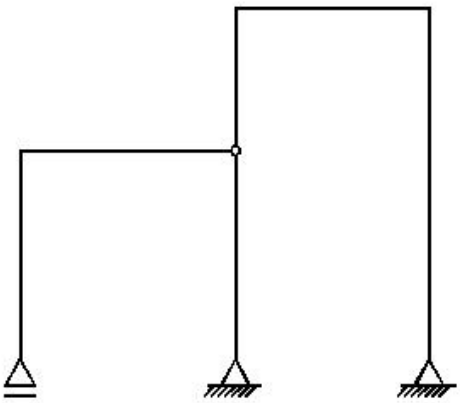


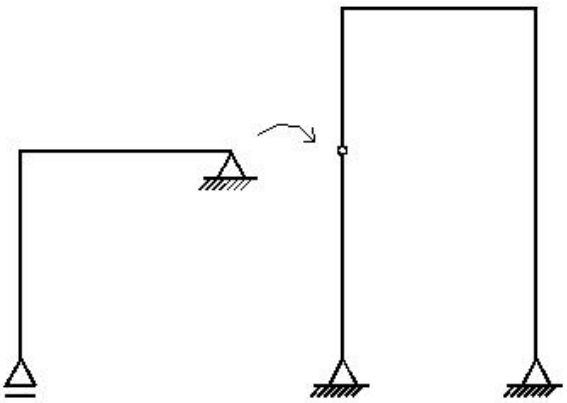
2.



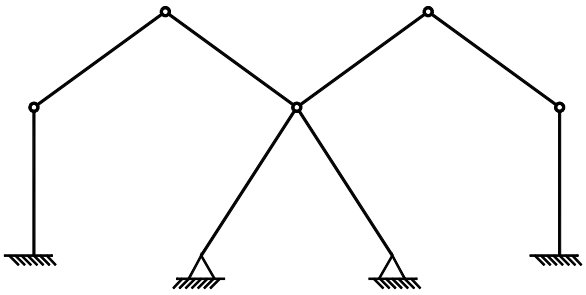


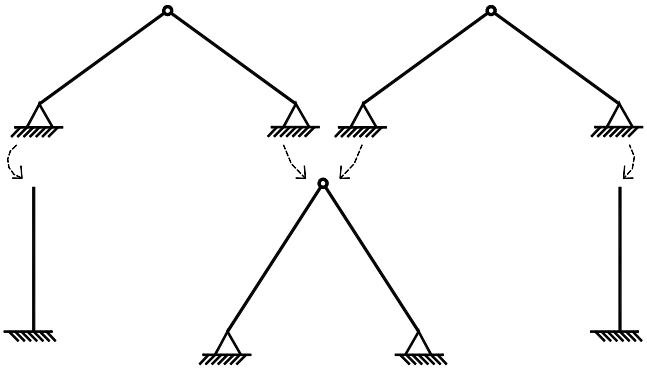
3.



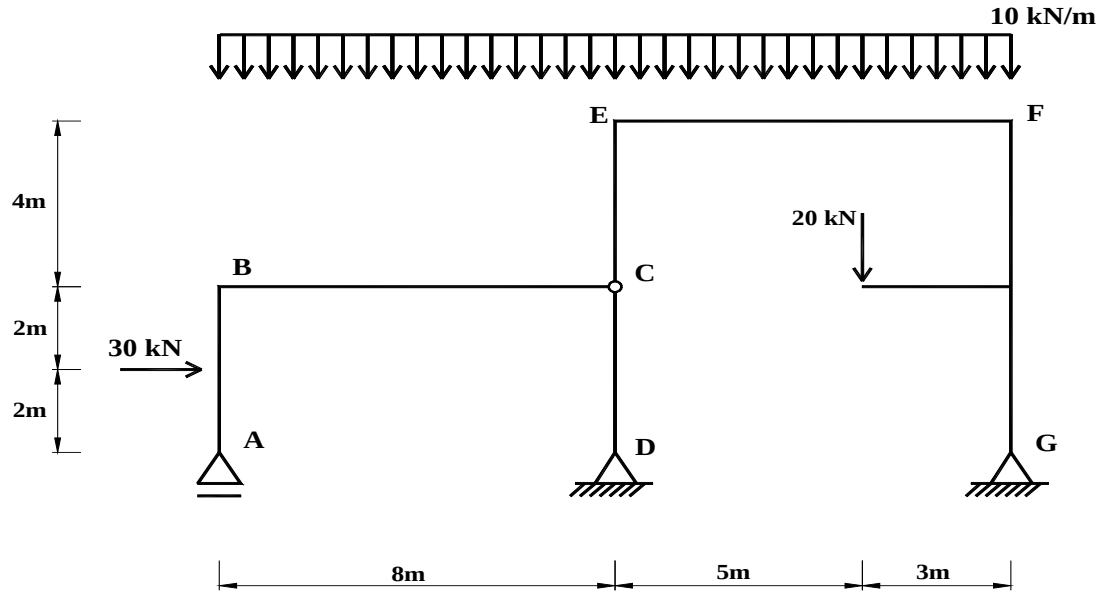


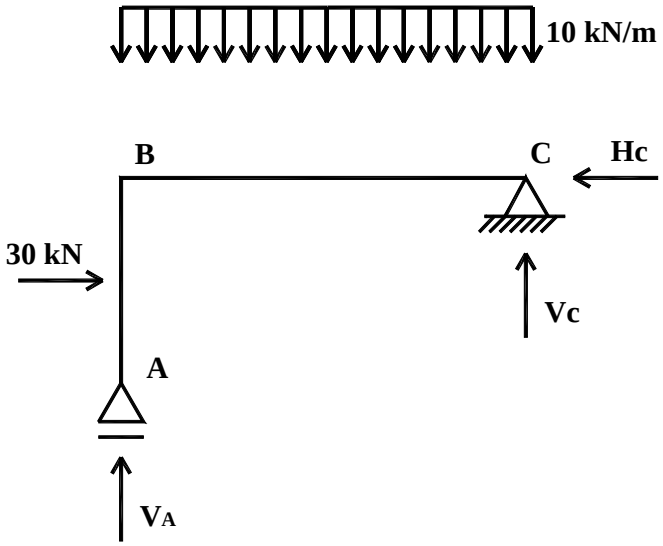
4.





5.





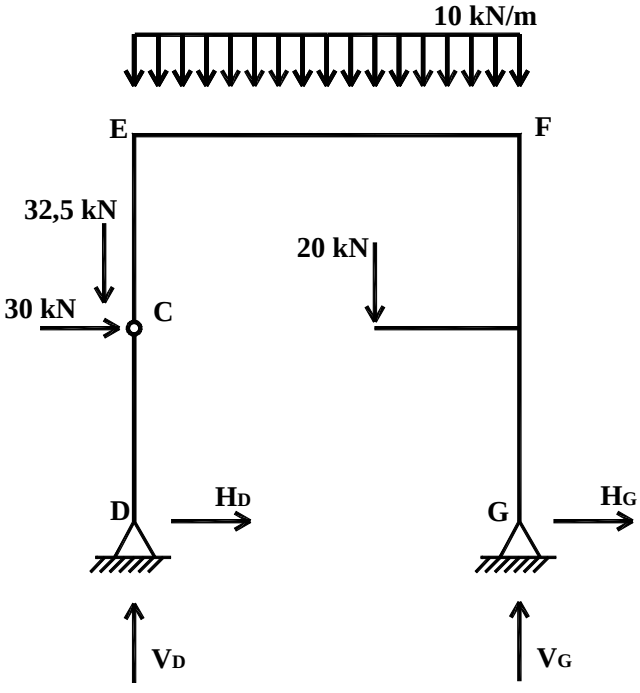
Decompondo:

$\Sigma F_x = 0 \therefore \quad H_C = 30$ kN;

$\Sigma F_y = 0 \therefore \quad V_A + V_C = 80$ kN;

$\Sigma M_A = 0 \therefore 8.V_C + 4.H_C - 80.4 - 30.2 = 0$

$V_C = 32{,}5$ kN $\rightarrow V_A = 47{,}5$ kN



$\Sigma F_x = 0 \therefore \quad H_D + H_G + 30 = 0$

$\Sigma F_y = 0 \therefore \quad V_D + V_G = 20 + 32{,}5 + 80$

$V_D + V_G = 132{,}5$ kN

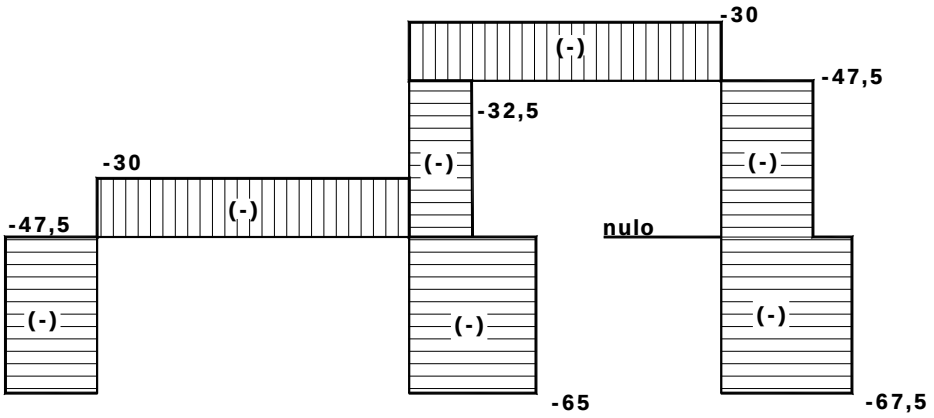
$\Sigma M_D = 0 \therefore \quad 8.V_G - 20.5 - 80.4 - 30.4 = 0$

$V_G = 67{,}5$ kN $\rightarrow V_D = 65$ kN

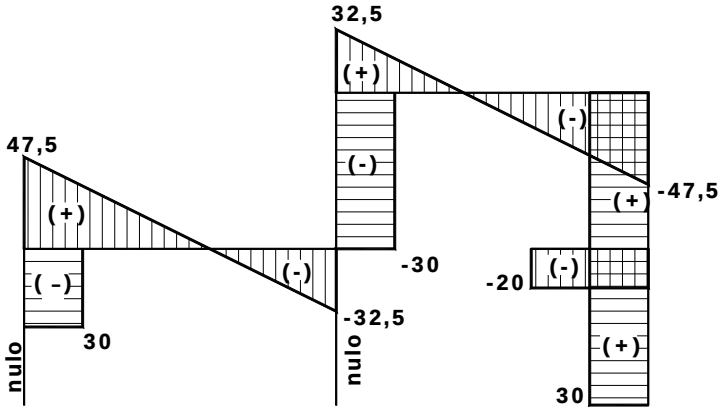
$M_C^D = 0 \therefore \quad 4.H_D = 0$

$H_D = 0 \rightarrow H_G = -30$ kN

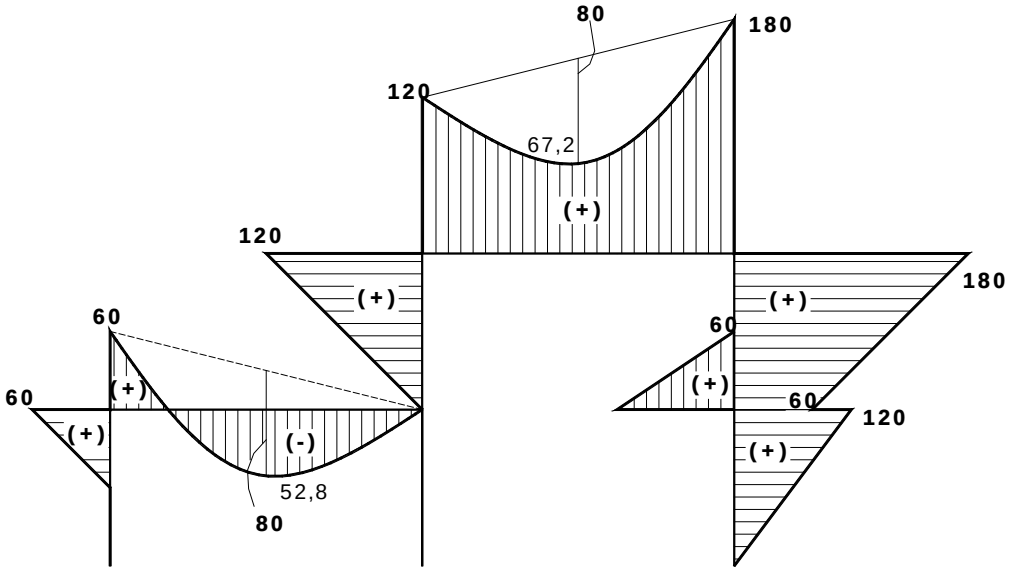
Diagramas:



DEN (kN)



DEC (kN)



DMF (kN.m)

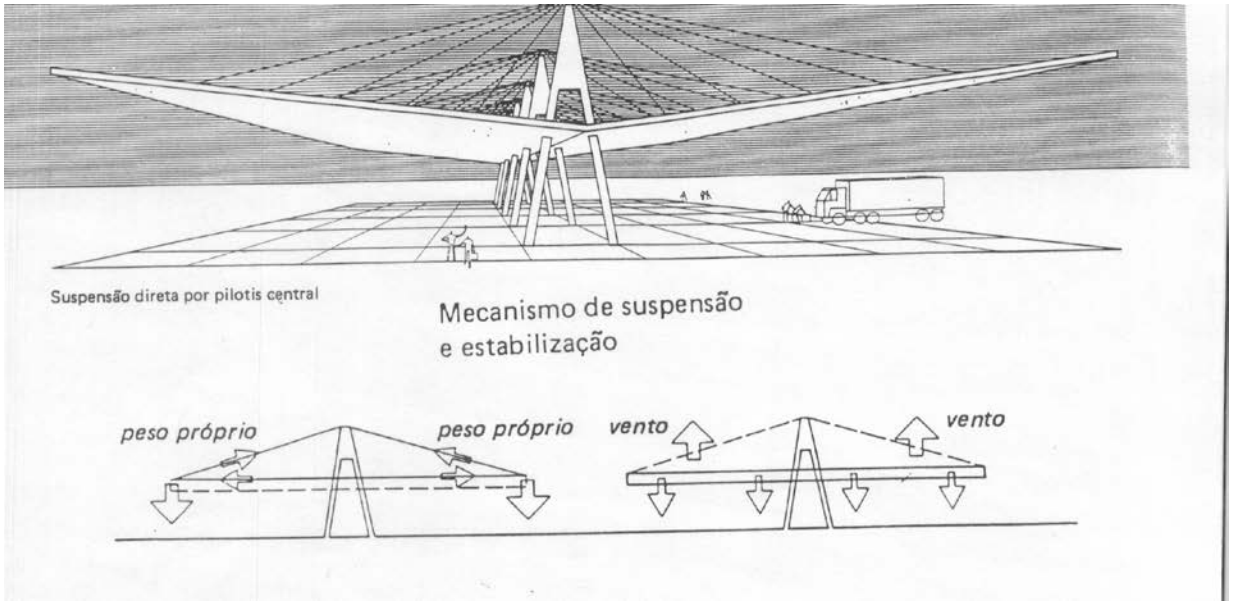
2.4. Cabos

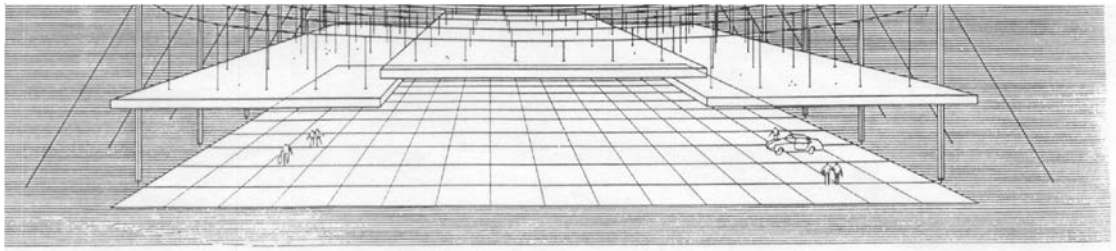
Cabos são estruturas lineares, extremamente flexíveis, capazes de resistir a esforços de tração. Os esforços cortantes, de compressão, de flexão e de torção não são resistidos por um cabo ideal.

Os cabos são utilizados em vários tipos de estruturas. Nas pontes pênseis e teleféricos são principais elementos portantes, nas linhas de transmissão conduzem a energia elétrica, vencendo vãos entre as torres e são empregados como elemento portante de coberturas de grandes vãos (Süssekind, 1987).

No estudo estático, assume-se a hipótese que os cabos são perfeitamente flexíveis, isto é, possuem momento fletor e esforço cortante nulos ao longo do comprimento. Dessa forma, os cabos ficam *submetidos apenas a esforços normais de tração*.

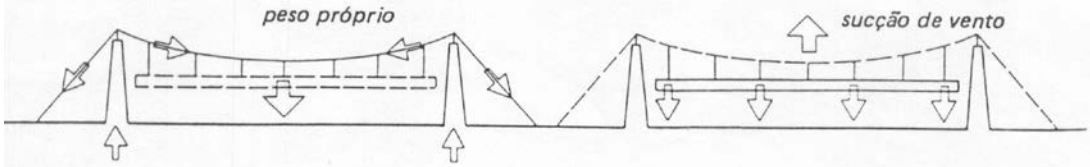
As formas assumidas pelo cabo dependem do carregamento que nele atua. Se o carregamento externo for muito maior do que o peso próprio do cabo, este último é desprezado no cálculo. A geometria da configuração deformada do cabo, para um dado carregamento, é denominada *forma funicular* (do latim, *funis* = corda) do cabo.

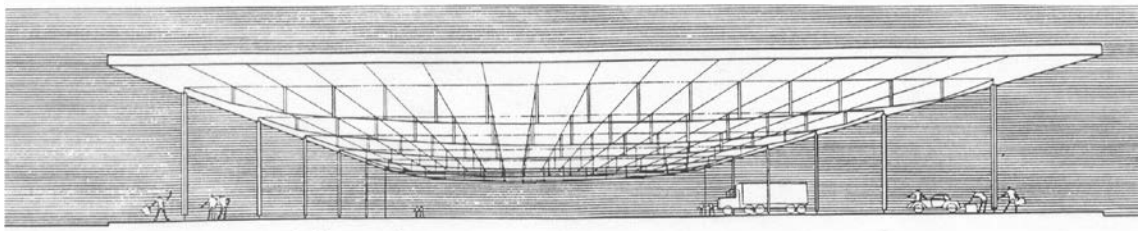




Cobertura suspensa por cabos

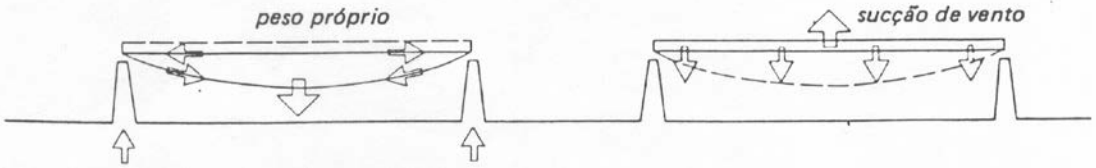
Mecanismo de suspensão
e estabilização



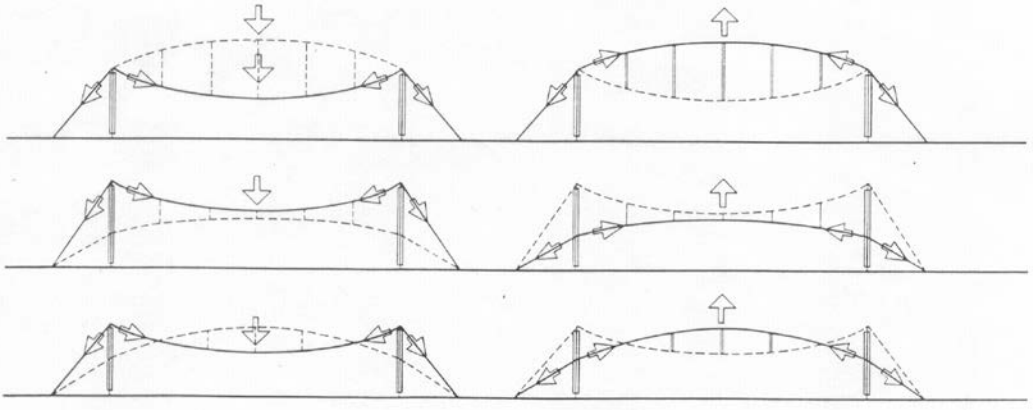


Cobertura apoiada em um cabo de suspensão

Mecanismo de suspensão
e estabilização



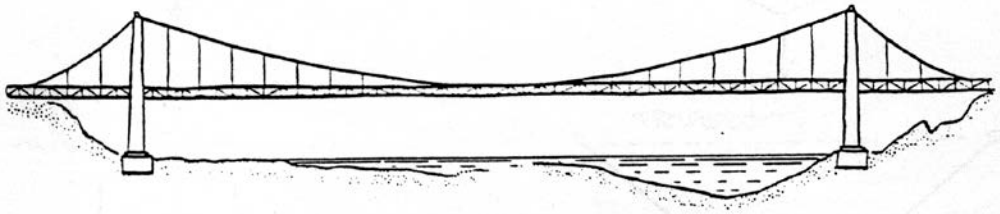
MECANISMO PORTANTE E ESTABILIZADOR DE SISTEMAS PROTENDIDOS



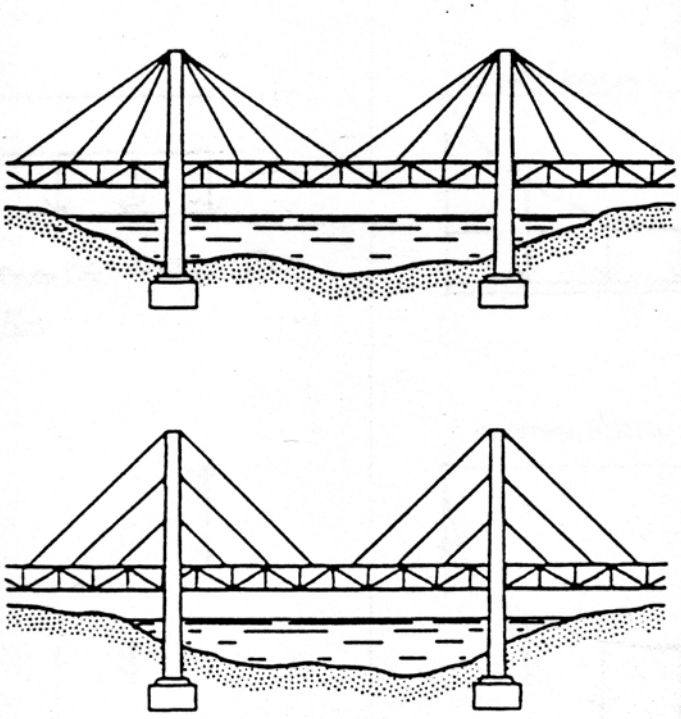
Mecanismo portante.

Mecanismo estabilizador.

SISTEMAS ESTRUTURAIS COM CABOS PARA PONTES

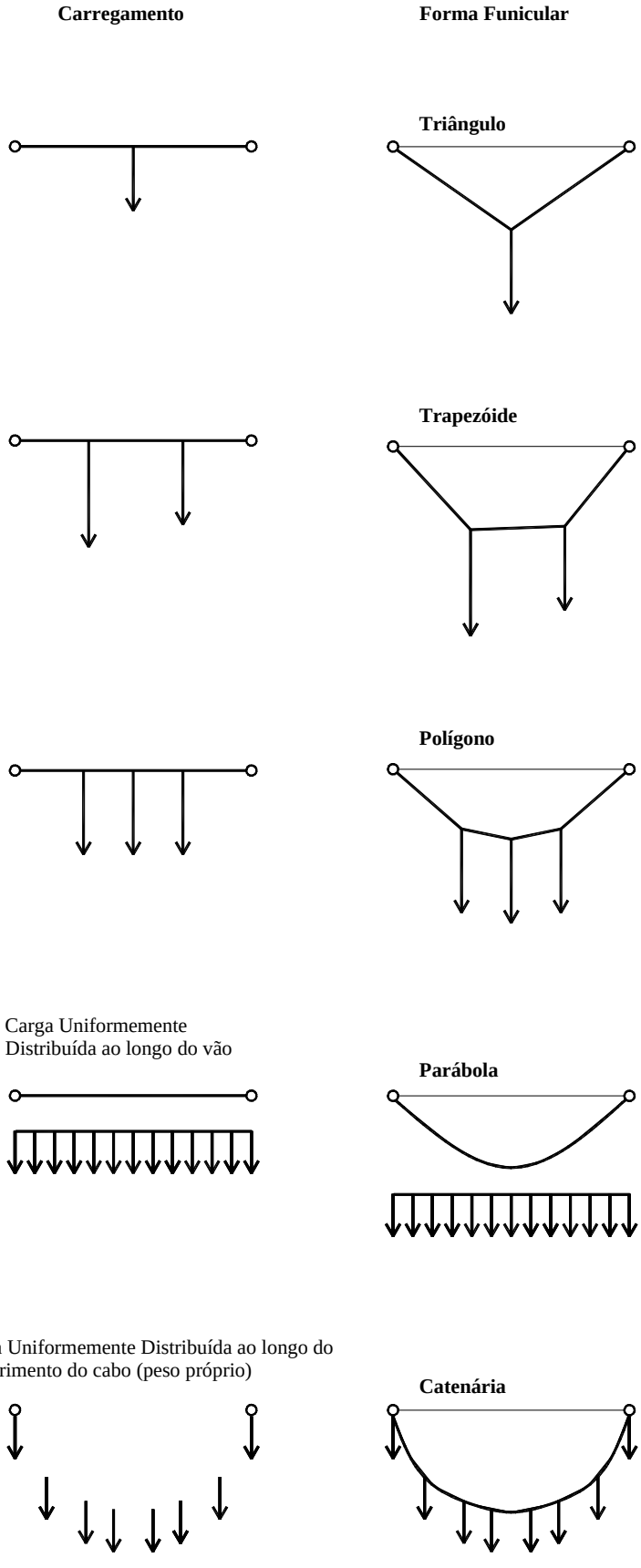


PONTE PÊNSIL

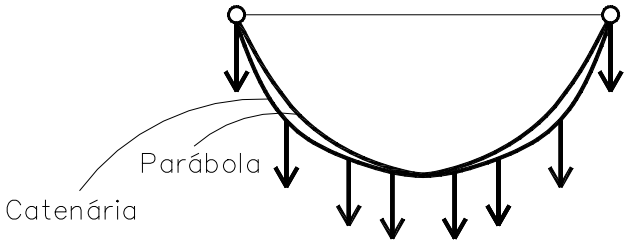


PONTES ESTAIADAS

Exemplo de formas funiculares:

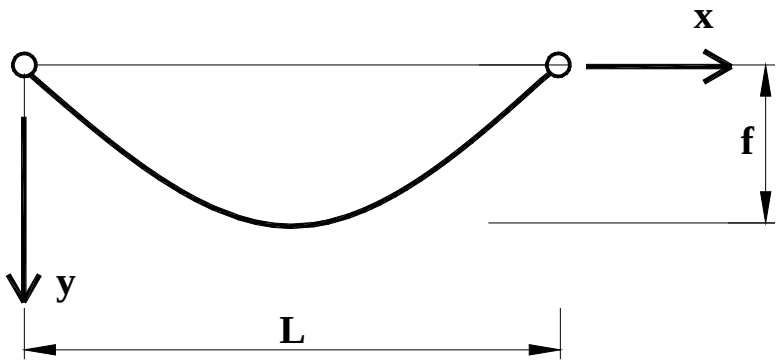


A catenária possui uma geometria mais baixa que a parábola. Isto é conseqüência do peso próprio se concentrar mais nas regiões próximas das extremidades.



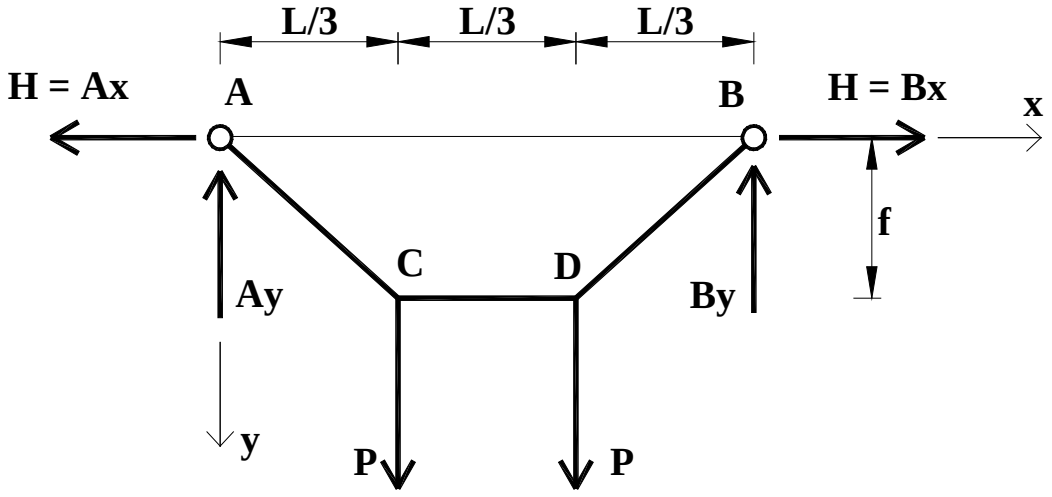
A partir de estudos comparativos entre a forma da parábola e da catenária, para várias relações de flecha (f) e vão entre extremidades (L), constata-se que para relações **(f / L) ☐ 0,2** as formas da parábola e da catenária são praticamente coincidentes. Nestes casos, é mais prático usar a forma da parábola para determinação dos lugares geométricos dos pontos ao longo do cabo.

$$\mathbf{Y = ax^2 + bx + c}$$



2.4.1. Reações de Apoio para Cabos:

Seja um cabo que suporta duas cargas concentradas de valor "P", dispostas nos terços do vão:



Os sistemas do tipo cabo desenvolvem em suas extremidades empuxos horizontais, exigindo que os vínculos em "A" e "B" sejam do 2º gênero.

Por ser um sistema estrutural plano, as equações de equilíbrio a serem satisfeitas serão:

$$\Sigma Fx = 0;$$

$$\Sigma Fy = 0;$$

$$\Sigma Mz = 0.$$

Lembrando que para qualquer ponto ao longo do cabo o momento fletor é nulo devido à sua flexibilidade.

Aplicando as equações de equilíbrio ao cabo ACDB :

$\Sigma Fx = 0 \rightarrow Ax - Bx = 0$, logo $Ax = Bx = H$ (empuxo horizontal);

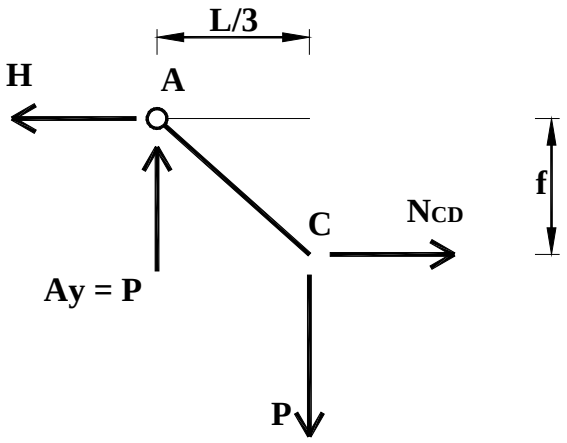
$\Sigma M_A = 0 \rightarrow PL / 3 + P (2L / 3) - By.L = 0$, portanto $By = P$;

$\Sigma Fy = 0 \rightarrow Ay + By = 2P$, então $Ay = 2P - By = P$.

Para o cálculo do empuxo horizontal "H" é necessária uma Quarta equação de equilíbrio que sai da hipótese de momento fletro nulo (M = 0) para qualquer ponto ao longo do cabo. Escolhendo-se o ponto C:

$$\Sigma Mc = 0.$$

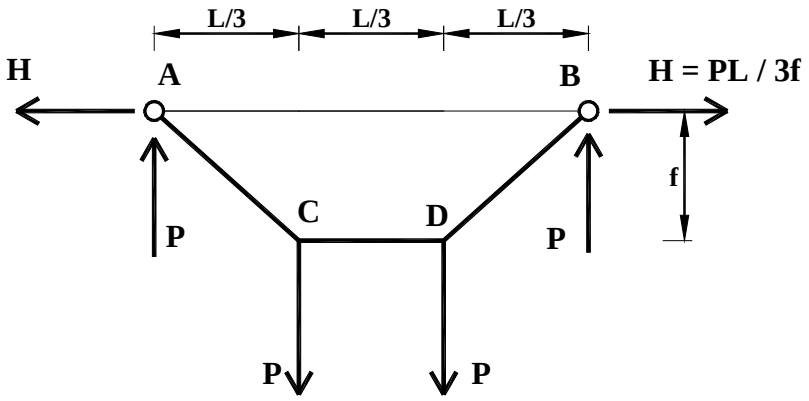
Faz-se uma seção no cabo que coincida com o ponto C escolhido e trabalha-se com a parte a esquerda ou a direita do ponto C, substituindo pelo seu efeito na seção.

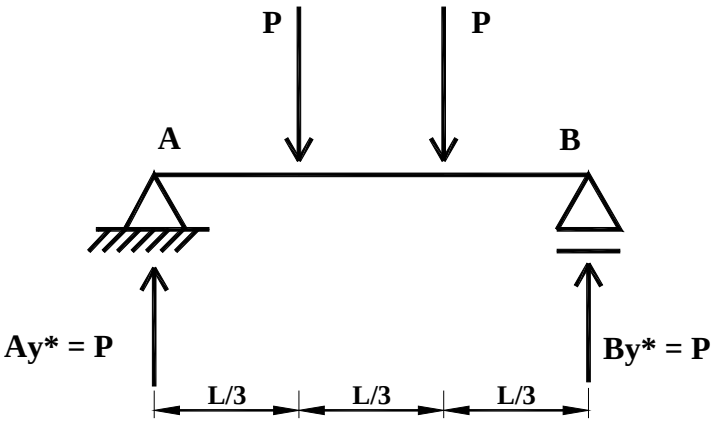


$\Sigma Mc = 0 \rightarrow - H.f + (P.L) / 3 = 0$, portanto $H = (P \cdot L) / 3f$.

Observe-se que quanto menor a flecha f, maior o empuxo H. E assim encontram-se as reações de apoio do cabo.

É interessante a seguinte comparação:



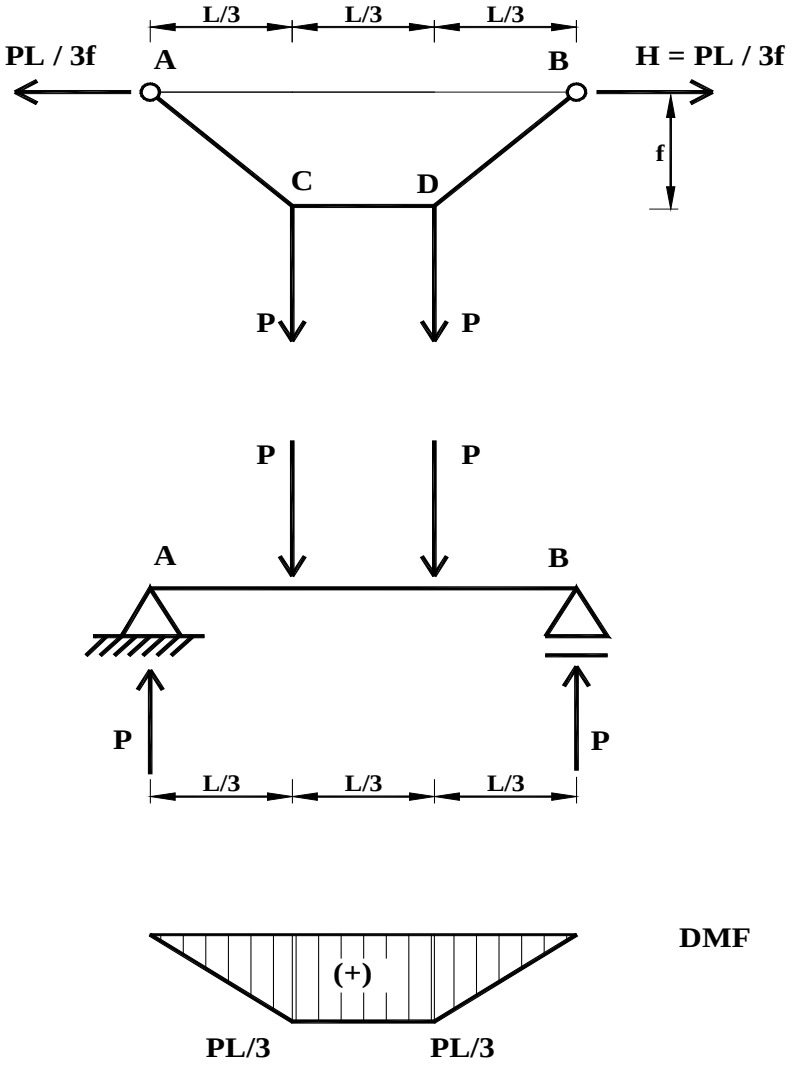


Observa-se que as reações de apoio verticais coincidem para o cabo “AB” e para a viga “AB” de idêntico vão e carregamento. Logo, as reações de apoio verticais do cabo podem ser encontradas pela substituição do cabo por uma viga com idêntico vão e carregamento:

Ay e By (no cabo) = Ay* e By* (na viga).

Doravante, toda referência a reações de apoio e esforços na viga de substituição serão identificados por um asterisco.

No entanto, a vantagem de comparar o cabo AB a uma viga de substituição AB não está somente nas reações de apoio verticais. Comparemos o empuxo horizontal no cabo ao diagrama de momentos fletores da viga de substituição.

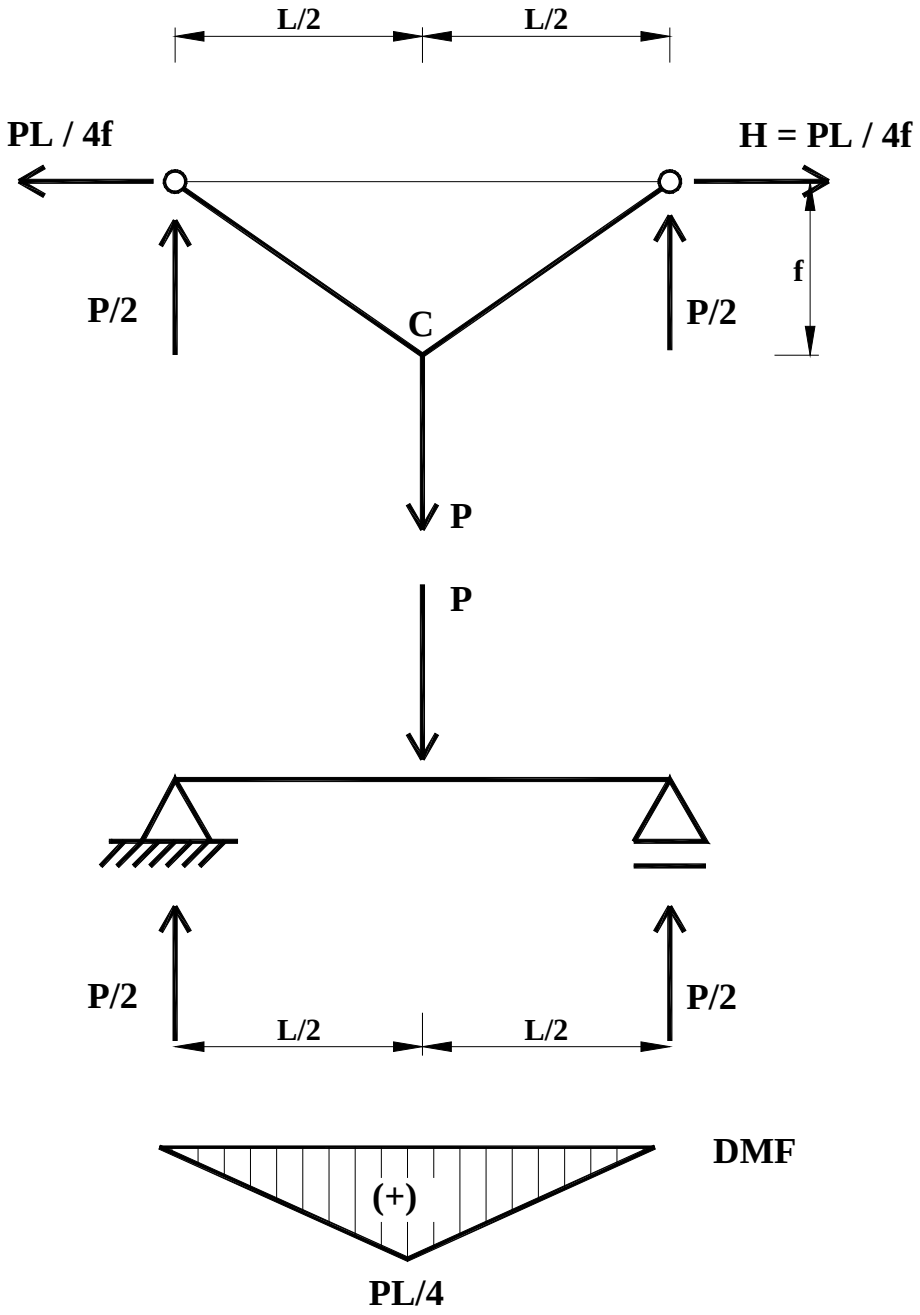


$M^*máx = PL / 3$, logo $H = PL / 3f = M^*máx / f$.

Onde f é a distância vertical máxima do cabo até a linha de fechamento entre as extremidades A e B do cabo.

Vejamos para outras condições de carregamento:

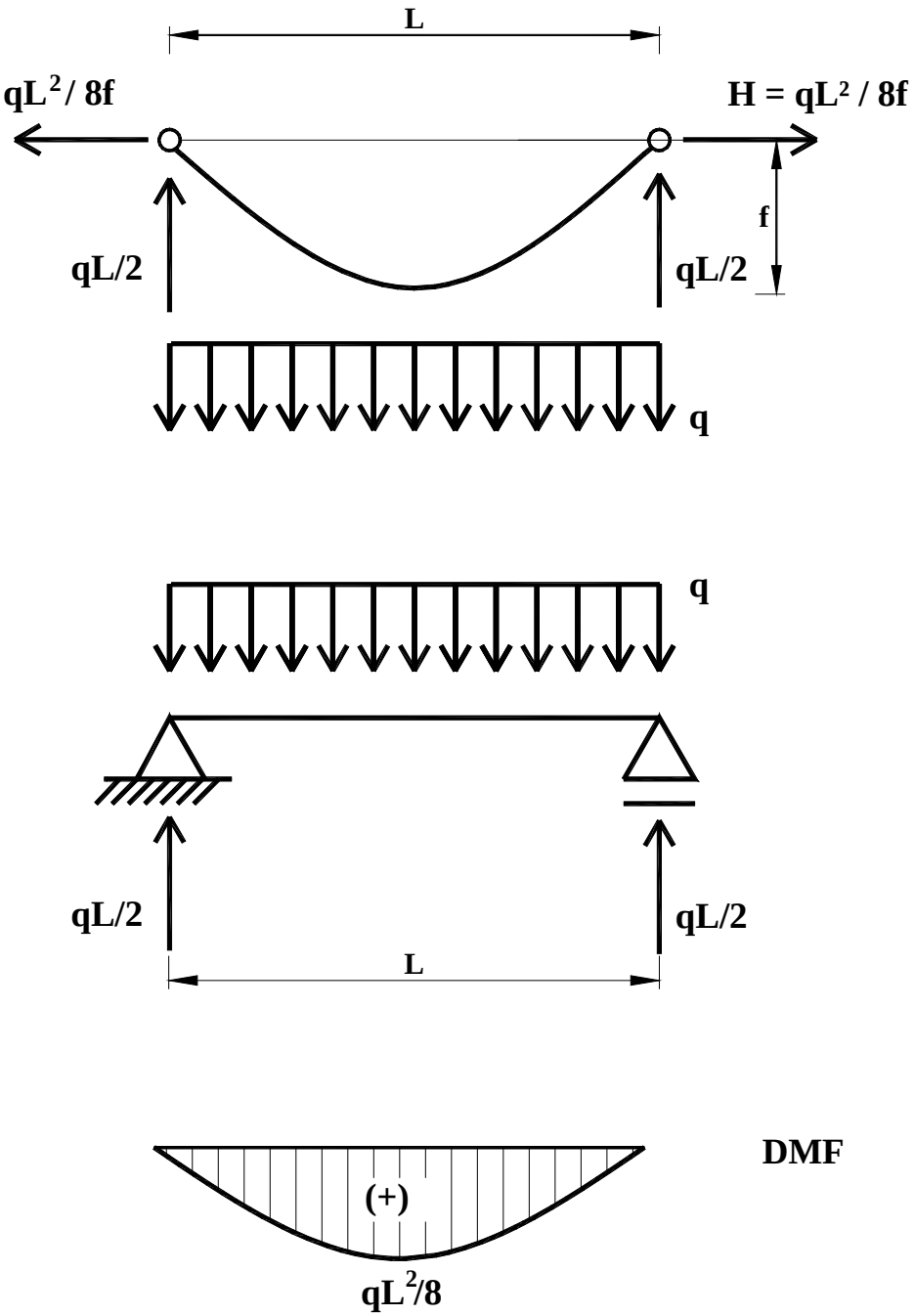
a)



$\Sigma Mc = 0 \rightarrow - H.f + (P/2).(L/2) = 0,$

portanto $H = (P \,.\, L) / 4f = M^*_{max}/f$

b)



Portanto, as reações de apoio nos cabos podem ser obtidas através de uma vigas de substituição:

$$Ay = Ay^*$$

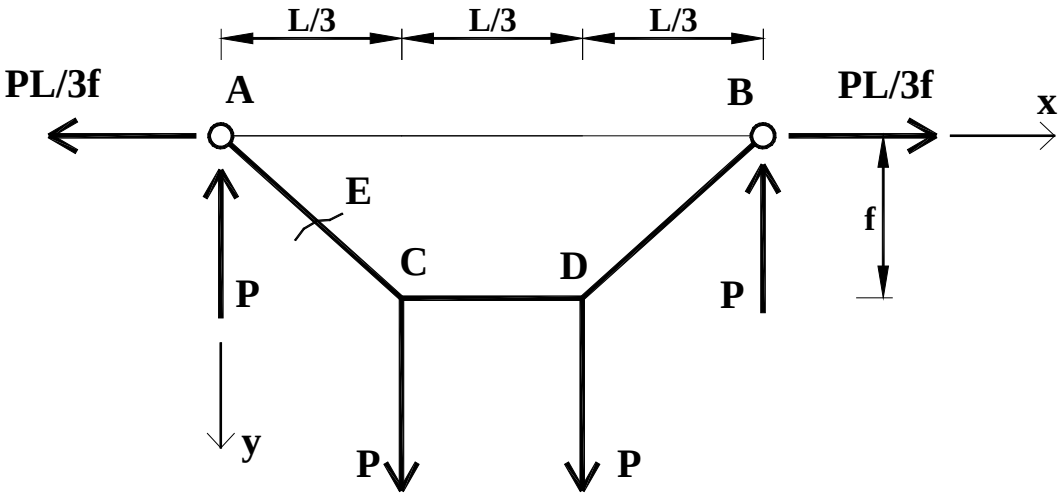
$$By = By^*$$

$$H = M^*max / f$$

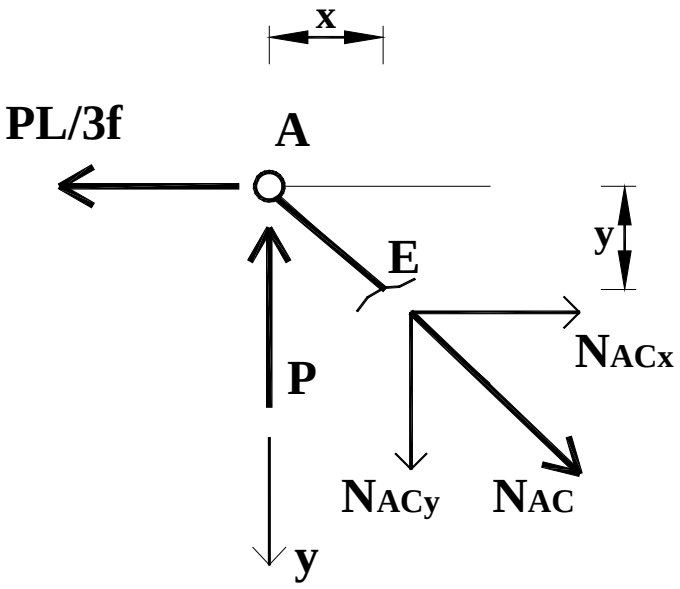
2.4.2. Esforços Normais de Tração Atuantes em Cabos

Uma vez conhecidas as reações de apoio, é possível determinar os esforços normais atuantes no cabo.

