UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

ECV 5220 - ANÁLISE ESTRUTURAL II

Prof[a] Henriette Lebre La Rovere, Ph.D.

3[a] Versão
Florianópolis, 2012

AGRADECIMENTOS

Aos professores Fábio Cordovil e Helena Stemmer, pelas valiosas notas de aula da disciplina Estabilidade das Construções II do Departamento de Engenharia Civil da UFSC, as quais formaram a base do texto desta apostila. à professora Poliana Dias de Moraes, do Departamento de Engenharia Civil da UFSC, pela valiosa contribuição na revisão do texto e figuras desta apostila.

Ao Professor José Carlos Sussekind pelos seus ensinamentos e livros didáticos, que também serviram de base para elaboração desta apostila.

A todos os alunos de graduação da UFSC que contribuíram imensamente com a digitação e elaboração de figuras da primeira versão desta apostila, entre estes os bolsistas do PET - Engenharia Civil e alguns monitores da disciplina Análise Estrutural II. Foram muitos alunos, todos muito dedicados, não sendo listados aqui pelo risco de se omitir algum nome.

À aluna de mestrado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil (PPGEC) da UFSC, Elizabeth Junges, pelo capricho na revisão da primeira versão da apostila e elaboração de figuras para as versões seguintes. À aluna de mestrado do PPGEC da UFSC, Flávia Gelatti, pela elaboração de algumas figuras para a terceira versão da apostila.

1. ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

1.1. Introdução

Entende-se por estrutura a parte da construção responsável pela estabilidade e pela resistência a ações externas. A estrutura submetida a ações externas deve tanto apresentar segurança quanto à ruptura dos materiais utilizados como também quanto à estabilidade global ou parcial de todos seus elementos; além disso, deve demonstrar bom desempenho estrutural no que diz respeito a deformações e durabilidade, de acordo com o fim e vida útil para a qual foi projetada. O projeto estrutural é uma área muito tradicional da Engenharia Civil, cujos especialistas são designados de *engenheiros estruturais*.

Definido o sistema construtivo e o tipo de material a ser utilizado, seja concreto armado ou protendido, madeira, aço, ou alvenaria estrutural, a primeira fase de um projeto estrutural é a Análise Estrutural. O objetivo geral da Análise Estrutural pode ser descrito como:

- Dada uma estrutura, com características geométricas (geometria, dimensões) e mecânicas (vinculação, propriedades dos materiais) conhecidas, submetidas a certas ações, que podem ser tanto cargas (forças ou binários) como deformações impostas (recalques de apoio, deformações devido à variação de temperatura ou retração, ...):
- Determinar os deslocamentos (translações e/ou rotações) de todos os pontos da estrutura; os esforços internos decorrentes das deformações produzidas por estes deslocamentos (esforço axial, cortante, de flexão e de torção no caso de estruturas reticuladas) e determinar também as reações vinculares.

A primeira etapa da Análise Estrutural consiste em estabelecer o *modelo estrutural* a ser adotado. As estruturas podem ser tratadas globalmente, ou divididas em diversos elementos. Com relação às suas dimensões, as estruturas podem ser classificadas em reticuladas, laminares e tridimensionais:

- A estrutura é classificada reticulada quando uma dimensão predomina em relação às outras duas. São em geral denominadas barras, cujo eixo, que pode ser reto ou curvo, é muito mais longo do que as dimensões da seção transversal.
- A estrutura é dita laminar quando duas dimensões predominam em relação à terceira. Têm-se como exemplo as chapas, as paredes, as placas e as cascas, sendo sua espessura bem menor do que suas outras dimensões.

- A estrutura é classificada tridimensional quando nenhuma dimensão é predominante. É o caso de blocos de fundação, alguns tipos de barragens, etc.

Um exemplo de estrutura reticulada é a edificação exposta na Figura 1.1-a, composta por perfis metálicos. Na Figura 1.1-b exibe-se um modelo estrutural tridimensional da edificação, composto por barras que representam os pilares e vigas da mesma. Modelos tridimensionais proporcionam bons resultados com relação à análise global da estrutura, podendo simular carregamentos em diferentes direções e analisar seus efeitos. Contudo é possível efetuar a análise bidimensional de partes da estrutura tridimensional, conforme é exibido na Figura 1.1-cde. Na Figura 1.1-c o pavimento de um andar da edificação é representado por vigas, caracterizando uma grelha. As Figura 1.1-de exibem pórticos planos extraídos do modelo tridimensional e analisados isoladamente. Este tipo de análise pode ser vantajoso para um dimensionamento mais simplificado, mas com resultados de grande utilidade para o projeto estrutural.