Usando mais uma vez o exemplo do cabo submetido a duas cargas concentradas eqüidistantes, de valor "P" cada uma:



Esforço normal no trecho AC:



Substitui-se a parte do cabo retirada, pelo seu efeito, a Força Normal N_{AC}. Aplicam-se as equações de equilíbrio:

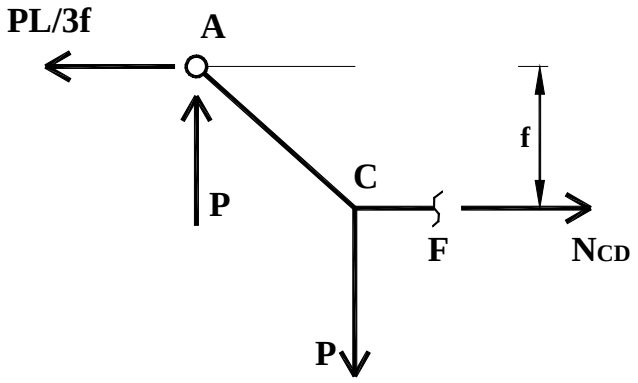
$\Sigma Fx = 0 \rightarrow N_{AC}^{x} = P\ L / 3\ f;$

$\Sigma Fy = 0 \rightarrow N_{AC}^{\ y} = P$, logo

$N_{AC}^{2} = (N_{AC}^{x})^{2} + (N_{AC}^{y})^{2};$

$$N_{AC} = [\ (P\ L / 3\ f)^{2} + P^{2}\ ]^{1/2}$$

Esforço normal no trecho CD:



$\Sigma Fx = 0 \rightarrow N_{CD} = H = P\ L / 3\ f;$

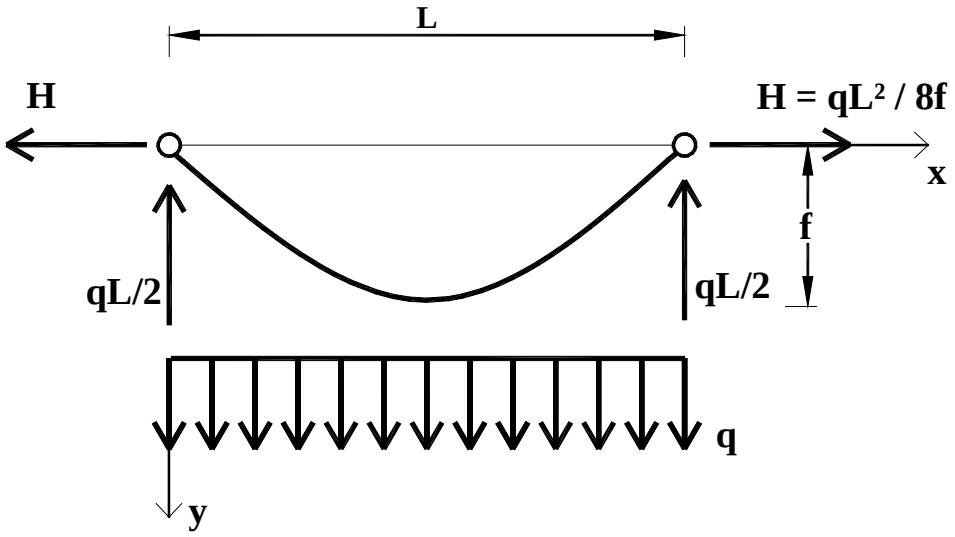
$\Sigma Fy = 0 \rightarrow P - P = 0$, equilíbrio satisfeito

Esforço normal no trecho DB:

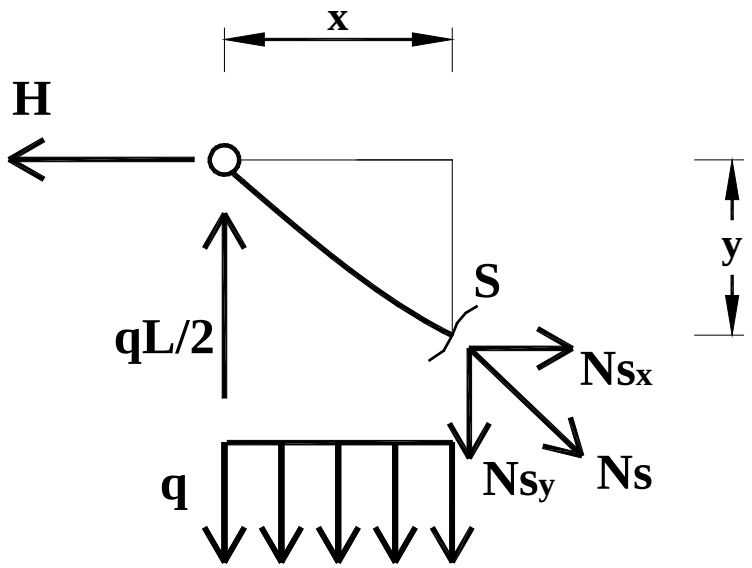
$N_{DB} = N_{AC} = [\ (P\ L / 3\ f)^{2} + P^{2}\ ]^{½}$

Observa-se, da comparação entre N_{AC} e N_{CD}, que o esforço normal máximo de tração no cabo AB ocorre nos trechos AC e DB, trechos adjacentes aos apoios das extremidades. Esta é uma das características dos cabos, os esforços normais máximos ocorrem nas seções dos cabos próximas aos vínculos externos, pois é onde a componente vertical do esforço normal, N_Y, é de maior valor.

Calculando agora os esforços normais para um cabo com carga uniformemente distribuída ao longo do vão:



Cortando o cabo em uma seção genérica de coordenadas (x,y):



Aplicando-se as equações de equilíbrio:

$\Sigma Fx = 0 \rightarrow N_S^x = H$;

$\Sigma Fy = 0 \rightarrow \quad N_S^y - q\,L / 2 + q\,x = 0$

$N_S^y = q\,L / 2 - q\,x$, sendo

para $x = 0$, $N_S^y = q\,L / 2$;

para $x = L/2$, $N_S^y = 0$.

Para o ponto $x = L / 2$, onde ocorre a flecha f, distância máxima da linha AB, não há componente vertical do esforço normal de tração.

Logo, o esforço normal varia ao longo do comprimento do cabo:

Para $x = 0$ $\quad N_S = [\,(N_S^x)^2 + (N_S^y)^2\,]^{½}$

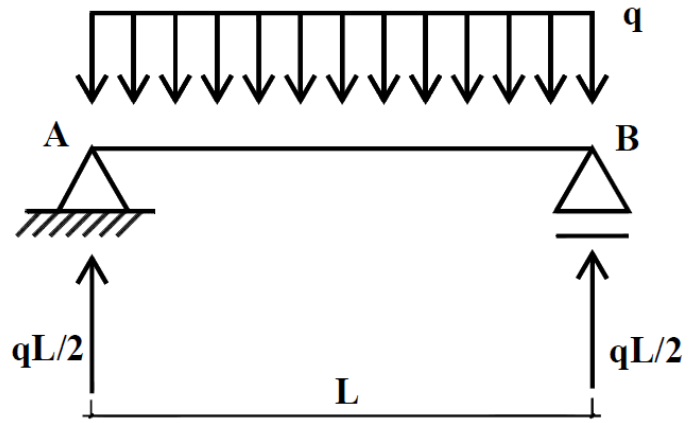
$N_S = [\,(H)^2 + (q\,L\,/2)^2\,]^{½}$ → Valor Máximo

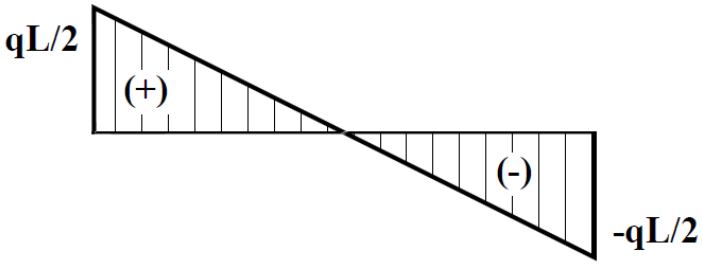
Para $x = L / 2$ $\quad N_S = [\,(N_S^x)^2 + (N_S^y)^2\,]^{½}$

$N_S = [\,(H)^2 + (0)^2\,]^{½}$

$N_S = H$ → Valor Mínimo

Comparando o valor de N_S^y com os esforços da viga de substituição submetida a idêntico carregamento, constata-se que a variação de N_S^y para x=0 é q L / 2 e para x=L/2 é nulo, coincidindo com a variação do esforço cortante na viga:





Portanto, pode-se concluir que o esforço normal de tração para um cabo é estimado pela expressão:

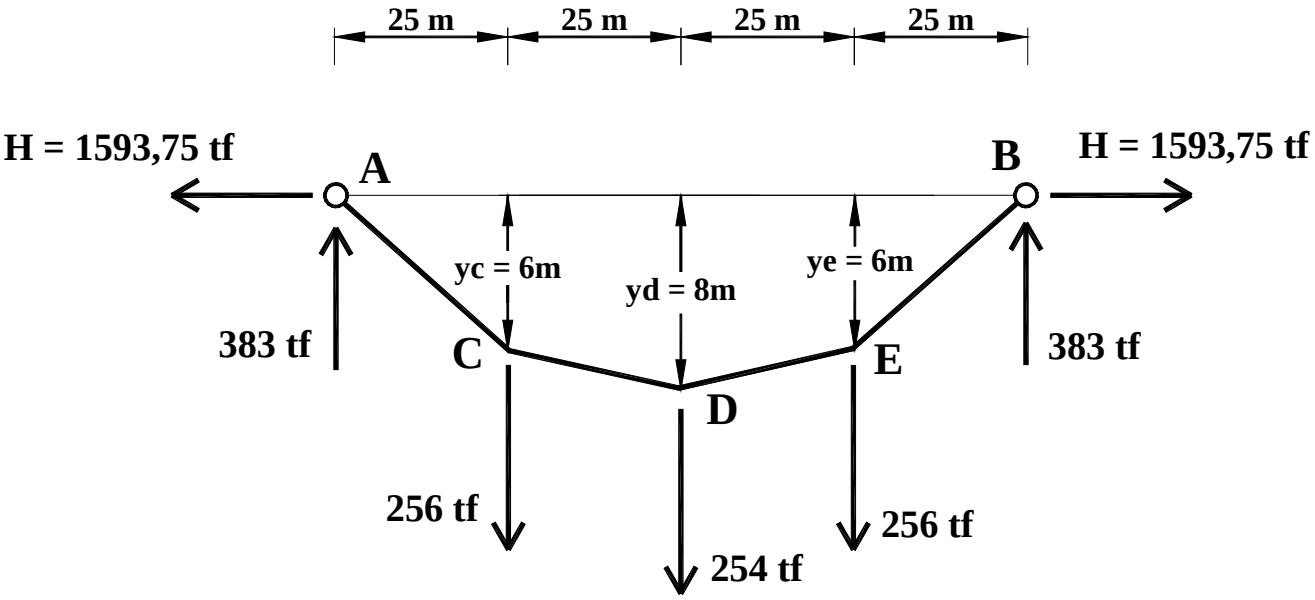
$$N_S = [\ (N_S^x)^2 + (N_S^y)^2\ ]^{½}$$

$$N_S = [\ (H)^2 + (V_S^*)^2\ ]^{½}$$

Onde H: Empuxo horizontal nas extremidades do cabo e;

V_S^*: Esforço cortante para uma seção genérica da viga de substituição.

Exercício Proposto: Determinar os esforços normais para cada trecho da estrutura:



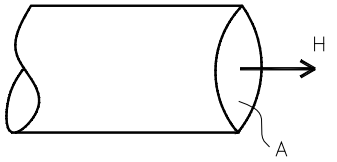
Respostas:

$N_{AC} = N_{EB} = 1.639,12$ tf;

$N_{CD} = N_{DE} = 1.598,80$ tf.

Uma vez conhecida a força normal de tração máxima no cabo, a tensão normal de tração será:

$$\sigma_t = N_{máx} / A \leq f_{st}$$

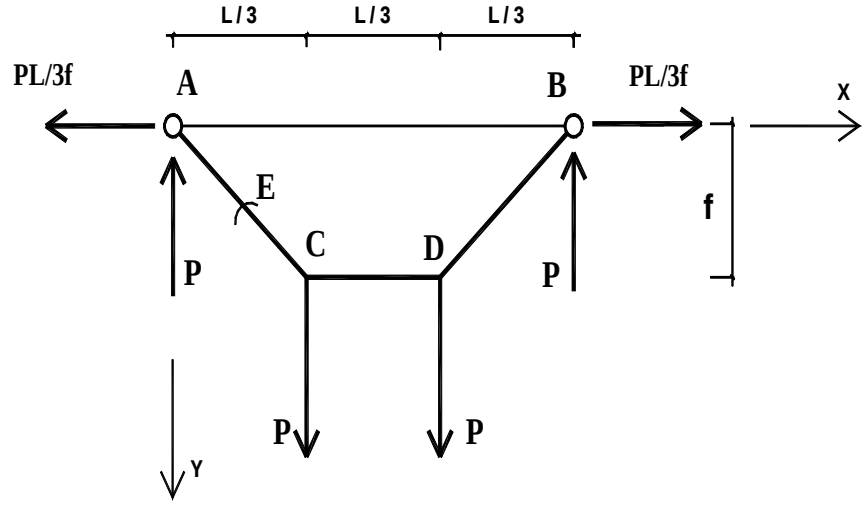


Onde fst = resistência à tração do aço;

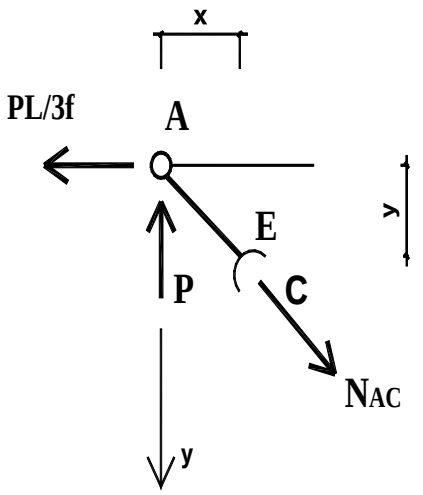
A = área útil da seção transversal.

2.4.3. Conformação Geométrica Final do Cabo:

Fazendo, mais uma vez, uso da viga da hipótese de momentos fletores nulos para qualquer ponto genérico sobre o cabo AB.



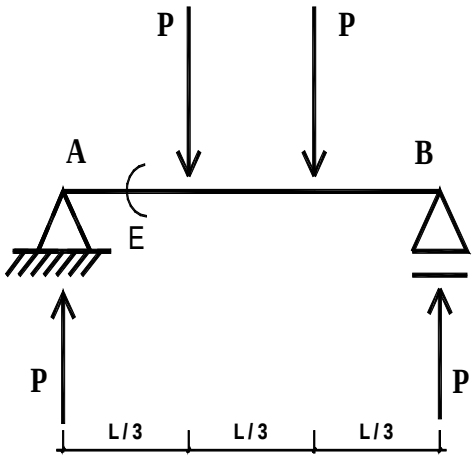
Para um ponto genérico "E" que pertença ao cabo e tenha coordenadas (x,y)

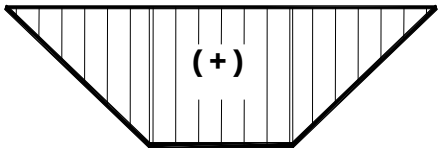


Para um ponto "E" situado a uma distância x do apoio "A" do cabo AB, a equação de momentos fletores é dada pela equação:

$\Sigma M_E = 0 \rightarrow - H.y + P.x = 0$, portanto $y = P \cdot x / H = 3f \cdot x / L$.

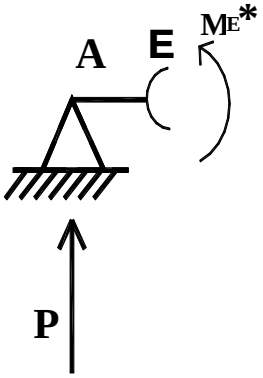
A configuração geométrica do cabo para o trecho AC é definida por uma equação do 1º. grau.





DMF

PL / 3



$\Sigma M_E^* = 0 \rightarrow P \cdot x - M_E^* = 0$, logo $M_E^* = P \cdot x$

Comparando a expressão do momento no ponto "E" para a viga de substituição com a expressão encontrada para a configuração geométrica do cabo para o ponto "E":

Viga de Substituição $\rightarrow M_E^* = P \cdot x$;

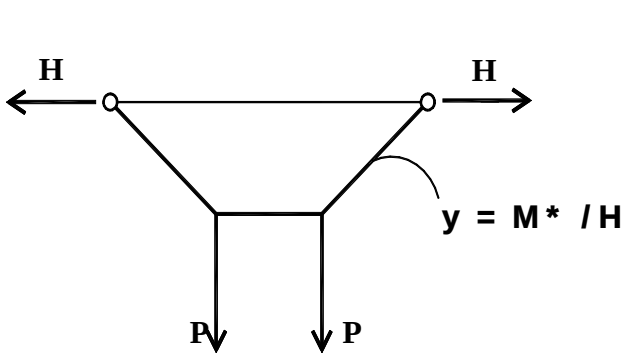
Cabo $\rightarrow y_E = (P \cdot x_E) / H$.

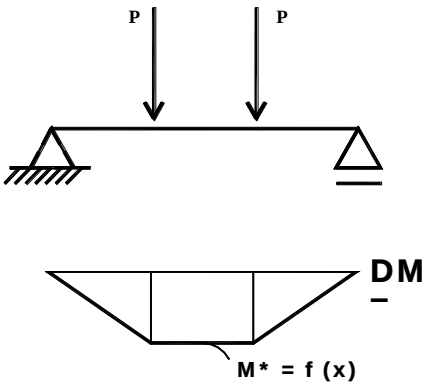
Percebe-se que mais uma vez existe uma relação entre a cota vertical y do cabo e o momento fletor para a viga de substituição na mesma seção, portanto, deduz-se que a cota vertical ys, para uma seção genérica S do cabo, é igual ao Ms* dividida pelo empuxo horizontal H na viga de substituição para uma seção S de mesma posição horizontal que no cabo:

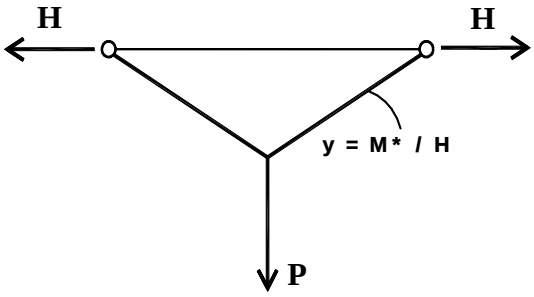
$Ys = Ms^* / H$

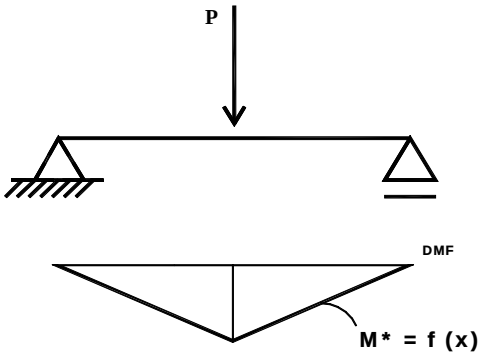
Dessa forma, pode-se determinar a posição vertical de qualquer ponto do cabo a partir do momento fletor na viga de substituição. Uma conclusão adicional desta relação

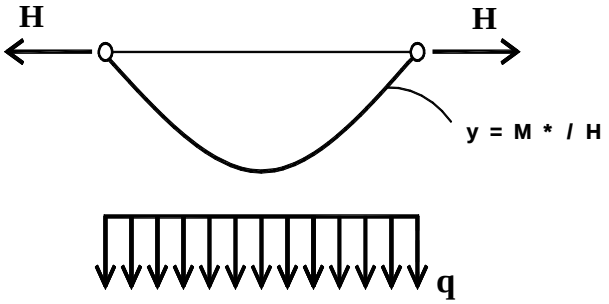
y = Ms* / H é constatada ao comparar-se a forma do diagrama de momentos fletores para a viga de substituição e a forma funicular do cabo:

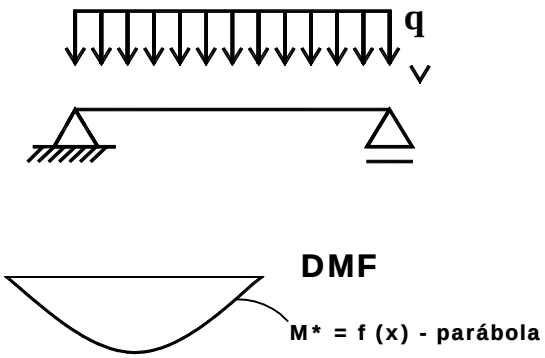




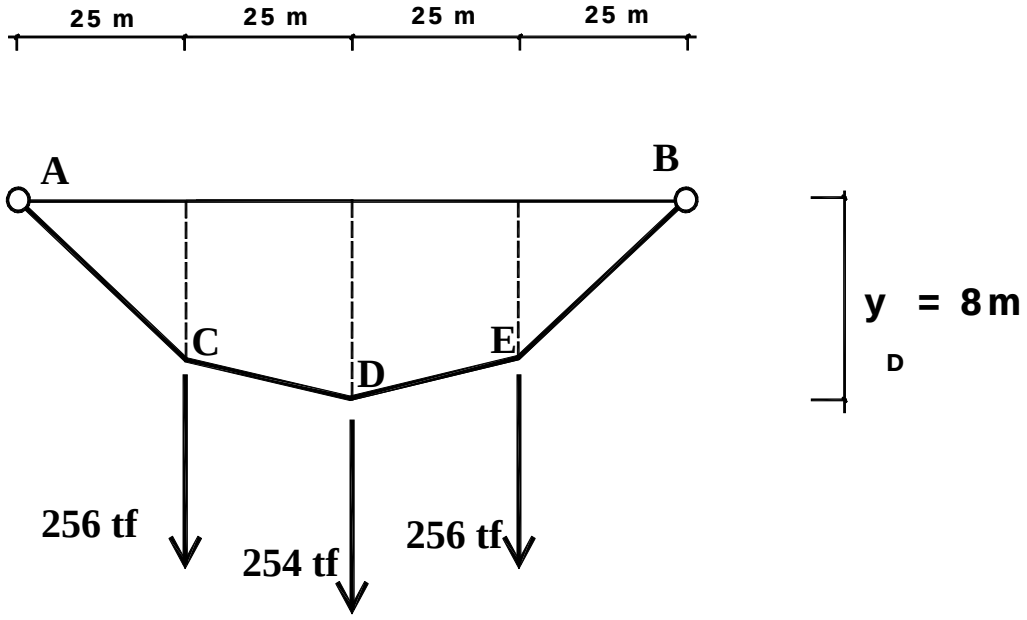








Exercício Proposto: Determinar as reações de apoio no cabo AB e as cotas verticais nos pontos “C” e “E”.



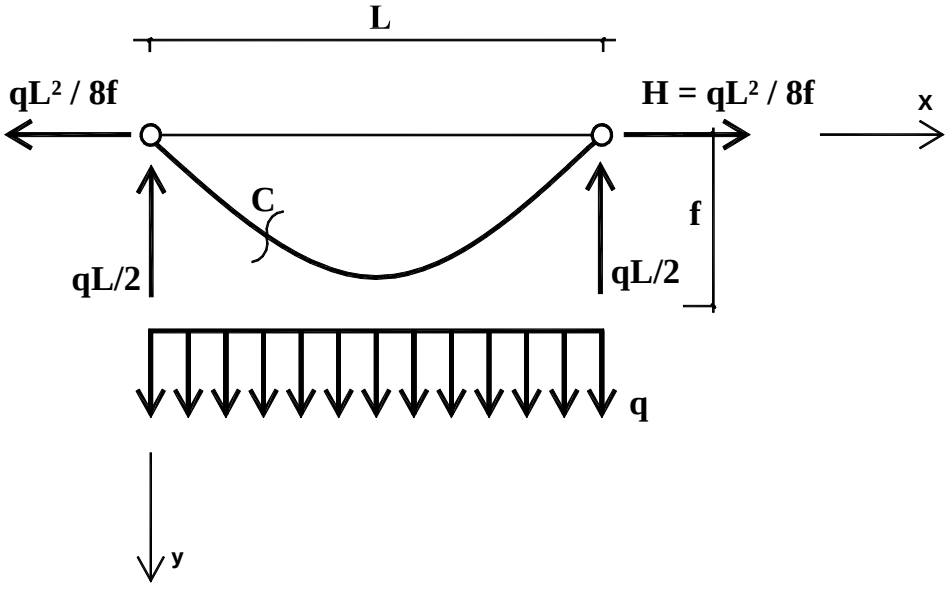
Respostas:

Ay = By = 383 tf

H = 1.593,75 tf

$y_C = y_E = 6{,}0$ m

Pode-se também deduzir a forma funicular para um cabo submetido a carga uniformemente distribuída ao longo do vão:

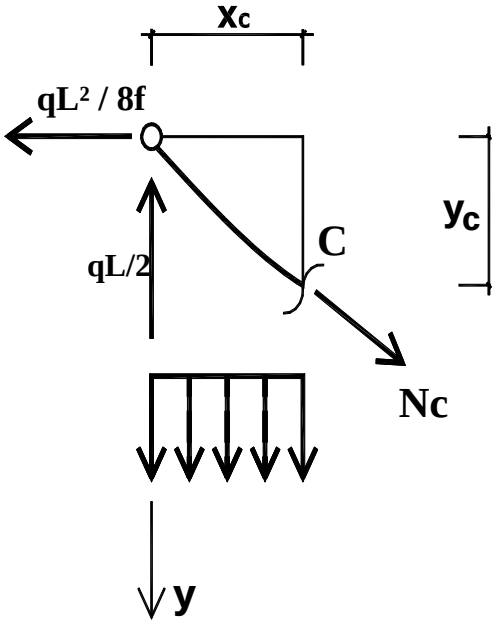


Reações de Apoio:

Ay = By = qL/2

H = M*máx / f = qL^2 / 8f

Escolhendo um ponto genérico "C", com posição (x_C, y_C), passando uma seção, o diagrama de equilíbrio estático fica:



$\Sigma M_C = 0$

$\frac{1}{2} qL \cdot x_C - \frac{1}{2} q \cdot x_C^2 - H \cdot y_C = 0$

$y_C = q \cdot (L \cdot x_C - x_C^2) / 2H$

$y_C = 4 f \cdot (L \cdot x_C - x_C^2) / L^2$

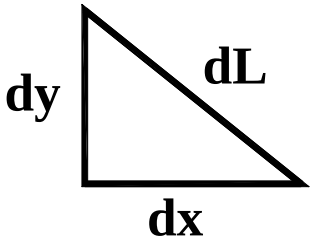
Generalizando para um ponto qualquer sobre o cabo, de coordenadas (x,y):

$y = 4 f \cdot (L \cdot x - x^2) / L^2$ → Equação da Conformação Geométrica do Cabo.

Equação de parábola quadrática para o caso de carregamento uniformemente distribuído ao longo do vão.

Uma vez conhecida a linha elástica do cabo na conformação deformada, pode-se estimar o comprimento total do cabo: Lc.

O comprimento total do cabo Lc é obtido a partir da expressão da linha elástica y= f(x), através da integração ao longo do comprimento:



$$dL^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dL = \sqrt{dx^2 \left(1 + dy^2 / dx^2\right)} = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$Lc = \int_0^L dL = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)} dx$$

Para a situação de carregamento uniformemente distribuído ao longo do vão:

$y = 4\ f\ .\ (L\ .\ x - x^2) / L^2$.

$dy / dx = 4\ f\ .\ (L - 2\ x) / L^2$, substituindo na integral:

$$Lc = \int_0^L \left\{ 1 + \left[\frac{4f}{L^2} (L - 2x) \right]^2 \right\}^{0,5} dx$$

A solução desta integral é feita pelo desenvolvimento do integrando sob a forma de série. Utilizando este tipo de resolução de integrais definidas, encontra-se a seguinte expressão:

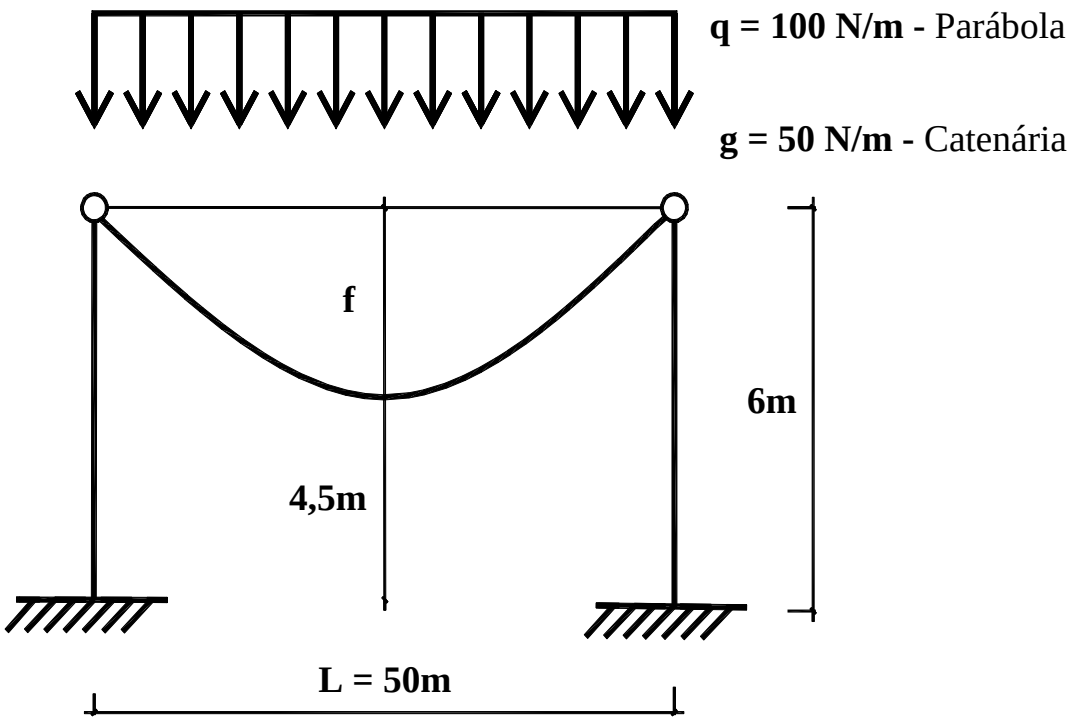
$$Lc \cong L\ [\ 1 + 8/3\ (\ f / L\ )^2\ ]$$

Comprimento total de um cabo de forma funicular parabólica, submetido à carga uniformemente distribuída ao longo do vão.

Nas situações de cabos submetidos a peso próprio, cuja forma funicular é uma catenária, mas para a relação $f/L \leqslant 0,2$, pode-se utilizar a mesma expressão anterior para estimar o comprimento total do cabo Lc.

Exemplo:

Qual o comprimento total do cabo que suporta uma sobrecarga uniformemente distribuída ao longo do vão de 100 N/m e que possui peso próprio igual a 50 N/m, sabendo-se que os pontos de fixação estão no topo de postes de 6 m de altura e que estão afastados entre si de 50 m? Além disso, há a informação que o ponto mais baixo do cabo está 4,5 m acima do solo.



Flecha: $f = 6m - 4{,}5m = 1{,}5$ m

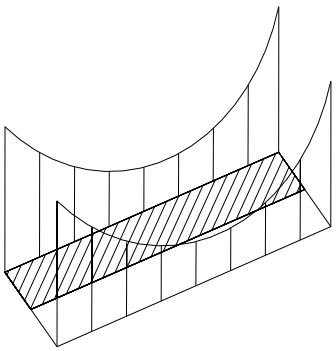
$f / L = 1{,}5 / 50 = 0{,}03 \leqslant 0{,}2 \rightarrow$ Pode-se utilizar a expressão da parábola para substituir a geometria da catenária: $Lc \cong L \left[1 + 8/3 \left(f / L \right)^2 \right]$.

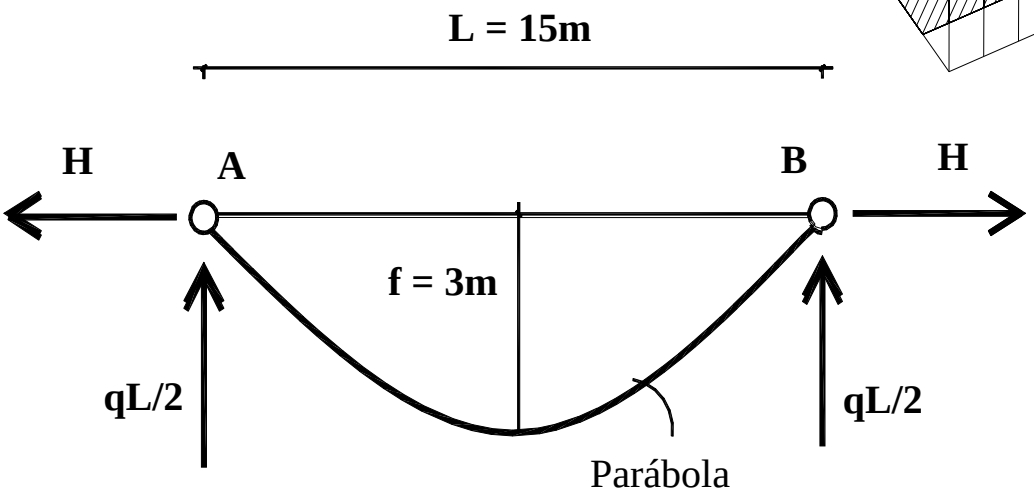
Considerando-se o erro na substituição da catenária pela parábola desprezível:

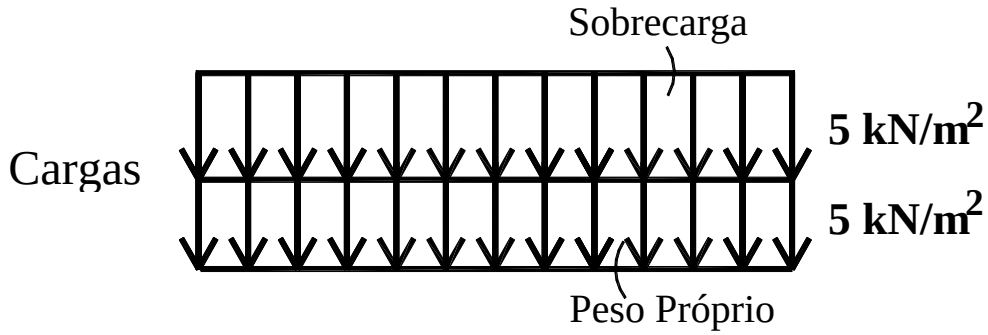
$Lc = 50 \left[1 + 8/3 \left(1{,}5 / 50 \right)^2 \right] = 50{,}12$ m

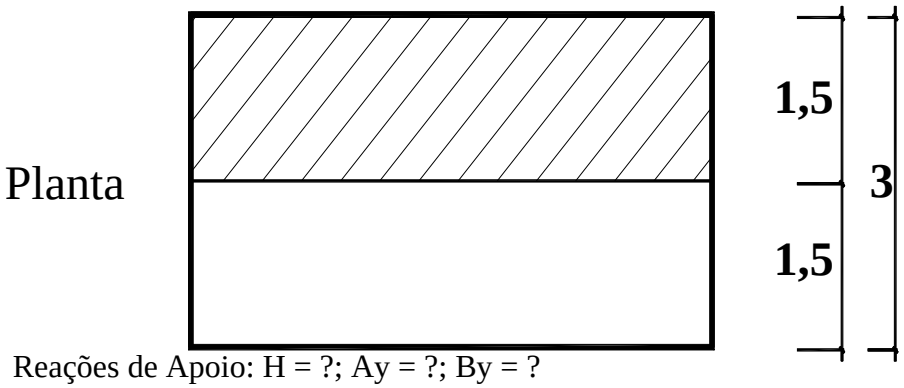
Exemplo de Aplicação (Extraído de Salvadori e Levy, pág.194)

Uma passarela, que liga duas edificações afastadas de 15,0 m, possui 3,0 m de largura e deve suportar uma sobrecarga de 5 kN/m^2 além de seu peso próprio, também estimado em 5 kN/m^2. A passarela será suspensa por 2 cabos com um flecha de 3m. Determine a força normal máxima que tracionará o cabo.









Reações de Apoio: H = ?; Ay = ?; By = ?

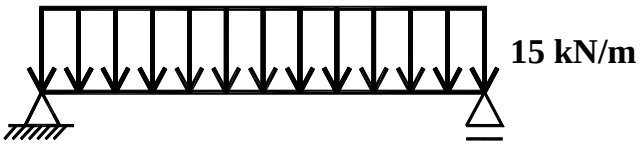
Carga distribuída por cabo → qA/2L = (5 + 5)kN/m² x (15x3)m² / 2 x 15m = 15kN/m

Como o cabo e o carregamento são simétricos Ay = By, então:

Ay = By = 15 x 15 / 2 = 112,5 kN;

H = M*max / f → H = q L^2 / 8 f = 15 kN/m x $(15m)^2$ / 8 x 3m

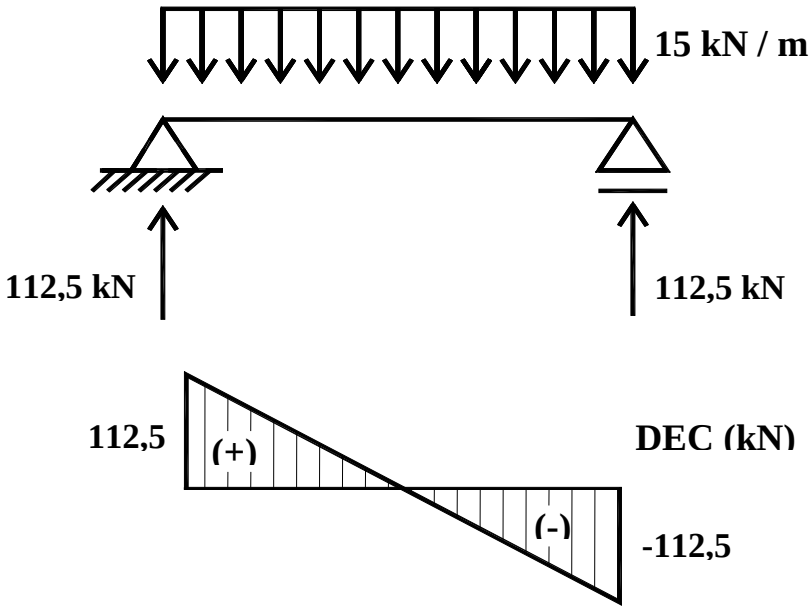
H = 140,63 kN.



$M_{max}^* = qL^2/8$

Força Normal Máxima:

$N_S = [(H)^2 + (V_S^*)^2]^{½}$ → V*s = Vmax*, para Nmax



Vmax* = 112,5 kN, nos apoios

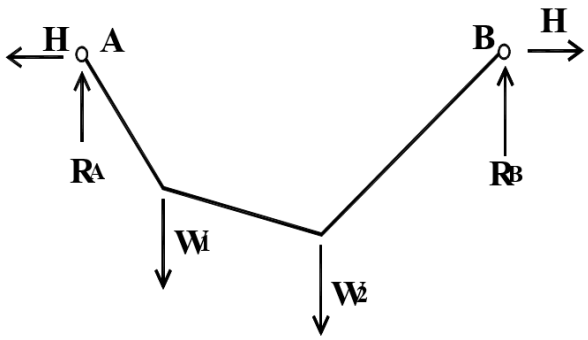
$N_S = [(H)^2 + (V_S^*)^2]^{½}$ → $N_S = [(140,63)^2 + (112,5)^2]^{½}$

N_S = 180,09 kN

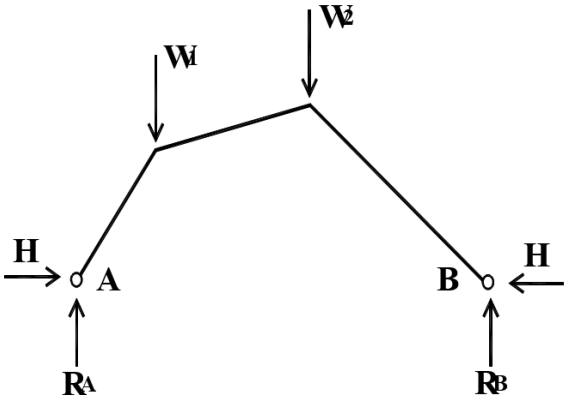
Resposta: O esforço normal máximo ocorre nos extremos, próximo aos vínculos “A” e “B” e vale 180,09 kN.

2.5. Arcos

Seja um cabo submetido a cargas concentradas cuja forma é um polígono.



Ao rebater-se o cabo AB e mantendo sua forma funicular "congelada" de maneira que o cabo possua rigidez suficiente para resistir a esforços de compressão.



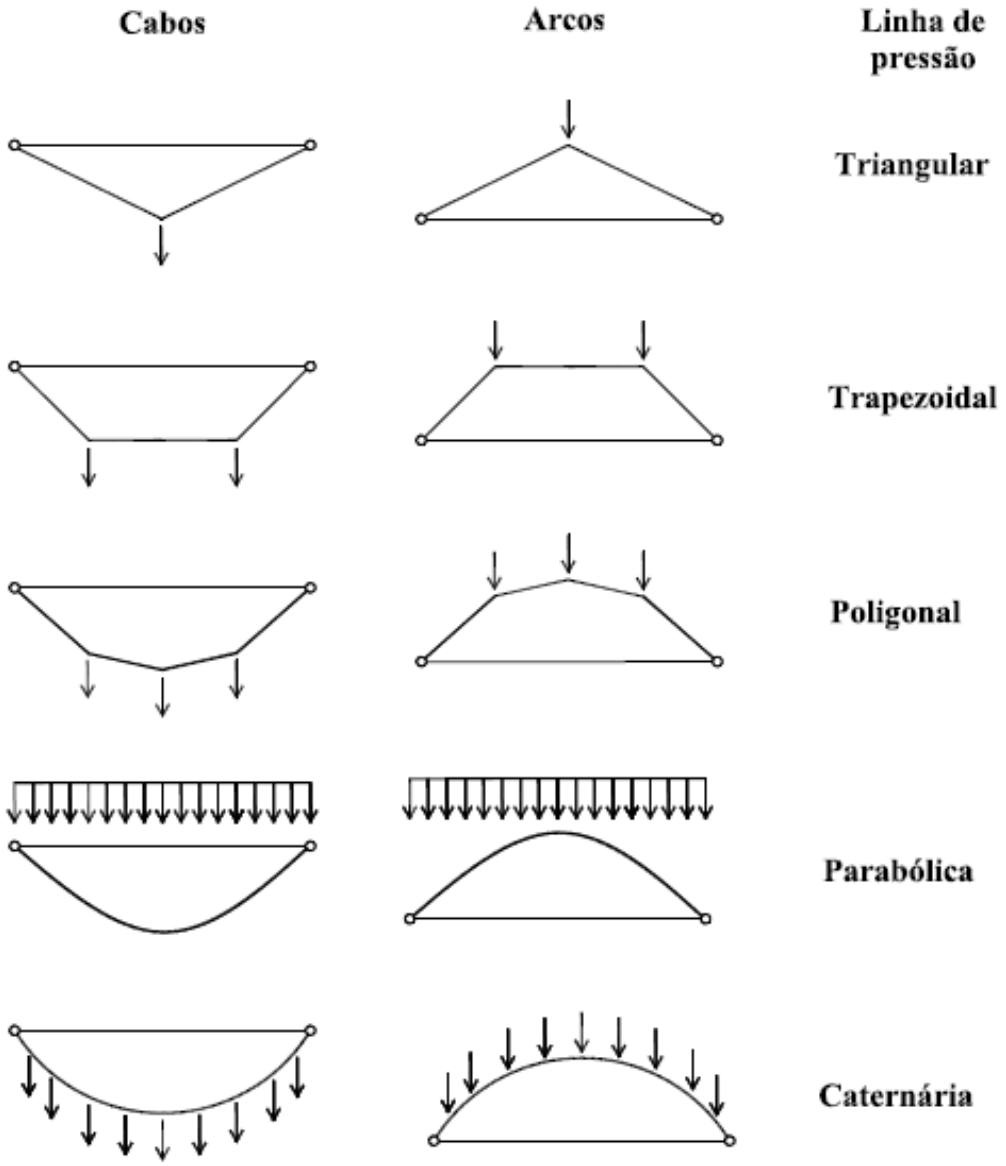
A forma funicular "congelada" do cabo se transforma assim num **arco poligonal funicular**, onde todas seções transversais estão submetidas exclusivamente à esforços de compressão. O arco deve apresentar maior rigidez que os cabos, caso contrário o arco não permaneceria com a geometria projetada quando o carregamento fosse aplicado.

Nos cabos, para cada tipo e intensidade de carregamento a forma funicular seria diferente de forma que todas seções transversais estivessem submetidas a momentos nulos. Além disso, o empuxo horizontal nos apoios sempre é com sentido a afastar as extremidades.

Nos arcos, para cada tipo e intensidade de carregamento existirá uma forma funicular para a qual os momentos serão nulos para todas as seções transversais. Esta forma funicular é chamada "linha de pressão" de um carregamento sempre que a geometria de um arco coincidir com a linha de pressão do carregamento aplicado sobre o arco os

únicos esforços atuantes serão de compressão, com Ms=0 e Vs=0. Além disso, independente do arco estar submetido exclusivamente a esforços de compressão ou não, os empuxos horizontais nas extremidades do arco tem sentido de aproximação das extremidades equilibrando a tendência do arco deformar-se com o afastamento dos apoios.

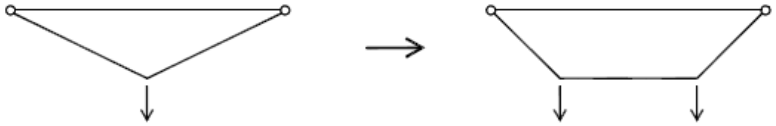
Formas funiculares para alguns tipos de carregamentos:



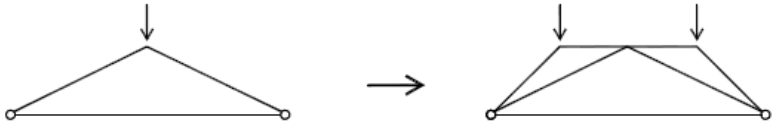
Portanto, muitas das características dos cabos também são pertinentes aos arcos, principalmente dos arcos com geometria funiculares (Ms=0).

Porém, o comportamento dos arcos difere do comportamento dos cabos em um aspecto básico: se o carregamento no cabo se modifica, o cabo muda de forma e assume uma nova geometria funicular. Por outro lado, se o carregamento no arco se altera, o arco mantém sua geometria, devido a sua maior rigidez ao compará-lo ao cabo, e não possui mais uma forma funicular para a nova condição de carregamento.

Cabos



Arcos



A geometria triangular não coincide com a linha de pressão para 2 cargas concentradas.

Quando a geometria do arco não coincide com a linha de pressão para o carregamento, surgem esforços de flexão e cisalhamento no arco (Ms,Vs), além dos esforços de compressão (Ns).

Ao projetar-se a forma de um arco, sob o ponto de vista estrutural, deve ser escolhida a forma funicular para o carregamento aplicado. No entanto, sabe-se que as estruturas estão submetidas a carregamentos permanentes (peso próprio) e a carregamentos variáveis (pessoas, mobiliário, ventos).

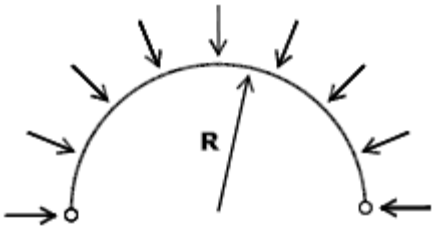
Para qual combinação de carregamentos definiremos a geometria do arco? Se definirmos somente em função do carregamento permanente haverá efeitos de flexão quando aplicado o carregamento variável. Se a geometria do arco for definida com o conjunto de carga permanente + variável, para qualquer alteração no carregamento variável ocorrerão efeitos de flexão e cisalhamento.

O critério de projeto utilizado neste caso é definir a geometria do arco para o carregamento predominante. Na situação de um arco de alvenaria, o carregamento permanente é maior que o variável e a geometria é definida em função do primeiro. No caso de arcos com materiais mais leves, como o aço, as cargas variáveis possuem maior

participação na composição do carregamento, recomendando que a escolha da geometria do arco considere a sobreposição do carregamento permanente + variável.

Sabe-se que a otimização do elemento sob o ponto de vista estrutural não é o único parâmetro a influir na concepção de uma estrutura. A função e a forma também influenciam a escolha da forma estrutural do arco.

Os romanos notabilizaram-se pela utilização de arcos para vencer grandes vãos. Os arcos romanos possuem a forma de um semicírculo.



O carregamento que possui o semicírculo como a linha de pressão é a ação de cargas radiais. Esse tipo de carregamento surge quando há efeitos de vento envolvendo uma cobertura com estrutura em arco, por exemplo. Na maioria dos casos, o carregamento será do tipo uniformemente distribuído, o que ocasiona surgimento de efeitos de flexão nos arcos romanos. É o predomínio da forma sobre a função estrutural.

Outro tipo de arco bastante utilizado no passado é o arco gótico, que possui uma flecha bastante pronunciada.



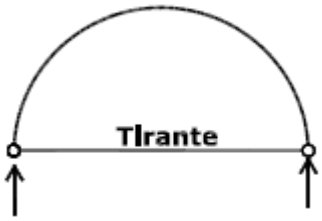
Lembrando-se do elenco de cabos, quanto maior a flecha, menos a reação horizontal (empuxo) nos apoios. Nos arcos vale a mesma reação. Os arcos góticos possuem a vantagem de minimizarem as reações horizontais, permitindo vencer grandes vãos sem a preocupação de surgirem altos empuxos.

Já o arco árabe não possui vantagens sob o ponto de vista estrutural, pois as formas reentrantes nos apoios introduzem altas tensões de flexão nesta região.



Além da escolha da geometria do arco, é necessário que também seja garantido que o empuxo horizontal nos apoios seja absorvido pela fundação.



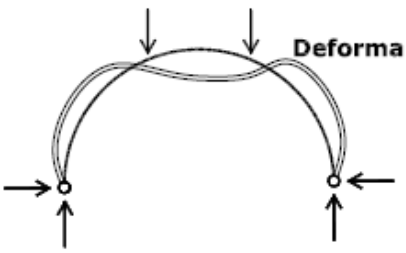


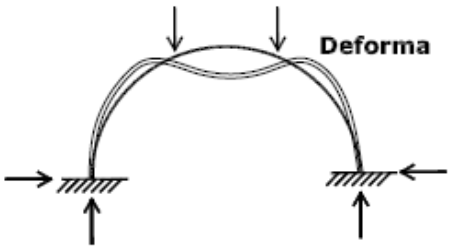
Caso a fundação não seja capaz de resistir ao empuxo, pode-se optar pela utilização de um tirante que impedirá o movimento de "afastamento" dos apoios. O inconveniente de usar o tirante está que este pode vir a ocupar um espaço que deveria estar liberado para a utilização. A solução neste caso é colocar o tirante no nível das fundações, de forma que fique no subsolo da edificação. Há situações onde é possível tirar partido da utilização de tirantes.

No caso de pontes, os sistemas em arco podem apresentar duas configurações diferentes, conforme a posição relativa do tabuleiro da ponte esteja acima ou abaixo do arco.

- Se o tabuleiro está acima do arco, as cargas do tabuleiro são transmitidas por montantes até ao arco e o empuxo horizontal é transmitido às fundações.
- Se o tabuleiro está abaixo do arco, as cargas estão "penduradas" no arco por pendurais. O equilíbrio dos empuxos horizontais pode ser garantido pelo uso de tirantes que estejam embutidos no tabuleiro.

Quanto à vinculação, os arcos podem apresentar extremidades rotuladas ou engastadas:





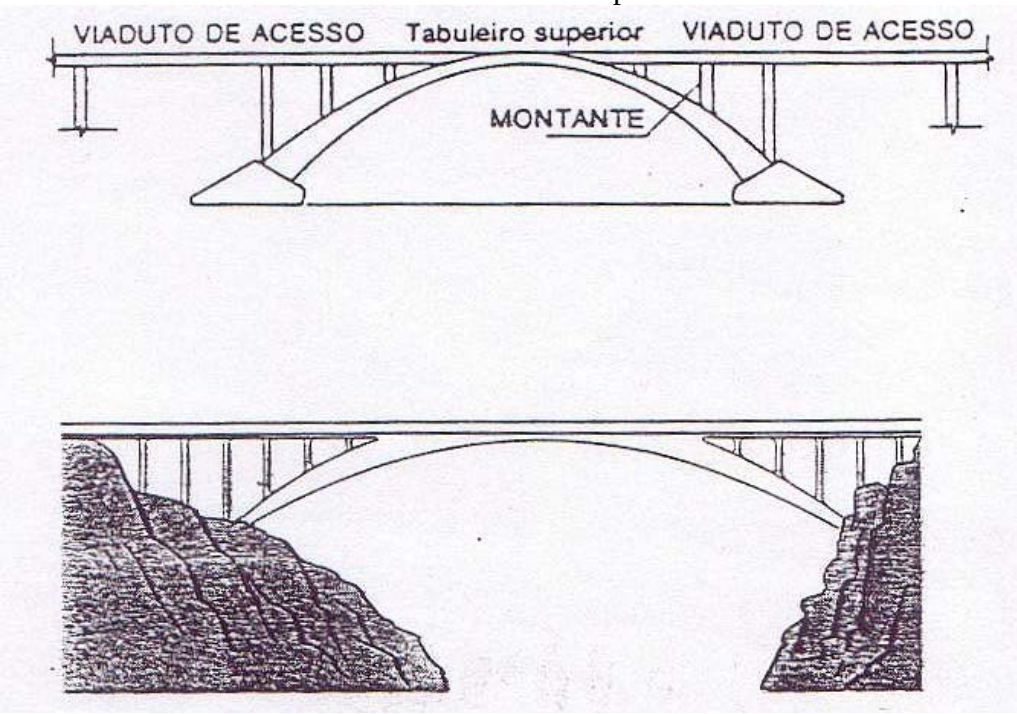
Os arcos com apoios rotulados permitem a rotação nas extremidades quando o carregamento atuar.

Os arcos com vínculos engastados são mais rígidos que os de extremidade rotulada, apresentando menores deslocamentos quando sob a ação do carregamento. Por serem mais rígidos, adaptam-se menos às variações de carregamento ao longo da vida da estrutura, surgindo assim esforços solicitantes mais elevados que nos pórticos rotulados.

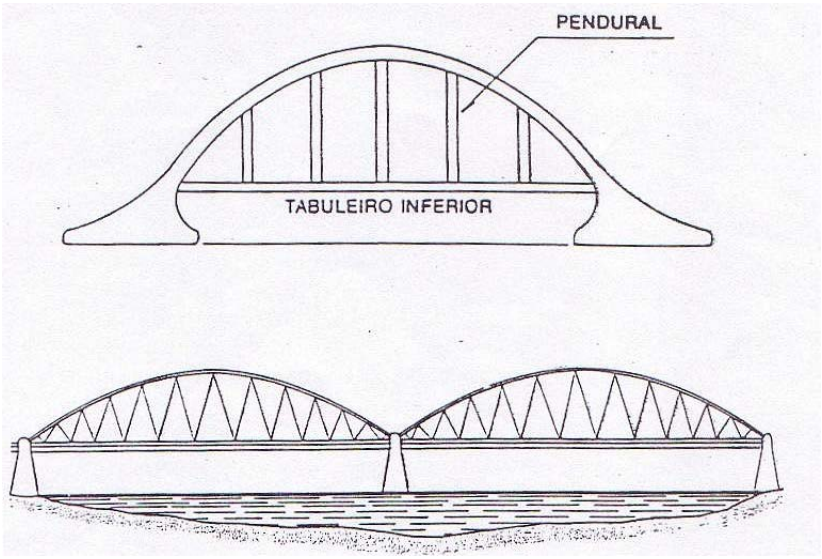
Os arcos hiperestáticos por dependerem de uma condição adicional de compatibilidade das deformações, além das equações de equilíbrio, sofrem alterações significativas nos esforços quando há recalques de apoios ou variações de temperatura. Para eliminar estes efeitos, pode-se acrescentar uma rótula ao arco biarticulado.

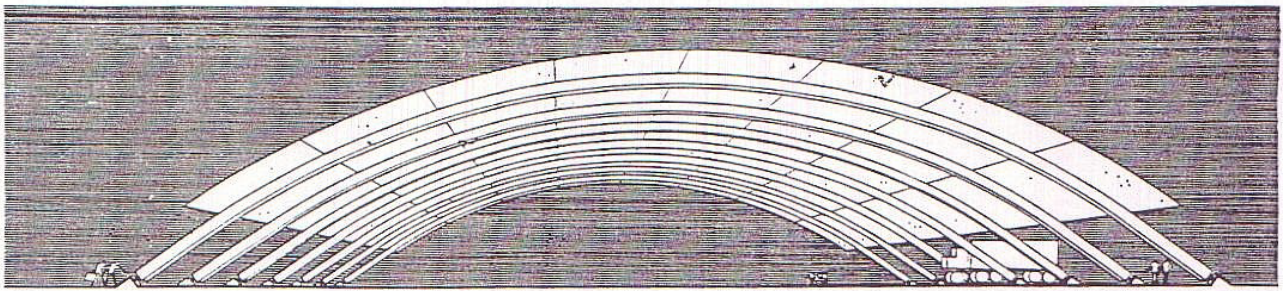
Arcos aplicados em engenharia:

Arco com tabuleiro superior

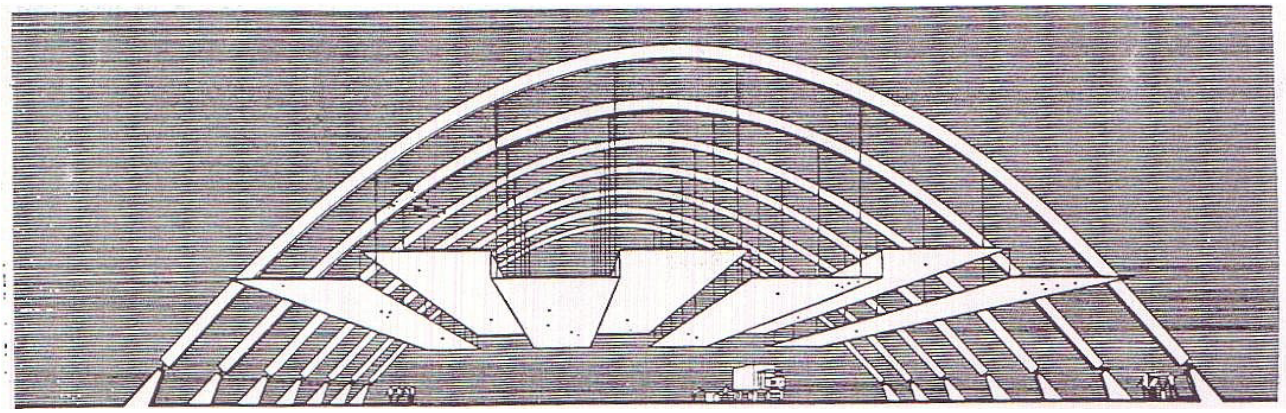


Arco com tabuleiro inferior

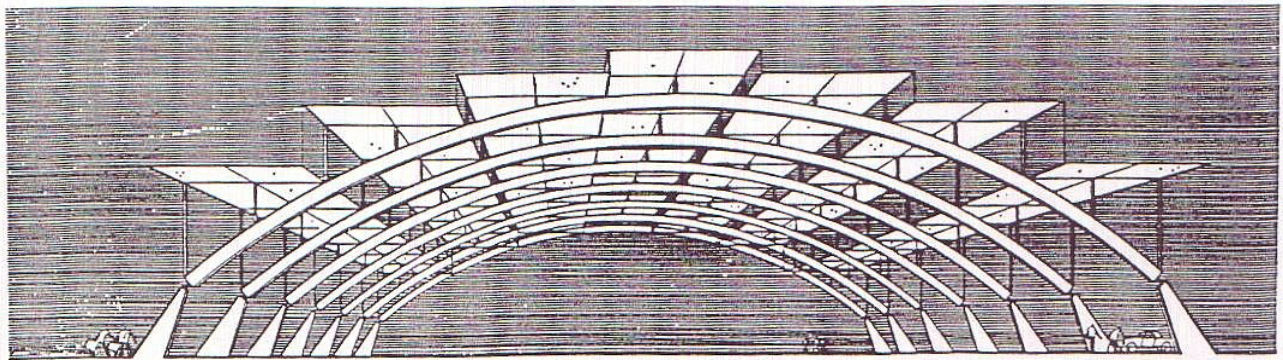




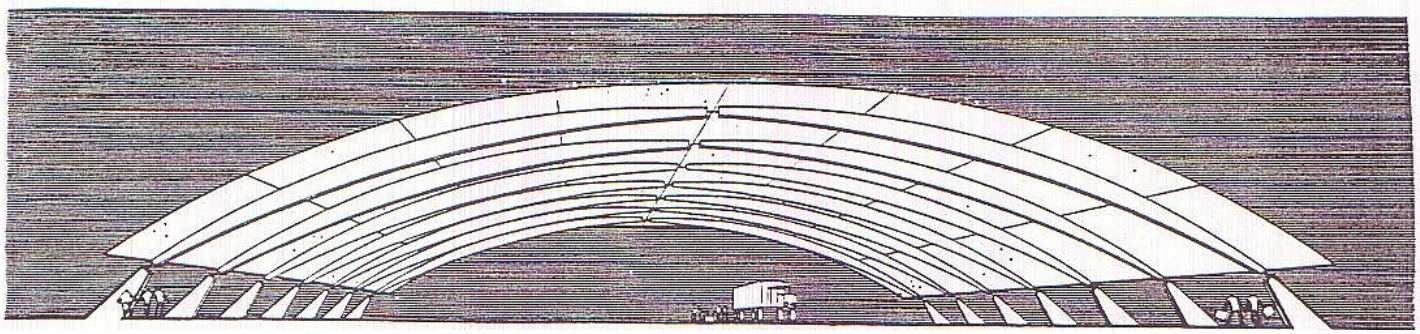
Arcos de fundação com estruturas de teto curvo. Curva funicular: catenária. Altura do arco = 1/5 do vão.



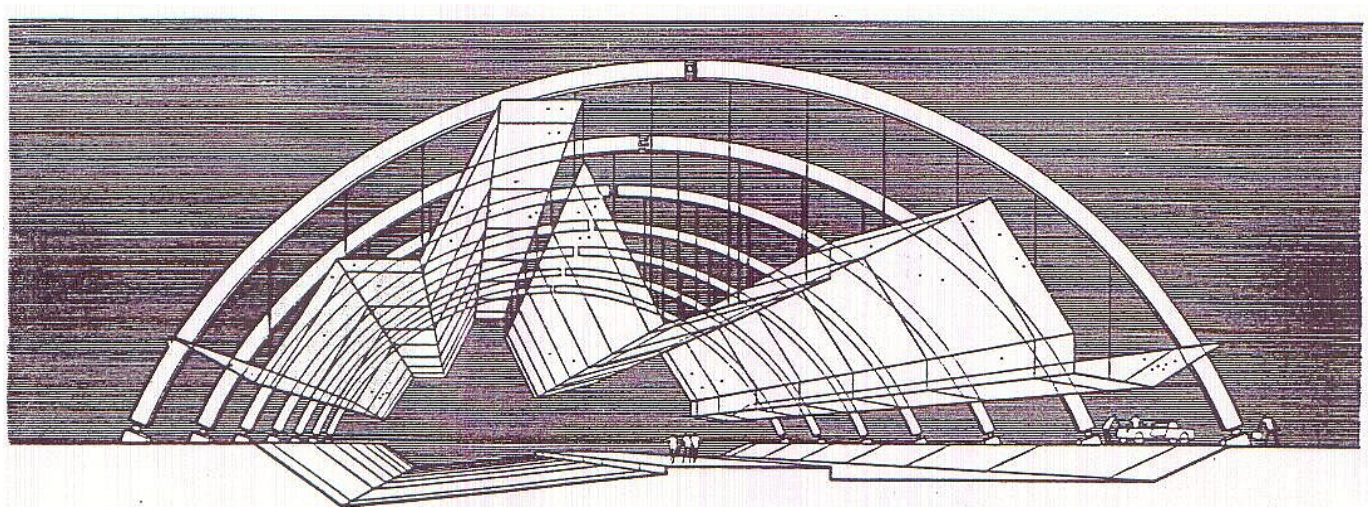
Arcos em contraforte com estrutura de telhado suspenso horizontal. Curva funicular: polígono parabólico. Altura do arco: 1/3 do vão.



Arcos em contraforte suportando estrutura de telhado horizontal. Curva funicular: polígono parabólico. Altura do arco: 1/5 do vão.



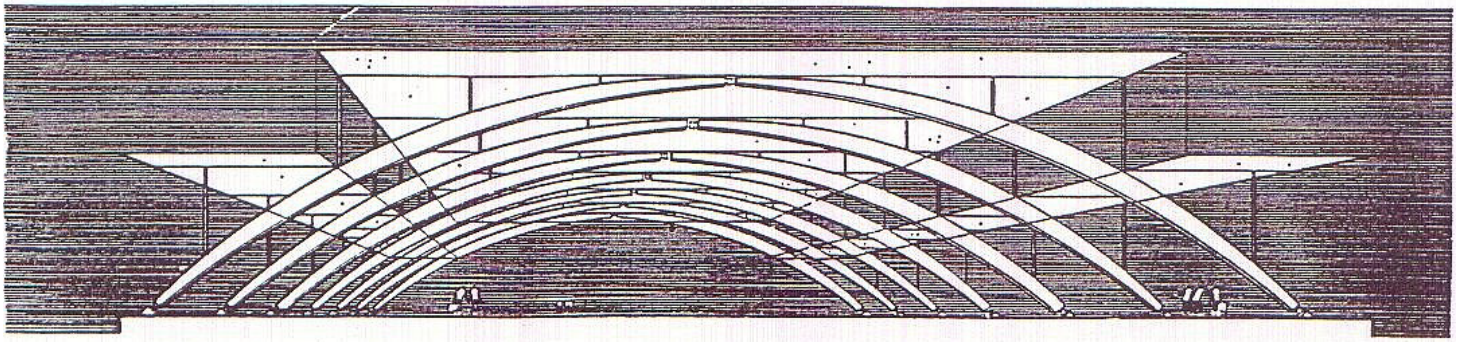
Arcos em contraforte com estrutura de telhado curvo. Curva funicular: catenária. Altura do arco: 1/7 do vão.



Arcos de fundação segmentados com estrutura de telhado de forma irregular.

Curva funicular: polígono irregular.

Altura do arco: 1/3 do vão.



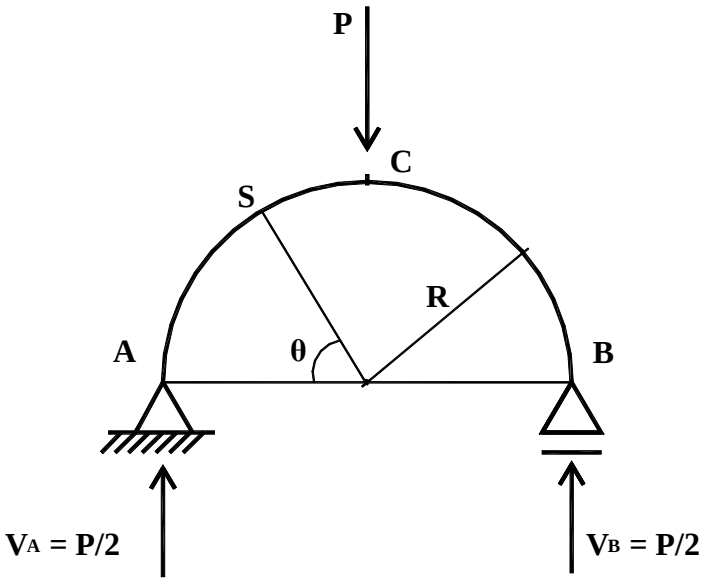
Arcos de fundação suportando estrutura de telahdo horizontal.

Curva funicular: polígono parabólico.

Altura do arco: 1/5 do vão.

2.5.1. Arcos biapoiados

a) Cargas Verticais

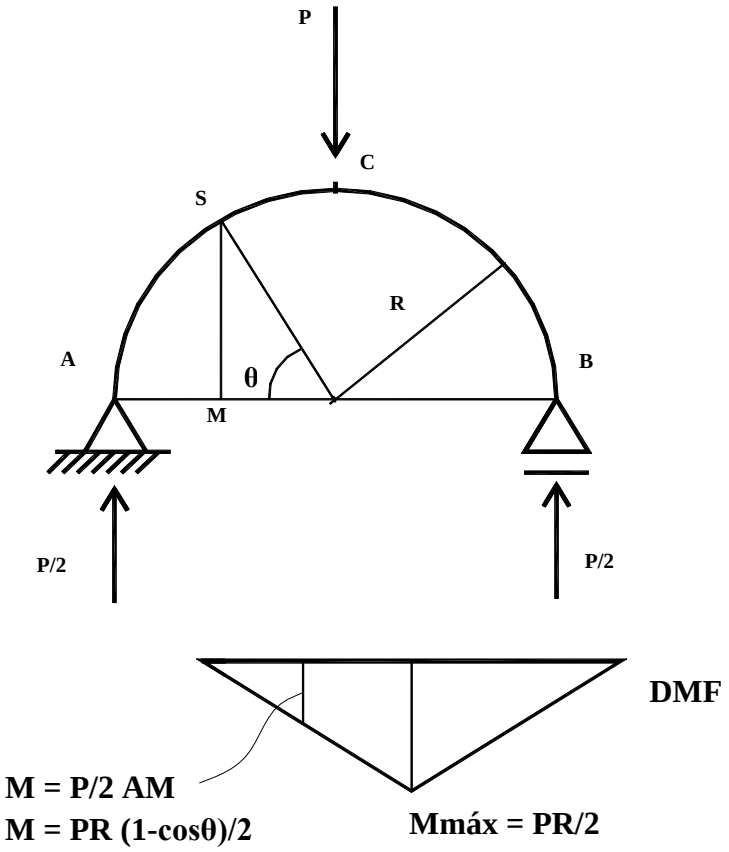


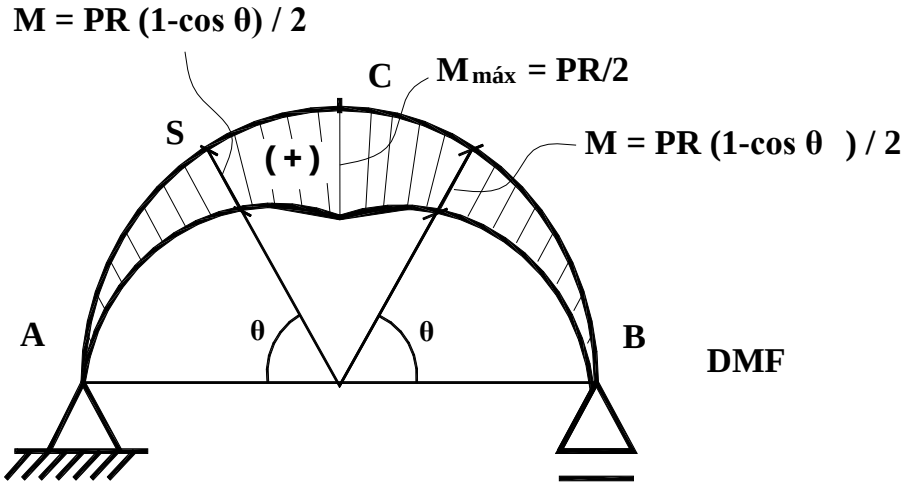
$Q_S = V_A \operatorname{sen}\theta = P \operatorname{sen}\theta / 2$

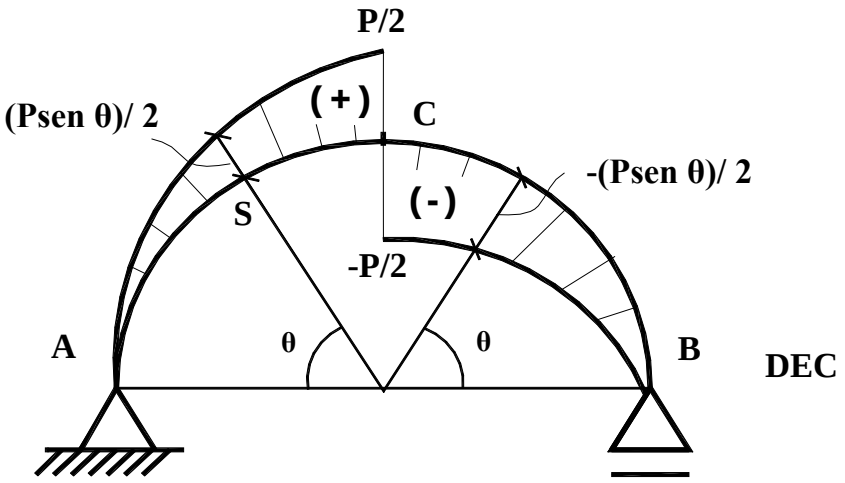
$N_S = -V_A \cos\theta = - P \cos\theta / 2$

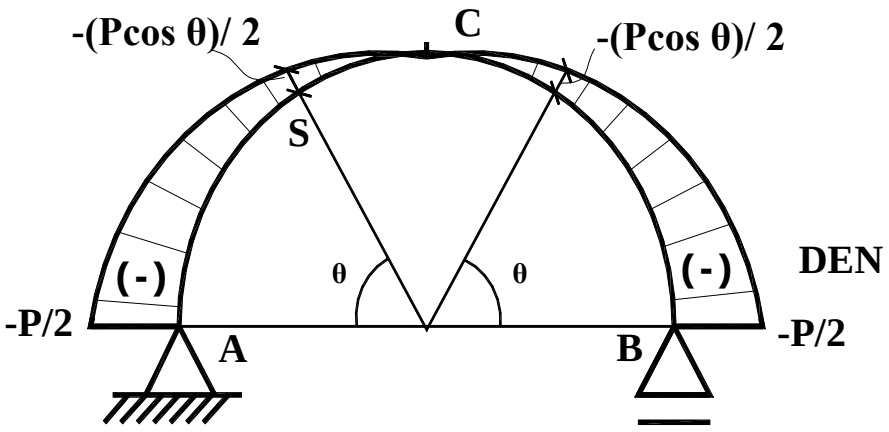
$M_S = V_A (R - R \cos\theta) = PR (1 - \cos\theta) / 2$

Viga de Substituição:

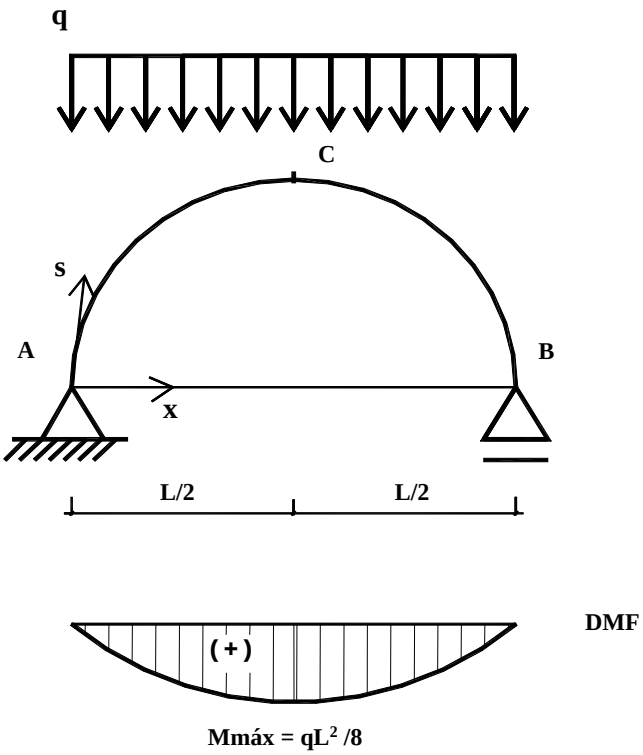






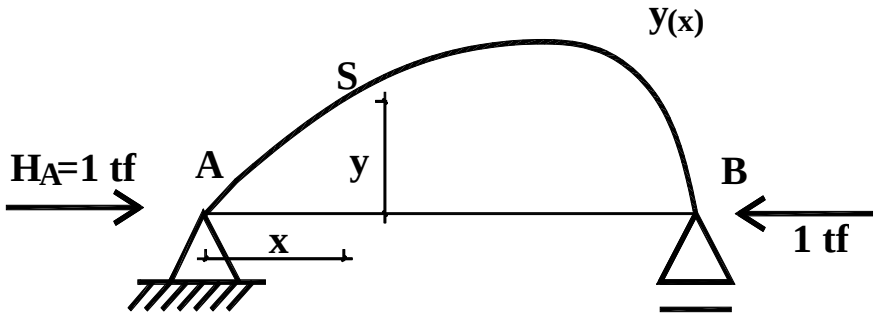


Para carregamento uniformemente distribuído, usando a linha de fechamento para traçado dos diagramas:

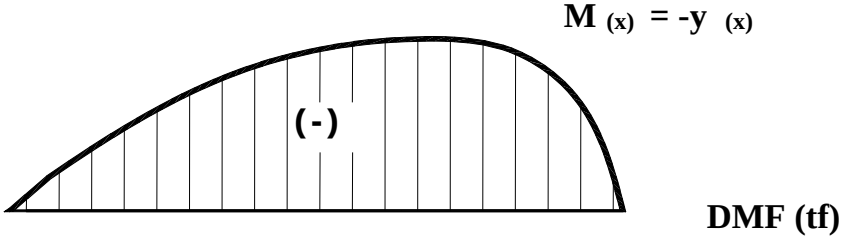


Eixo x é utilizado em vez do eixo s da barra curva.

b) Cargas Horizontais (passam pela linha AB)

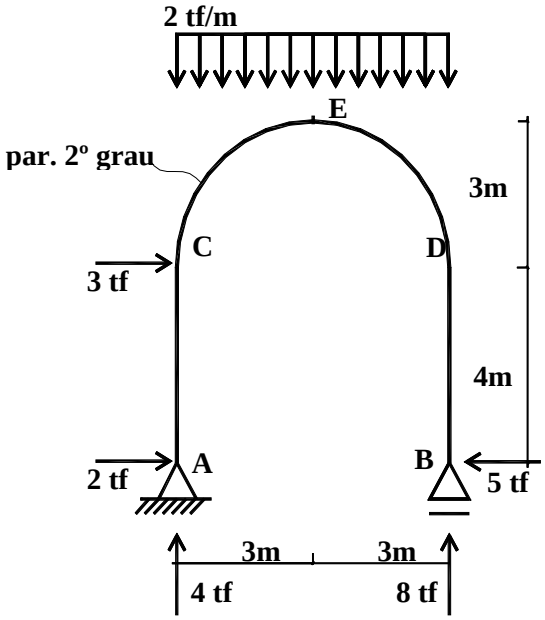


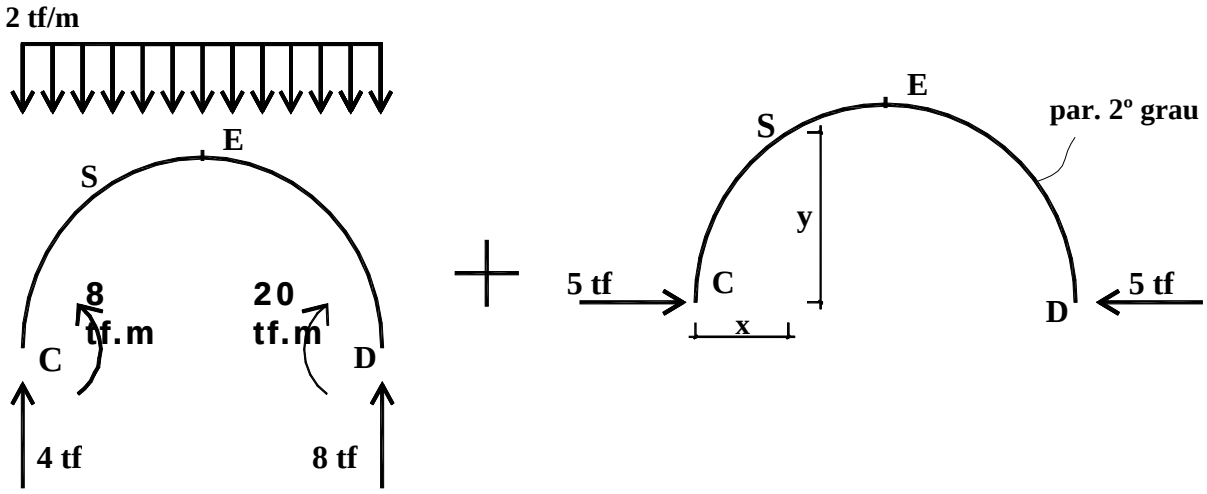
Na seção S o momento fletor é: M = -1tf x y. Logo, em função de x, M(x) = -1 x y (x) e o diagrama traçado em relação a AB, fica:

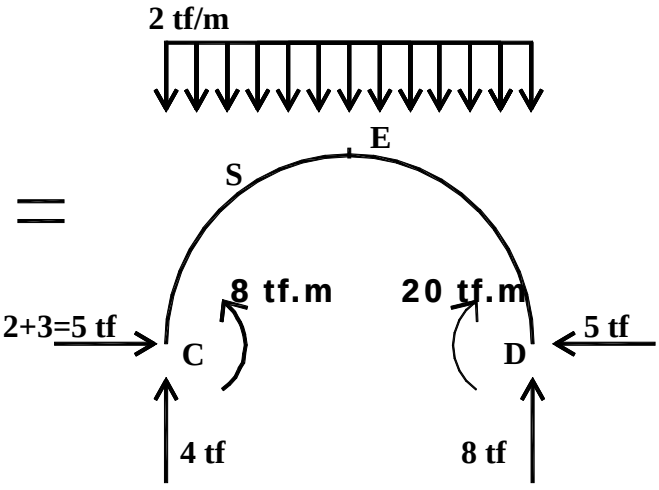


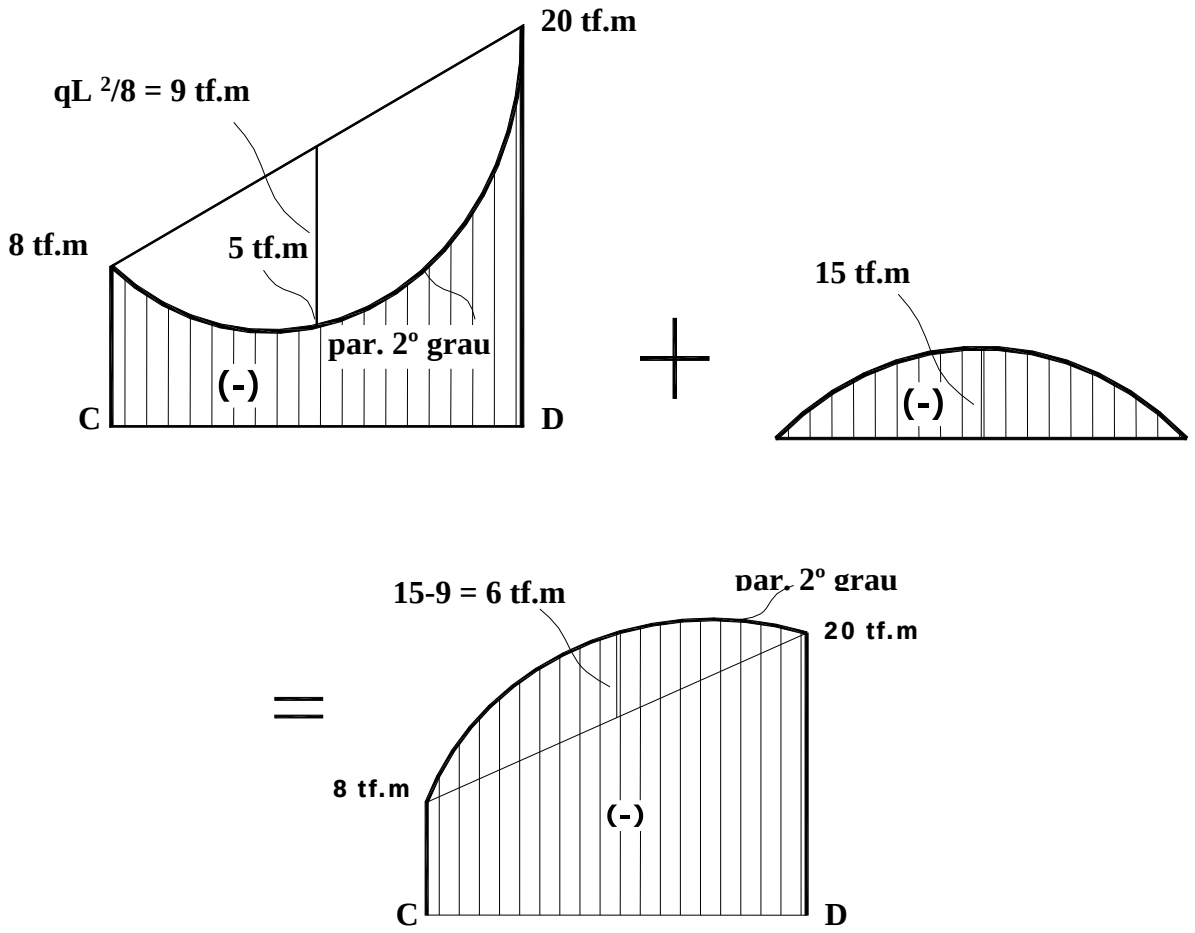
onde y(x) é uma função contínua qualquer.

2.5.2. Pórticos com arcos (ou barras curvas)

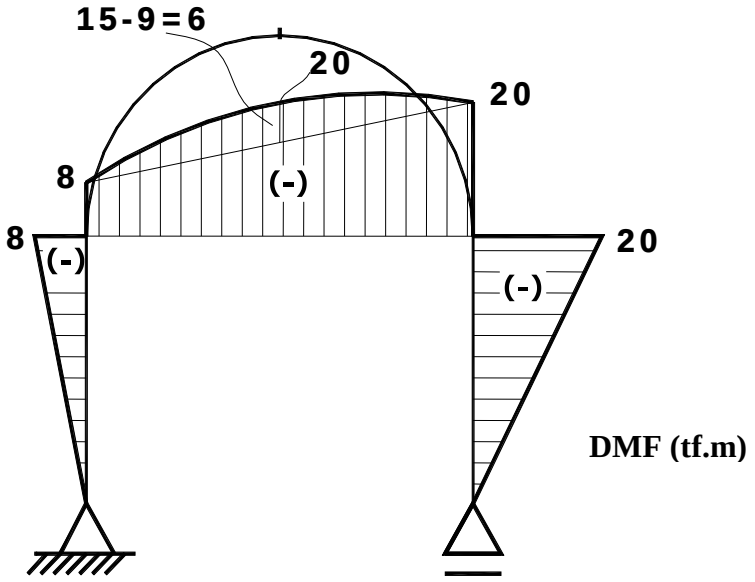






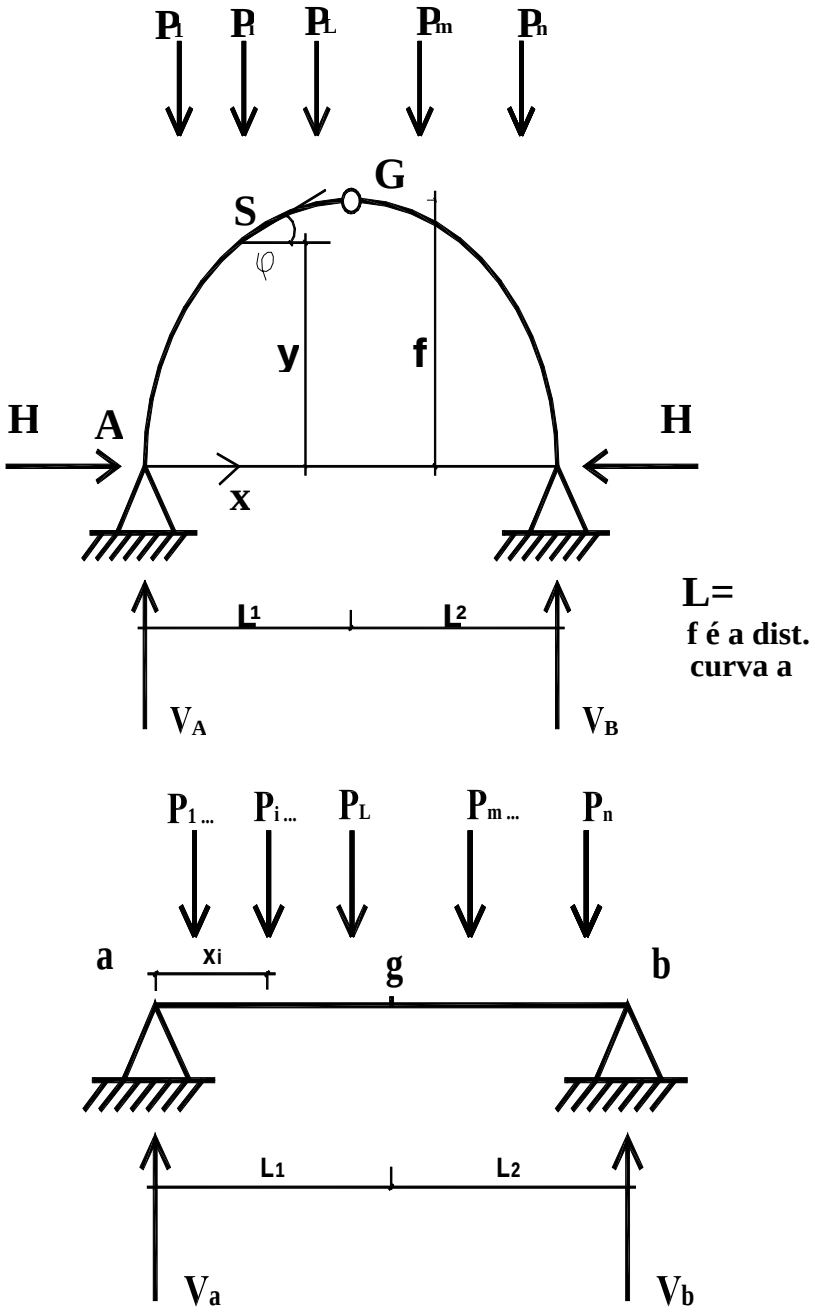


O diagrama resultante fica:



2.5.3. Arcos Triarticulados

a) Cargas Verticais com Linha de Fechamento Horizontal



Cálculo das reações:

I. $\Sigma F_x = 0$

$H_A = H_B = H$; -- **1** --

II. $\Sigma M_A = 0$

$L.V_B = \sum P_i x_i$

$V_B = \sum P_i x_i / l$ -- **2** --

Percebe-se que $V_B = V^*_b$;

III. $\Sigma F_y = 0$

$V_B + V_A = \sum P_i$

$V_A = \sum P_i - V_B$ **-- 3 --**

Também observa-se que $V_A = V^*_a$;

IV. $\Sigma M_G^{esq} = 0$ (Momento Fletor na Rótula é *nulo*)

$V_A L_1 - H.f - P_1(L_1 - x_1) - P_2(L_1 - x_2)... = 0$ ou

$V_A L_1 - H.f - \sum_{i=1}^{L} P_i(L_1 - x_i) = 0$ **-- 4 --**

Da viga de substituição, temos que:

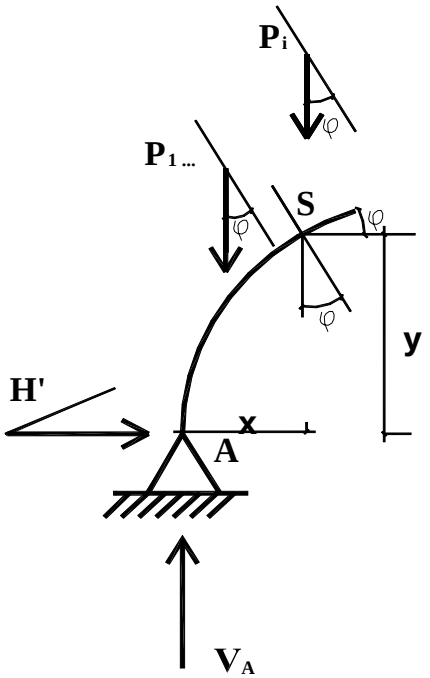
$M^*_g = V^*_a L_1 - \sum_{i=1}^{L} P_i(L_1 - x_i)$ **-- 5 --**

Como $V^*_a = V_A$ → Substituindo 5 em 4, vem:

$M^*_g - H.f = 0$

$H = M^*_g / f$ **-- 6 --**

Esforços em uma seção S (distante x de A)



$V_S = (V_A - \sum_{i=1}^{i} P_i)\cos\varphi - H.\text{sen}\varphi$

$N_S = (-V_A + \sum_{i=1}^{i} P_i)\text{sen}\varphi - H.\cos\varphi$

$M_S = V_A x - \sum_{i=1}^{i} P_i(x - x_i) - H.y$

Pela viga de substituição, tem-se:

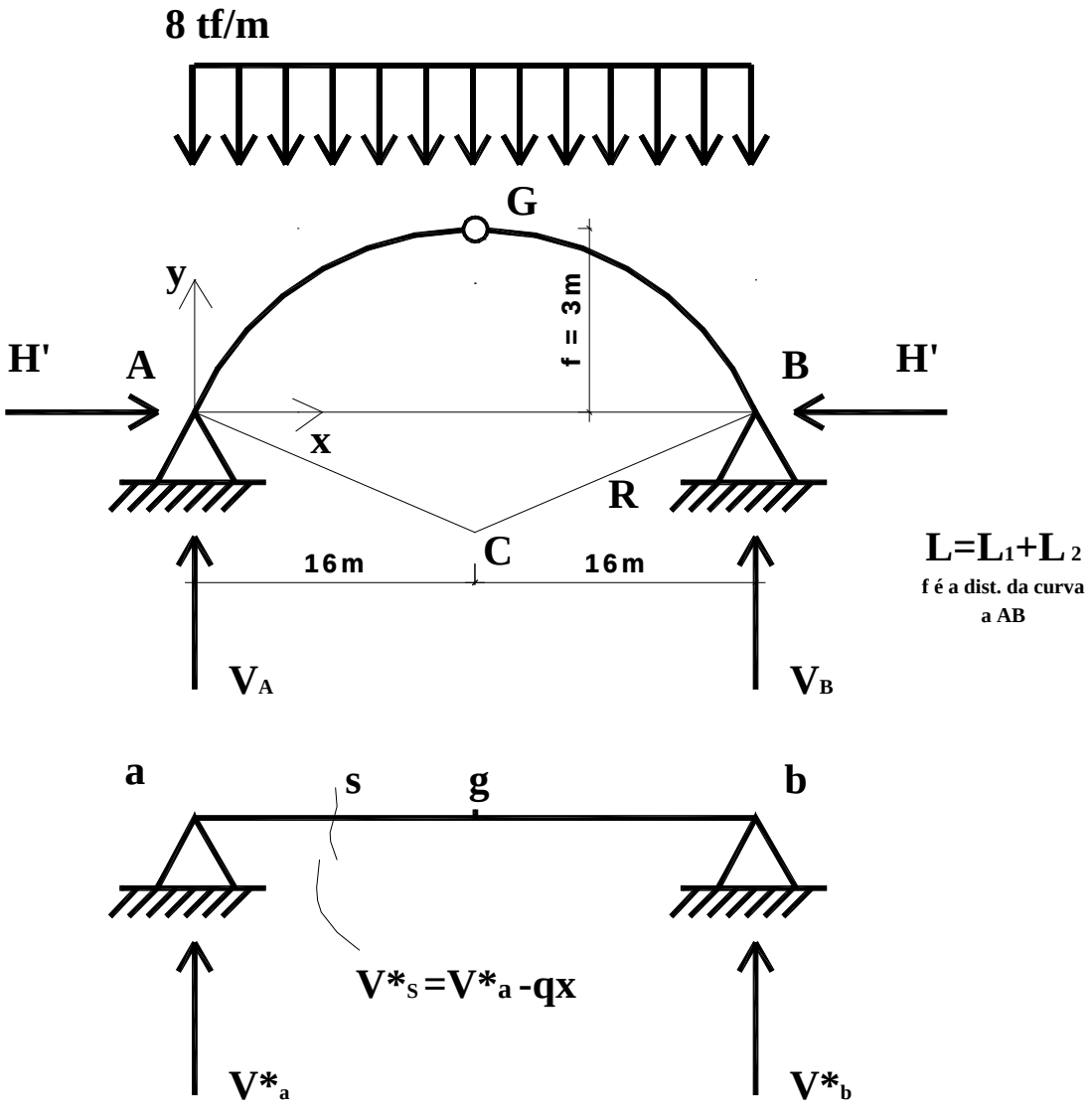
$V_S = V^*_s \cos\varphi - H.\text{sen}\varphi$ **-- 7 --**

$$N_S = -V_s^* \operatorname{sen}\varphi - H.\cos\varphi \quad \text{-- } \mathbf{8} \text{ --}$$

$$M_S = M_s^* - H.y \quad \text{-- } \mathbf{9} \text{ --}$$

onde φ encontra-se a partir de y(x): tg φ = dy/dx; sendo dada a curva y(x) que define o arco.

Exemplo: Encontrar Esforços Internos no Arco Circular para pontos de coordenadas x = 0, 4, 8, 12 e 16 m.



$(R-3)^2 + 16^2 = R^2$

$R^2 - 6R + 9 + 256 = R^2$

$6R = 256 + 9$

$R = 44{,}17m$

Centro do Círculo:

a = 16m

b = - (R-3)

Equação do Arco:

$(x-16)^2 + [y + (R-3)]^2 = R^2$

derivando em relação a x:

$2(x-16) + 2 [y + (R-3)] \, dy/dx = 0$

teremos que:

$tg \varphi = dy/dx = (16 - x) / (y + R - 3)$ $\quad R = 44,17$ m

Da viga de substituição obtemos:

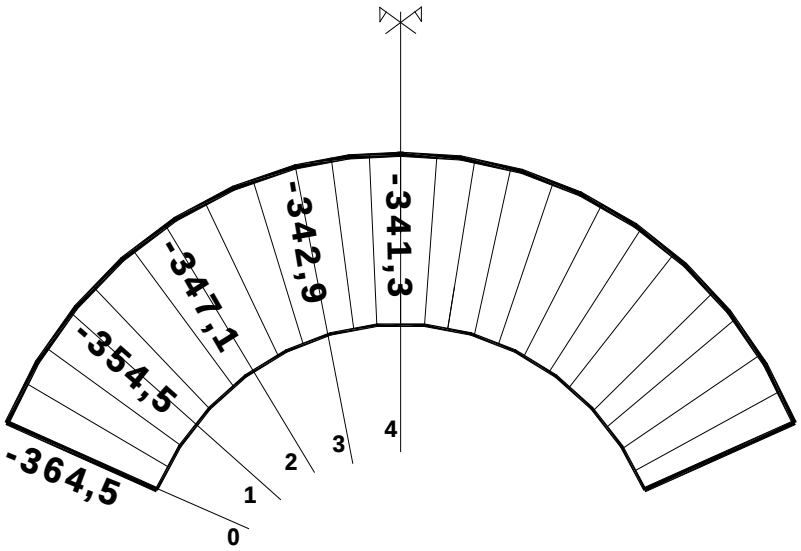
$$V_A = \frac{ql}{2} = \frac{8x32}{2} = 128kN$$

$$M_g^* = \frac{ql^2}{8} = \frac{8x32^2}{8} = 1024kN.m$$

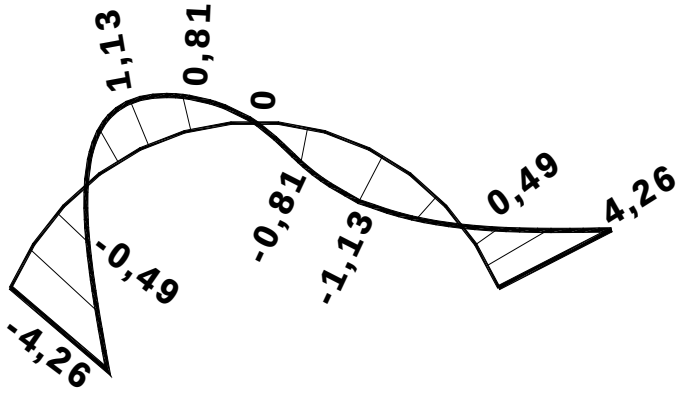
$H = M^*_g / f = 1024 / 3 = 341,33$ kN

Pontos	x	y	tg φ	φ	sen φ	cos φ	N_S	V_S	M_S
0	0	0	0,388	21,24º	0,362	0,932	- 364,5	- 4,3	0
1	4	1,34	0,283	15,96º	0,272	0,962	- 354,5	- 0,5	- 9,4
2	8	2,27	0,184	10,43º	0,181	0,983	- 347,1	1,1	- 6,8
3	12	2,82	0,091	5,20º	0,091	0,996	- 342,9	0,8	- 2,6
4	16	3,00	0	0º	0	1,0	- 341,3	0	0

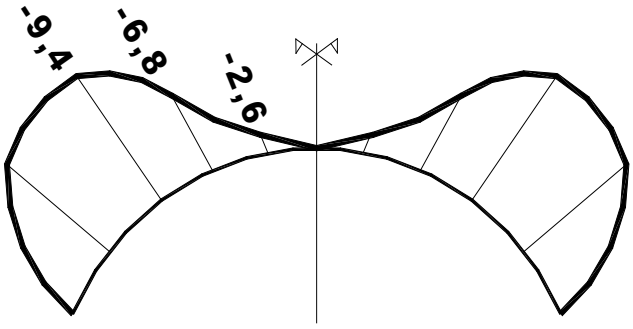
$$M_S^* = V_A x - \frac{qx^2}{2}$$



DEN (kN)



DEC (kN)



DMF (kN.m)

Linha de Pressões

Observa-se da equação 9 ($M_S = M_s^* - H.y$) que:

se $M_S = 0 \rightarrow M^*_S = H.y \rightarrow y = M^*_S / H$ -- **10** --

ou então, se $y = M^*_S / H$, então $M_S = 0$.