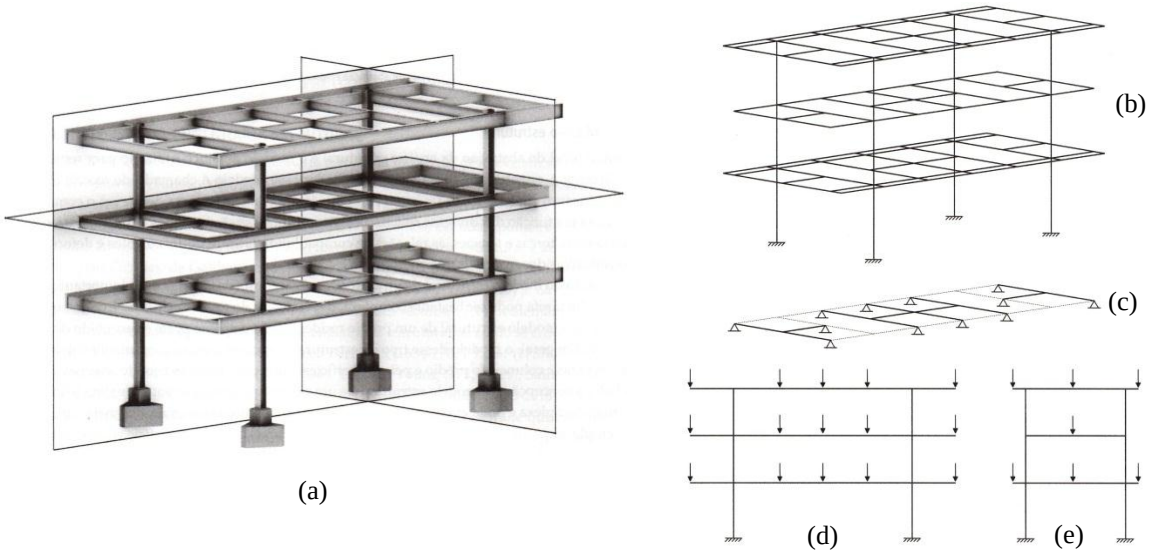


Figura 1.1 – DISCRETIZAÇÃO DE UMA ESTRUTURA RETICULADA

Fonte: MARTHA (2010)

Como exemplo de estruturas laminares destacam-se as cascas do congresso, exibidas na Figura 1.2.



Figura 1.2 – Cascas do Congresso

E para as estruturas tridimensionais, podem-se destacar os blocos de fundação (Figura 1.3).



Figura 1.3 – Bloco de Fundação

Fonte: http://www.freiremello.com.br

As estruturas podem ainda ser classificadas em hipoestáticas, isostáticas (estaticamente determinadas) ou hiperestáticas (estaticamente indeterminadas):

- As estruturas são consideradas hipoestáticas quando seus movimentos de corpo rígido não são restringidos e elas não atingem, portanto, uma configuração de equilíbrio estável.

- Elas são classificadas de isostáticas quando são restringidas a movimentos de corpo rígido e o número de incógnitas a determinar é igual ao número de equações de equilíbrio da Estática.
- As estruturas são consideradas hiperestáticas quando são restringidas a movimentos de corpo rígido e o número de incógnitas a determinar é maior do que o número de equações de equilíbrio da Estática.

Nesta apostila será admitido que as estruturas apresentam comportamento linear, ou seja, apresentam pequenos deslocamentos e deformações ao se deformar e são constituídas de material elástico-linear.

A maioria das estruturas utilizadas na prática é hiperestática ou estaticamente indeterminada. O grau de hiperestaticidade da estrutura será definido no próximo item, 1.2. As estruturas hiperestáticas podem ser analisadas a partir de dois métodos clássicos da Análise Estrutural: Método das Forças e Método dos Deslocamentos, ou ainda por um método aproximado conhecido como Processo de Cross; estes métodos serão descritos resumidamente no item 1.3.

O objetivo geral da disciplina Análise Estrutural II é capacitar o aluno a analisar estruturas reticuladas hiperestáticas, com ênfase em estruturas planas, determinando seus esforços internos e deslocamentos generalizados. Serão apresentados nesta apostila os três métodos de resolução de estruturas hiperestáticas, sendo o Método das Forças apresentado no Capítulo 2, o Método dos Deslocamentos no Capítulo 3 e o Processo de Cross no Capítulo 4. Como objetivo específico, pretende-se introduzir o aluno à utilização de programas computacionais para Análise Estrutural, iniciando pelo uso de programas computacionais educacionais.