Derivando a equação 10 em relação a x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dM_s^*}{dx}\frac{1}{H} = \frac{V_s^*}{H} = tg\varphi \text{ -- } \mathbf{11} \text{ --}$$

$V^*_s = tg\ \varphi\ .\ H$

Substituindo 11 em 7:

$V_S = tg\varphi.H.\cos\varphi - H.sen\varphi = 0$; ou seja, tanto o momento fletor quanto o esforço cortante são nulos em qualquer seção S. O arco está submetido apenas a esforço normal. Diz-se então que a forma do arco, $y = M^*s / H$, é a linha de pressões para o carregamento dado.

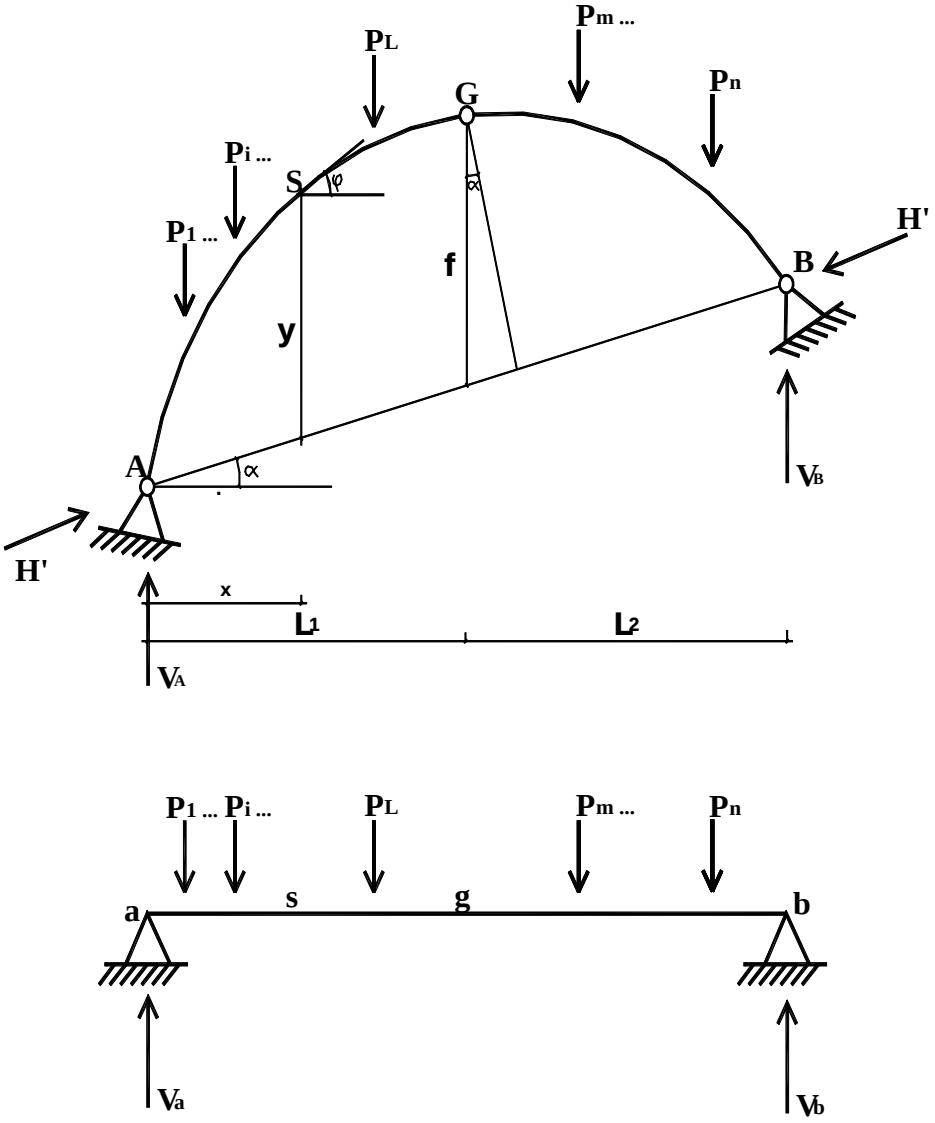
Considerações:

- Quando o arco tem a concavidade voltada para baixo, e quando as cargas são para baixo, os esforços normais são sempre de compressão (N<0);
- Se a concavidade for para cima e a carga para baixo, os esforços normais são de tração(N>0);
- Para cargas uniformemente distribuídas a linha de pressões é uma parábola do 2º grau;
- Linha de pressões é a forma mais econômica do arco.

b) Cargas Verticais com Linha de Fechamento Inclinada

A resultante das reações R_A e R_B dos apoios do 2º gênero são decompostas em 2 direções:

- Vertical
- Paralela a AB (conforme mostra a figura a seguir)



$\propto$ → ângulo que AB faz com o eixo dos x.

Analogamente ao que foi visto para linha de fechamento horizontal, será utilizado o artifício da viga de substituição para o cálculo das reações verticais e esforços em uma seção genérica S.

Cálculo das reações:

I. $\Sigma F_x = 0$ $\quad H_A = H_B = H'$; -- **1** --

II. $\Sigma M_A = 0$

$L.V_B = \sum P_i x_i$

$V_B = \sum P_i x_i / L$ -- **2** –

III. $\Sigma F_y = 0$

$V_B + V_A = \sum P_i$

$V_A = \sum P_i - V_B$ -- **3** --

Observa-se que as equações obtidas são idênticas às obtidas no item a.

IV. $\Sigma M_G^{Esq} = \Sigma M_G^{Dir} = 0$ (Momento Fletor na Rótula é *nulo*), pela esquerda:

$$V_A L_1 - H' f \cos\alpha - \sum_{i=1}^{L} P_i (L_1 - x_i) = 0 \quad \text{-- 4 --}$$

Da viga de substituição, temos que:

$$M_g^* = V_a^* L_1 - \sum_{i=1}^{L} P_i (L_1 - x_i) \quad \text{-- 5 --}$$

logo:

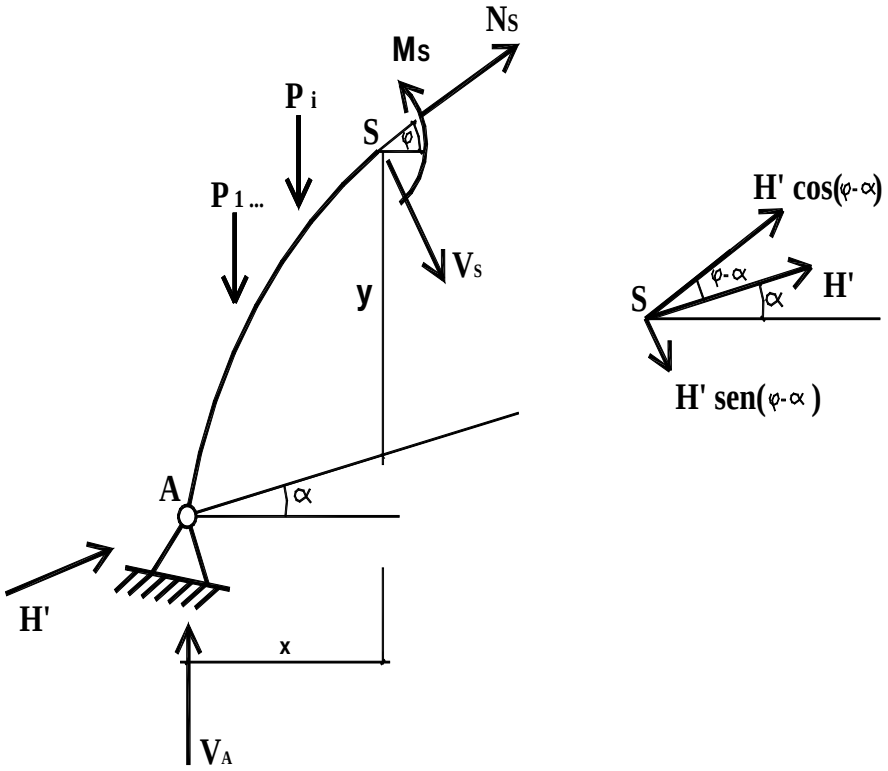
$M^*_g - H'.f \cos \propto = 0$

para $\propto = 0 \rightarrow \cos \propto = 1$, teremos:

$M^*_g - H'.f = 0$ -- **6** --

que também equivale a equação encontrada no item a.

Esforços em uma seção S (y → medido a partir da linha de fechamento AB)



$$V_S = (V_A - \sum_{i=1}^{n} P_i)\cos\varphi - H'\,sen(\varphi - \alpha)$$

$$N_S = (-V_A + \sum_{i=1}^{n} P_i)\,sen\,\varphi - H'\cos(\varphi - \alpha)$$

$$M_S = V_A x - \sum_{i=1}^{n} P_i (x - x_i) - H'\,y\cos\alpha$$

Pela viga de substituição, tem-se:

$$V_S = V_s^* \cos\varphi - H'\,sen(\varphi - \alpha) \quad \text{-- } \mathbf{7} \text{ --}$$

$$N_S = -V_s^* sen\varphi - H'\cos(\varphi - \alpha) \quad \text{-- } \mathbf{8} \text{ --}$$

$$M_S = M_s^* - H'.y.\cos\alpha \quad \text{-- } \mathbf{9} \text{ --}$$

Linha de Pressões:

Igualando a equação 9 a zero vem:

$$y = M^*_S / H' \cos \propto \text{ -- } \mathbf{10} \text{ --}$$

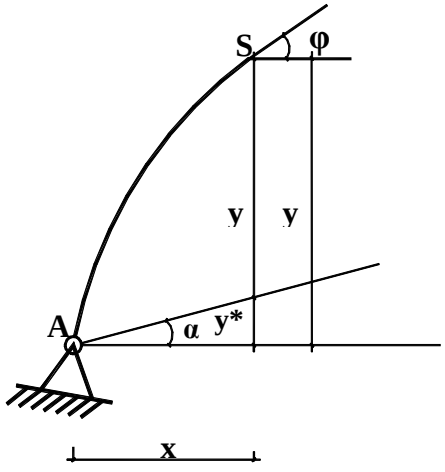
Forma do arco que coincide com a linha de pressões do carregamento, para a qual o arco está submetido apenas a esforço normal.

Vamos mostrar que V_S será sempre nulo também. Derivando a equação 10 em relação à x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_s^*}{H'\cos\alpha}$$

$$V_s^* = \frac{dy}{dx} H'\cos\alpha$$

Levando em conta que $y = Y - y^*$:



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} - \frac{dy^*}{dx} = tg\varphi - tg\alpha$$

Logo, substituindo em 7:

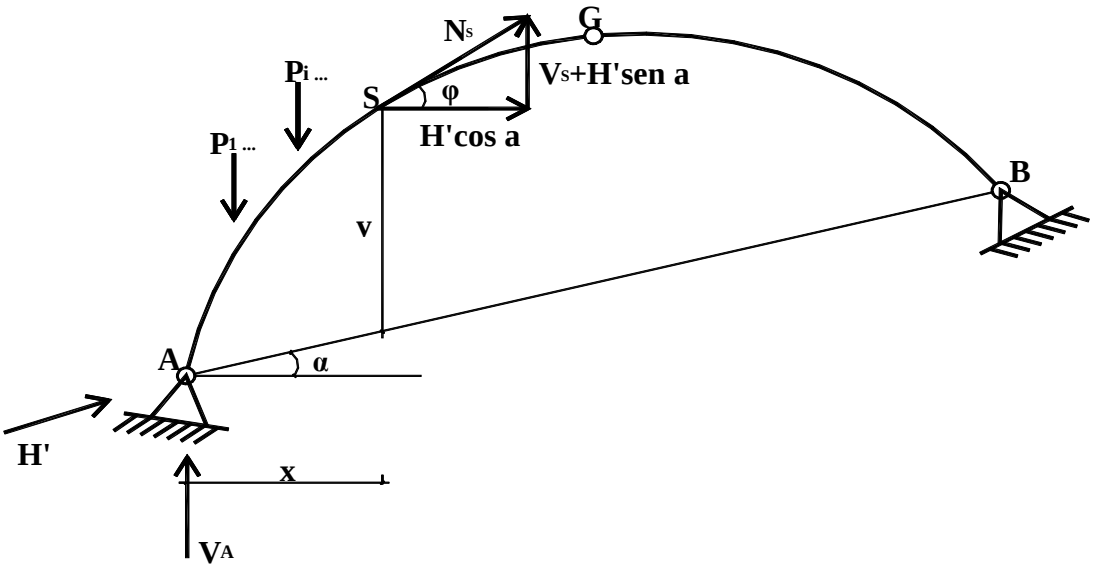
$$V_S = H'\cos\alpha(tg\varphi - tg\alpha)\cos\varphi - H'sen(\varphi - \alpha)$$

$$V_S = H'\cos\alpha\,sen\,\varphi - H'sen\,\alpha\cos\varphi - H'sen(\varphi - \alpha) = 0$$

Portanto, se $M_S = 0$ então $V_S = 0$ também.

O único esforço atuante no arco nesta situação é o esforço normal, N_S, que pode ser obtido por:

$$N_S = \sqrt{(V_s^* + H'\text{sen}\alpha)^2 + (H'\cos\alpha)^2}$$



Que é o resultado da projeção de H' nas direções horizontal e vertical, seguida do cálculo da resultante vetorial, em módulo, da composição das forças horizontais e verticais à esquerda da seção S, na direção normal à seção (N_S será de compressão para arcos com concavidade e cargas para baixo).

Pode-se também obter, da figura anterior, a inclinação da tangente ao arco na seção S:

$$\text{tg}\varphi = \frac{V_s^* + H'\text{sen}\alpha}{H'\cos\alpha}$$

Resumindo, para a linha de pressões:

$y = M^*_S / H' \cos \propto$

onde $H' = M^*_g / f \cos\propto$

$$\text{tg}\varphi = \frac{V_s^* + H'\text{sen}\alpha}{H'\cos\alpha}$$

$$N_S = \sqrt{(V_s^* + H'\text{sen}\alpha)^2 + (H'\cos\alpha)^2}$$

e, quando a linha de fechamento é horizontal, $\propto = 0$:

$y = M^*_S / H$

onde $H = M^*_g / f$

$$\text{tg}\varphi = \frac{V_s^*}{H}$$

$$N_S = \sqrt{V_s^{*2} + H^2}$$

2.6. Grelhas

Grelha é uma estrutura reticulada plana submetida a carregamentos perpendiculares ao seu plano. Na construção civil, este tipo de sistema estrutural é composto por um sistema de vigas, perpendiculares ou não entre si, que se interceptam, estando interligadas nos pontos de interseção (SET 403, 1998).

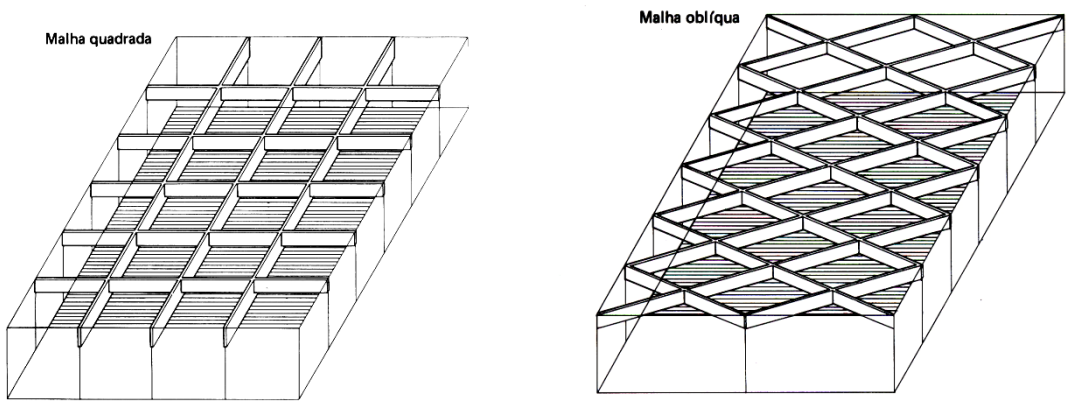


Ilustração 2.6-1 Grelha com malha quadrada e oblíqua (Engel, 1981)

A vantagem deste sistema de vigas interligadas está no funcionamento conjunto de todos elementos resistentes para qualquer posição de carregamento.

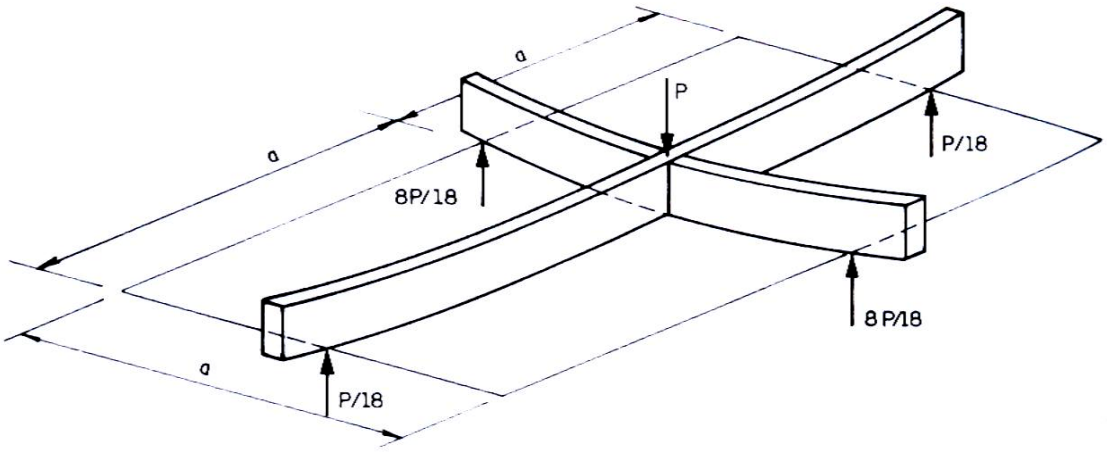


Ilustração 2.6-2 Reações e deslocamentos em grelha retangular (SET 403, 1998)

No sistema da ilustração 2.6-2, observa-se que uma parcela maior da carga concentrada "P" é transmitida dos apoios pela viga de menor vão, enquanto uma parcela menor é transmitida na direção do maior vão. A viga mais rígida, a mais curta, será mais solicitada em comparação com a viga mais flexível, a mais longa.

A interligação rígida nos pontos de interseção entre as vigas, introduz um giro na seção transversal, conforme pode ser observado da ilustração seguinte. Quando uma das vigas sofre flexão, a viga interligada sofre um efeito de torção. Logo, as barras de uma grelha estão submetidas a esforços cortantes (V), momentos fletores (M) e momentos torsores (T).

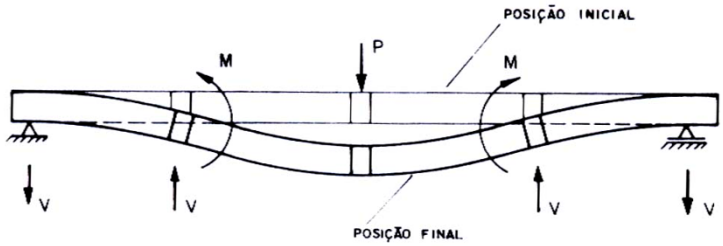
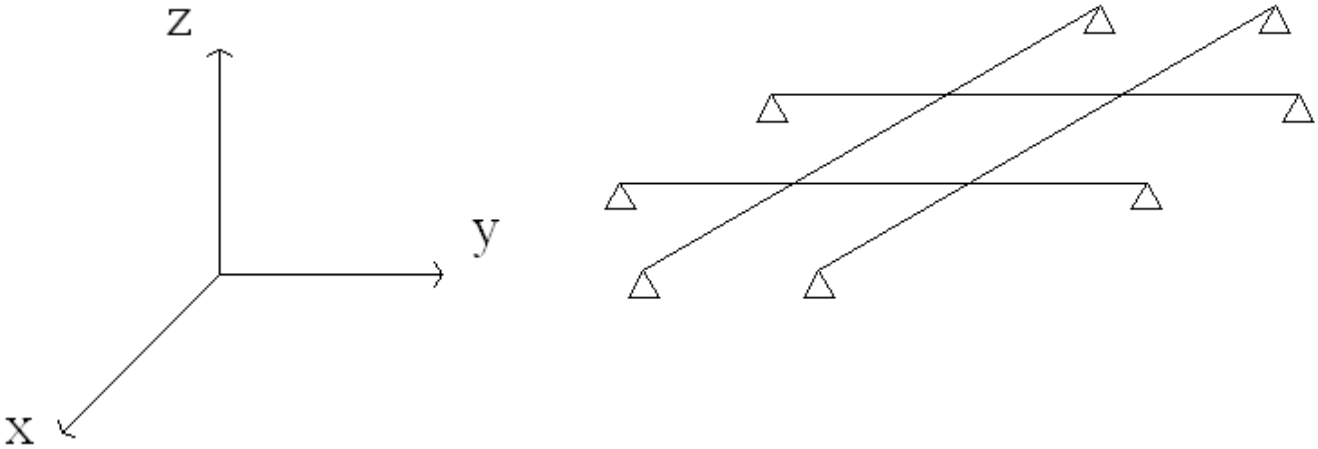
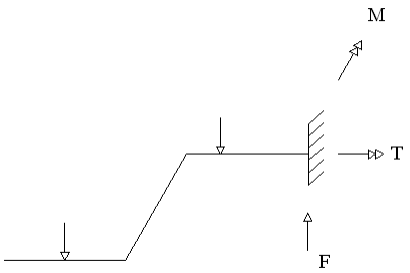


Ilustração 2.6-3 Inversão de curvatura nas barras de uma grelha (SET 403, 1998)

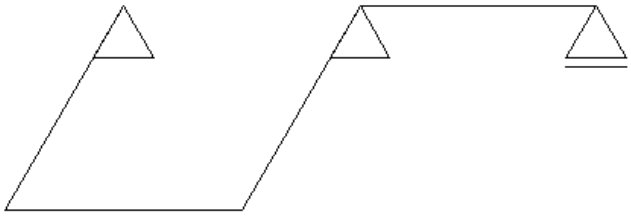
Se a grelha está situada no plano xy e o carregamento possui a direção z, as equações de equilíbrio da estática são: $\sum Fz = 0$, $\sum Mx = 0$, $\sum My = 0$



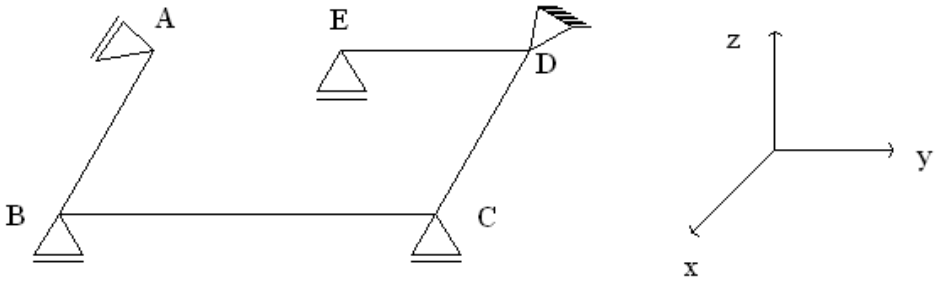
Uma grelha será isostática quando estiver restrigida e houver apenas 3 incógnitas a determinar.



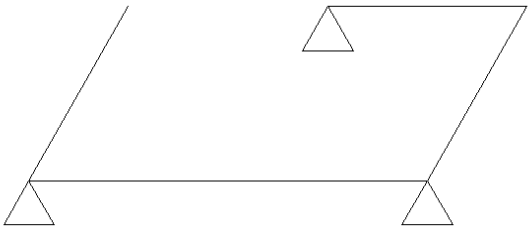
Caso a grelha seja triapoiada, os três apoios não devem estar situados sobre uma mesma reta. Se isso ocorrer, a grelha não está restringida e é hipostática.



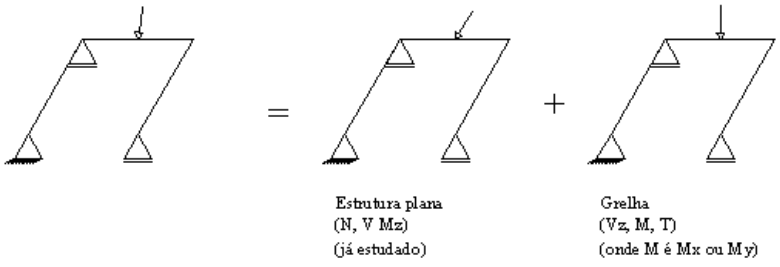
A grelha deve possuir também apoios no próprio plano (xOy) que garantam a estabilidade para eventuais carregamentos na direção x ou y. Na figura a seguir, todos os vínculos estão representados.



Os apoios de 1° gênero, B, C e E, restringem deslocamentos na direção z e os apoios A e D restringem deslocamentos nas direções y e x, respectivamente. Como as grelhas são usualmente estudadas para cargas perpendiculares ao plano da estrutura, não se costuma representar os apoios no plano xOy.



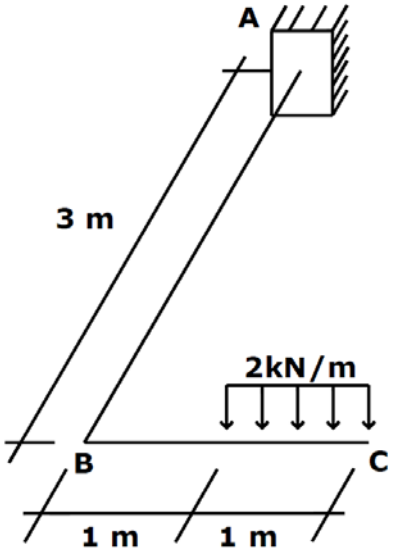
No caso geral de uma estrutura submetida a um carregamento com componentes perpendiculares e paralelos ao seu plano (carga oblíqua), a análise será feita em separado para a decomposição do carregamento segundo o plano e perpendicular ao plano da estrutura.



Os esforços atuantes na estrutura resultam da superposição dos esforços internos resultantes da análise da estrutura plana e da grelha, devendo a estrutura ser projetada para resistir a todas as solicitações atuantes.

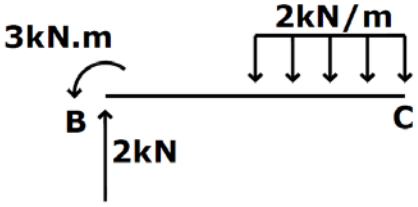
Exemplo:

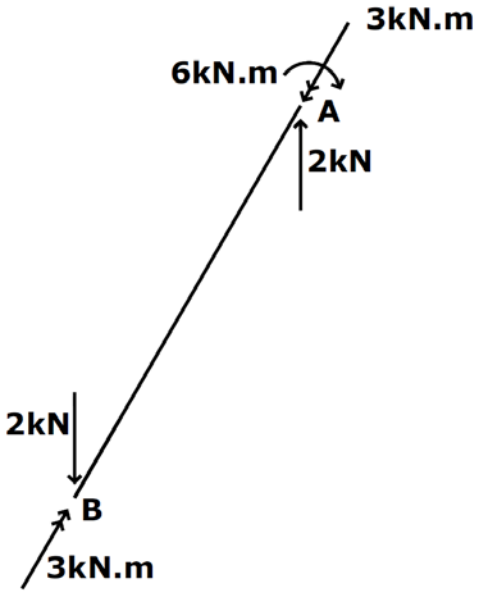
1. Obter os diagramas solicitantes para a grelha da figura.



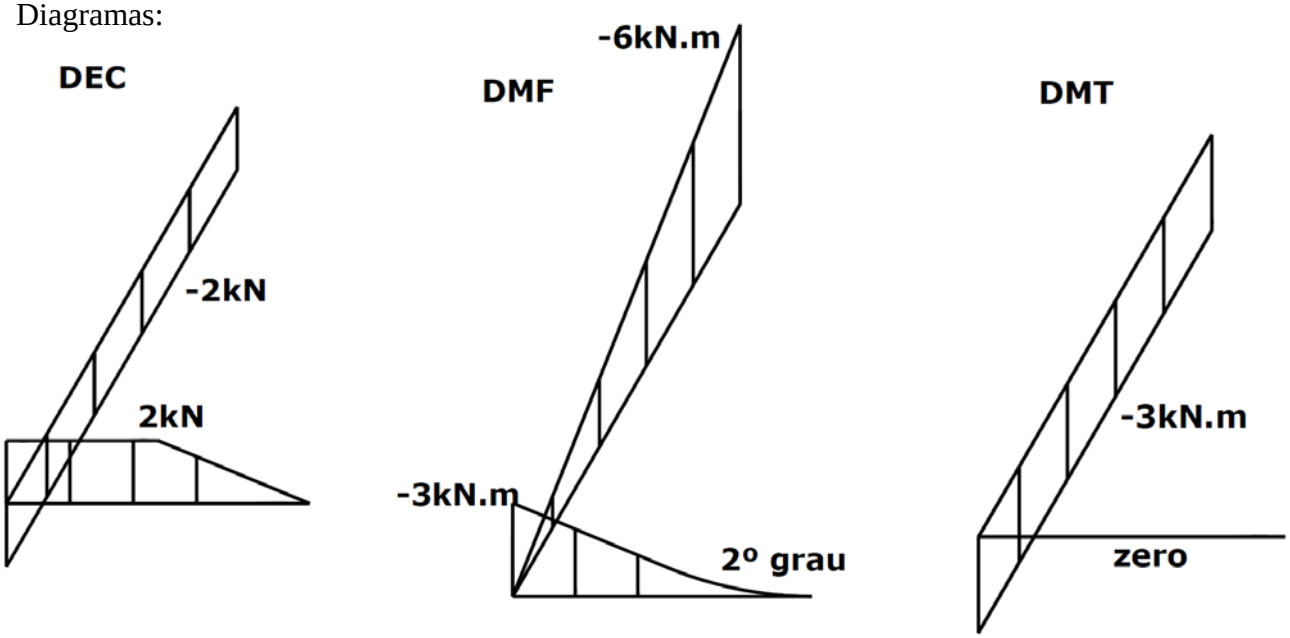
Como a estrutura está engastada não será necessário começar a resolução calculando as reações de apoio.

O cálculo deve começar pela haste BC, encontrando-se as reações no ponto B. Depois, transferem-se as reações encontradas para o mesmo ponto B da haste AB. O momento fletor será transferido como um momento torçor. E finalmente, calculam-se as reações em A.

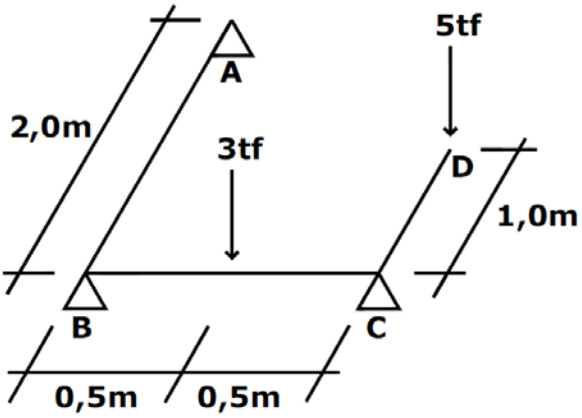


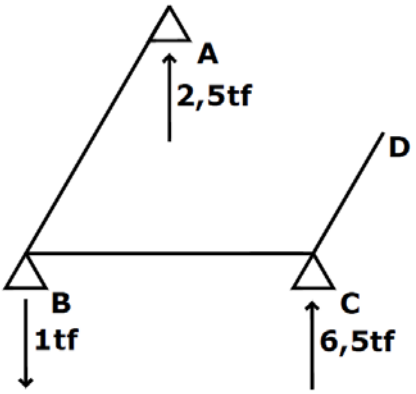


Diagramas:



2. Obter os diagramas solicitantes para a grelha da figura.





Como a grelha é tri-apoiada, deve-se começar a resolução calculando as reações de apoio.

$\Sigma F_X = 0$

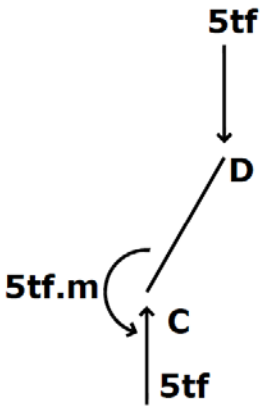
$\Sigma F_Y = 0$ $\quad R_A + R_B + R_C - 3 - 5 = 0$

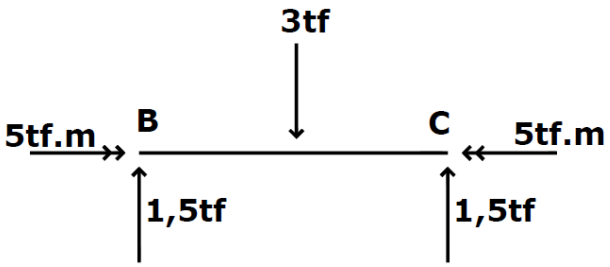
$\Sigma M_{AB} = 0$ $\quad 1 \times R_C - 1 \times 5 - 0{,}5 \times 3 = 0$ $\quad R_C = 6{,}5$ tf

$\Sigma M_{BC} = 0$ $\quad 2 \times R_A - 1 \times 5 = 0$ $\quad R_A = 2{,}5$ tf

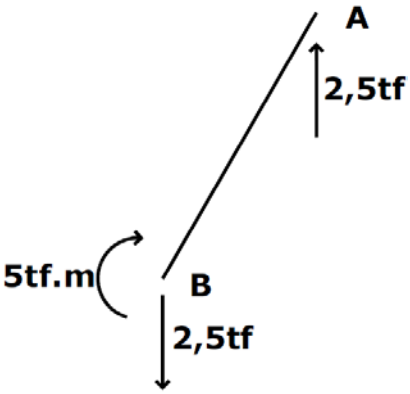
$\quad 2{,}5 + R_B + 6{,}5 = 8$ $\quad R_B = -1{,}0$ tf

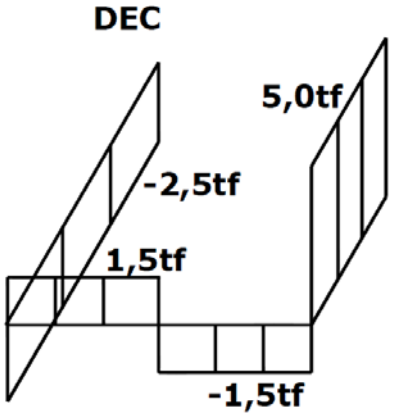
O cálculo será feito por haste. Começa-se pela haste CD, calculando as reações resultantes em C, causada pela carga de 5 tf aplicada em D. Transferem-se as reações em C para a barra BC somando R_C anteriormente calculado, lembrando que a força de 5tf , calculada como reação em C, deve-se inverter o sinal antes de somar com a R_C. O momento fletor é transferido como um momento torçor. Calculam-se as reações em B.

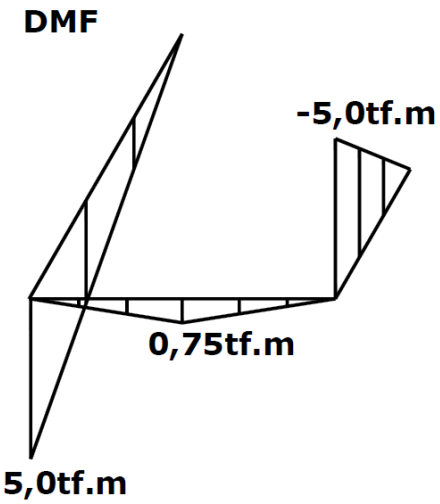


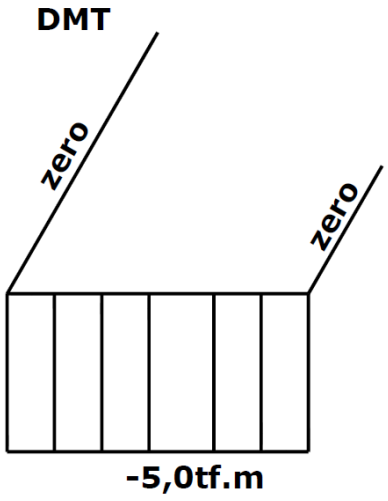


Transfere-se as reações em B para a barra AB somando R_B. Calcula-se as reações em A sem somar com R_A.

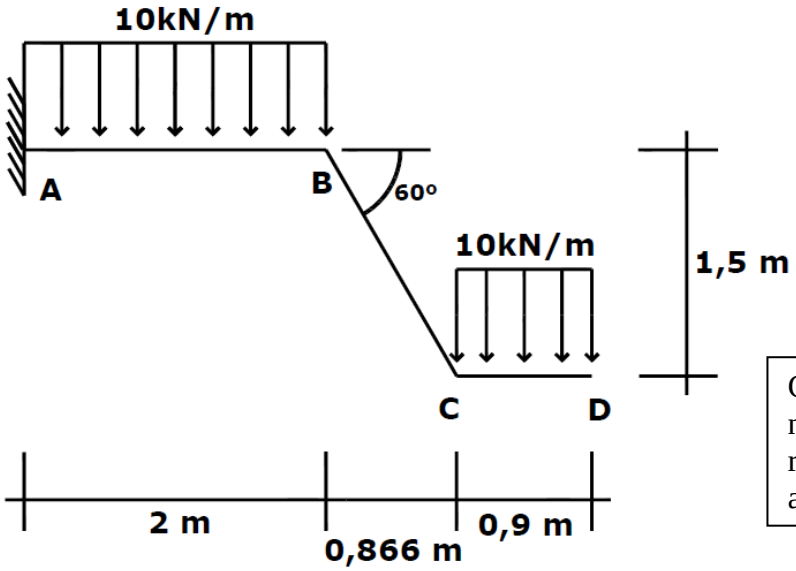






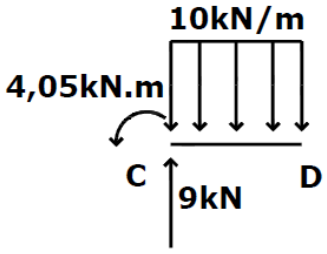


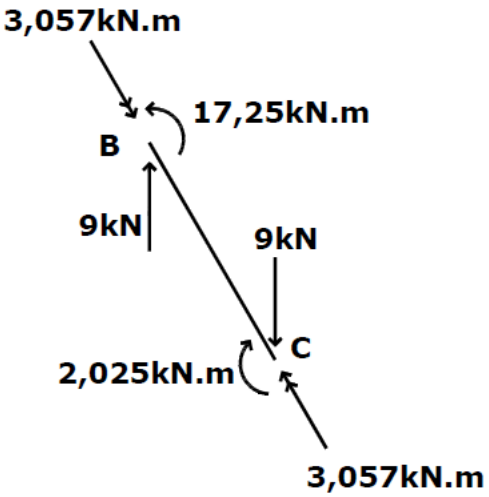
3. Obter os diagramas solicitantes para a grelha da figura.
OBS: Os ângulos entre as hastes não são 90º.



Como a estrutura está engastada não será necessário começar a resolução calculando as reações de apoio.

O cálculo deve começar pela haste CD, encontrando-se as reações no ponto C. Depois, transferem-se as reações encontradas para o ponto C da haste BC. Como as hastes não estão perpendiculares, parte do momento fletor será transferido como momento fletor e a outra parte como momento torçor, de acordo com o ângulo entre as hastes. Após transferir os esforços, calculam-se as reações em B.





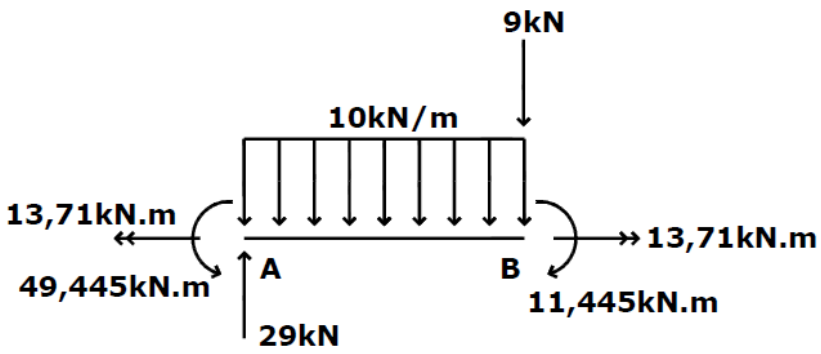
Momento Torçor em C

M_T = -4,05 x sen60° = -3,507 kN.m

Mometo Fletor em C

M_F = -4,05 x cos60° = -2,025 kN.m

O mesmo será feito para transferir os esforços em B para a barra AB. E finalmente calculam-se as reações em A.

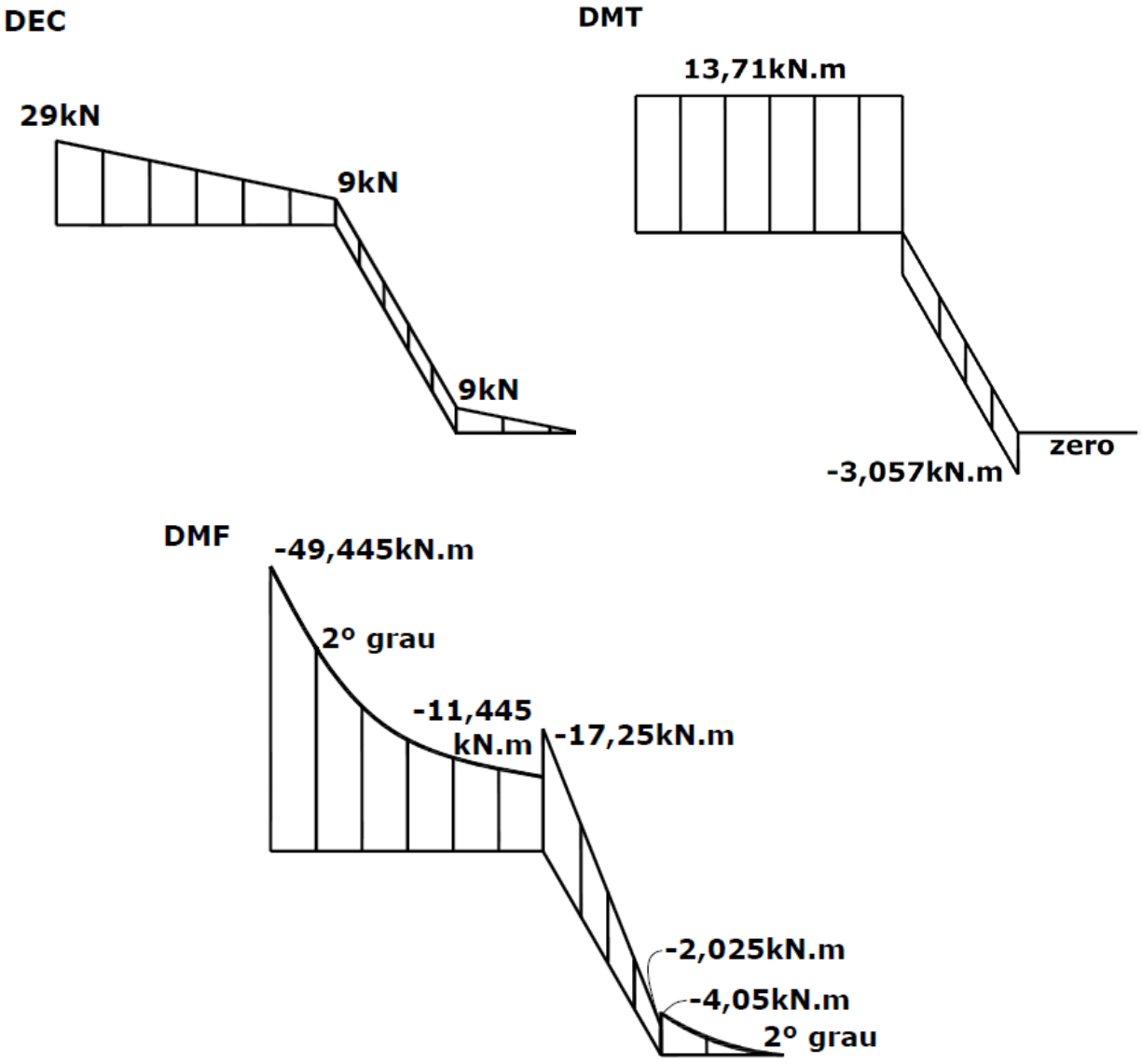


Momento Torçor em B

M_T = -3,057 x cos60° +17,595 x sen60º= 13,710kN.m

Momento Fletor em B

M_F = -3,057 x sen60° -17,595 x cos60° = -11,445 kN.m



Bibliografia (parte 2.6):

SET403 – *Sistemas estruturais – Elementos estruturais*, apostila - USP/ EESC/Departamento de Engenharia de Estruturas, São Carlos, 1998.

Engel, H. *Sistemas estruturais.* Trad. De Carlos Antônio Lauand. São Paulo, Ed. Hemus, 1981.

3. ESTUDO DE CARGAS MÓVEIS EM ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS

3.1. Cargas Móveis – Trem-Tipo.

Já vimos que as cargas que atuam sobre uma estrutura podem ser classificadas em:

1) Permanentes: atuam sempre sobre a estrutura.

Ex.: peso próprio, revestimentos, equipamentos,...

2) Acidentais: eventualmente atuam sobre a estrutura.

Ex.: vento, terremoto, neve, materiais, água, móveis,...

As cargas acidentais podem ainda ser classificadas em fixas e móveis:

a) Fixas: posição de valor determinado, conhecido.

b) Móveis: valor conhecido mas posição variável.

Ex.: veículos, trens, cargas em ponte rolante,...

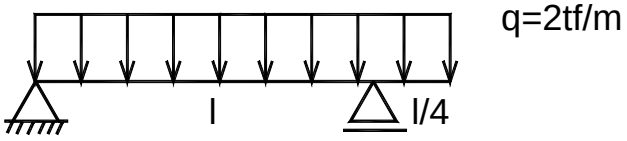
Seja por exemplo o projeto de um viaduto. Que cargas móveis colocaremos sobre ele?

Existem infinitas combinações de veículos possíveis, qual devemos escolher? Apesar da posição dos veículos não ser conhecida, o valor do peso de cada roda (eixo) e a distância entre os eixos é conhecida. Além de veículos, pessoas também podem atuar sobre o viaduto, o que é denominado de "carga de multidão".

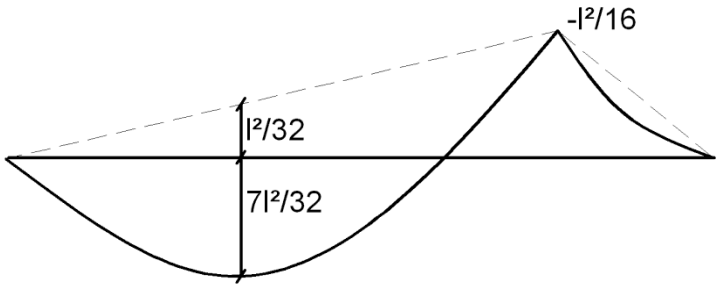
Baseadas nestes valores conhecidos, as normas da cálculo estabeleceram cargas móveis ideais (típicas de cada país) denominadas " Trem – Tipo", como mostram as figuras a seguir.

3.2. O Problema a Resolver

Seja, por exemplo, a viga abaixo, submetida a uma carga permanente uniformemente distribuída que:



O diagrama de momentos fletores para carga permanente é:

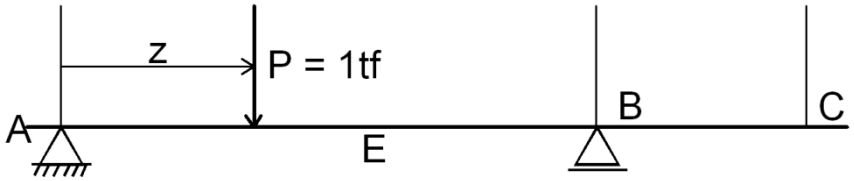


Para l = 4m

$(M^{-}_{máx}) = -1$ tfm

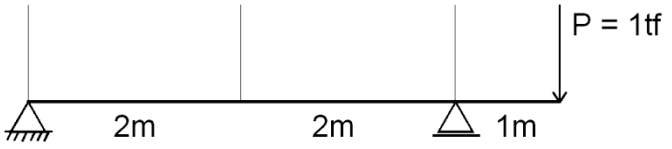
$(M^{+}_{máx}) = +3{,}5$tfm

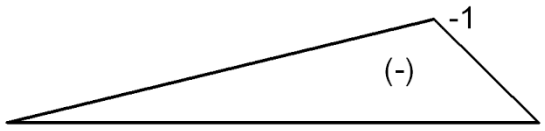
Seja uma carga móvel, de 1tf, que pode atuar e qualquer ponto da estrutura P(z). O problema a resolver é a determinação dos esforços máximos e mínimos provocados pela carga móvel. Por exemplo, qual o momento fletor máximo $(M^{+}_{máx})$ e o mínimo $(M^{-}_{máx})$ provocado por P(z), que devemos somar com os momentos causados pro cargas permanentes.



Para este caso simples, observa-se que o momento fletor será mínimo, $(M^{-}_{máx})$, quando P for aplicada em C e o momento fletor será máximo quando P for aplicada em E:

i)

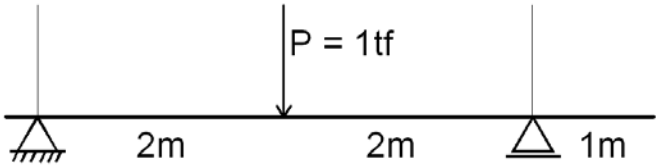


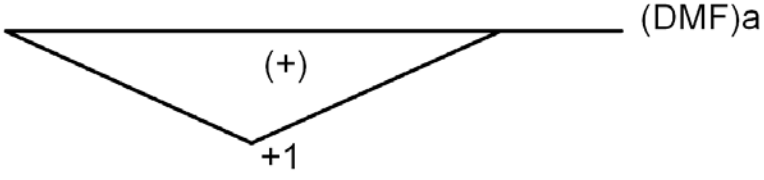


(DMF)a

$(M^{-}_{máx}) = -1$tfm

ii)





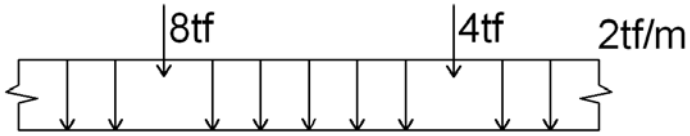
$(M^{+}_{máx}) = +1$tfm

Faz-se então a envoltória dos esforços:

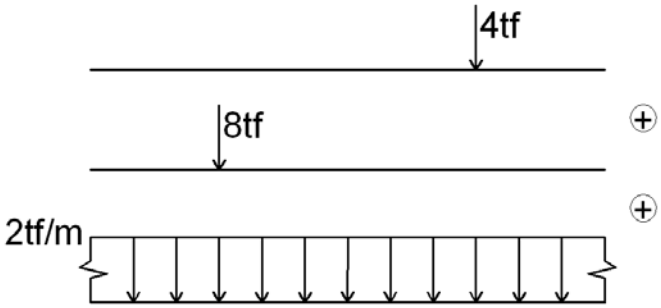
i) $M^{-}_{máx}$ = -1(perm.) –1 (acid.) = -2tfm

ii) $M^{+}_{máx}$ = +3,5(perm.) +1(acid) = + 4,5tfm

Em geral as cargas móveis não são tão simples, no caso de veículos podemos ter por exemplo:



Mas, supondo que a estrutura tenha comportamento linear, podemos usar a superposição de efeitos e decompor o trem – tipo em:



(=4x1tf)

(=8x1tf)

(série infinita de cargas concentradas)

A resolução do problema de cargas móveis em estruturas será feita através do processo de linhas de influência que será definido a seguir.

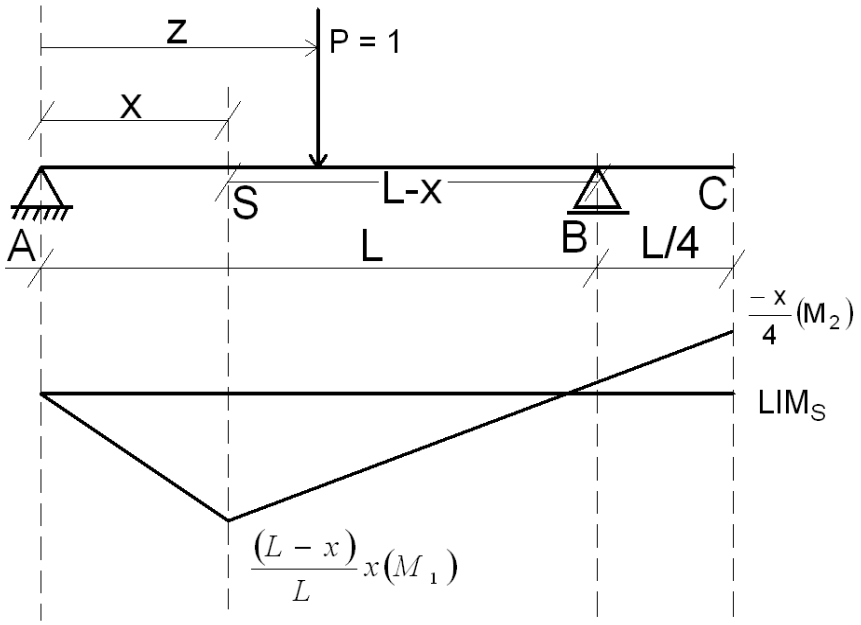
Supõe-se inicialmente que o trem-tipo é constituído de apenas 1 carga concentrada unitária. Em seguida, são feitos os cálculos necessários para levar-se em conta o trem-tipo real.

3.3. Linhas de Influência – Definição

Linha de um efeito elástico E em uma dada seção S é a representação gráfica do valor deste efeito em S produzido por uma carga concentrada unitária (de cima para baixo) que percorre a estrutura. Gráfico E x z para P(z) = 1 .

- Efeito elástico pode ser esforço (axial, cortante, momento fletor ou torsor), reação de apoio ou deformação.

Seja por exemplo a linha de influência do momento fletor em S para a viga a seguir:



i) z = 0 Ms = 0

ii) z = a Ms = $\frac{(L-x)}{L}(x)$

iii) z = L Ms = 0

iv) z = $\frac{5L}{4}$ Ms = $\frac{-x}{4}$

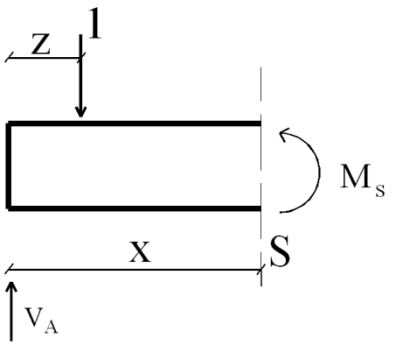
(x é fixo, z varia)

Para x = 1m, L = 4m:

$M_1 = 0{,}75$ $M_2 = -0{,}25$

Na verdade deve-se analisar se a carga está à esquerda ou á direita da seção:

i) $0 \le z \le x$:



$Ms = V_A x - 1(x - z)$

Ex: x = 1m

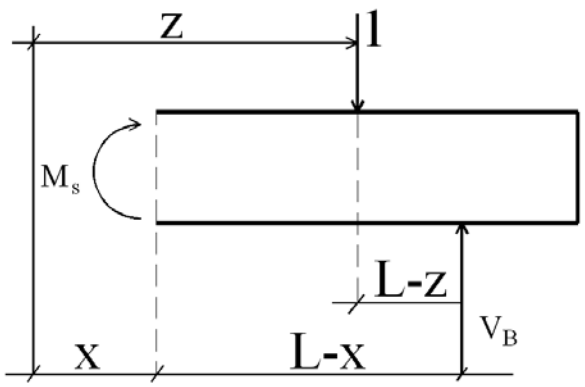
L = 4m

Sendo $V_A = \frac{1.(L-z)}{L}$

$$V_A = \frac{(4-z)}{4} \rightarrow Ms\left(\frac{4-z}{4}\right).1 - 1.(1-z) = 1 - \frac{z}{4} - 1 + z = \frac{3z}{4}$$

Eq. uma reta $\begin{cases} z = 0 & Ms = 0 \\ z = 1m(S) & Ms = 0{,}75 \end{cases}$

ii) $x \le z \le \frac{5}{4}L$



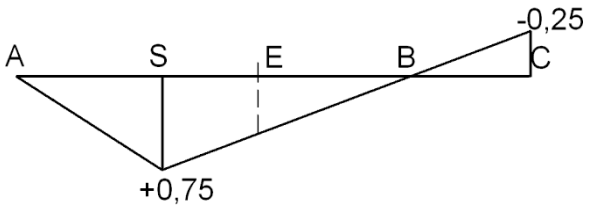
$V_B = \frac{P_z}{L} = \frac{z}{L}$

$M_S = V_B(L-x) - 1(z-x)$

$M_S = \frac{z}{L}(L-x) - (z-x)$

Ex: $x = 1\text{m}$, $L = 4\text{m}$: $M_S = \frac{3}{4}z - (z-1) = 1 - \frac{1}{4}z$

Eq. de uma reta $\begin{cases} z = 1 & M_S = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \\ z = 4 & M_S = 0 \\ z = 5 & M_S = 1 - \frac{5}{4} = \frac{-1}{4} = -0{,}25 \end{cases}$

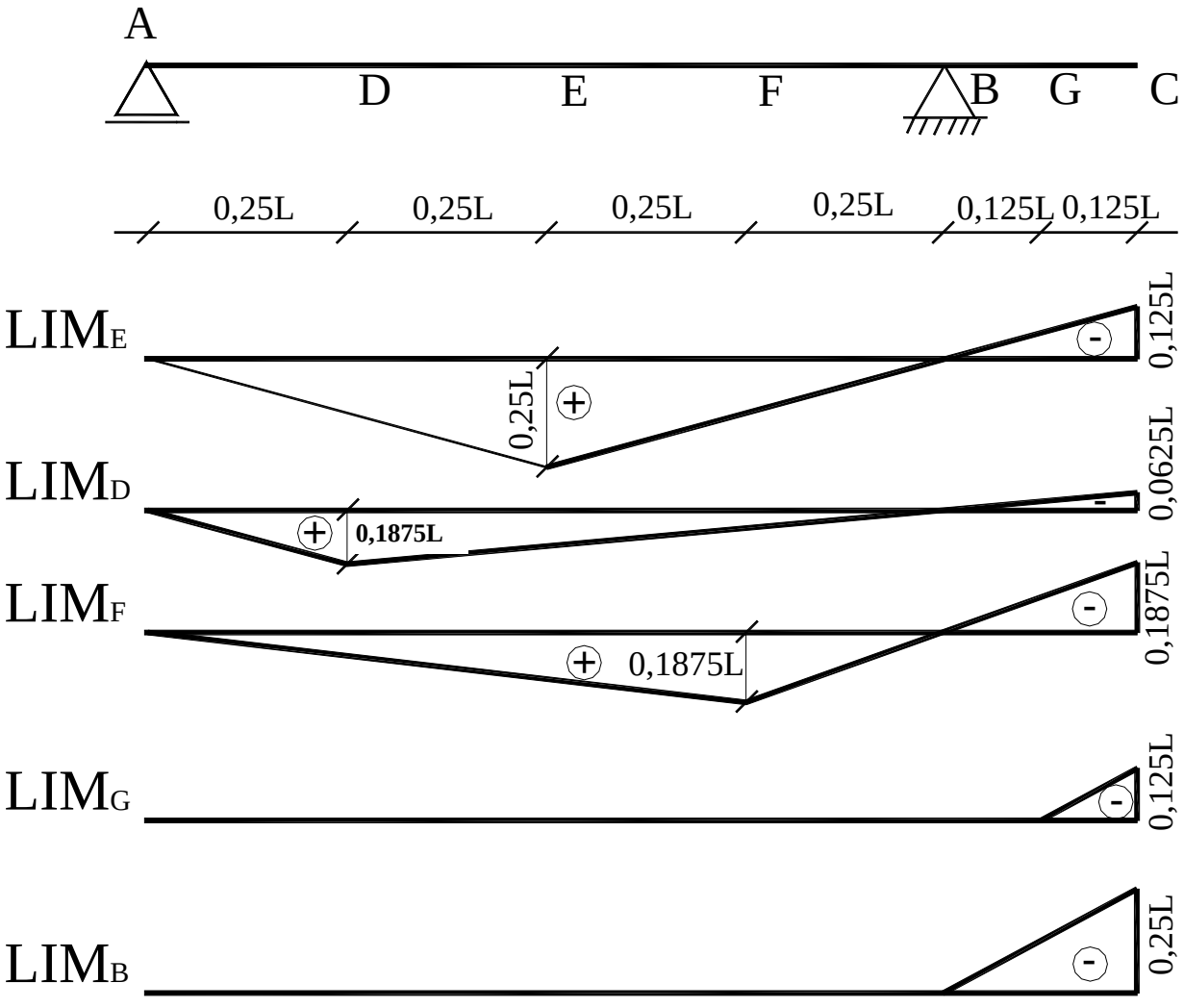


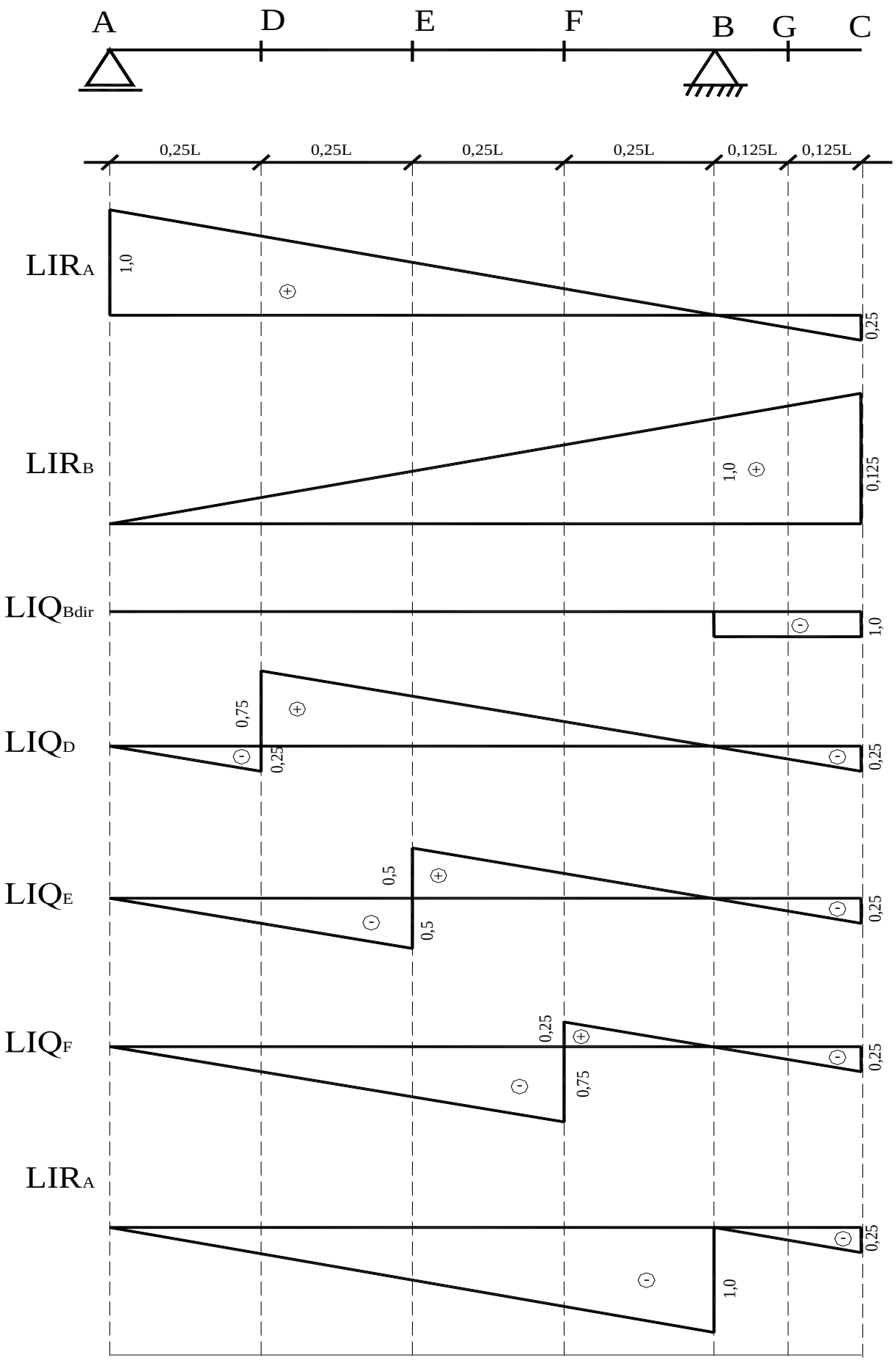
LIM$_S$

Ex: Quando $z = 2\text{m}$ ($P = 1\text{tf}$ em E)

$M_S = 0{,}5\text{tfm}$

$M^{+}_{S\text{máx}} = +0{,}75 \quad M^{-}_{S\text{máx}} = -0{,}25$

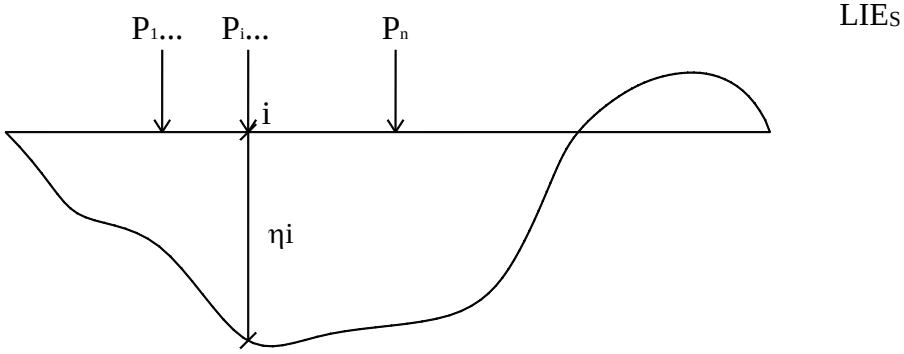



A
D
E
F
B
G
C
0,25L
0,25L
0,25L
0,25L
0,125L
0,125L
LIRA
1,0
0,25
LIRB
1,0
0,125
LIQBdir
1,0
LIQD
0,75
0,25
0,25
LIQE
0,5
0,5
0,25
LIQF
0,25
0,75
0,25
LIRA
1,0
0,25

3.4. Obtenção dos Efeitos, Conhecidas as L.I.

Mais tarde veremos com detalhes a obtenção de linhas de influência para diversos tipos de estruturas e voltaremos ao exemplo anterior para obter as L.I. de reações e esforços mostrados nas páginas 113, 114 e 115.

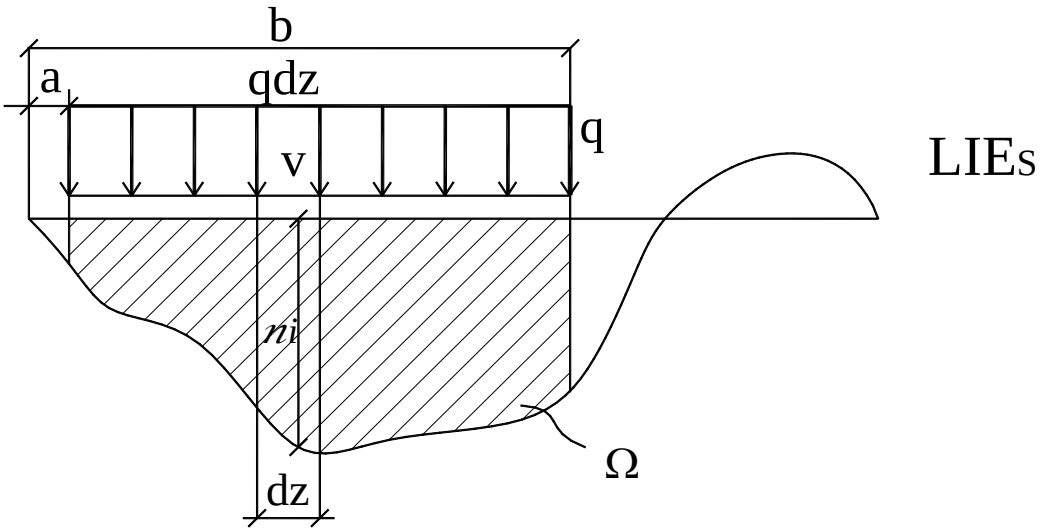
a) Seja por exemplo em trem-tipo constituído de n cargas concentradas que percorre uma estrutura cuja L.I. do efeito E na seção S é:



*O valor do efeito produzido em S por uma carga unitária atuando no ponto i é ηi. Logo o efeito produzido por uma carga Pi é $Pi\,\eta i$.

*Pelo princípio de superposição de efeitos (supondo material elástico-linear e pequeno deslocamento) o efeito em S produzido por todas as cargas é: $E_S = \sum_{i=1}^{n} P_i \eta_i$.

b) Seja agora um trem-tipo composto por uma carga uniformemente distribuída q, de $z = a$ até z = b:



$E_S = \int_a^b q\,dz.\eta_i = q\int_a^b \eta_i\,dz = q\Omega$ (área abaixo do gráfico da LI de a a b)

Sendo Ω denominada área de influência.

c) Caso geral – trem tipo composto de cargas concentradas mais uma carga distribuída:

$$E_S = \sum \left(P_i \eta_i \right) + q\Omega$$

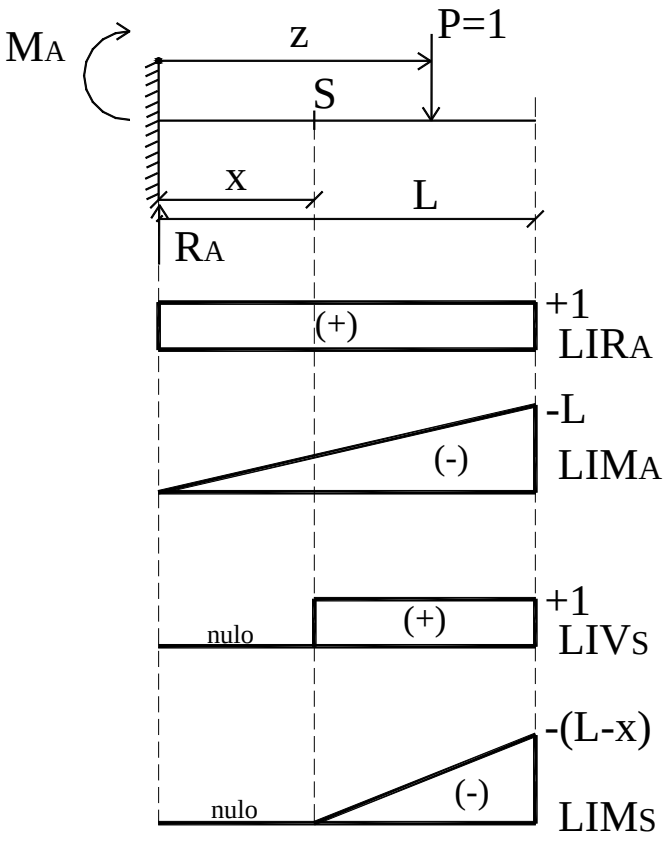
Obs.:

- Os conceitos vistos até aqui para linhas de influências são válidos para estruturas isostáticas e hiperestáticas.
- A unidade das LI de momento fletor é de comprimento e a unidade das L.I. de reação de apoio, esforço normal e cortante é adimencional.

Veremos em seguida a obtenção de L.I´s e de efeitos de tens-tipo, inicialmente para estruturas isostáticas simples.

3.5. Exemplos em Estruturas Isostáticas Simples:

3.5.1. Viga Engastada e Livre



Reações de apoio

i) $\sum F_y = 0 \quad \forall z, \quad \boxed{R_A = 1}$

ii) $\sum M_A = 0 \quad M_A + 1, \quad z = 0 \quad \therefore M_A = -z$

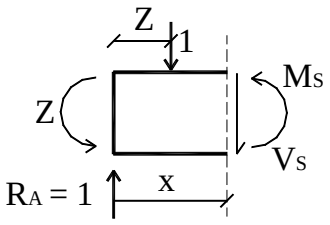
(será considerado $\oplus$):

R $\uparrow$

M tracionando fib. inf.

Esforços em S:

i) carga à esquerda de S, z < x



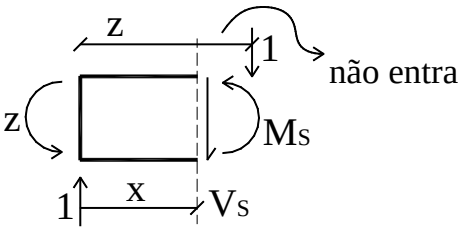
$V_S = 0$

$M_S = -z + 1.x$

$= -1.(x - z)$

$\therefore M_S = 0$

ii) carga à direita de S, z > x

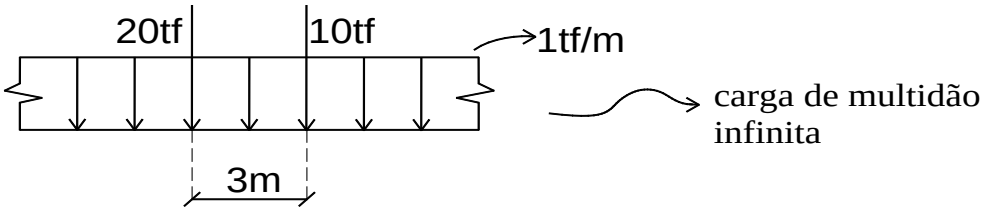


$V_S = 1$

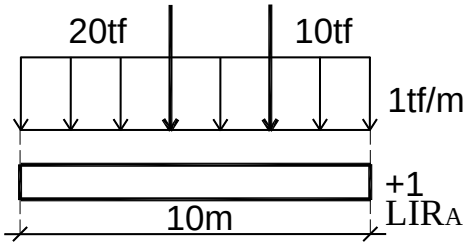
$M_S = -z + 1.x$

$= -(z - x)$

- Obter as reações de apoio máximas para uma viga em balanço com 10m de vão submetida ao trem-tipo:



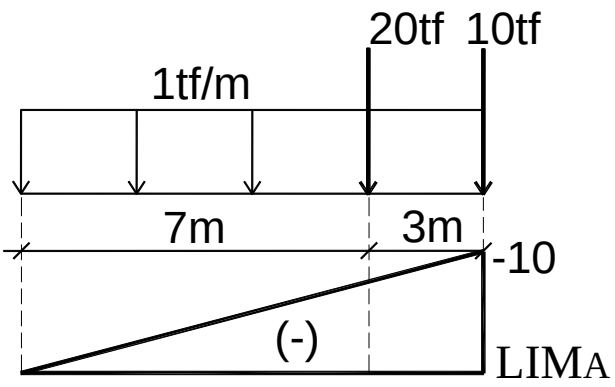
i) R_A :



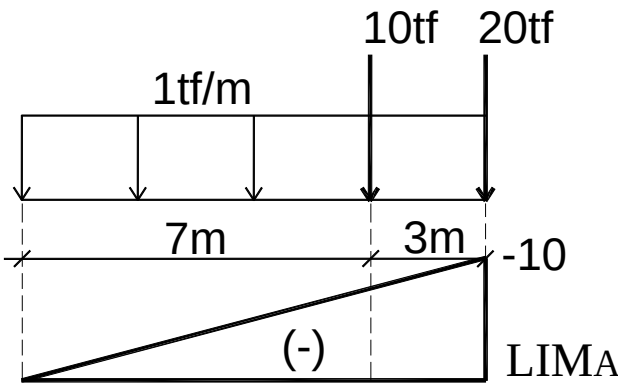
$$R_A = 20.1 + 10.1 + 1.(1.10) = 40\text{tf}$$

ii) Para obter-se o momento máximo no engaste deve-se pesquisar qual a posição do trem-tipo mais desfavorável (que implica na reação máxima).

a) Sentido →



b) Sentido ←



É óbvio que o caso b) é mais desfavorável:

$$M_A = 1\text{tf/m}.\Omega + P_1\eta_1 + P_2\eta_2$$

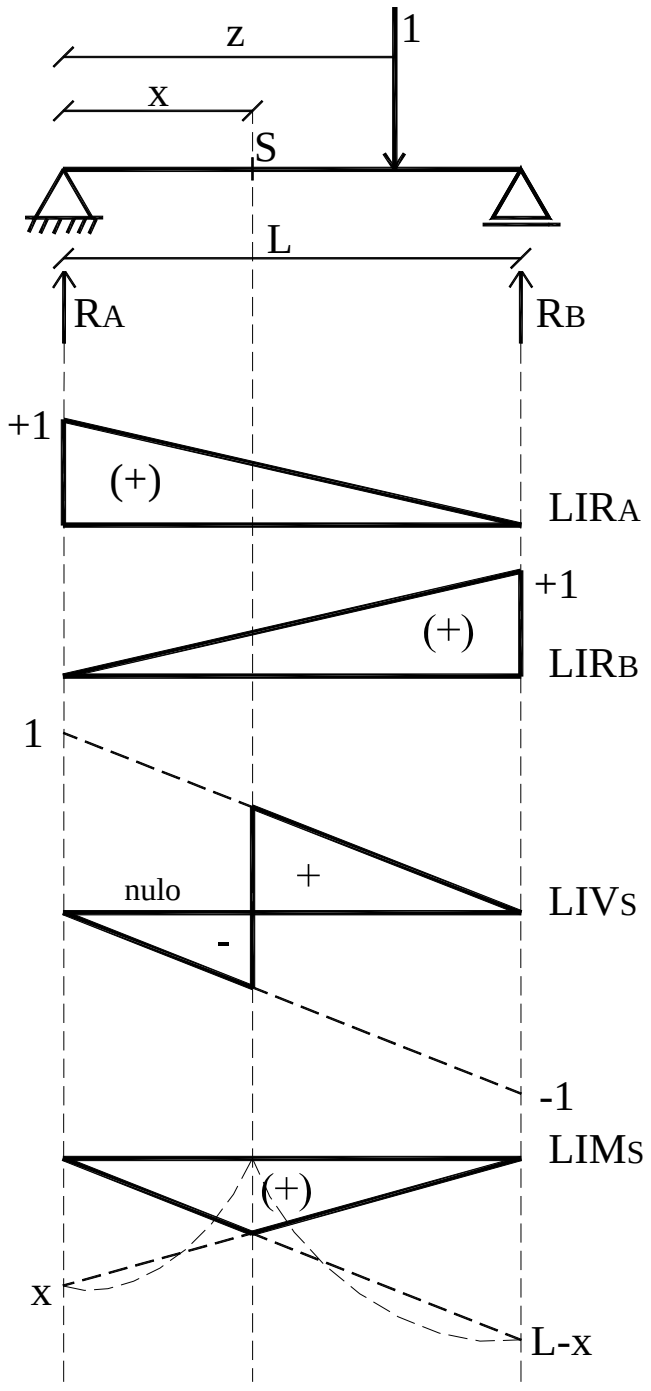
$$\frac{\eta_1}{10} = \frac{7}{10} \rightarrow \eta_1 = 7$$

$$M_A = 1\text{tf/m}.(-50\text{m}^2) + 10\text{tf}.(-7\text{m}) + 20\text{tf}.(-10\text{m})$$

$$\Omega = \frac{-10.10}{2} = -50$$

$$M_A = -50 - 70 - 200 = \boxed{-320\text{tf.m}}$$

3.5.2. Viga Biapoiada

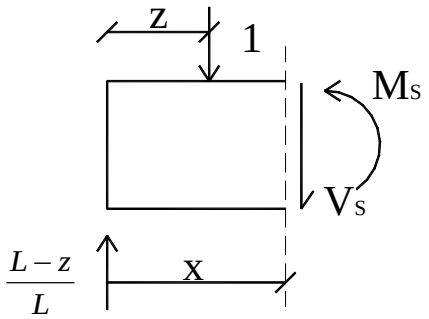


Reações de apoio:

$$R_A = \underbrace{\frac{L-z}{L}}_{1-z/L};\quad R_B = \frac{z}{L}$$

Esforços na seção S:

i) carga à esquerda de S: (z < x)



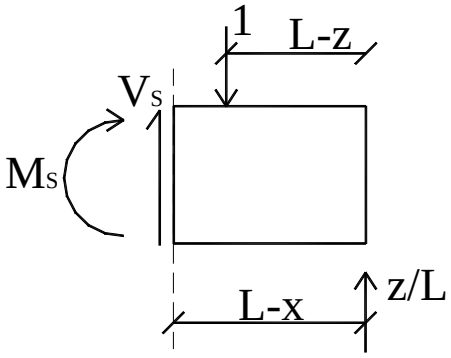
$$V_S = \frac{L-z}{L} - 1$$

$$\therefore V_S = \frac{-z}{L}$$

$$M_S = \frac{(L-z)}{L}.x - 1.(x-z) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)z$$

$$\therefore M_S = z - \frac{z}{L}x$$

ii)carga à direita de S: (z > x)



$$V_S = 1 - \frac{z}{L}$$

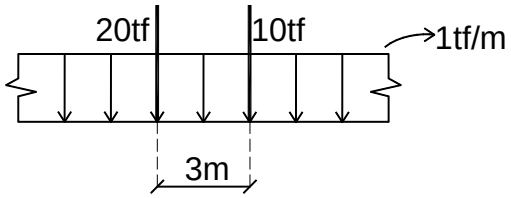
$$M_S = \underbrace{\frac{z}{L}(L-x)}_{z-\frac{z}{L}x} - 1.\underbrace{(L-x-L+z)}_{z-x}$$

$$M_S = -\frac{z}{L}x - x = x - \frac{x}{L}z$$

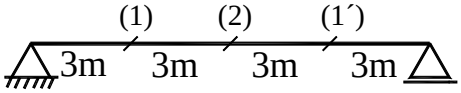
- Obter a envoltória (esforços máximos e mínimos) de momentos fletores para a viga abaixo, indicando os esforços nas seções indicadas: (1), (2) e (1´):

Dados: a) carga permanente $g = 2tf/m$

b) carga móvel

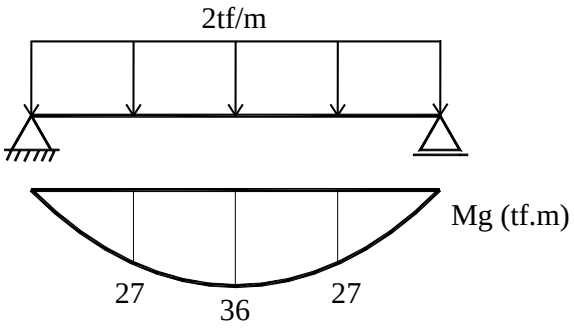


Estrutura



L=12m

a) carga permanente:

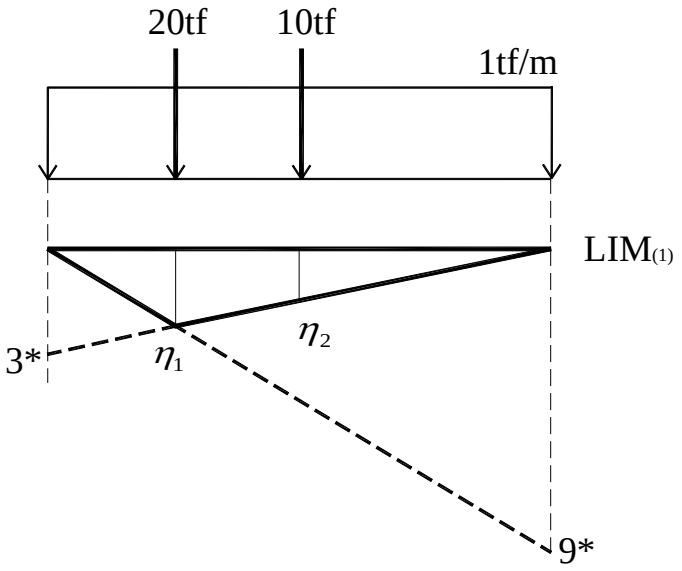


$$M_{(2)} = \frac{qL^2}{8} = 2.\frac{144}{8} = 36tf.m$$

$$M_{(1)} = M_{(1')} = 12.3 - \frac{2.3^2}{2} = 27tf.m$$

b) carga móvel

b.1) seção (1), (1´)



$$M^{(1)}_{máx} = 20.2{,}25 + 10.1{,}5 + 1.\left(\frac{12}{2}.2{,}25\right)$$

$$\therefore M^{(1)}_{máx} = 73{,}5tf.m$$

$$\eta_1 = \frac{3}{4}.3 = 2{,}25 \qquad \eta_2 = \frac{2}{4}.3 = 1{,}5$$

$$M^{(1)}_{total} = 27 + 73{,}5 = 100{,}5tf.m$$

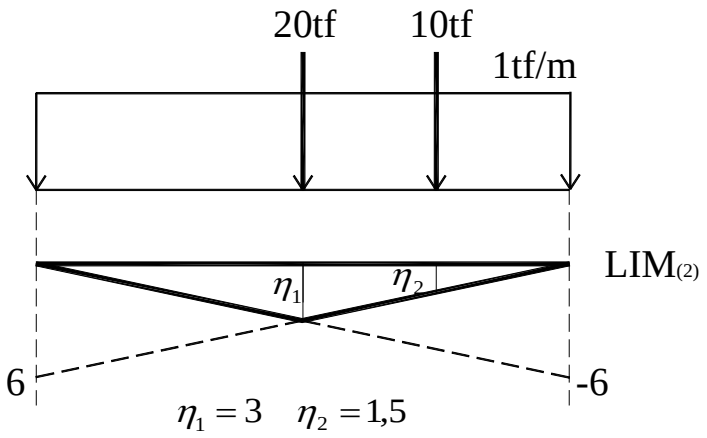
A= (2,25x3)/2 + (2,25x9)/2 = 13,5

$$\frac{3}{12} = \frac{n_1}{9} \therefore n_1 = 9/4 = 2{,}25$$

$$\frac{2{,}25}{9} = \frac{n_2}{6} \therefore n_2 = 1{,}50$$

* x=3 para as ações (1) e (1'). Também, L-x = 12-3 = 9

b.2) seção (2)



$\eta_1 = 3 \quad \eta_2 = 1{,}5$

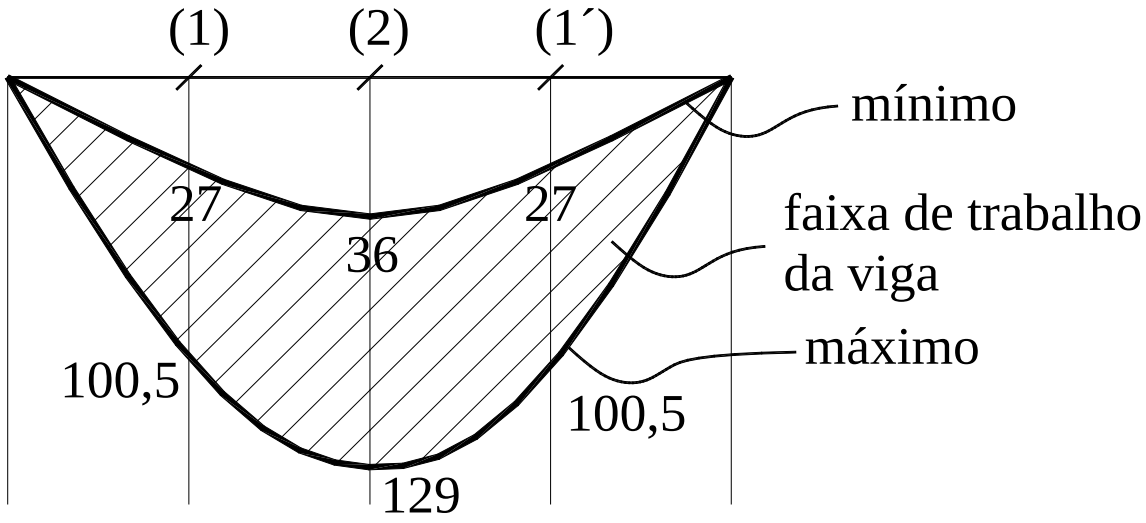
$$M_{total}^{(2)} = 36 + 93 = 129 tf.m$$

$$M_{máx}^{(2)} = 20.3 + 10.1{,}5 + 1.\left(3.\frac{12}{2}\right)$$

$$\therefore M_{máx}^{(2)} = 93 tf.m$$

Será visto posteriormente que sempre ocorrerá um efeito máximo quando uma das cargas concentradas atuar em um dos pontos angulosos da linha de influência.

ENVOLTÓRIA DE MOMENTOS FLETORES:



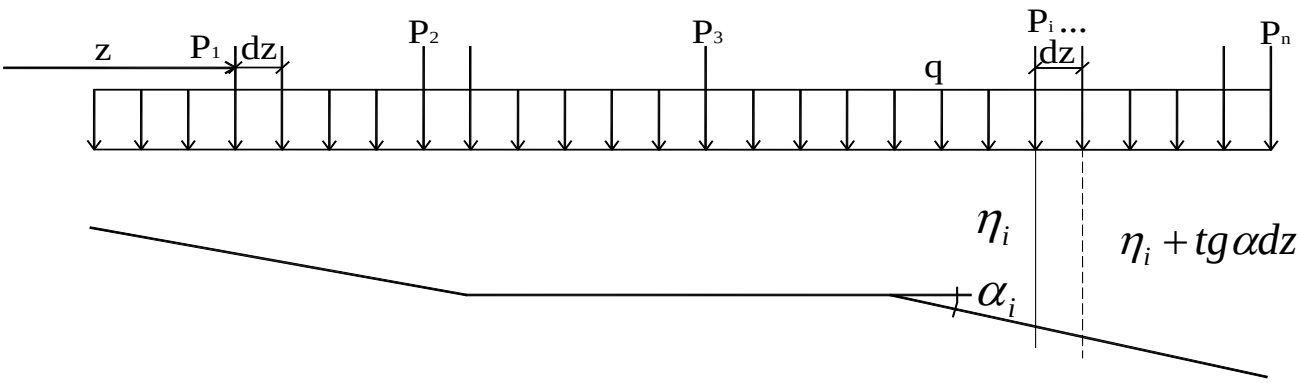
Para obter-se a envoltória de esforços cortantes procede-se analogamente (ver Sussekind, .1 pg 277-280).

3.6. Análise de Efeitos

3.6.1. Teorema Geral

"Haverá uma efeito máximo quando uma das sucessiva cargas concentradas estiver sobre um dos pontos V1 angulosos da linha de influência" (mesmo que uma das cargas do trem-tipo caia fora da estrutura).

(Vale também para estruturas hiperestáticas).



Para um acréscimo dz à variável z, tem-se um acréscimo do efeito E:

$$dE = (E + dE) - E = \left[\sum P_i(\eta_i + dz\,tg\alpha_i) + q\Omega\right] - \left[\sum P_i\eta_i + q\Omega\right]$$

$$\therefore dE = dz\sum P_i\,tg\alpha_i \qquad \therefore \frac{dE}{dz} = \sum P_i\,tg\alpha_i$$

- antes do máximo $\Rightarrow \sum P_i\,tg\alpha_i > 0$
- após o máximo $\Rightarrow \sum P_i\,tg\alpha_i < 0$

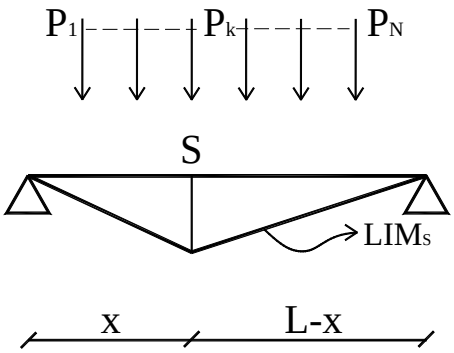
Como $\sum P_i$ é constante, deve haver uma mudança em α_i para que as condições acima sejam atendidas $\Rightarrow$ o máximo ocorre quando uma das cargas esta sobre um ponto anguloso da L.I.

3.6.2. Obtenção de Momento Fletor Máximo de uma Seção S de um Viga Biapoiada para um dado Trem-tipo Constituído de Cargas Concentradas

- Supondo que todas as cargas do trem-tipo situem-se sobre a viga,
- Chamando de R a resultante de todas as cargas do trem-tipo,
- Supondo que P_R seja a carga que atue sobre o ponto anguloso da L.I.:

$\sum_{i=1}^{k-1} P_i < R\frac{x}{L} < \sum_{i=1}^{k} P_i$ onde x é a distância de S até o apoio x e L é o comprimento do vão.

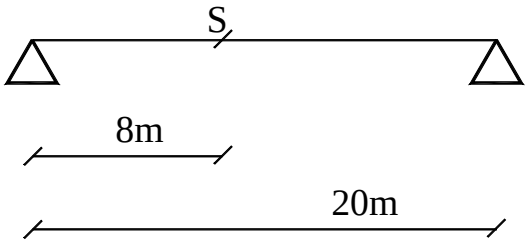
OBS.: Deve-se analisar os 2 sentidos do trem-tipo, separadamente.



(Ver demonstração no Sussekino)

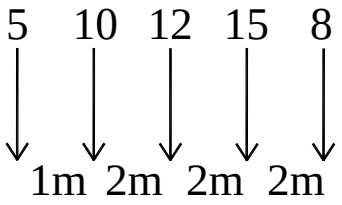
Exemplo:

Viga



x = 8m
L = 20m

b. <u>Trem-tipo</u>



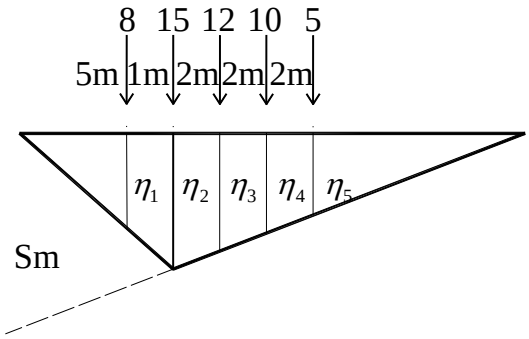
(tf)

$\rightarrow R = 5 + 10 + 12 + 15 + 8 = 50tf$

1º Sentido $R\frac{x}{L} = \frac{50.8}{20} = 20tf$

Logo deve-se ter $\underbrace{5+10}_{\substack{\text{antes}\\\text{do}\\\text{pico}}} \leq 20 \leq \underbrace{5+10+12}_{\substack{\text{após}\\\text{o}\\\text{pico}}}$

Logo 12tf é a carga sobre o pico $= P_k$



$$\frac{\eta}{8} = \frac{12}{20} \therefore \eta_k = \frac{24}{5} = 4,8$$

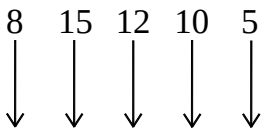
$$\frac{\eta_1}{4,8} = \frac{5}{8} \therefore \eta_1 = 3,0$$

$$\frac{\eta_2}{4,8} = \frac{6}{8} \therefore \eta_2 = 3,6$$

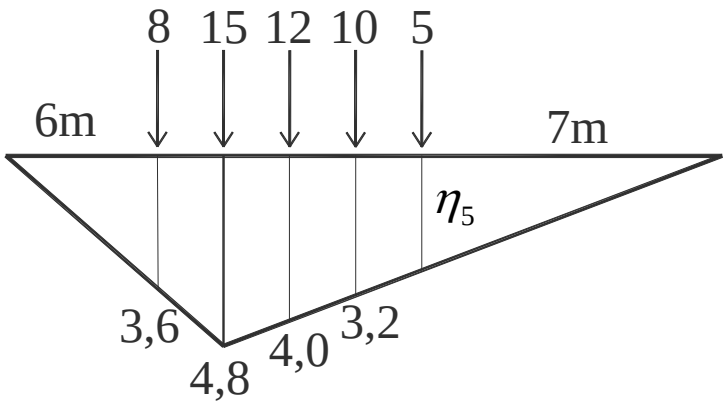
$$\eta_4 = 4,0; \eta_5 = 3,2$$

$$M_{S(máx)} = 5.30 + 10.3,6 + 12.4,8 + 15.4,0 + 8.3,2 = 194,2tf.m$$

2° Sentido: ←



$$R\frac{x}{L}=20 \qquad 8<20<\overbrace{8+15}^{(23)} \qquad \therefore P_k=15tf$$

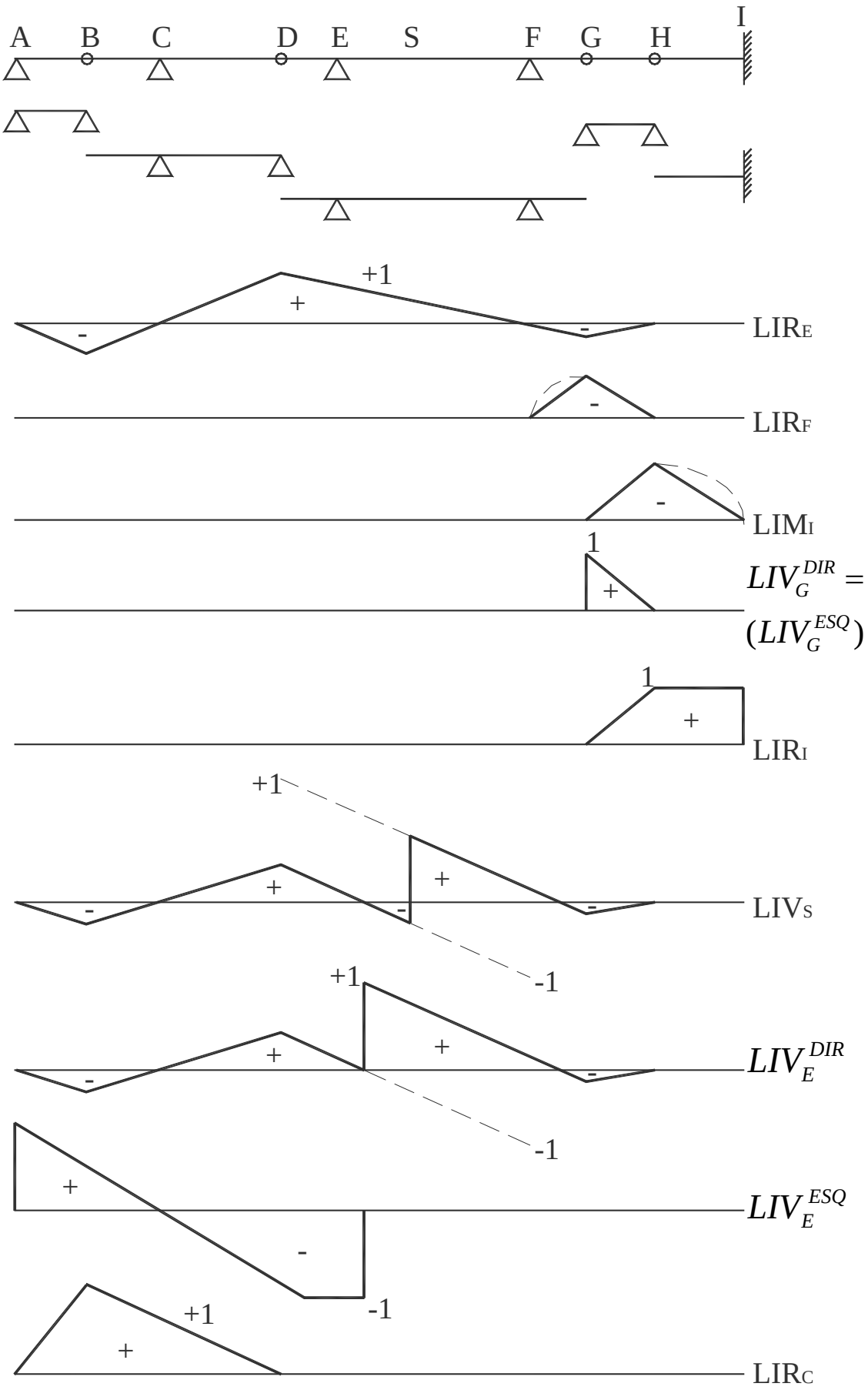


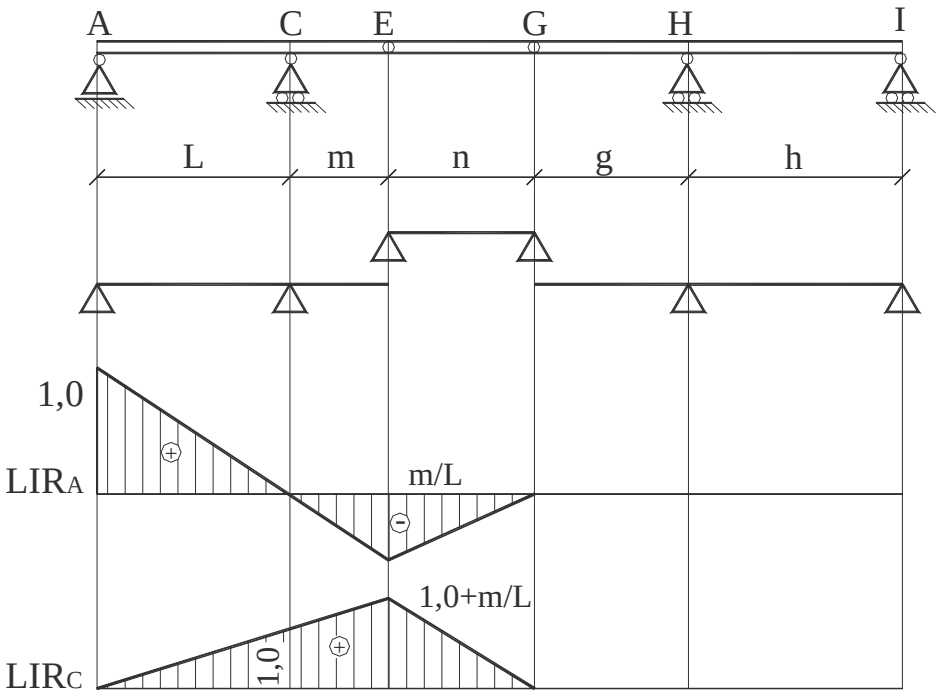
$$\frac{\eta_5}{4,8}=\frac{7}{12}\therefore \eta_5=2,8$$

$$M_{S(máx)}=8.3,6+15.4,8+12.4,0+10.3,2+5.2,8=194,8tf.m$$

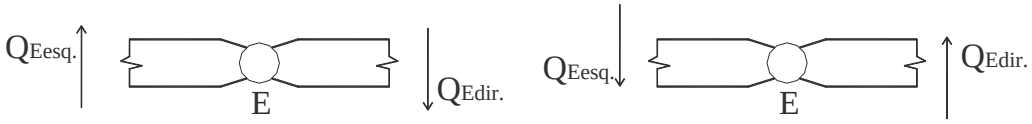
Este sentido prevalece $\rightarrow M_{S(máx)}$

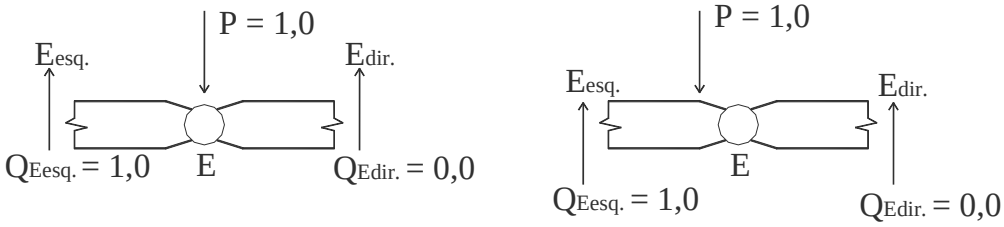
(continua na próxima página)


A
B
C
D
E
S
F
G
H
I
+1
+
-
LIRE
LIRF
LIMI
1
$LIV_G^{DIR} =$
(LIV_G^{ESQ})
LIRI
LIVS
-1
LIV_E^{DIR}
LIV_E^{ESQ}
LIRC

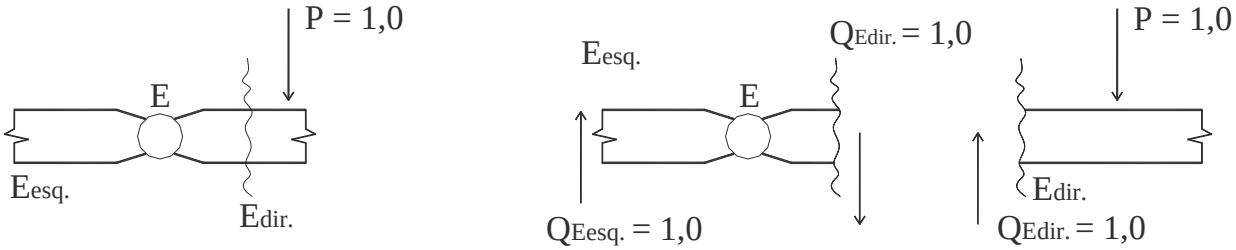


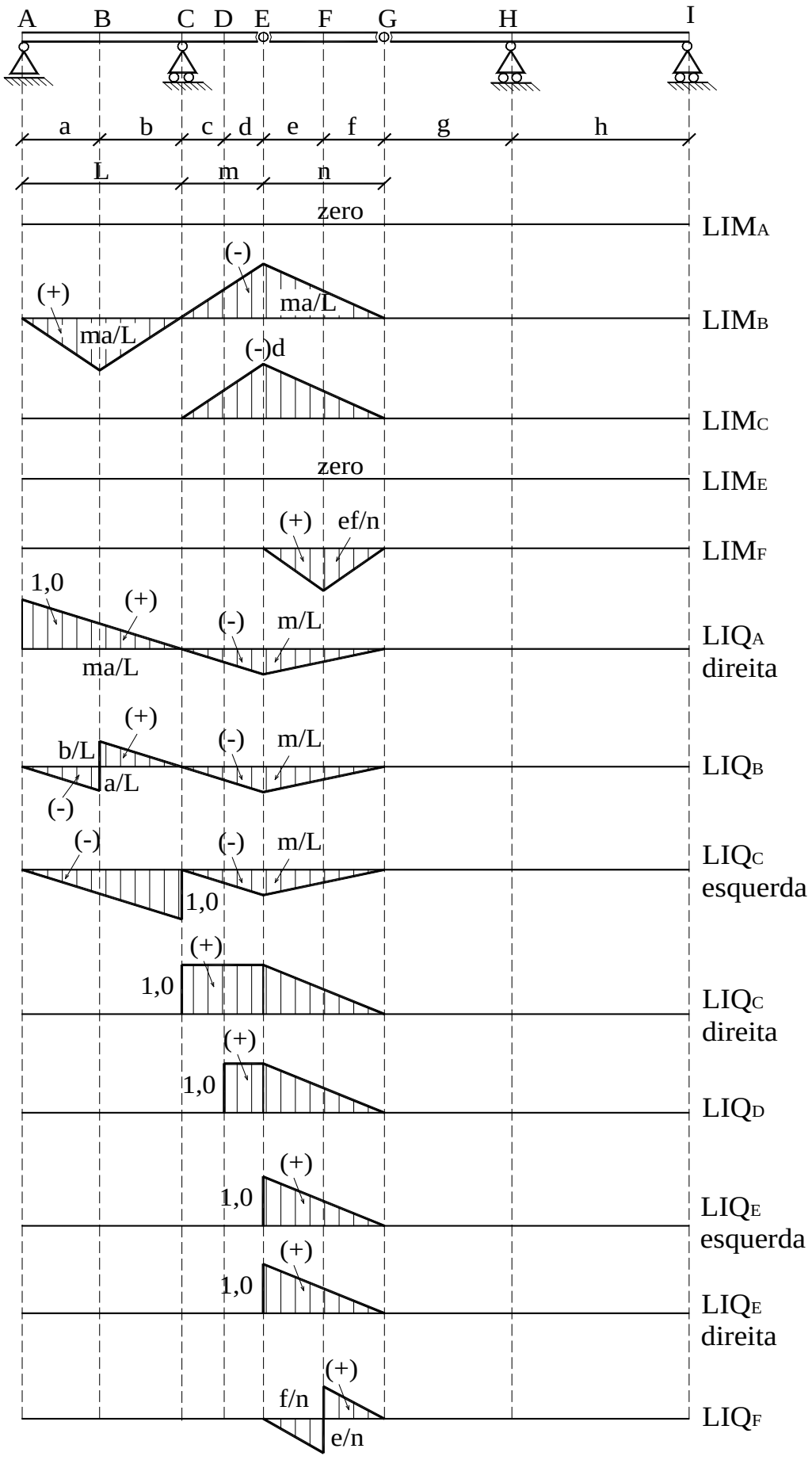
$$Q_{Eesq} = Q_{Edir}$$





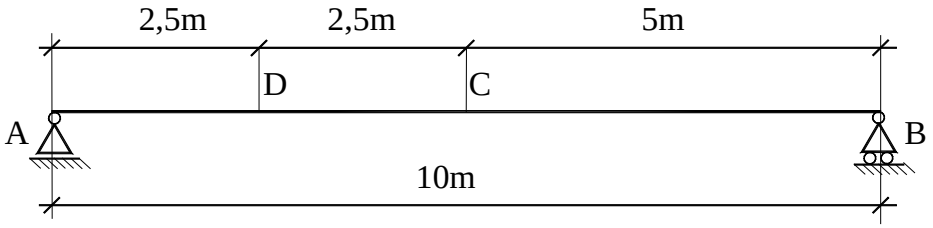
Devido à convenção $Q_{Eesq.} = +1{,}0$



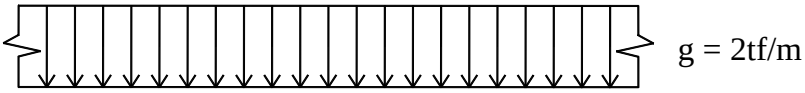

A B C D E F G H I
a b c d e f g h
L m n
zero
LIMA
(+) (-) ma/L
ma/L
LIMB
(-) d
LIMC
zero
LIME
(+) ef/n
LIMF
1,0 (+) (-) m/L
ma/L
LIQA direita
(+) b/L (-) m/L
a/L
(-)
LIQB
(-) (-) m/L
1,0
LIQC esquerda
(+)
1,0
LIQC direita
(+)
1,0
LIQD
(+)
1,0
LIQE esquerda
(+)
1,0
LIQE direita
(+)
f/n
e/n
LIQF

d) Exercício

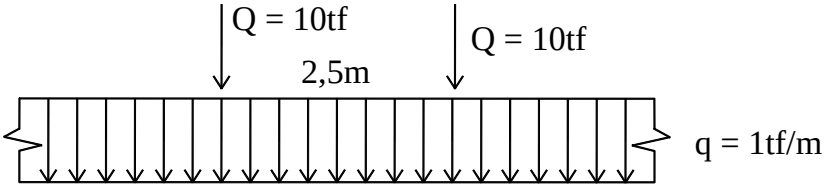
Determine os valores máximos e mínimos do momento fletor no ponto C, da força-cortante no ponto D e da reação vertical no apoio A, na viga abaixo para o seguinte carregamento:



permanente →

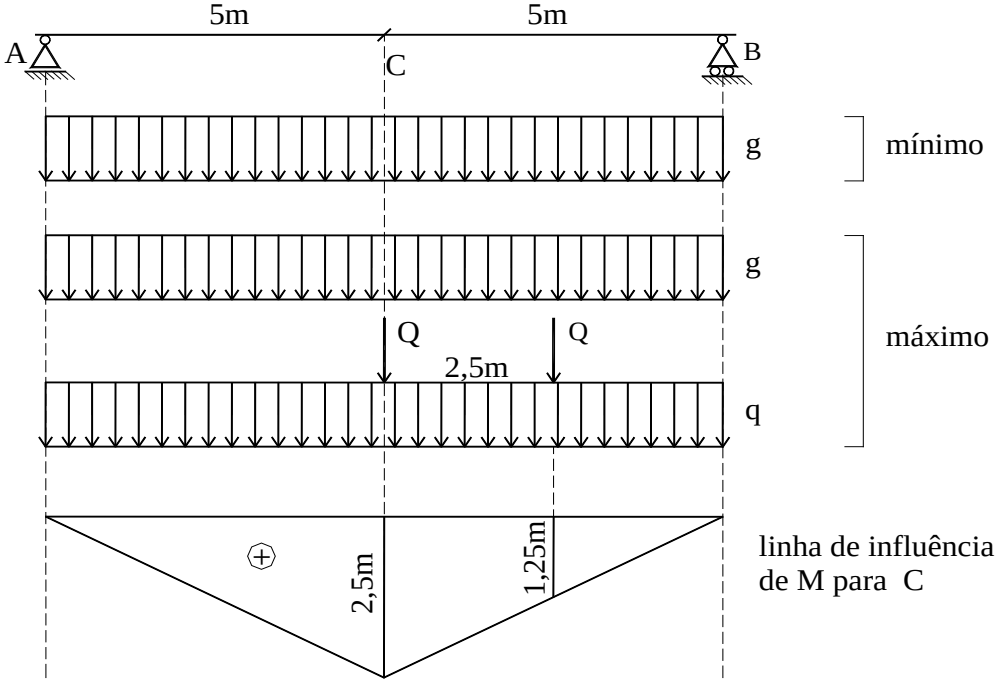


acidental → (trem-tipo)



d.1) Momento fletor em C

Para a determinação dos valores máximo e mínimo do momento fletor no ponto C, deveremos estabelecer os carregamentos abaixo esquematizados:



$$\frac{a_1 a_2}{L} = \frac{5x5}{10} = 2{,}50$$

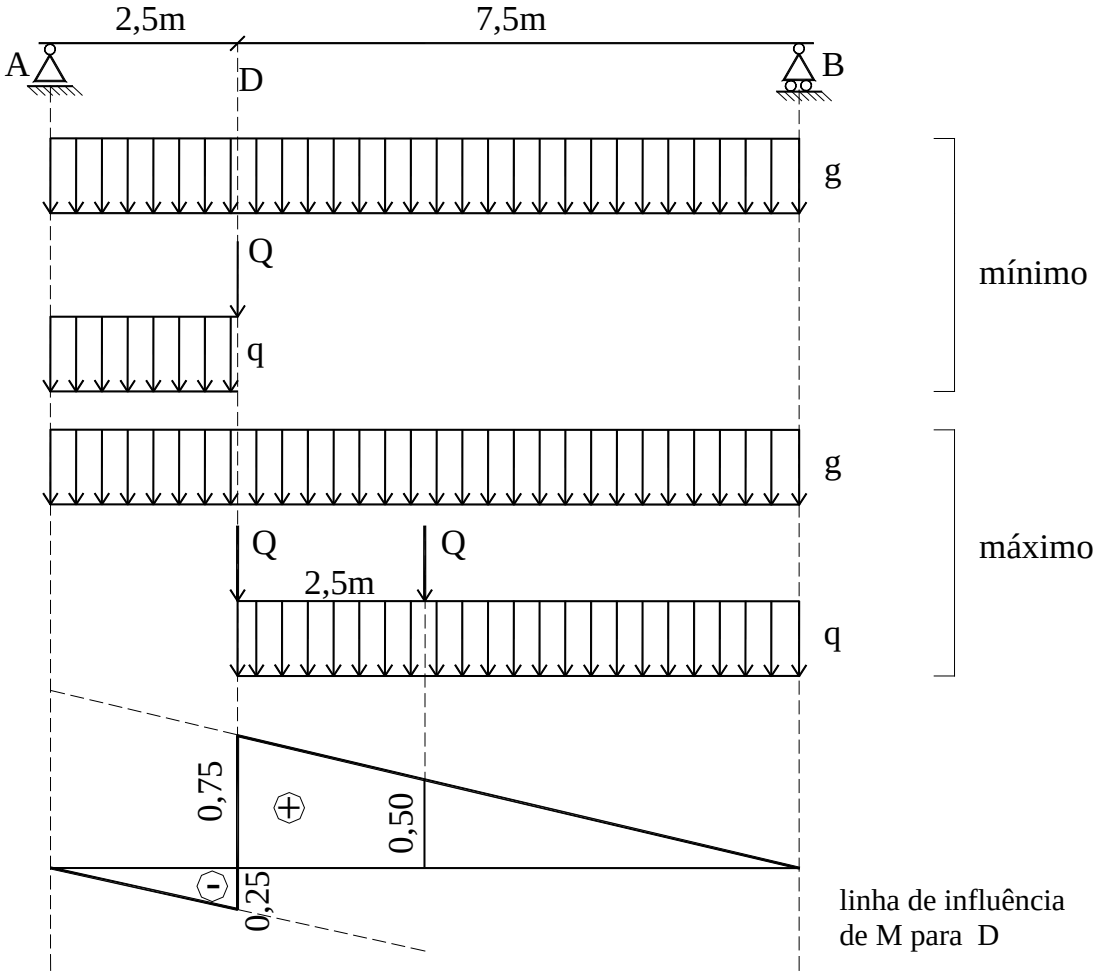
Portanto:

$$M_{mín,C} = +2x\frac{2,5x10}{2} = +25tf$$

$$M_{máx,C} = +25 + 1x\frac{2,5x10}{2} + 10x2,5 + 10x1,25 = 75tfm$$

d.2) Força cortante em D

Para a determinação dos valores máximo e mínimo da força cortante no ponto D, deveremos estabelecer os carregamentos abaixo esquematizados:



$$\frac{a_1}{L} = \frac{2,5}{10} = 0,25 \qquad \frac{a_2}{L} = \frac{7,5}{10} = 0,75$$

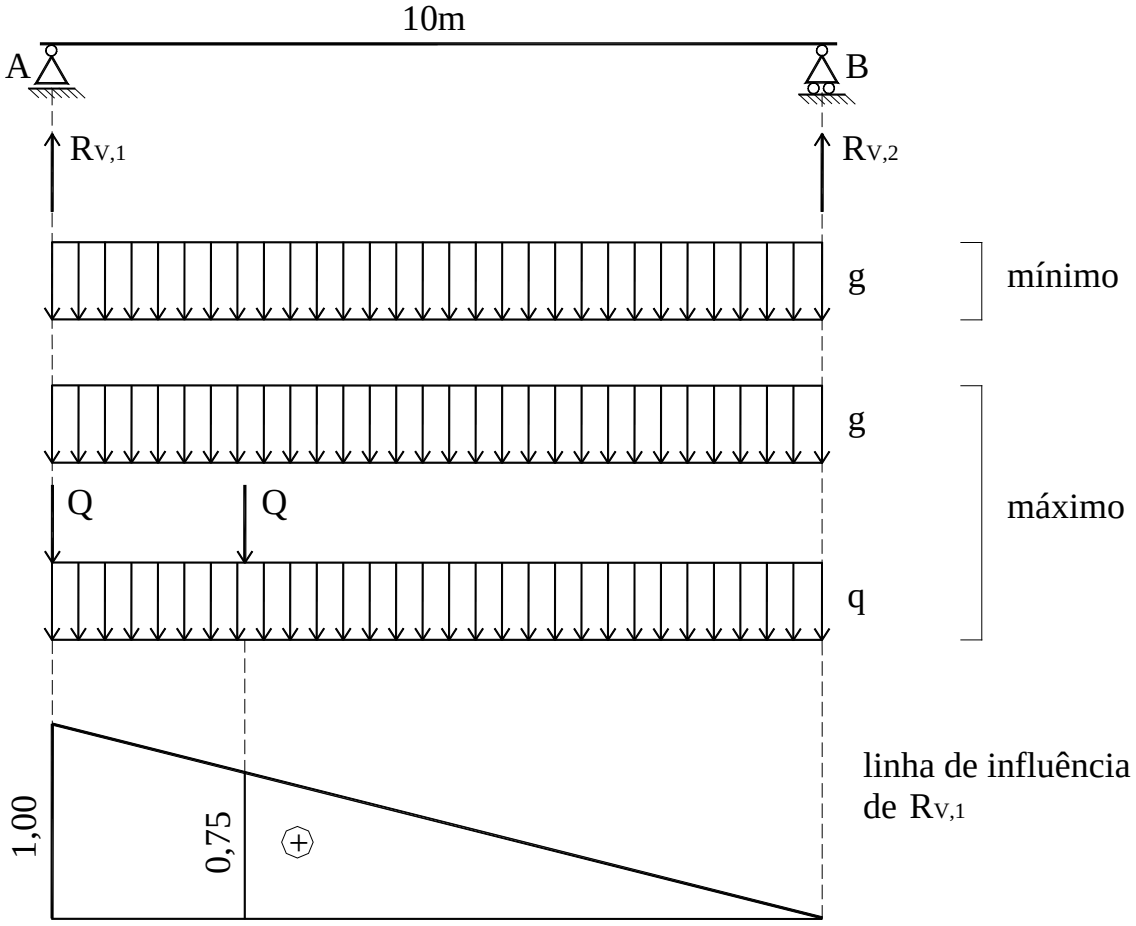
Portanto:

$$V_{\min,D} = 2x\left(\frac{0{,}75x7{,}5}{2} - \frac{0{,}25x2{,}5}{2}\right) - 1x\frac{0{,}25x2{,}5}{2} - 10x0{,}25 = +5{,}00 - 0{,}312 - 2{,}50 = +2{,}188tf$$

$$V_{máx,D} = +5{,}00 + 1x\frac{0{,}75x7{,}5}{2} + 10x0{,}75 + 10x0{,}5 = +20{,}125tf$$

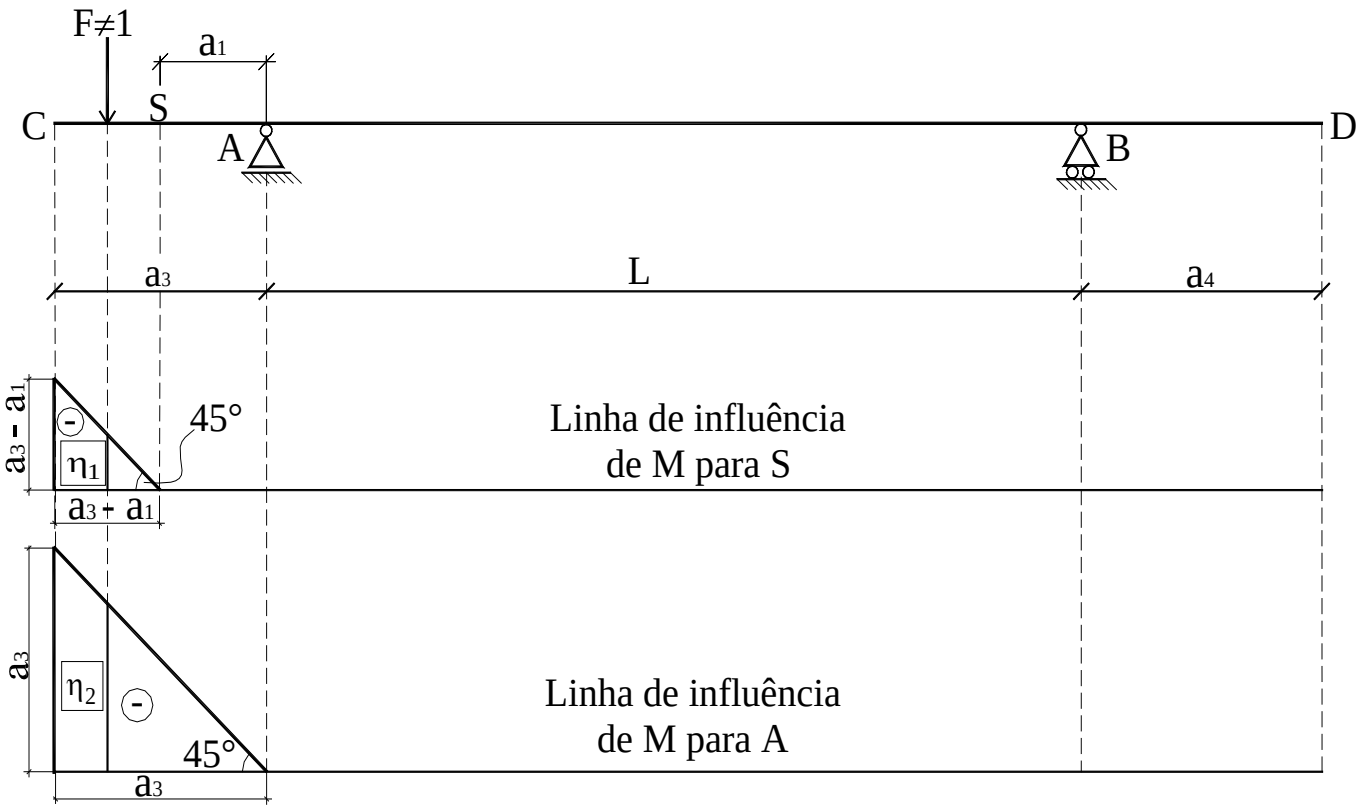
d.3) Reação vertical no apoio A:

Para a determinação dos valores máximo e mínimo da reação vertical no apoio A, deveremos estabelecer os carregamentos abaixo esquematizados:

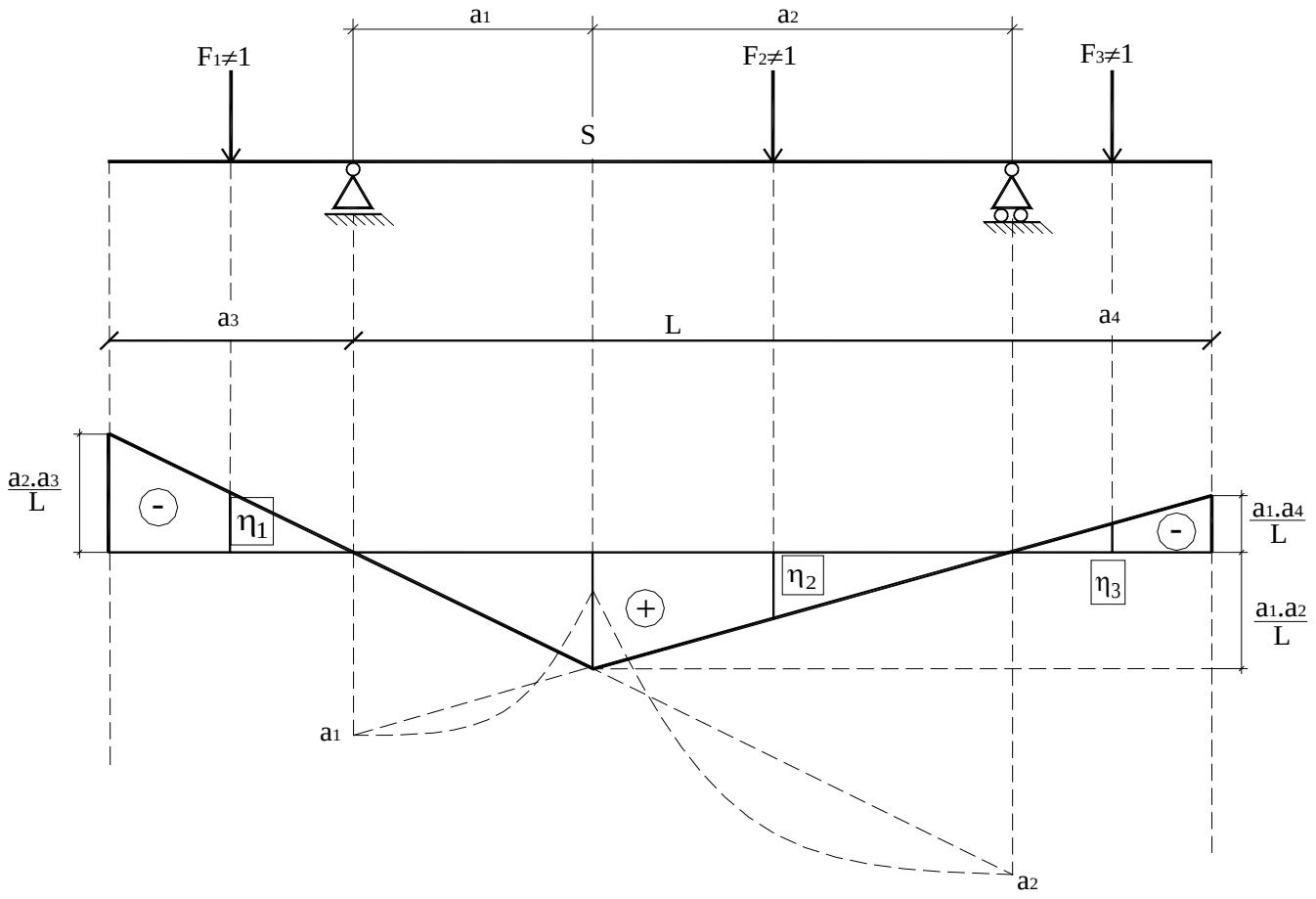


Logo, no trecho CS, a linha de influência de M para S é uma reta com ordenadas $-(a_3 - a_1)$ em C e nula em S. No trecho SD, esta linha de influência tem todas as ordenadas nulas, pois, a carga F = 1 aí atuando não provoca momento fletor em S.

Portanto, para a seção S localizada no balanço da esquerda, ou coincidindo com o apoio A, podemos elaborar a seguinte figura:



Podemos elaborar a seguinte figura:



Assim, os momentos fletores em S produzidos pelas cargas F_1, F_2, $F_3 \neq 1$ serão, respectivamente:

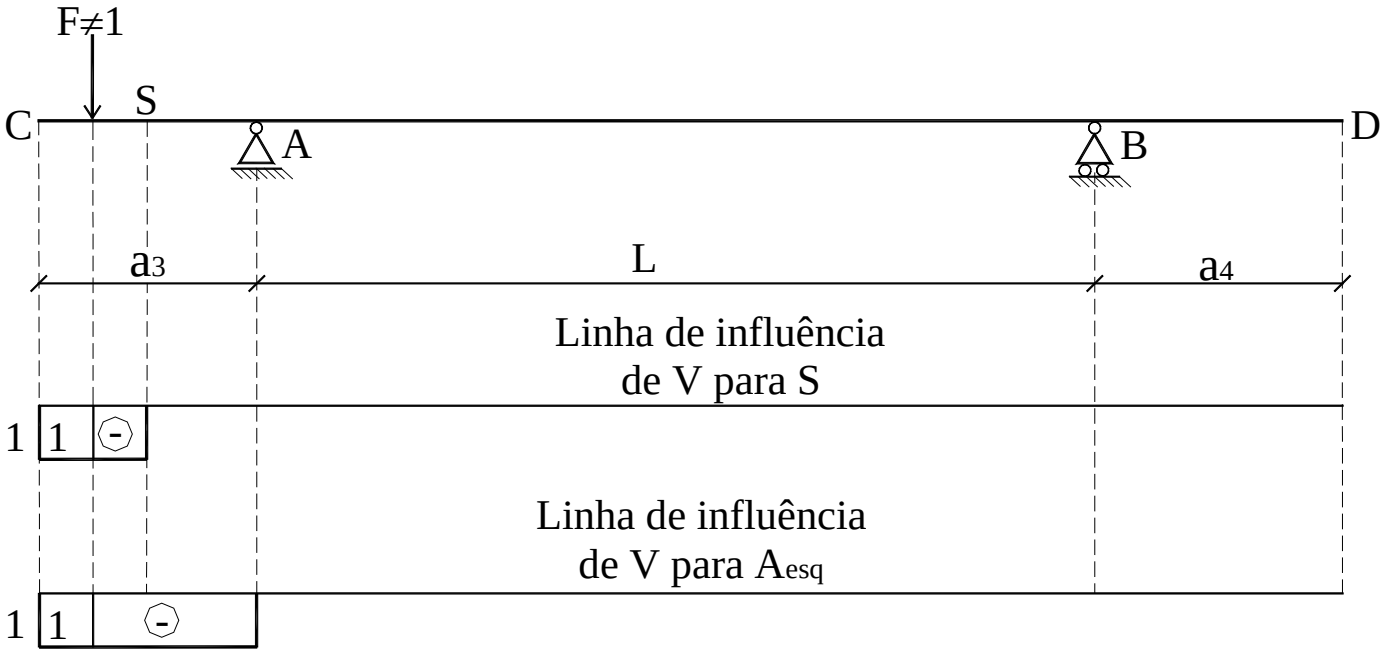
$$\boxed{M_S = -F_1.\eta_1} \quad ; \qquad \boxed{M_S = +F_2.\eta_2} \qquad \text{e} \qquad \boxed{M_S = -F_3.\eta_3}$$

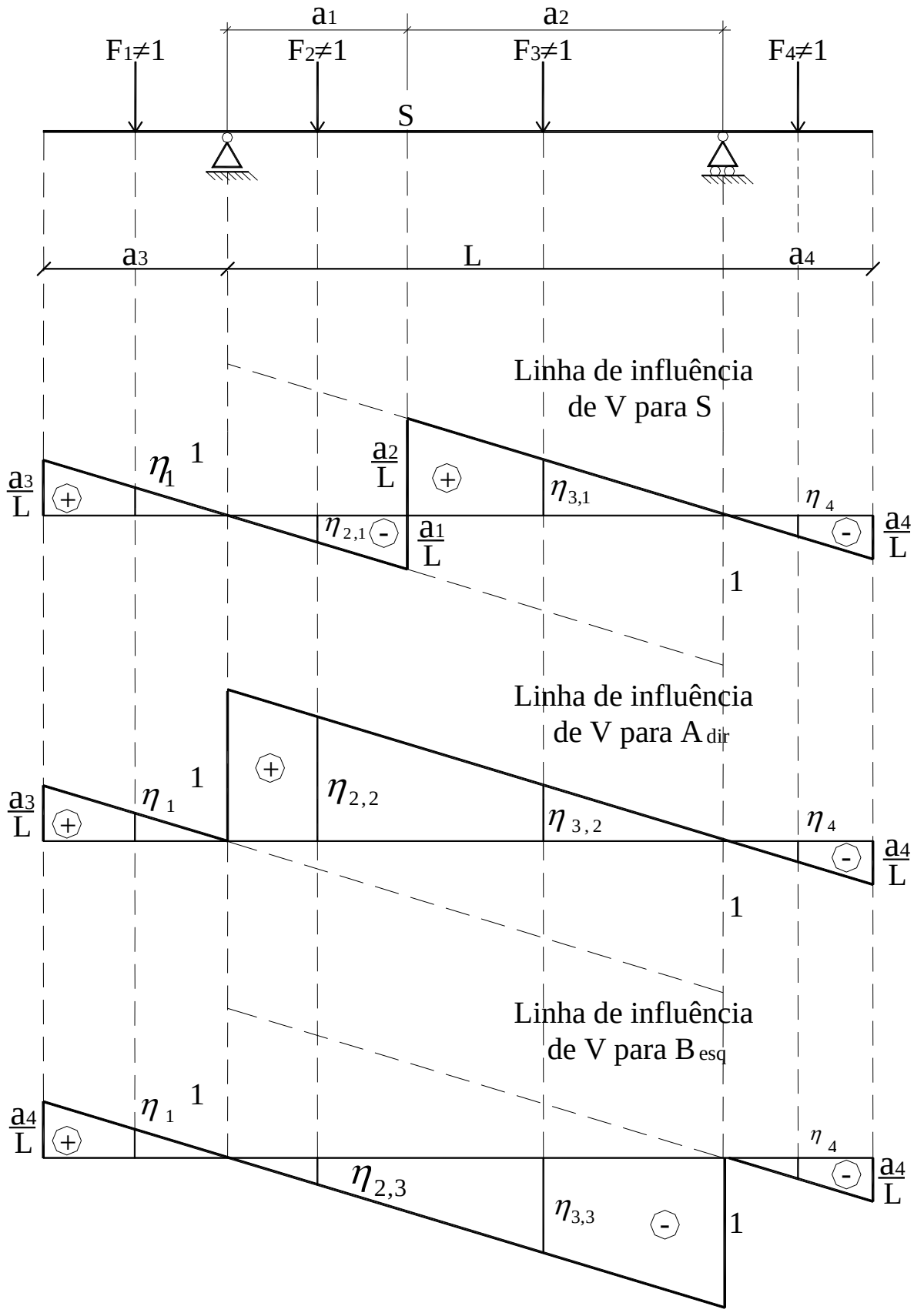
Para determinar a linha de influência do esforço cortante para a seção S, deve ser analisado o efeito V na seção S quando a carga F = 1 estiver atuando entre C e S para qualquer posição daquela carga entre C e S:

$V_S = -F = -1$

Logo, no trecho CS a linha de influência de V para S é uma reta com ordenada unitária constante. No trecho SD, esta linha de influência tem todas as ordenadas nulas, pois, a carga F=1 aí atuando não provocará força cortante em S.

Portanto, para a seção S localizada no balanço da esquerda oi coincidindo com a seção A à esquerda, podemos elaborar a seguinte figura:




a1
a2
F1≠1
F2≠1
F3≠1
F4≠1
S
a3
L
a4
Linha de influência
de V para S
Linha de influência
de V para A dir
Linha de influência
de V para B esq

$$R_{V,1} = -\frac{(x - a_3 - L)}{L} \qquad \text{(reta)}$$

$$R_{V,2} = +\frac{(x - a_3)}{L} \qquad \text{(reta)}$$

Se $x = a_3 + L \rightarrow R_{V,1} = 0$

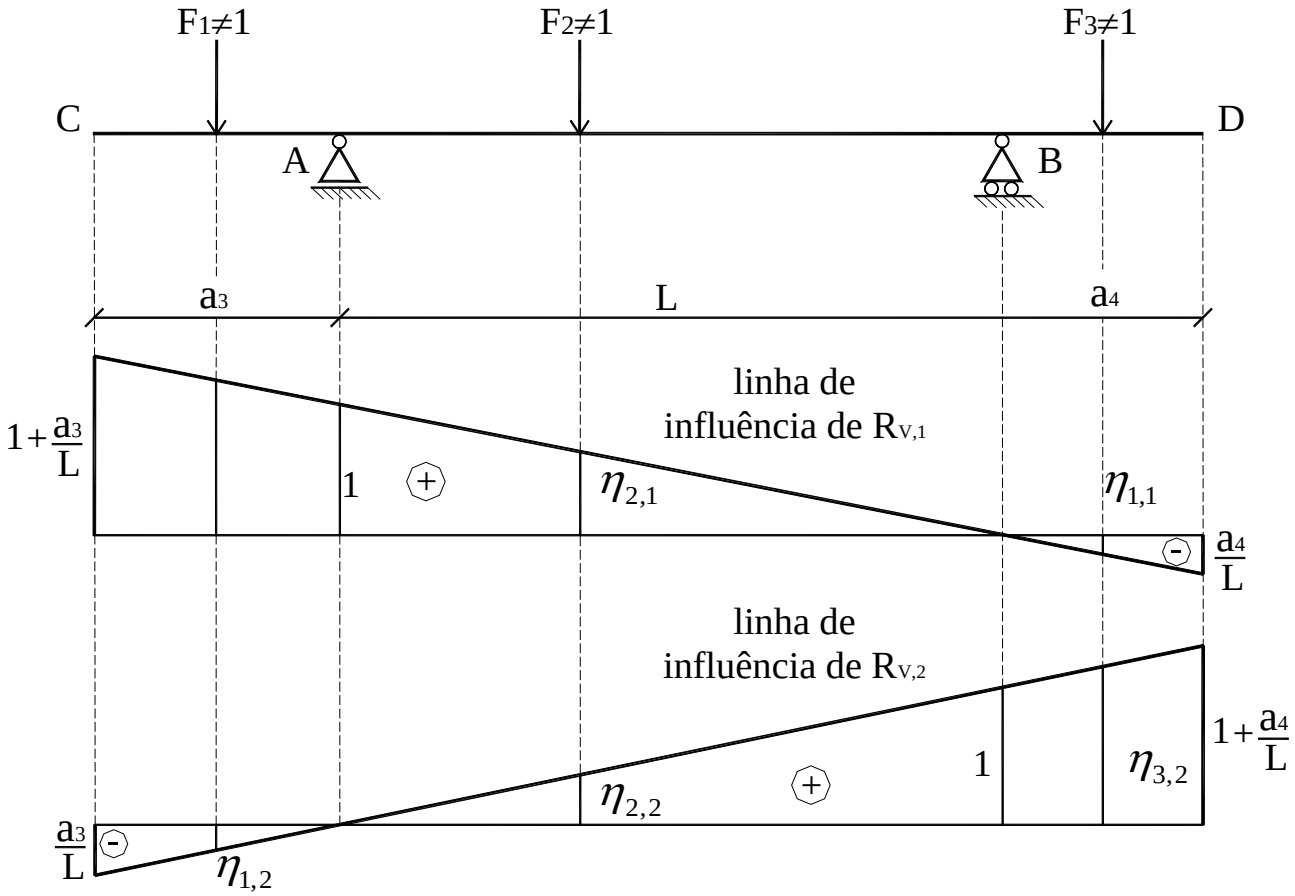
$$R_{V,2} = +1$$

Se $x = a_3 + L + a_4 \rightarrow R_{V,1} = -\frac{a_4}{L}$

$$R_{V,2} = +\frac{(a_4 + L)}{L} = 1 + \frac{a_4}{L}$$

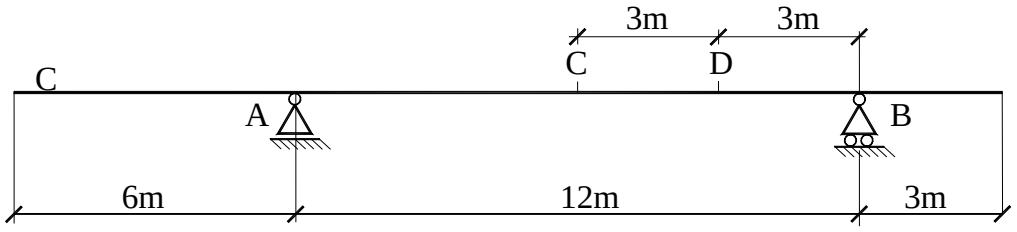
Logo, no trecho BD, a linha de influência de $R_{V,1}$ é a reta com ordenadas nula em B e $(-a_4/L)$ em D e a linha de influência de $R_{V,2}$ é uma reta com ordenadas unitárias em B e $(1+a_4/L)$ em D.

Portanto, podemos elaborar a seguinte figura:

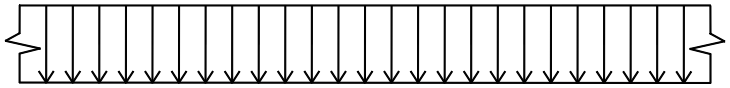

F1≠1
F2≠1
F3≠1
C
D
A
B
a3
L
a4
linha de
influência de RV,1
1+a3/L
1
η2,1
η1,1
a4/L
linha de
influência de RV,2
1+a4/L
1
η3,2
η2,2
a3/L
η1,2

e) Exercício:

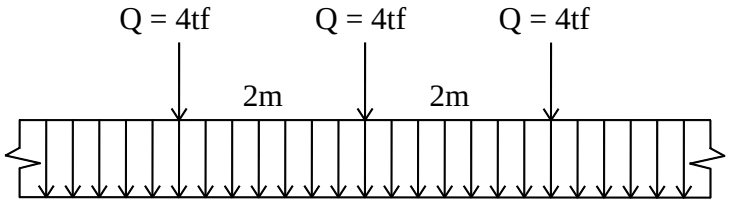
Determinar os valores máximo do momento fletor no ponto C, máximo da força cortante no apoio A à direita, mínimo da força cortante no ponto D e máximo da reação vertical no apoio B, na viga esquematizada abaixo, para o seguinte carregamento:

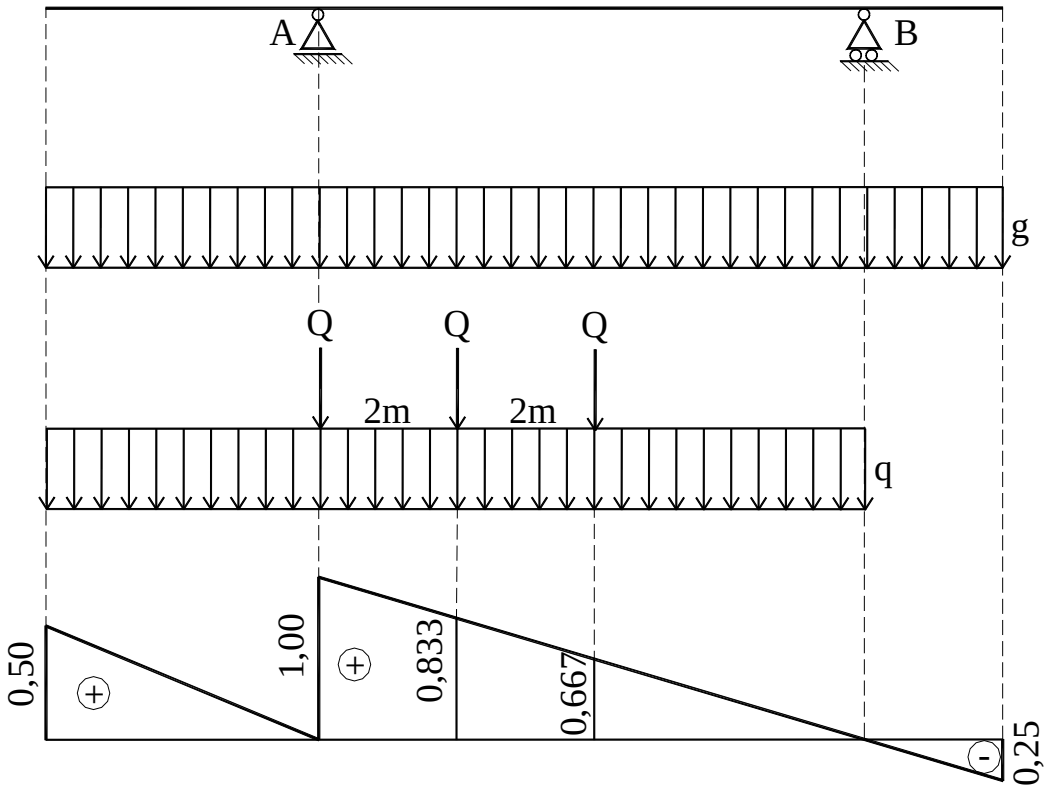


permanente →



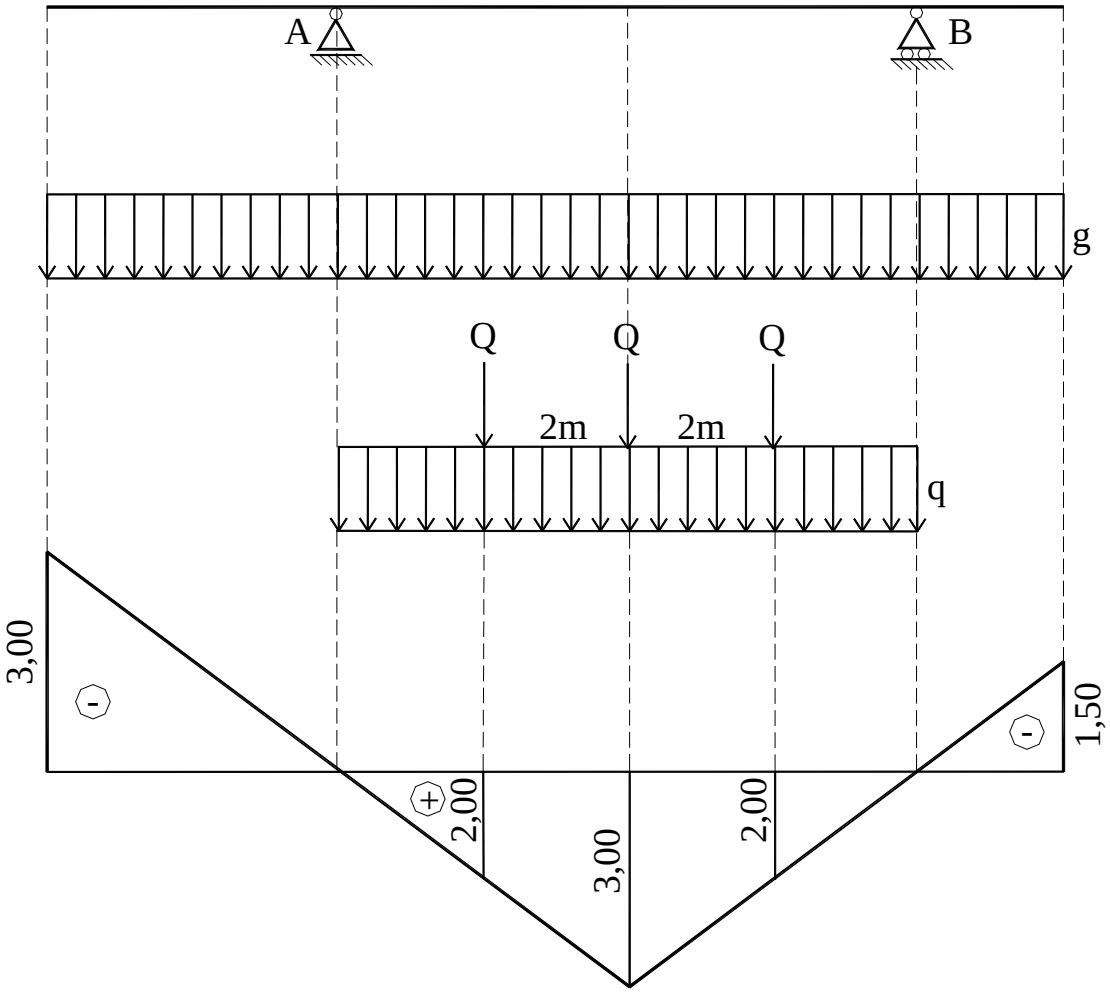
acidental →
(trem-tipo)





e.1) Momento fletor em C:

Para a determinação do valor máximo do momento fletor no ponto C, deveremos estabelecer o carregamento abaixo esquematizado:

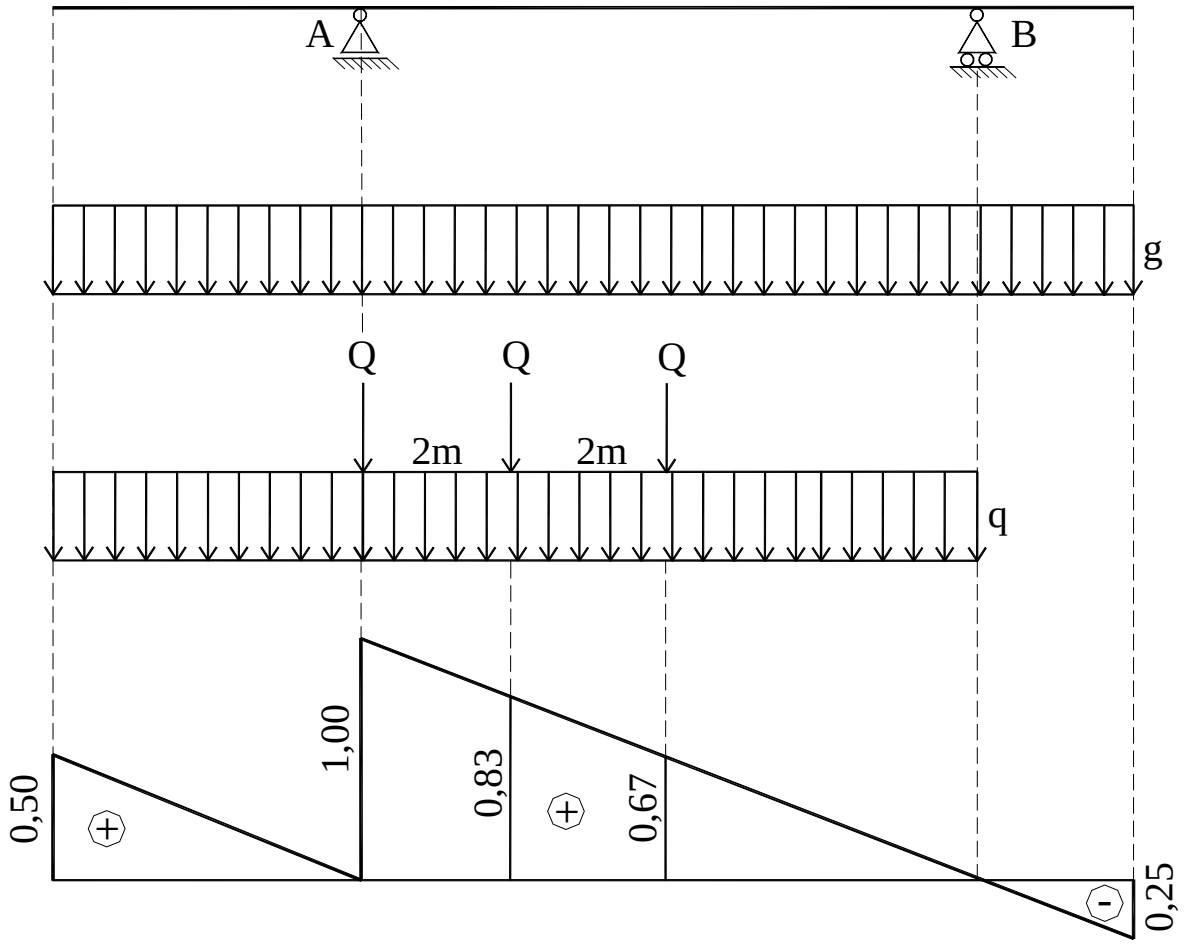


Portanto:

$$M_{máx,C} = +4\left(-\frac{3.6}{2}+\frac{3.12}{2}-\frac{1{,}50.3}{2}\right)+2.\frac{3.12}{2}+4.3+4.2+4.2=+91{,}0\text{tfm}$$

e.2) Força cortante em A à direita:

Para a determinação do valor máximo da força cortante no apoio à direita, deveremos estabelecer o carregamento abaixo esquematizado:



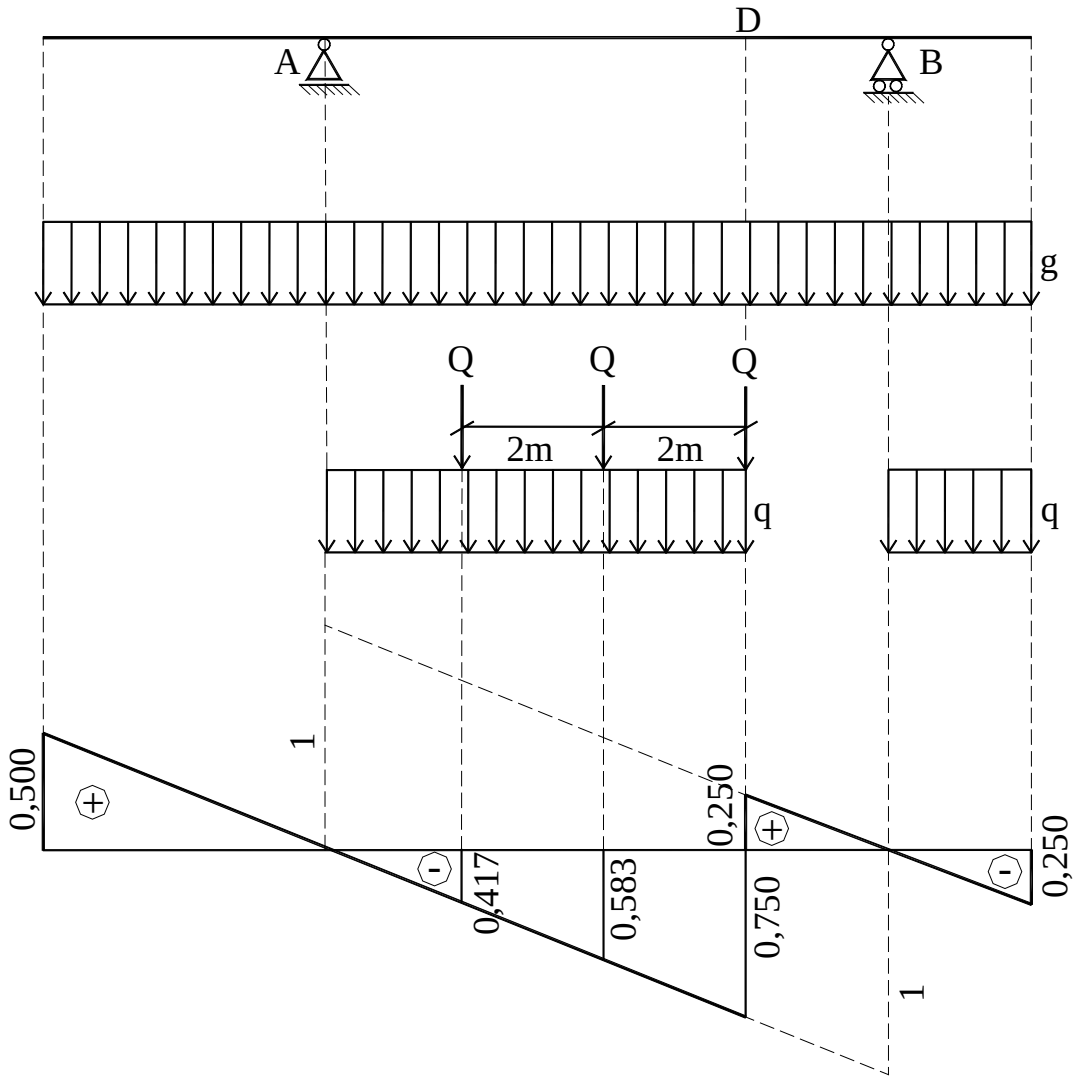
Portanto:

$$V_{máx,A_{dir}} = +4.\left(\frac{0{,}50.6}{2}+\frac{1.12}{2}-\frac{0{,}25.3}{2}\right)+2.\left(\frac{0{,}50.6}{2}+\frac{1.12}{2}\right)+4.1+4.0{,}833+4.0{,}667$$

$$V_{máx,A_{dir}} = = +53{,}5\text{tf}$$

e.3) <u>Força cortante em D:</u>

Para a determinação do valor mínimo da força cortante no ponto D, deveremos estabelecer o carregamento abaixo esquematizado:



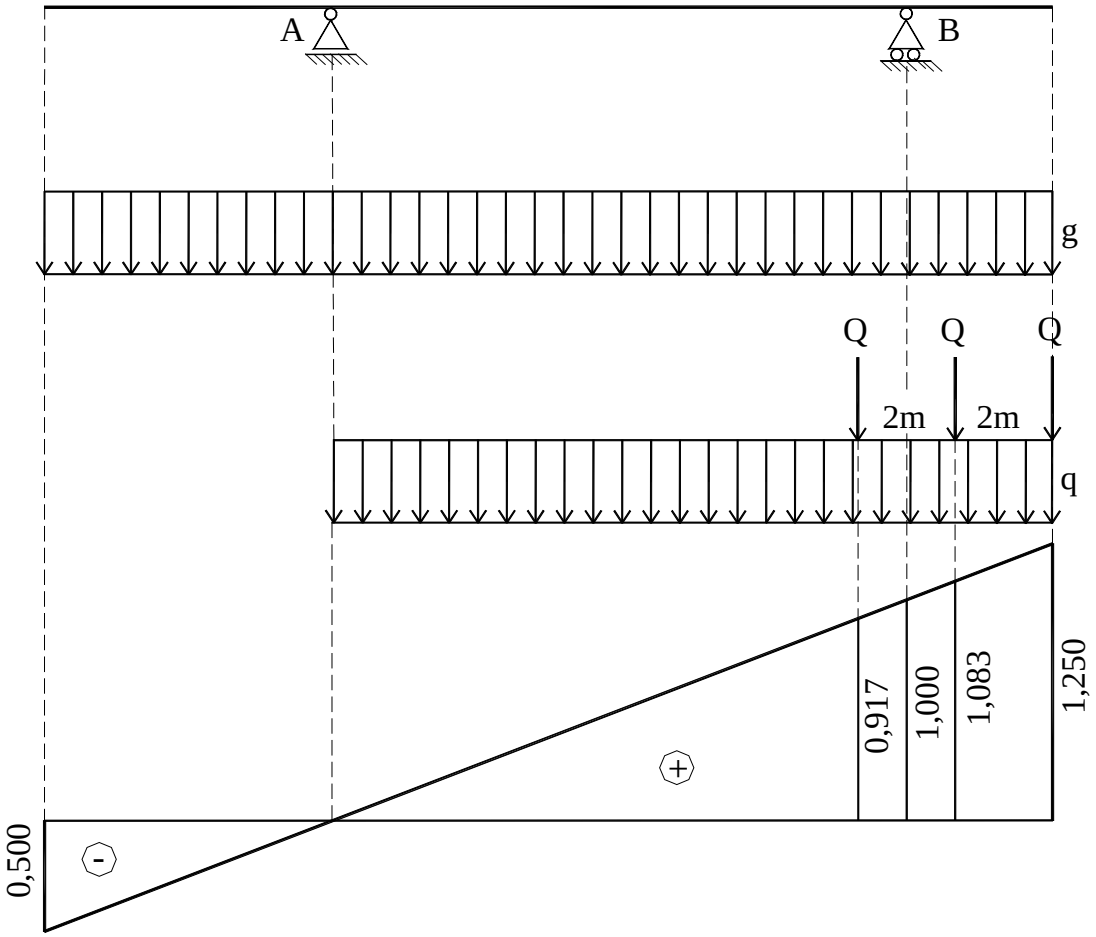
Portanto:

$$V_{\min,D} = 4.\left(\frac{0{,}50.6}{2} - \frac{0{,}75.9}{2} + \frac{0{,}25.3}{2} - \frac{0{,}25.3}{2}\right) - 2.\left(\frac{0{,}75.9}{2} + \frac{0{,}25.3}{2}\right) - 4.0{,}75 - 4.0{,}583 - 4.0{,}417$$

$$V_{\min,D} = -22tf$$

e.4) Reação vertical no apoio B:

Para a determinação do valor máximo da reação no apoio B deveremos estabelecer o carregamento abaixo esquematizado:



Portanto:

$$R_{V,máx,B} = 4.\left(-\frac{0,5.6}{2}+\frac{1,25.15}{2}\right)+2.\frac{1,25.15}{2}+4.1,25+4.1,083+4.0,917$$

$$R_{V,máx,B} = +63,25tf$$

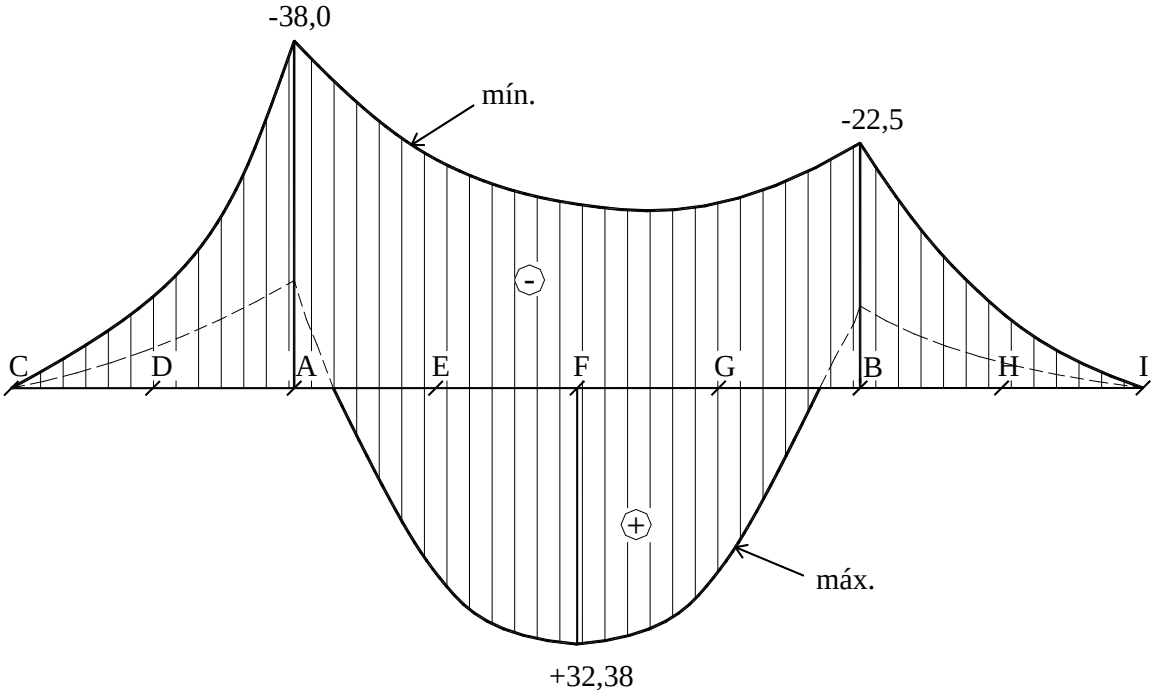
f) Envoltórias De Esforços Solicitantes – Exercício Geral:

Os conceitos básicos referentes às envoltórias dos esforços solicitantes em uma estrutura já foram expostos neste capítulo.

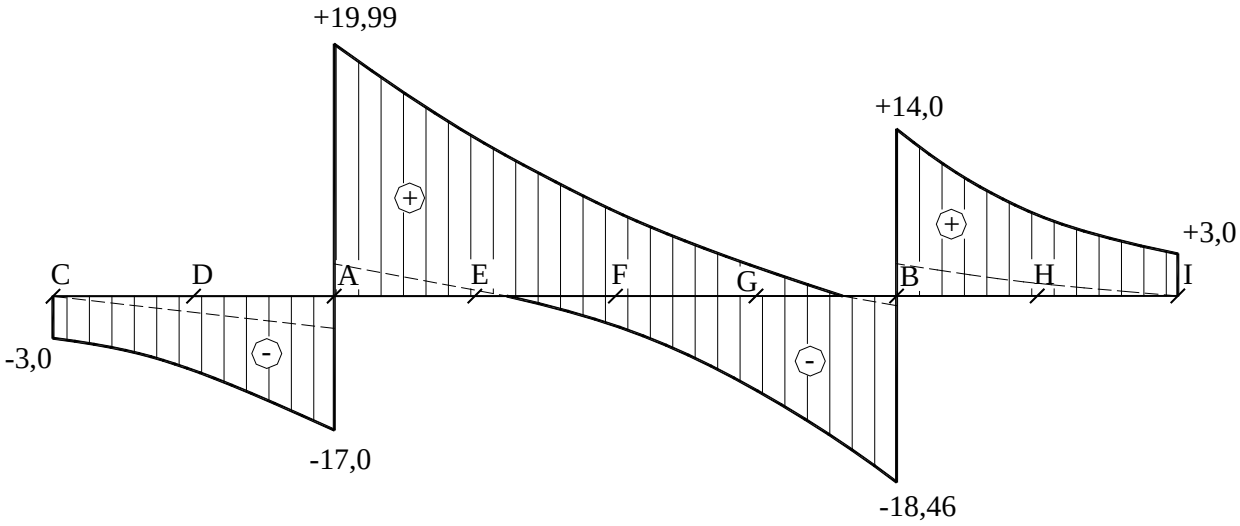
Nestas condições, iremos resolver neste item um exercício típico sobre envoltórias em vigas isostáticas, para o caso mais geral de uma viga bi-apoiada com dois balanços.

Procuraremos estabelecer as envoltórias de momentos fletores e de esforços cortantes na viga.

Envoltória dos momentos fletores



Envoltória das forças cortantes



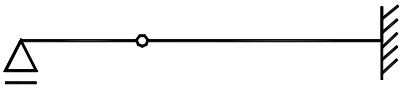
LISTAS DE EXERCÍCIOS

- Graus de estaticidade
- Treliças
- Vigas
- Cabos
- Arcos
- Grelhas

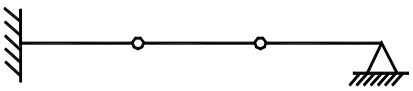
LISTA DE EXERCÍCIOS - **GRAUS DE ESTATICIDADE**

1) Determine o grau de estaticidade externo e interno das estruturas e verifique a estabilidade.

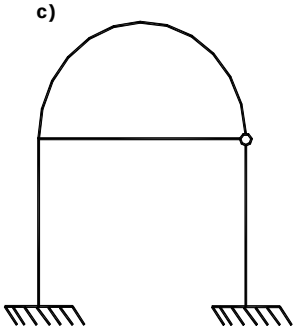
a)



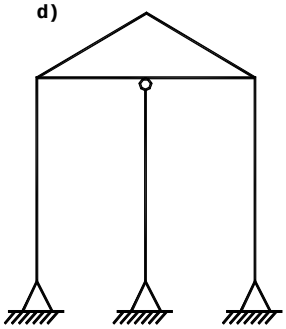
b)



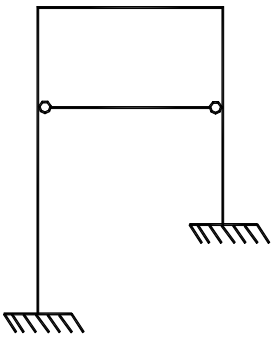
c)



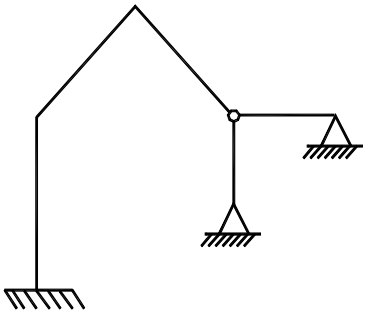
d)



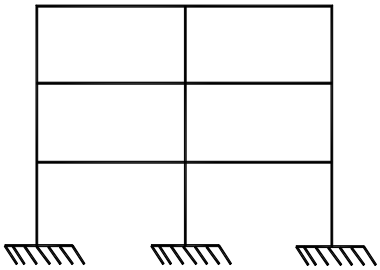
e)



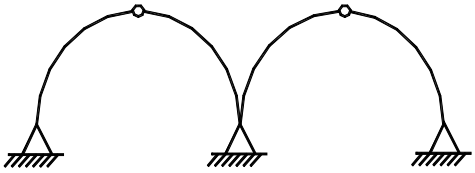
f)



g)



h)



RESPOSTAS – GRAUS DE ESTATICIDADE

a)
gh = 0 , ge = 1 , gi = - 1
Equilíbrio estável (restringida): isostática.

b)
gh = 0 , ge = 2 , gi = - 2
Equilíbrio instável (não restringida): hipostática.

c)
gh = 4 , ge = 3 , gi = 1
Equilíbrio estável (restringida): hiperestática.

d)
gh = 5 , ge = 3 , gi = 2
Equilíbrio estável (restringida): hiperestática.

e)
gh = 4 , ge = 3 , gi = 1
Equilíbrio estável (restringida): hiperestática.

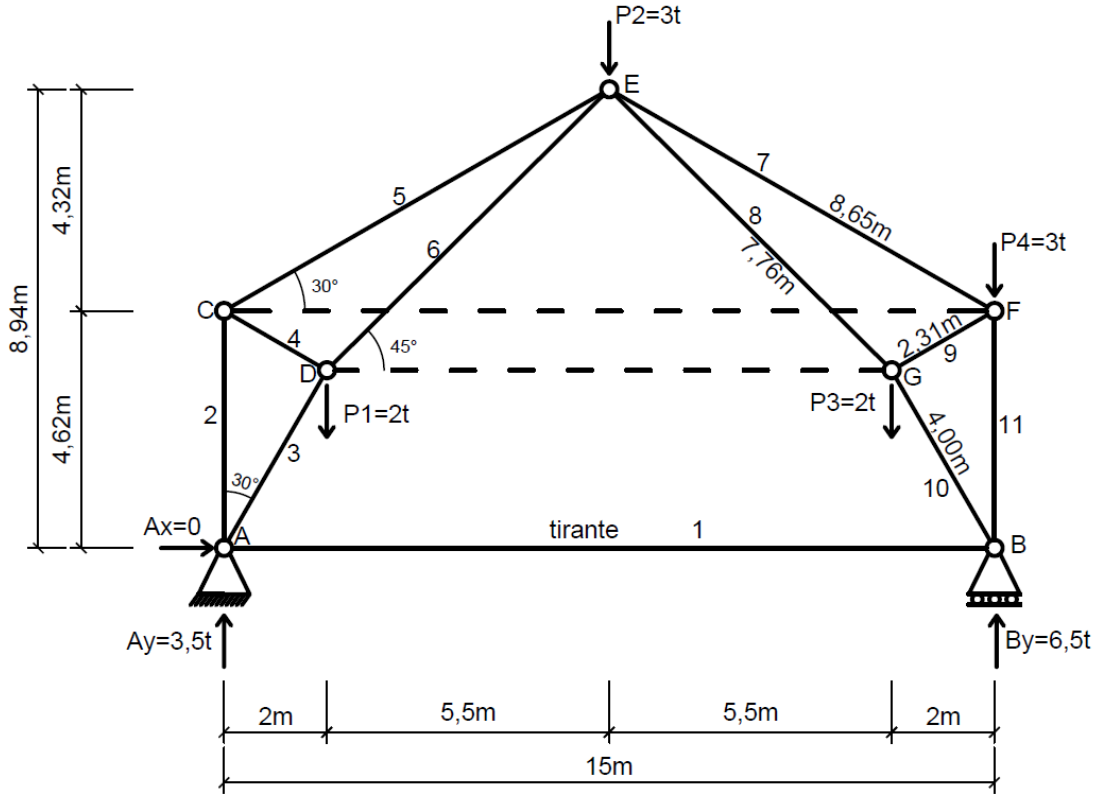
f)
gh = 2 , ge = 4 , gi = - 2
Equilíbrio estável (restringida): hiperestática.

g)
gh = 18 , ge = 6 , gi = 12
Equilíbrio estável (restringida): hiperestática.

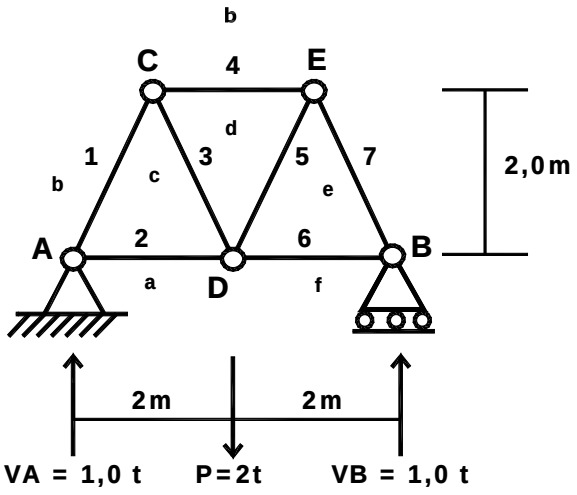
h)
gh = 1 , ge = 3 , gi = - 2
Equilíbrio estável (restringida): hiperestática.

LISTA DE EXERCÍCIOS – **TRELIÇAS**

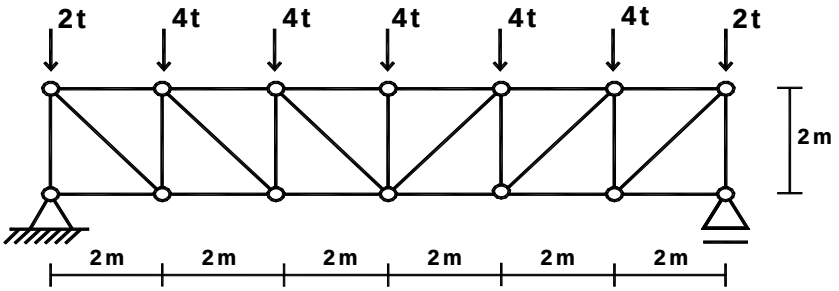
1) Determinar os esforços na treliça utilizando o processo gráfico:
CAMPANARI, VOL 3, P 853 – Adaptado.



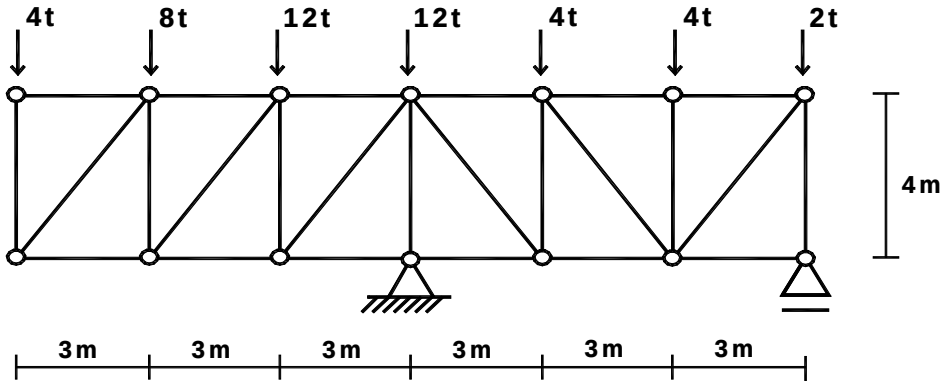
2) Determinar os esforços na treliça pelo processo gráfico:
CAMPANARI, VOL 3, P853.



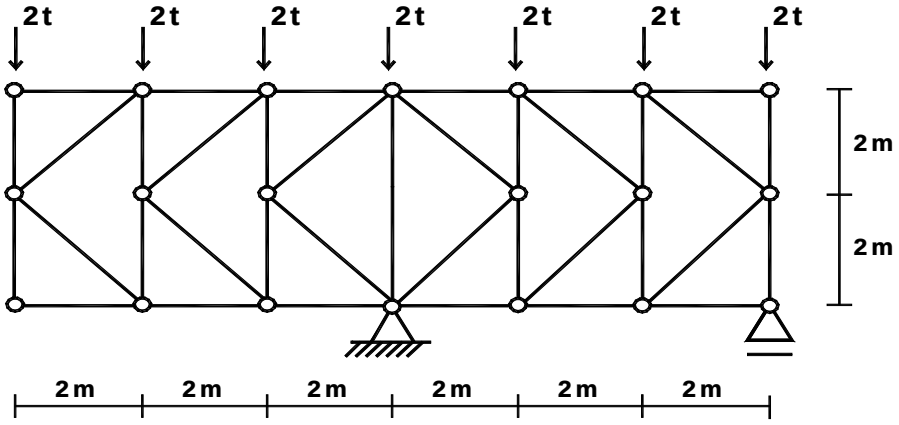
3) Obter os esforços normais atuantes nas treliças pelo método analítico de Ritter:
a)SÜSSEKIND, P 270



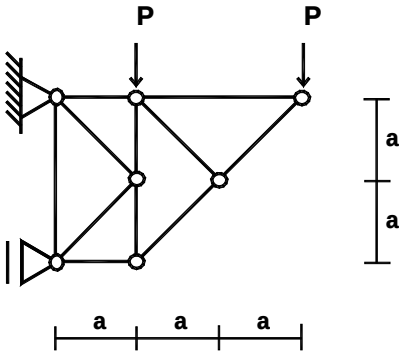
b) SÜSSEKIND, P 270.



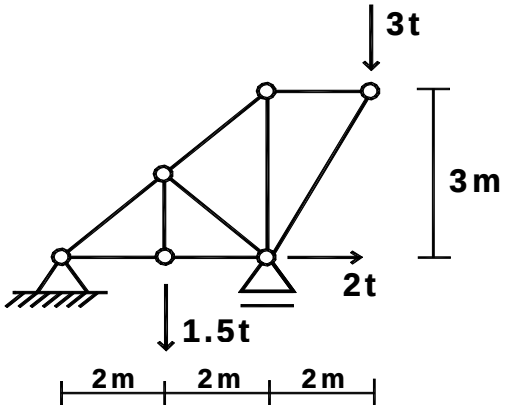
c) SÜSSEKIND, P. 270



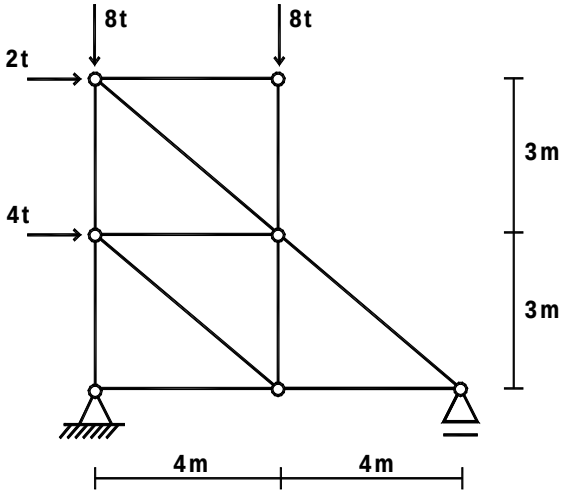
d)SÜSSEKIND, P 272



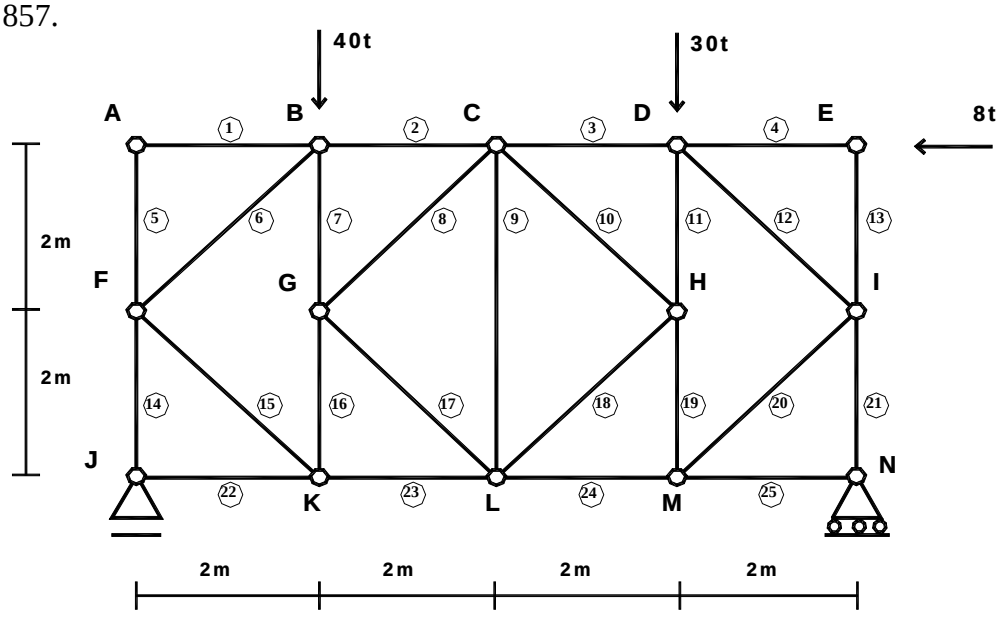
e)SÜSSEKIND, P.272



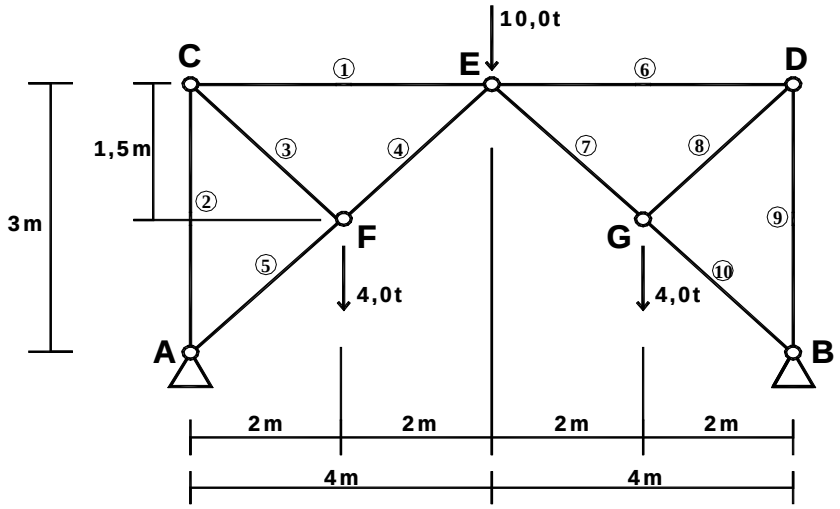
f) SÜSSEKIND, P. 272



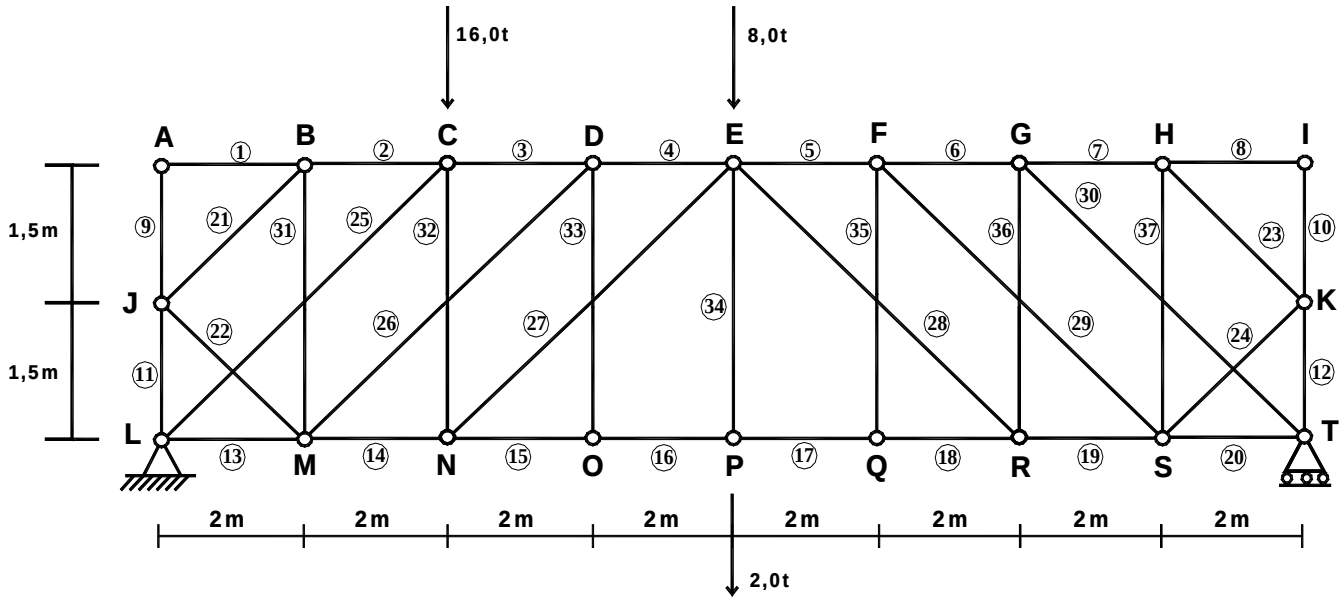
4) Determinar para treliça da figura:
a) os esforços nas barras (2), (7), (16), (23), usando Método de Ritter;
b) os esforços em todas as barras por método gráfico.
CAMPANARI,
VOL 3, P 857.



5) Obter os esforços normais atuantes na treliça pelo Método de Ritter:
CAMPANARI, VOL 3, P. 848.



6) Determinar os esforços nas barras (14), (27), (28) e (30) da treliça pelo Método de Ritter:
CAMPANARI, VOL 3, P. 850.



RESPOSTAS – TRELIÇAS

1) CAMPANARI, VOL 3, P 853.

Reações de Apoio

$\sum F_x = 0 \therefore A_x = 0$

$\sum M_A = 0$

$2P_1 + 7{,}5P_2 + 13P_3 + 15P_4 - 15B_y = 0 \therefore B_y = 6{,}5tf$

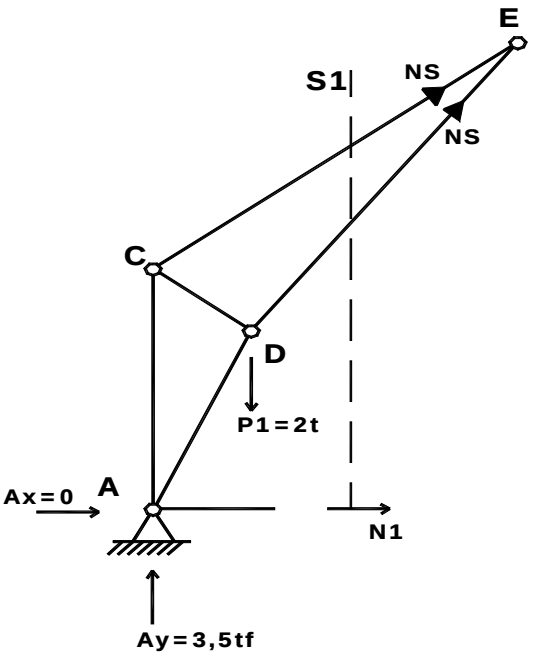
$\sum F_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = A_y + B_y \therefore A_y = 3{,}5tf$

Para iniciar o Cremona, precisa-se de um nó com no máximo 2 incógnitas. Como não existe, aplica-se o método de Ritter para encontrar o esforço no tirante (1):

$\sum M_E = 0$

$7{,}5A_y - 2tf * 5{,}5m - N_1 * 8{,}945m = 0$

$N_1 = 1{,}70tf\,(\text{Tração})$



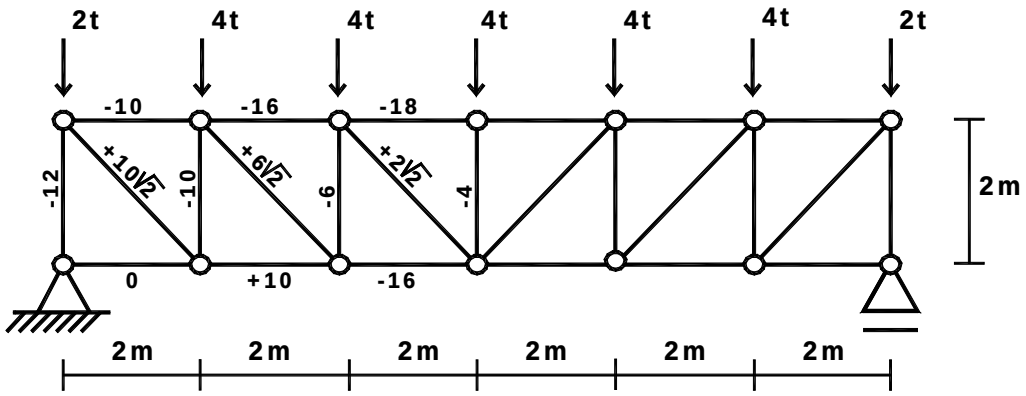
Agora é possível iniciar o cremona pelo nó A ou B (apenas 2 incógnitas).

Barra	Esforço Normal (tf)	Sentido
1	1,70	T
2	0,55	C
3	3,40	C
4	0,55	T
5	0,55	C
6	1,74	C
7	0,55	C
8	1,74	C
9	0,55	T
10	3,41	C
11	3,25	C

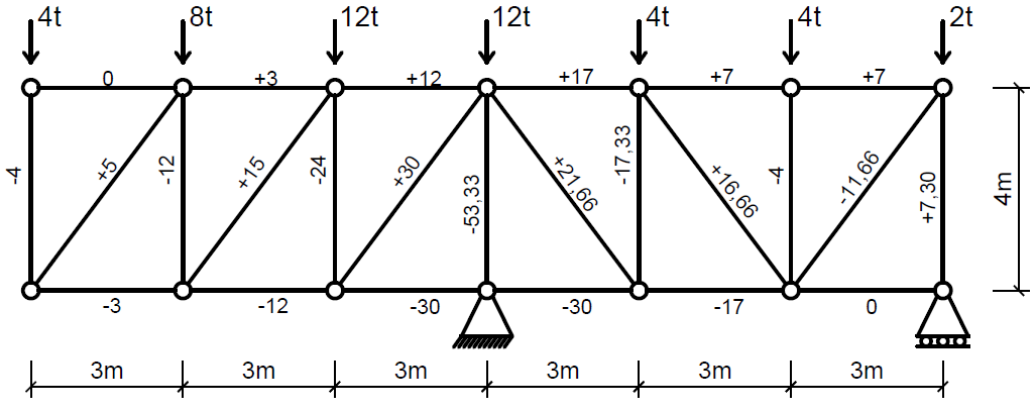
2) CAMPANARI, VOL 3, P853.

Barra	Esforço Normal	Sentido
1	1,12 tf	C
2	0,50 tf	T
3	1,11 tf	T
4	1,00 tf	C
5	1,11 tf	T
6	0,50 tf	T
7	1,12 tf	C

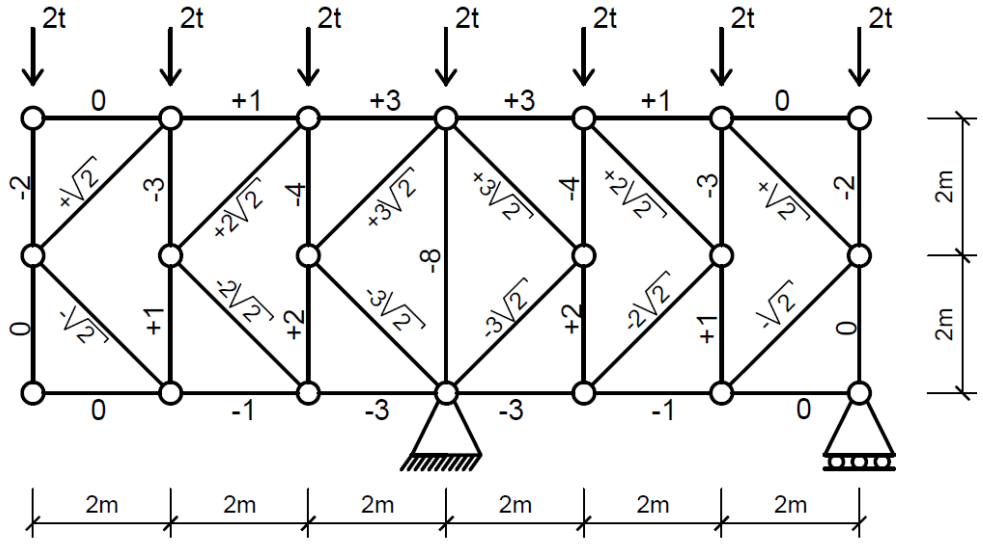
3)
a)SÜSSEKIND, P 270



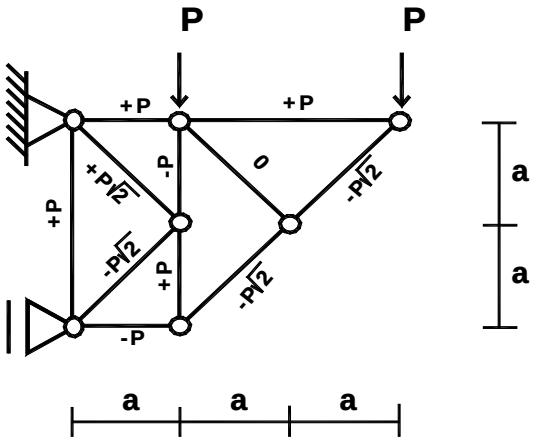
b)SÜSSEKIND, P 270.



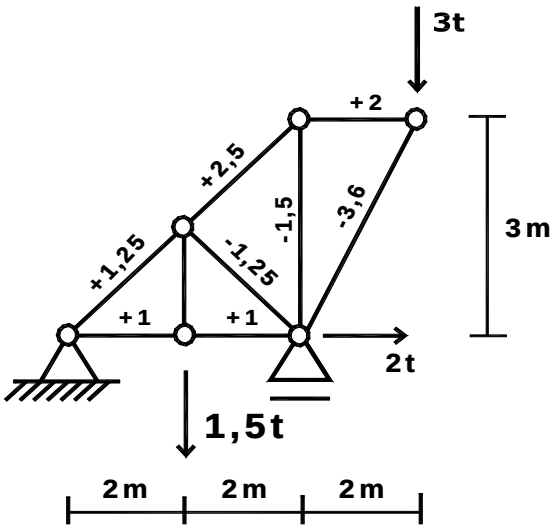
c)SÜSSEKIND, P. 271



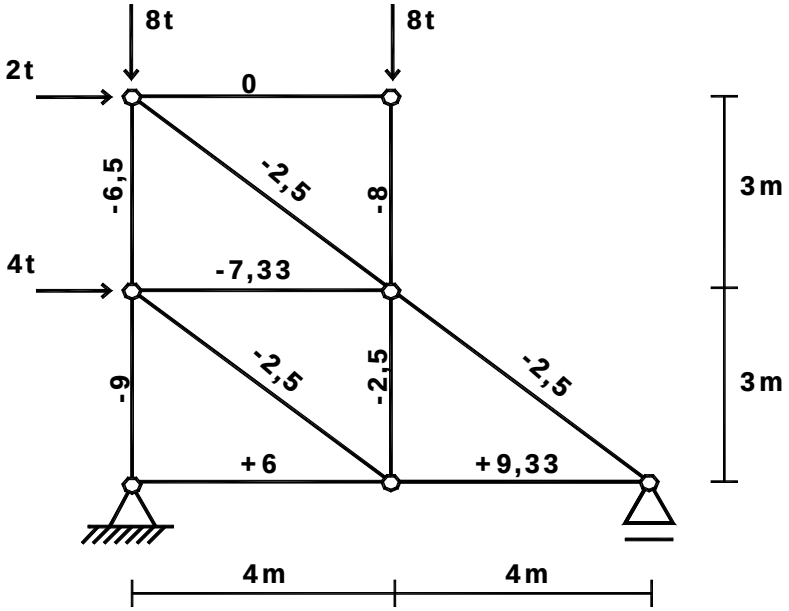
d)SÜSSEKIND, P 272



e)SÜSSEKIND, P.272



f)SÜSSEKIND, P. 272



4) CAMPANARI, VOL 3, P 857.
N_2 = -20,75 tf
N_{23} = +12,75tf
N_7 = -19,25 tf
N_{16} = -20,75 tf

5) CAMPANARI, VOL 3, P. 848.

Barra	Esforço Normal	Sentido
1	2,67 tf	C
2	2,00 tf	C
3	3,33 tf	T
4	8,33 tf	C
5	11,67 tf	C
6	2,67 tf	C
7	8,33 tf	C
8	3,33 tf	T
9	2,00 tf	C
10	11,67 tf	C

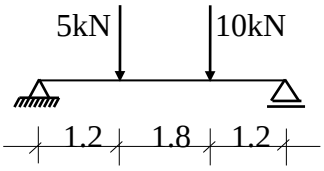
6) CAMPANARI, VOL 3, P. 850.

Barra	Esforço Normal	Sentido
14	22,67 tf	T
27	1,66 tf	C
28	15,00 tf	C
30	15,00 tf	C

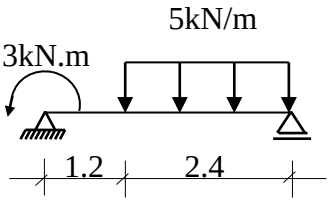
LISTA DE EXERCÍCIOS - **VIGAS**

1. Traçar diagramas pelo método das seções (dimensões em metros).

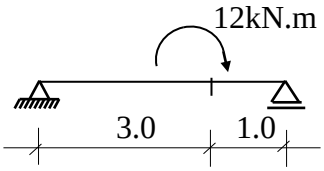
a)



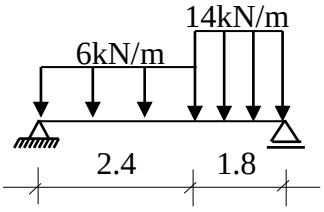
b)



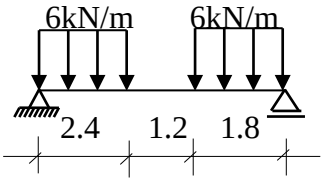
c)



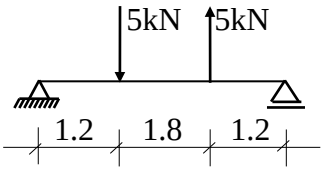
d)



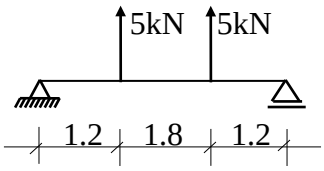
e)



f)

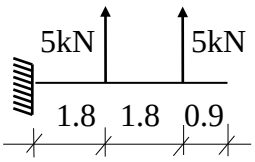


g)

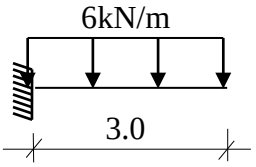


2. Traçar diagramas e identificar nos diagramas os valores máximos (dimensões em metros):

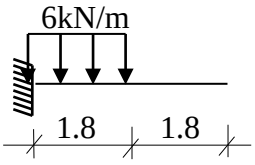
a)



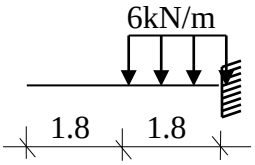
b)



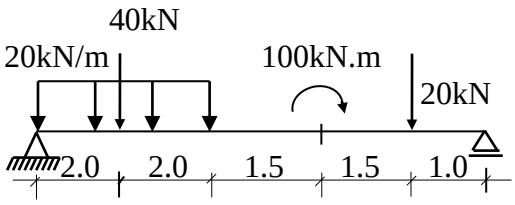
c)



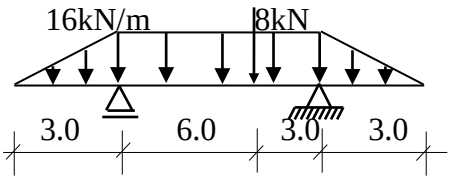
d)



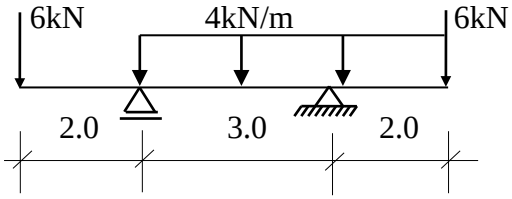
e)



f)



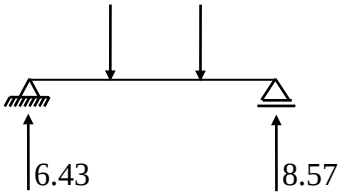
g)



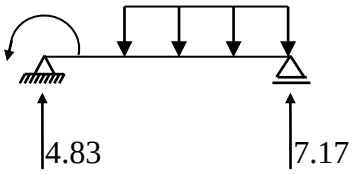
RESPOSTAS – VIGAS

1)

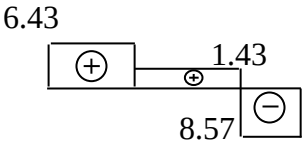
a)



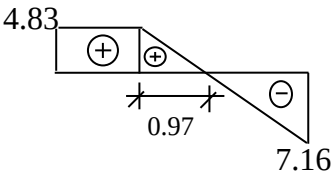
b)

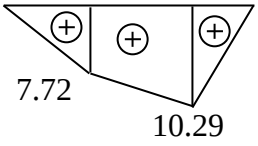


Nulo — DEN (kN) — Nulo

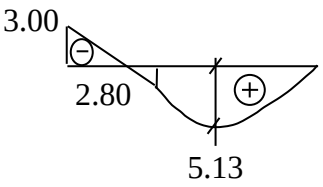


DEC (kN)

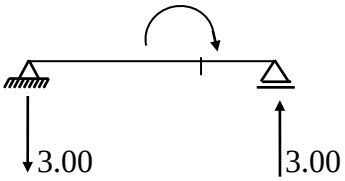




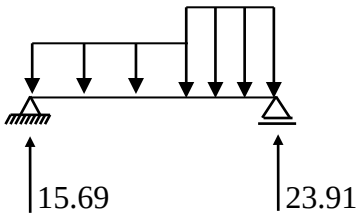
DMF (kN.m)



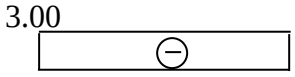
c)



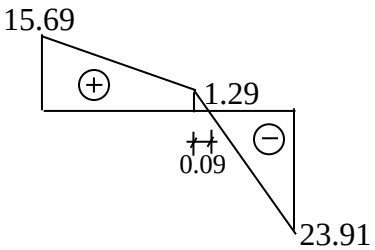
d)

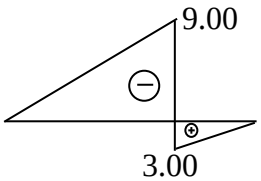


Nulo — DEN(kN) — Nulo

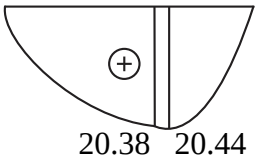


DEC(kN)

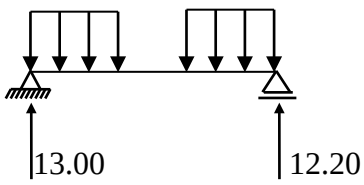




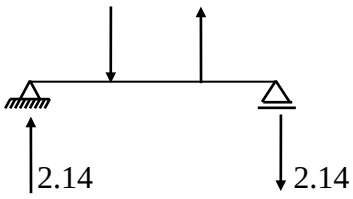
DMF(kN.m)



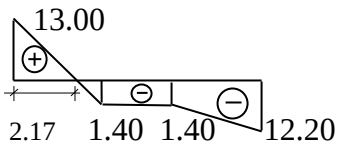
e)



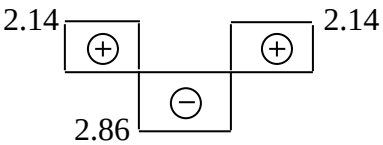
f)

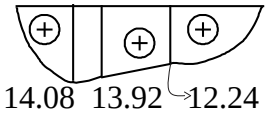


Nulo DEN (kN) Nulo

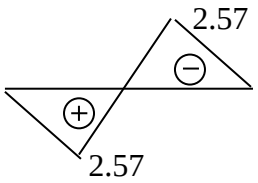


DEC(kN)

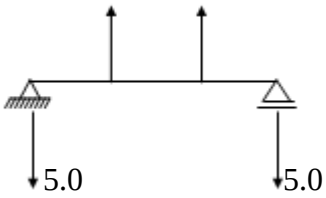




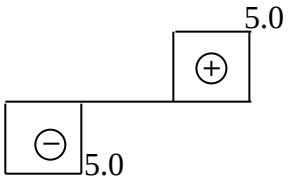
DMF (kN.m)



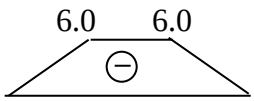
g)



Nulo DEN(kN)



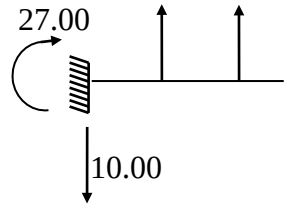
DEC (kN)



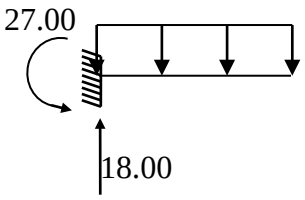
DMF(kN.m)

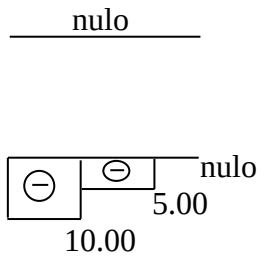
2)

a)

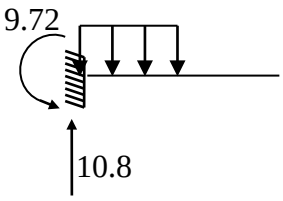

27.00
10.00

b)

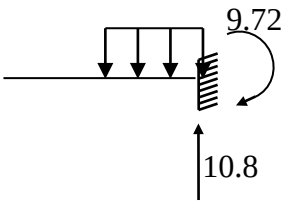

27.00
18.00

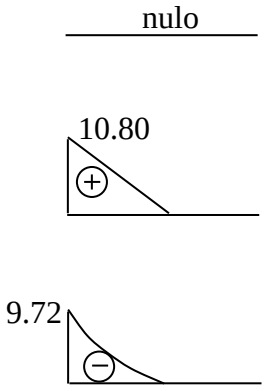

nulo
DEN(kN)
nulo
nulo
5.00
10.00
DEC(kN)
18.00
nulo
9.00
27.00
DMF(kN.m)
27.00

c)

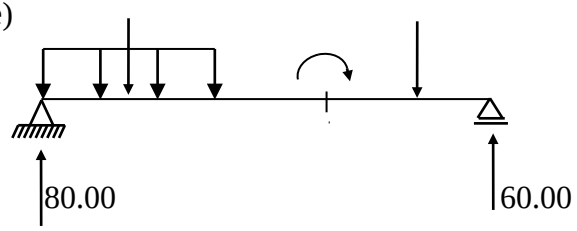

9.72
10.8

d)

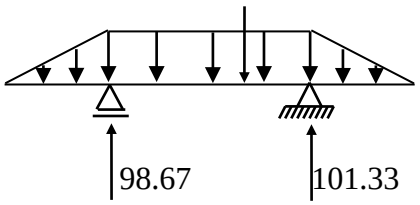

9.72
10.8


nulo
DEN(kN)
nulo
10.80
DEC(kN)
10.80
9.72
DMF(kN.m)
9.72

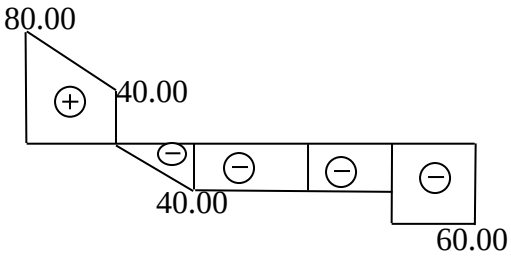
e)



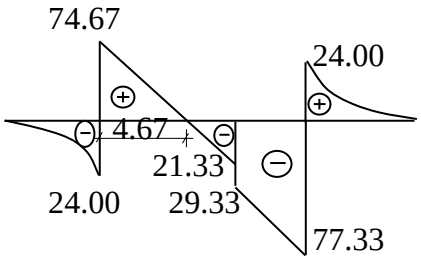
f)

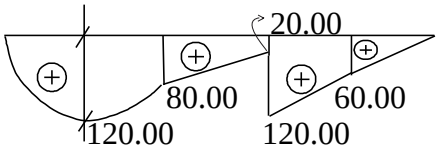


nulo — DEN(kN) — nulo

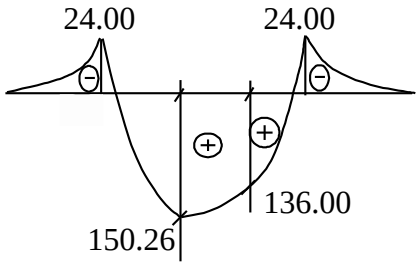


DEC(kN)

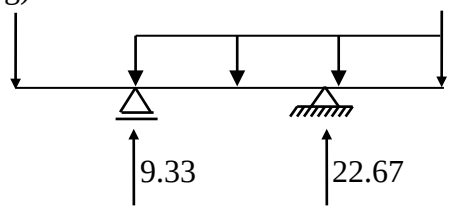




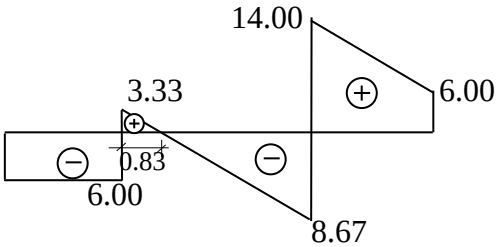
DMF(kN.m)



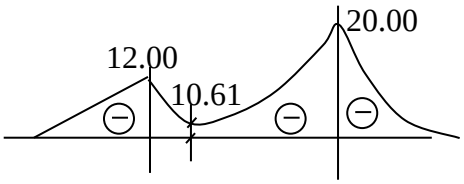
g)



nulo — DEN(kN)



DEC(kN)



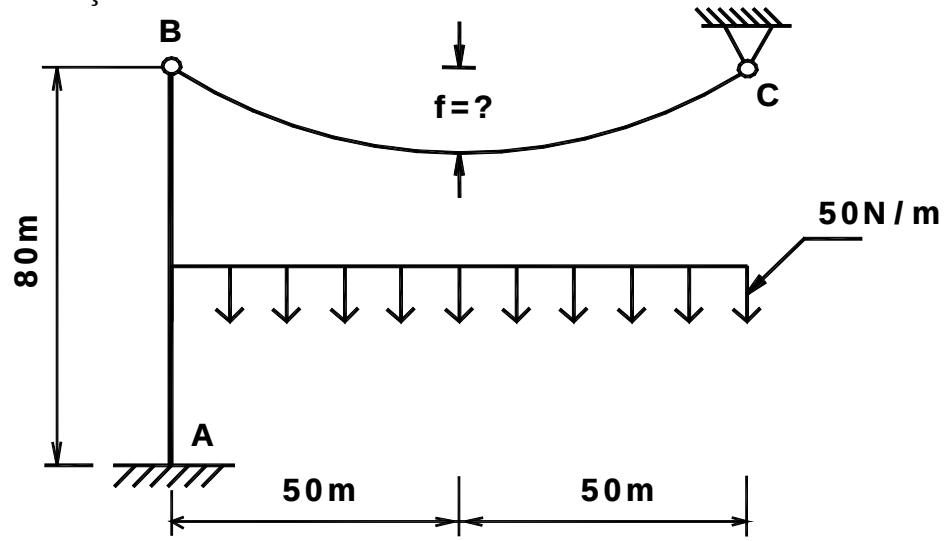
DMF(kN.m)

LISTA DE EXERCÍCIOS - **CABOS**

1) O cabo de aço de uma ponte pênsil de 600 m de vão, cujos pontos de suspensão estão no mesmo nível, deve suportar uma carga total máxima uniformemente distribuída de 3,5 kN/m. Se a flecha do cabo é de 90 m, pede-se:
a) determinar a área necessária de sua seção transversal, sabendo-se que a tensão admissível deste aço à tração é de $\overline{\sigma}_t = 200$ MPa;
b) calcular o comprimento total do cabo.
R: a) A = 102 cm^2
b) L_c = 636 m

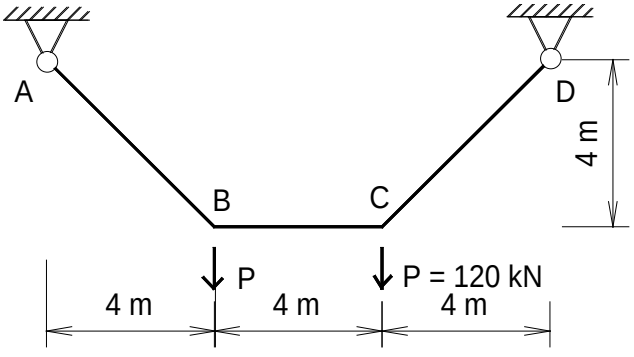
2) O cabo de uma linha de transmissão, suspenso entre dois pontos no mesmo nível, deve vencer um vão de 80 m e suportar uma carga uniformemente distribuída de 0,05 kN/m. Se o comprimento total do cabo é 110 m, pergunta-se qual sua flecha e qual o valor do esforço normal máximo atuante.
R: f = 30 m ; N_{max} = 2,4 kN

3) O cabo BC suporta uma carga uniformemente distribuída de 50 N/m e possui comprimento total de 120 m. Se no ponto A atua um momento fletor de 200 kN.m, calcular:
a) a flecha **"f"** do cabo;
b) o valor do esforço normal máximo no cabo.

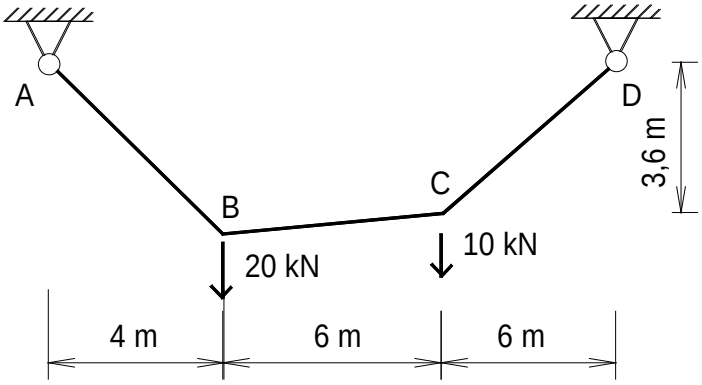


R: a) f = 25 m
b) N_{max} = 3,54 kN

4) Determinar as forças de tração nos trechos dos cabos a seguir:
a)



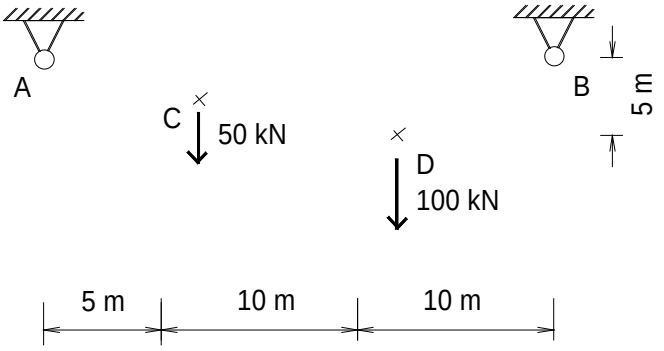
b)



R: a) $N_{AB} = 169,7$ kN $= N_{CD}$
$N_{BC} = 120,0$ kN
b) $N_{AB} = 28,0$ kN
$N_{BC} = 20,9$ kN
$N_{CD} = 23,7$ kN

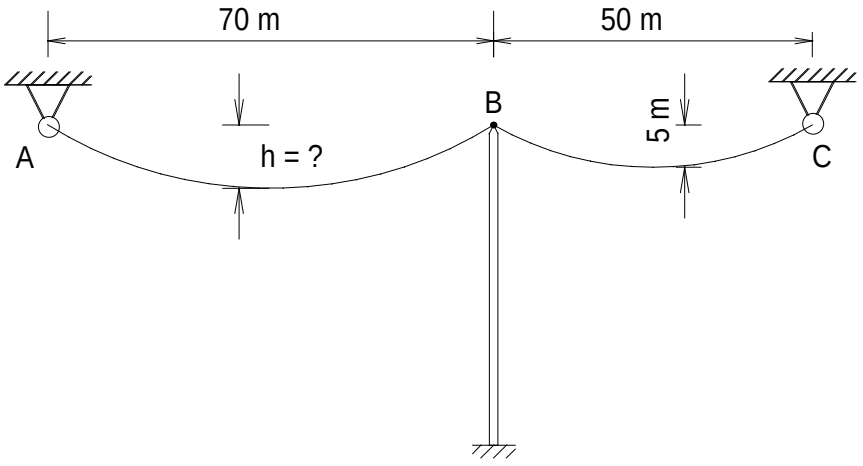
5) Determinar a forma funicular e as forças de tração no cabo AB submetido ao carregamento da figura, sabendo que o ponto D está situado 5 m abaixo da horizontal AB:

R: $N_{AC} = 161,2$ kN
$N_{BD} = 156,5$ kN
$N_{CD} = 143,2$ kN
$y_C = 2,86$ m
$y_D = 5,00$ m



6) Dois cabos parabólicos são unidos no Ponto C, no topo de uma torre. Considerando que a torre não deve ser solicitada por componentes horizontais, determinar h:

R: h = 9,8 m

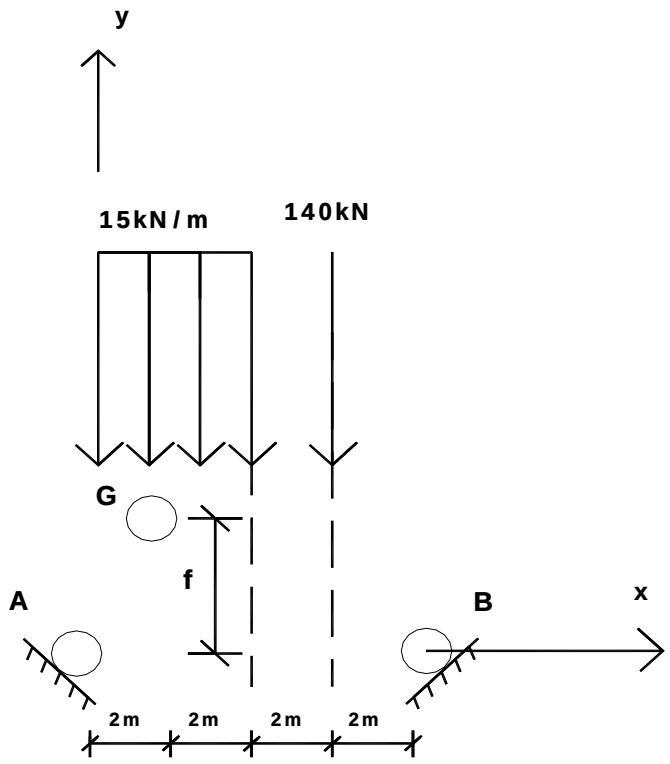


LISTA DE EXERCÍCIOS - **ARCOS**

1) Calcular o valor de **f** para que o arco triarticulado **AGB** tenha a geometria da linha de Pressões do carregamento indicado e para que o esforço normal máximo valha 200 kN (compressão). Pede-se também:

a) aspecto a Linha de Pressões;
b) equações da Linha de Pressões em todos os trechos, referidas aos eixos x e y;
c) esforço normal em **G**;
d) inclinação da Linha de Pressões no apoio A;
e) esforço normal mínimo.

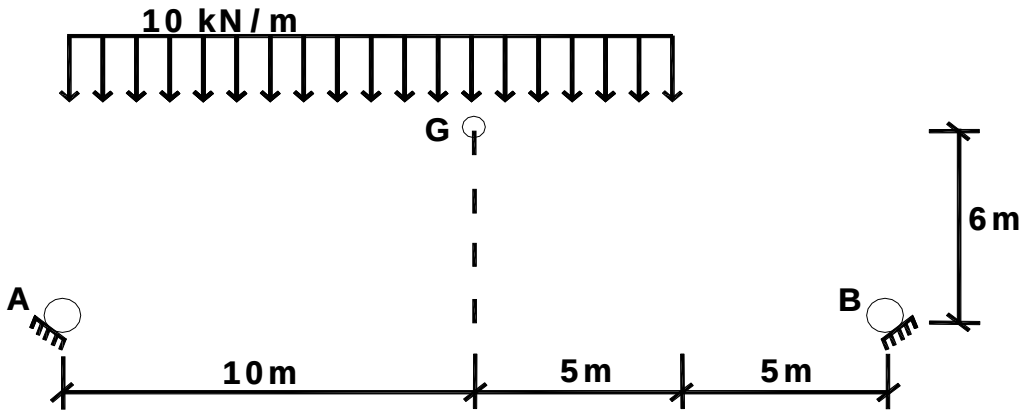
R: c) N_G = 167,6 kN
d) $\varphi = 26{,}57°$
e) N_{min} = 161,2 kN



2) Deseja-se construir um sistema triarticulado **AGB** cuja geometria coincida com a Linha de Pressões do carregamento da figura. Pedem-se:

a) equações da Linha de Pressões em todos os trechos, referidas aos eixos x e y;
b) esforço normal máximo atuante.

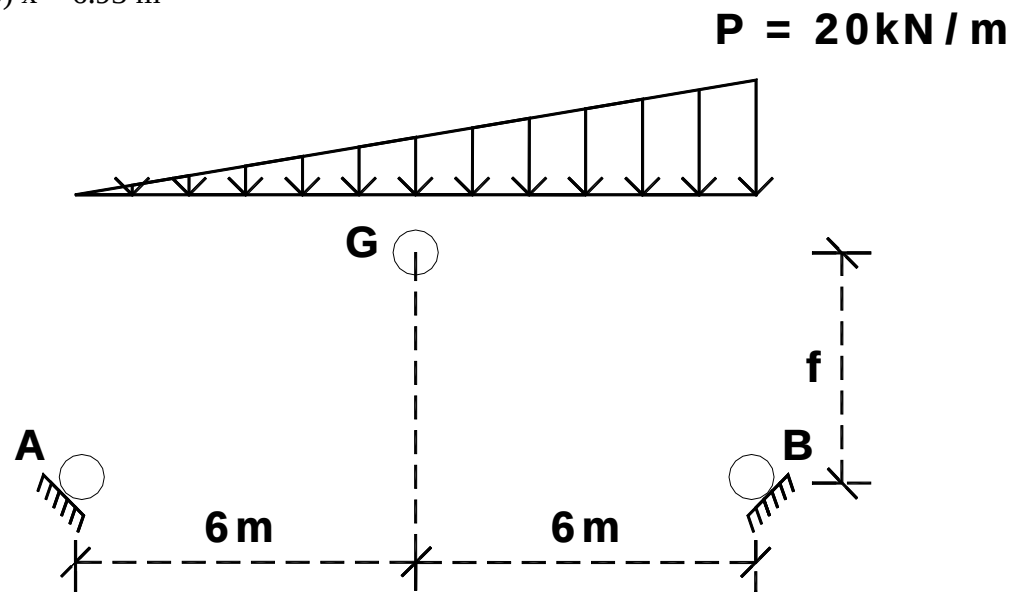
R: b) N_{max} = 118.77 kN



3) O triarticulado **AGB** deve coincidir com a geometria da Linha de Pressões do carregamento indicado, de tal forma que o esforço normal seja 100 kN (compressão). Pedem-se:

a) equação da tangente da Linha de Pressões com a horizontal;
b) abscissa da seção que tem o esforço normal mínimo.

R: b) x = 6.93 m

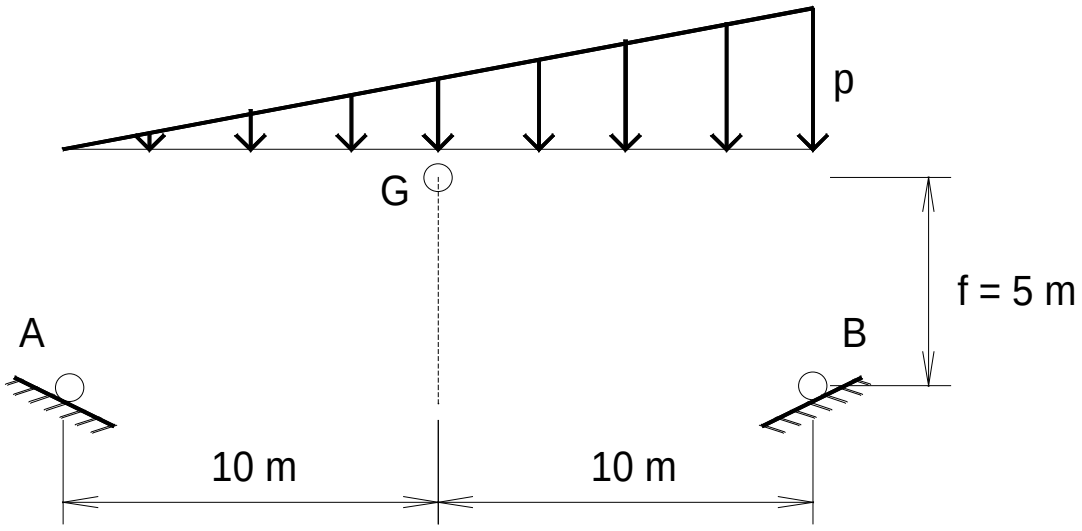


4) Deseja-se construir um triarticulado **AGB** que trabalha segundo a Linha de Pressões para o carregamento indicado, de tal forma que o esforço normal máximo seja de 250 kN (compressão). Pedem-se:

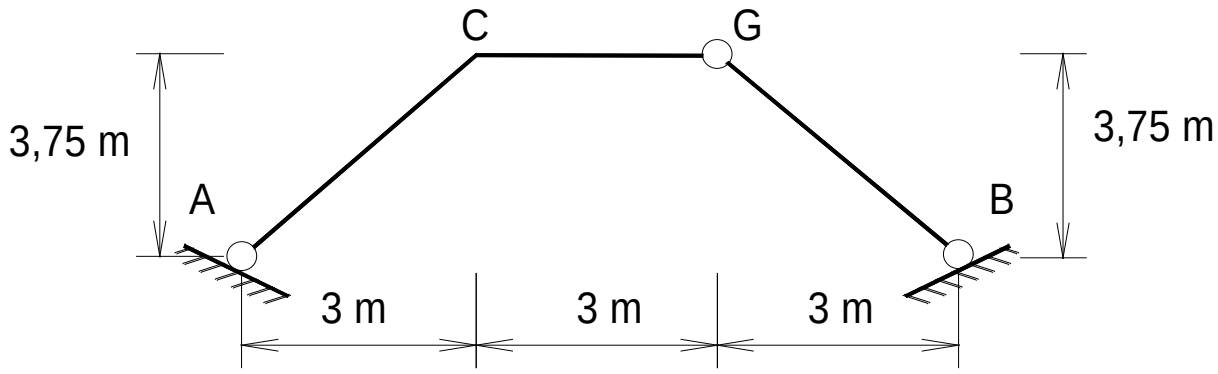
a) valor de **p**;
b) equação da Linha de Pressões;
c) abscissa da seção que tem o esforço normal mínimo;
d) equação da tangente da Linha de Pressões com a horizontal.

R:

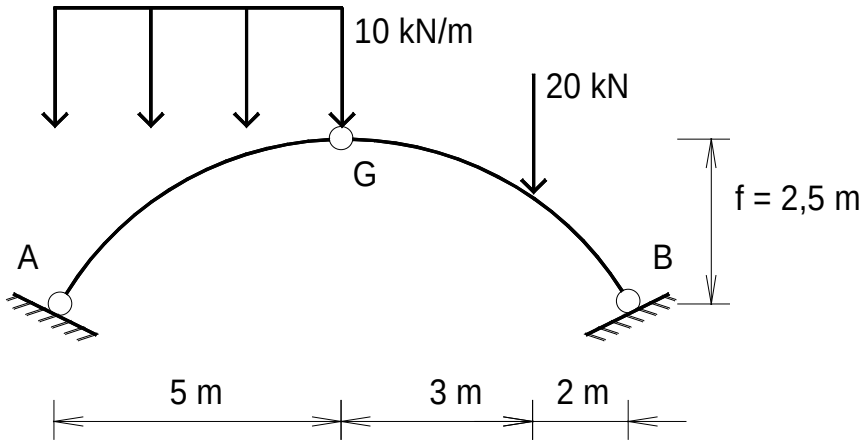
a) p = 30 kN/ m
c) x = 11,54 m



5) Reconstituir o carregamento do triarticulado **AGB**, tal que sua geometria coincida com sua Linha de Pressões. Sabe-se que o esforço normal mínimo atuante é 16 kN (compressão).

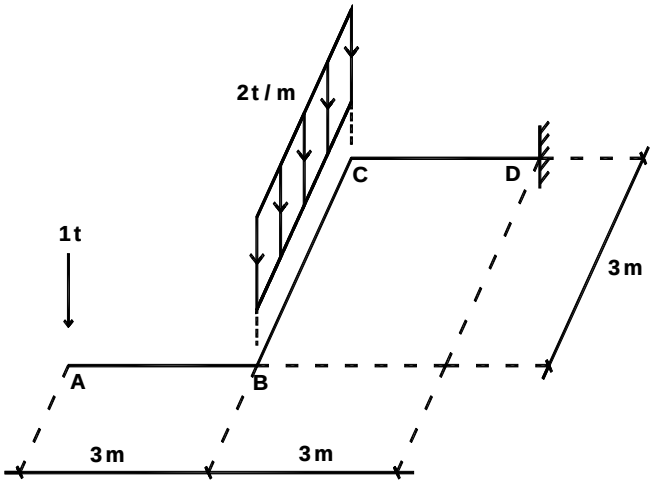


6) Trace os diagramas de esforços (esforço normal, esforço cortante e momento fletor) para o arco de geometria descrita por uma parábola do 2º grau:
Obs: calcule o valor dos esforços a cada metro para traçar os diagramas.

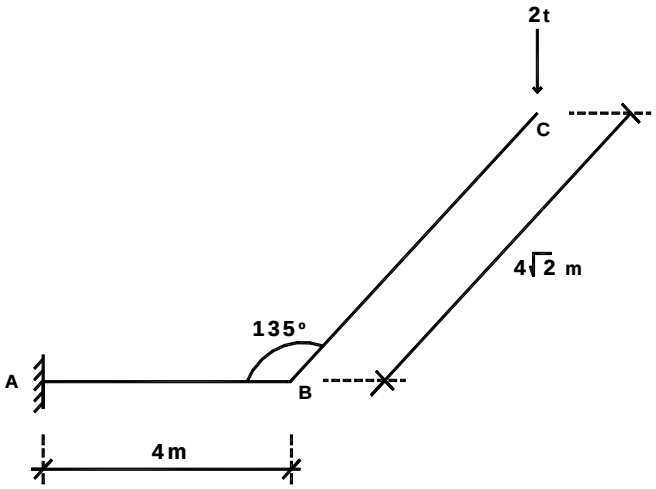


LISTA DE EXERCÍCIOS - **GRELHAS**

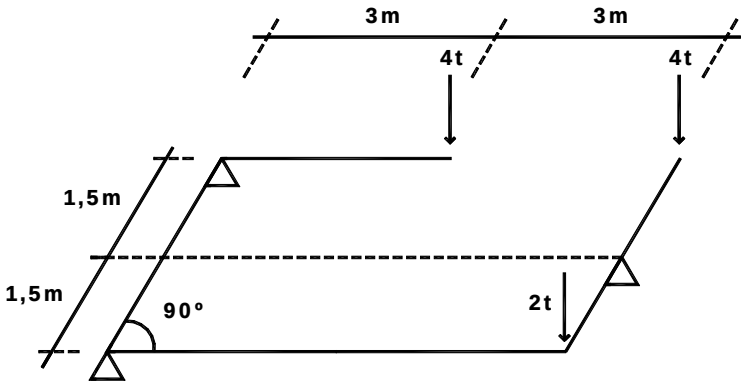
1) Obter os diagramas solicitantes para a grelha abaixo, cujas barras formam, em todos os nós, ângulos de 90º.



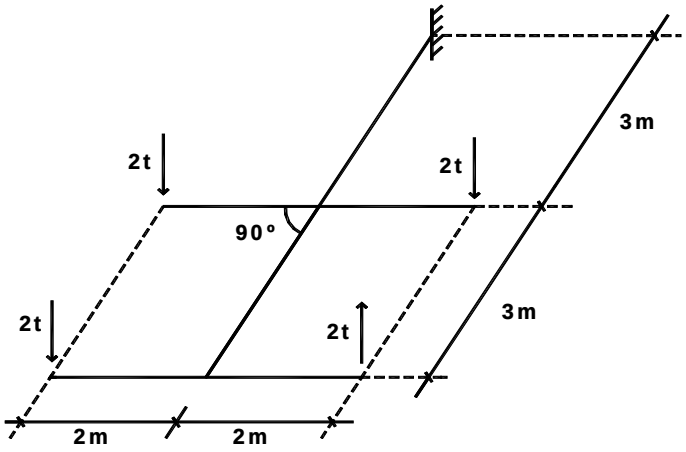
2) Obter os diagramas solicitantes para a grelha abaixo, em que a carga de 2t é perpendicular ao plano ABC.



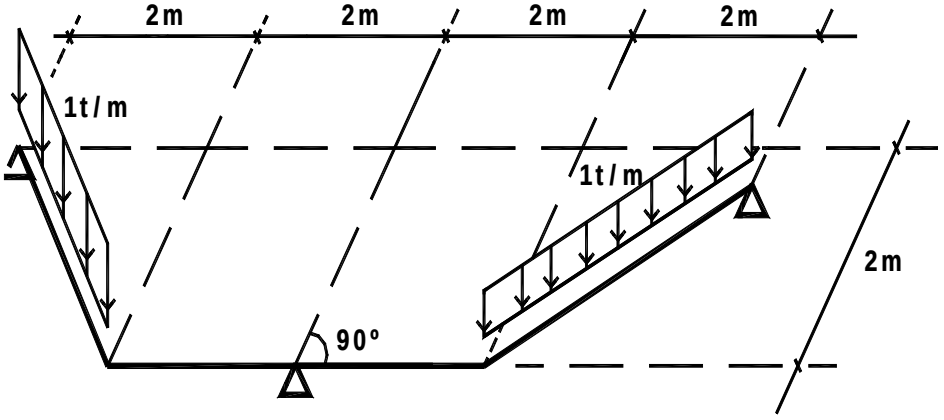
3) Traçar os diagramas solicitantes para a grelha a seguir:



4) Traçar os diagramas solicitantes para a grelha a seguir:



5) Traçar os diagramas solicitantes para a grelha a seguir:

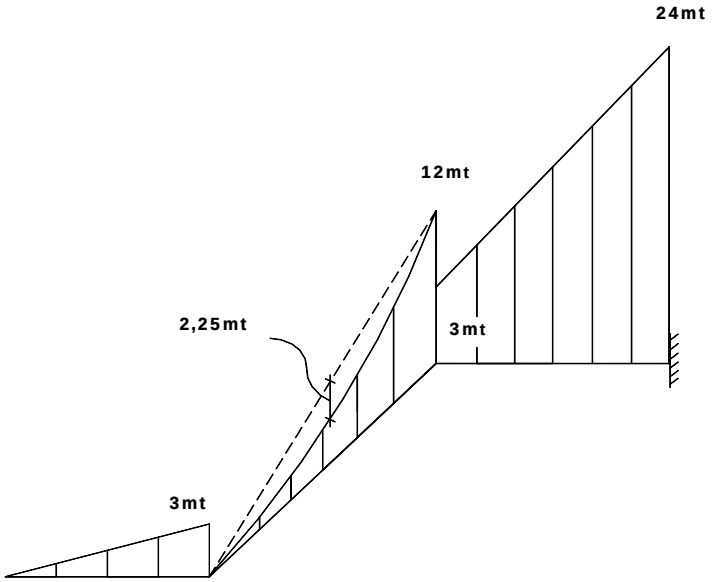


Fonte: Süssekind, Vol. 1, Cap. V

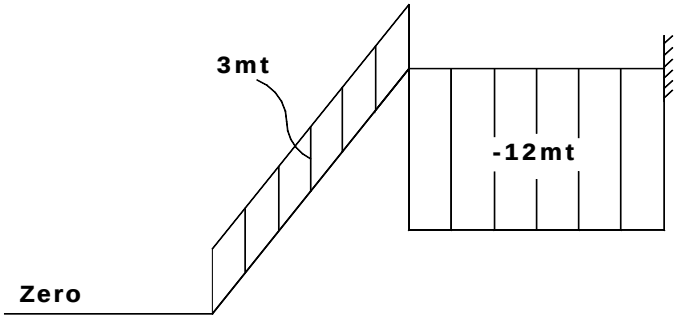
RESPOSTAS – GRELHAS

1)

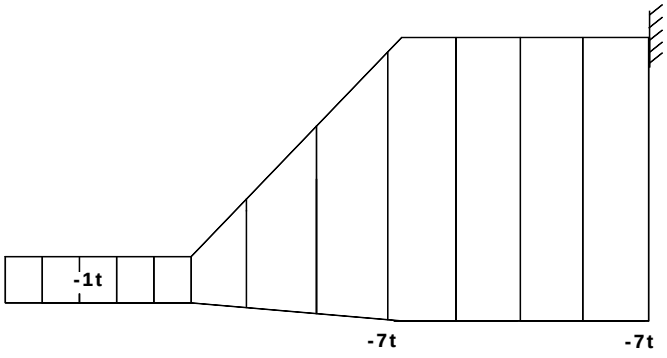
M (em mt)



T (em mt)

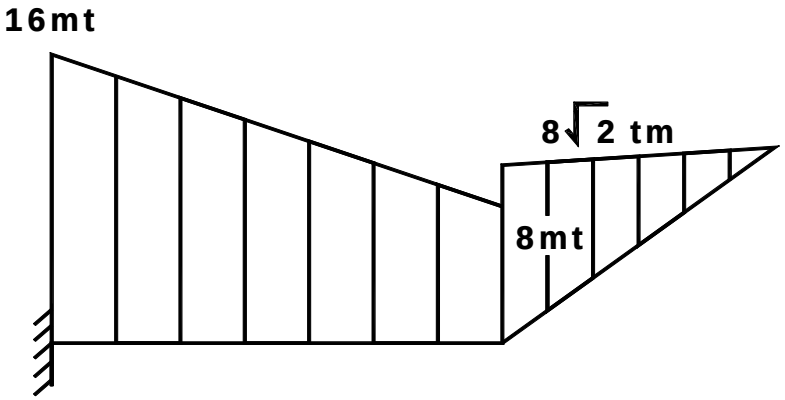


V (em t)

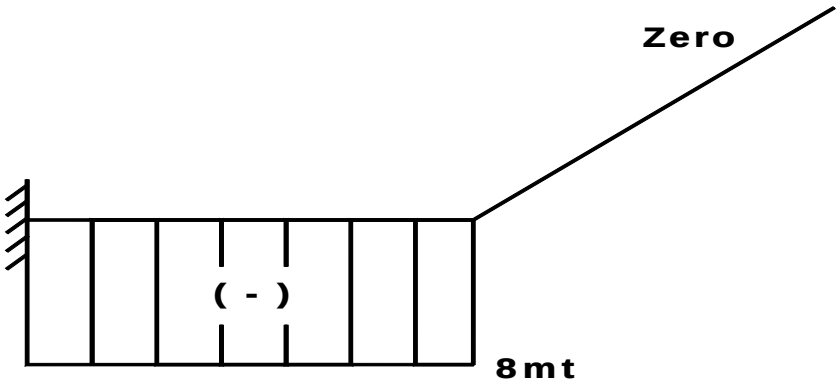


2)

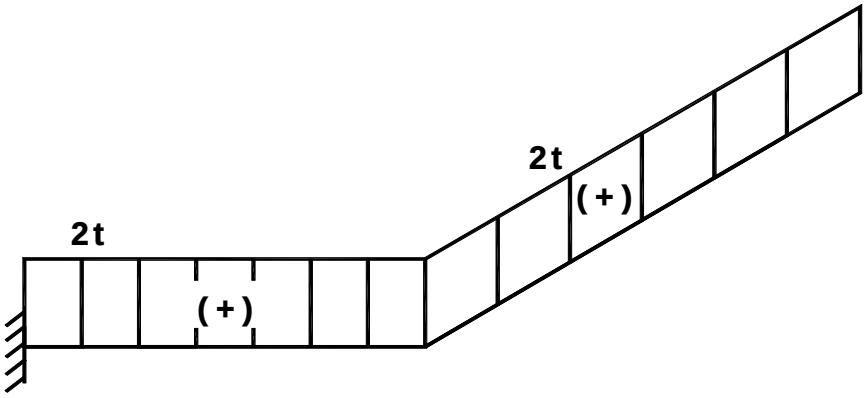
M (em mt)



T (em mt)

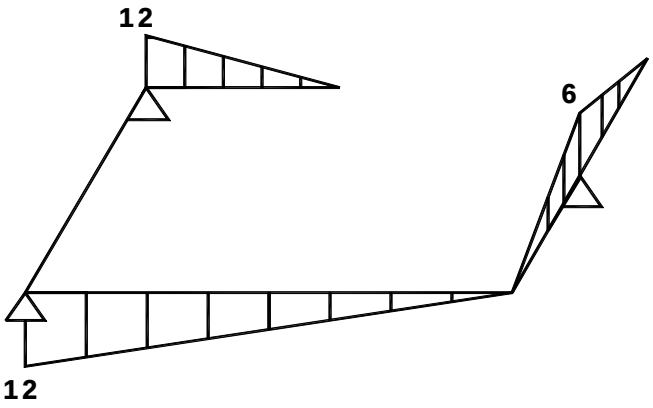


V (em t)

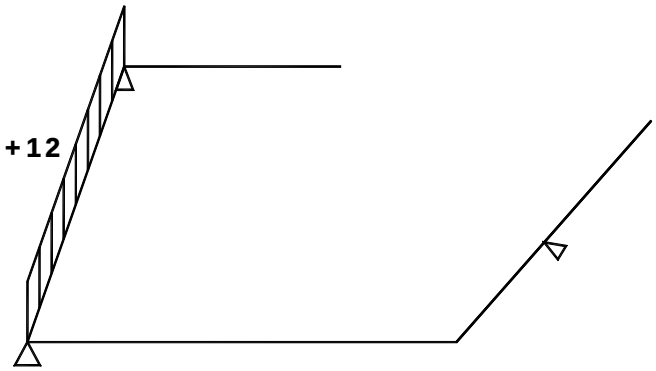


3)

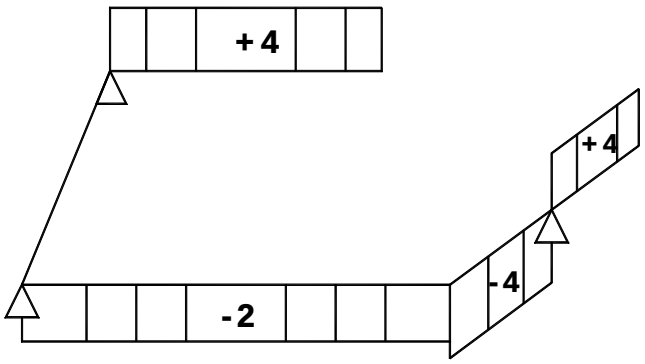
M (em mt)



T (em mt)

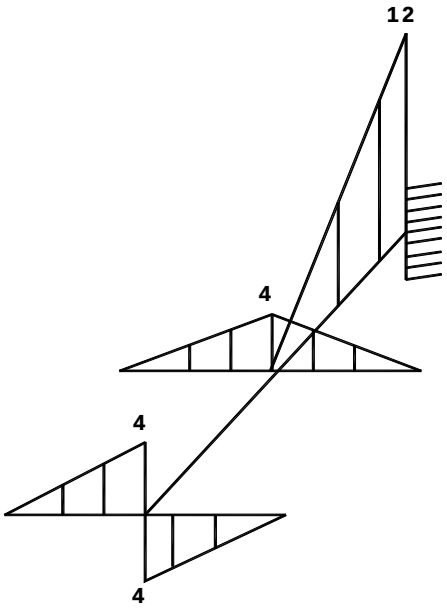


V (em t)

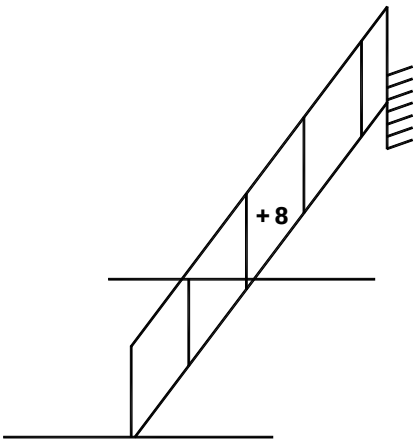


4)

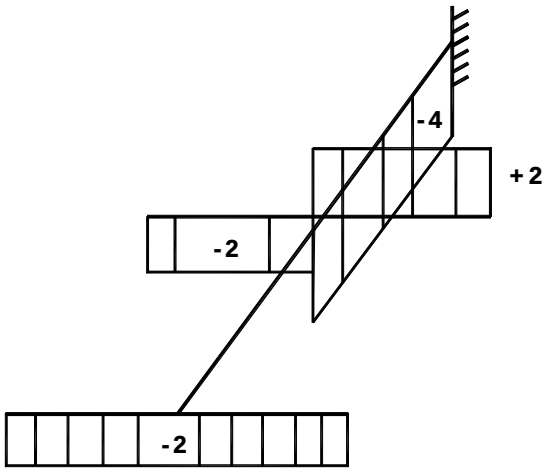
M (em mt)



T (em mt)

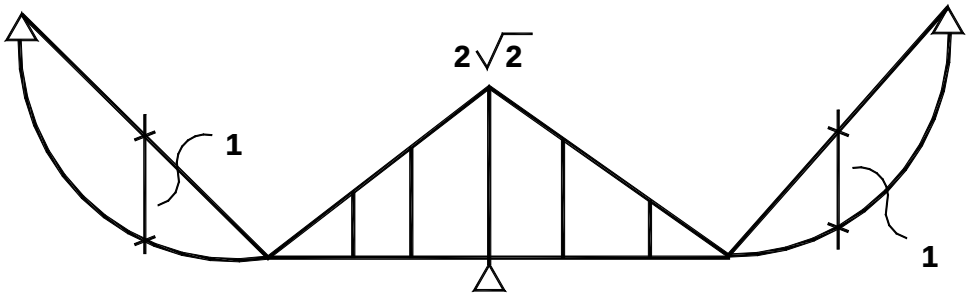


V (em t)

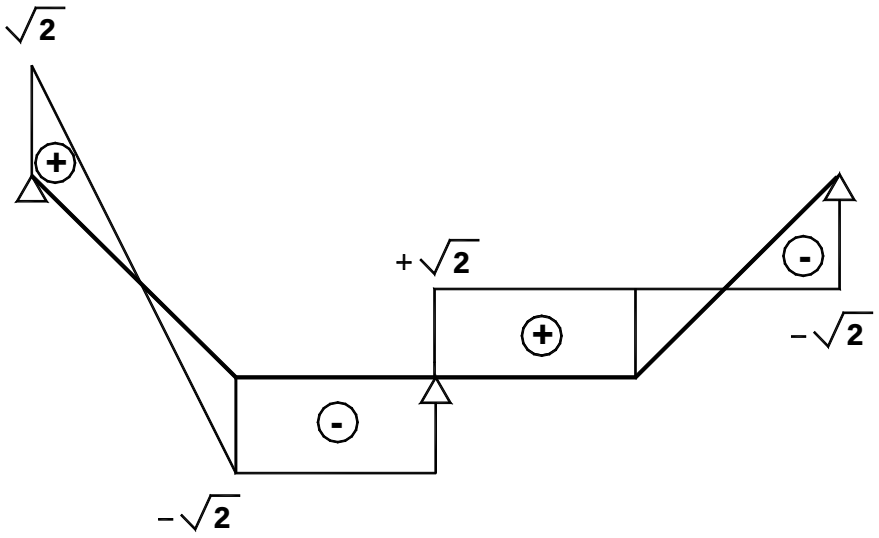


5)

M (em mt)



V (em t)



T = 0