1.2. Grau de hiperestaticidade

Adota-se nesta apostila a formulação e nomenclatura utilizada por SUSSEKIND, 1994. O grau de hipertestaticidade de uma estrutura pode ser externo ou interno. O grau de hiperestaticidade externo (g_e) é definido por:

$$g_e = r - e - nr \tag{1.1}$$

sendo *r* o número de reações, *e* o número de equações de equilíbrio da Estática (igual a 3 no caso de estruturas planas) e *nr* o número de equações provenientes de rótulas, o qual é expresso por

$$nr = b - 1 \tag{1.2}$$

em que *b* é igual ao número de barras ligadas à rótula (admite-se que a rótula libera apenas o vínculo de rotação entre as barras).

O grau de hiperestaticidade interno (g_i) pode ser definido como o número de vínculos internos que devem ser liberados para tornar a estrutura estaticamente determinada. Pode ser definido também como o número de esforços internos necessários ao traçado de diagramas, conhecidas todas as reações vinculares da estrutura. Será o caso de estruturas celulares ou quadros (pórticos fechados), anéis, alguns tipos de treliça, etc.

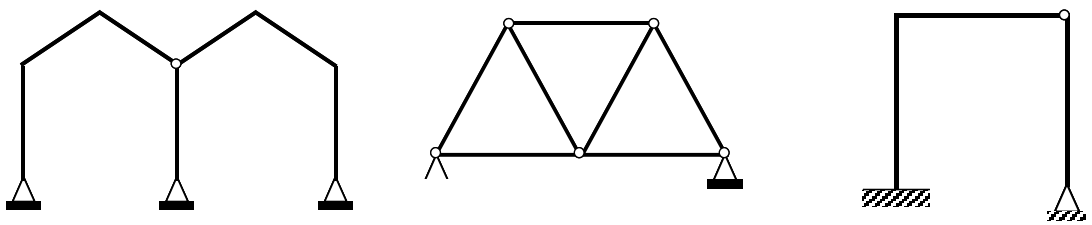
Nos próximos subitens serão apresentados exemplos de estruturas reticuladas planas hiperestáticas.

1.2.1. Estruturas externamente hiperestáticas - exemplos



$g_e = 4 - 3 = 1$ $\qquad$ $g_e = 5 - 3 = 2$

Figura 1.1 Exemplos de estruturas reticuladas planas externamente hiperestáticas



$g_e = 6 - 3 - (3-1) = 1$ $\qquad$ $g_e = 4 - 3 = 1$ $\qquad$ $g_e = 5 - 3 - (2-1) = 1$

Figura 1.2 Exemplos de pórticos planos e treliças planas externamente hiperestáticos

No caso de treliças, tomando como base a resolução pelo método de equilíbrio de nós, pode-se também calcular o grau de hiperestaticidade pela expressão:

$$g = i - e = r + b - 2n \qquad (1.3)$$

onde o número de incógnitas total (i) é igual ao número de reações vinculares (r) mais o número de esforços axiais a determinar nas barras (igual ao número de barras, b); e o número de equações total (e) é igual a duas vezes o número de nós (n). Quando o número de reações vinculares excede o necessário para que a treliça seja classificada isostática, tem-se que $g = g_e$ na equação (1.3), ou seja a treliça é externamente hiperestática. Quando o número de barras for maior do que o necessário para a treliça ser classificada isostática, ela é dita internamente hiperestática; $g = g_i$ na equação (1.3). No exemplo da treliça acima (Figura 1.2) pode-se então calcular o grau de hiperestaticidade da seguinte forma:

$$g = r + b - 2n = 4 + 7 - 2 \times 5 = 1 \qquad (g = g_e)$$

1.2.2. Estruturas internamente hiperestáticas – exemplos

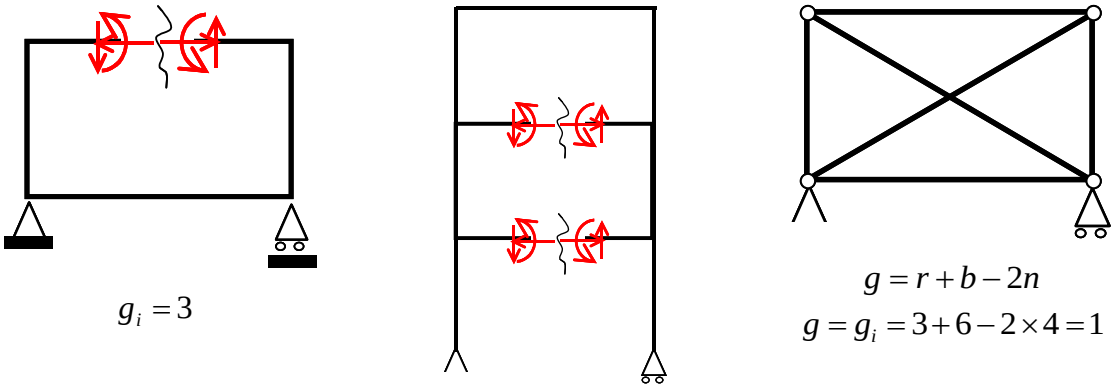


Figura 1.3 Exemplos de estruturas reticuladas planas internamente hiperestáticas

1.2.3. Estruturas externa e internamente hiperestáticas-exemplos

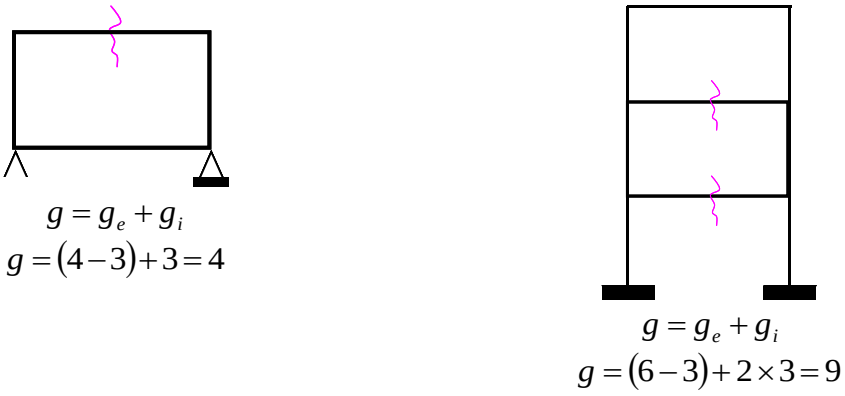


Figura 1.4 Exemplos de estruturas reticuladas planas externa e internamente hiperestáticas

1.3. Métodos de resolução de estruturas hiperestáticas

1.3.1. Método das Forças (ou Método da Flexibilidade)

Processo: liberam-se os vínculos excedentes ou hiperestáticos substituindo-os por forças estaticamente equivalentes e impõem-se condições de compatibilidade de ***deslocamentos****. O sistema estrutural hiperestático é transformado em um sistema isostático equivalente denominado *sistema principal* (vários sistemas principais são possíveis).

Incógnitas: forças (n° de incógnitas = grau de hiperestaticidade = g)
Equações: compatibilidade de ***deslocamentos ****
Formulação matricial: formula-se a Matriz de Flexibilidade da estrutura

Tais ***deslocamentos*** podem ser obtidos por:
Método de Integração Direta
Método de Analogia de Mohr
Teorema de Castigliano
Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) { Integração / Tabelas de Kurt-Beyer

O último método (PTV) será o adotado nesta apostila.

1.3.2. Método dos deslocamentos (ou Método da Rigidez)

Processo: definir o *sistema principal* (que é único) fixando todos os deslocamentos dos nós possíveis (graus de liberdade). Calculam-se neste sistema principal os esforços nas extremidades das barras causados por cargas atuantes nas barras (esforços de engastamento perfeito); somam-se a estes os esforços causados pelos deslocamentos impostos nos nós e iguala-se o resultado às forças externas aplicadas nos nós, em cada direção ou grau de liberdade (soma das forças internas é igual à força externa)
Incógnitas: deslocamentos (dos nós, n° de incógnitas = n° de graus de liberdade)
Equações: equilíbrio de forças em torno dos nós
Formulação Matricial → formula-se a Matriz de Rigidez da estrutura.

Este método é o mais adequado para implementação computacional, sendo o mais utilizado atualmente na maioria dos programas computacionais de Análise Estrutural.

1.3.3. Processo de Cross

É um método aproximado, baseado no Método dos Deslocamentos. As estruturas são classificadas em indeslocáveis (nós fixos) ou deslocáveis (nós móveis), considerando-se indeslocável o nó sem deslocabilidades de translação. Em geral despreza-se o efeito de deformação axial nas barras dos pórticos.

No caso de estruturas de nós fixos só há graus de liberdade de rotação e os esforços a determinar são os momentos fletores nas barras adjacentes a cada nó:
Processo: Encontram-se diretamente os esforços nas barras por meio de um processo iterativo de equilíbrio dos nós (desequilibrados).
Equações: equilíbrio de momentos em torno dos nós
Incógnitas: momentos nas barras adjacentes aos nós (n^o de incógnitas = n^o de nós desequilibrados)

No caso de estruturas deslocáveis deve-se determinar também as incógnitas de deslocabilidade de translação.

2. MÉTODO DAS FORÇAS

2.1. Estruturas externamente hiperestáticas

2.1.1 Estruturas uma vez hiperestática (g_e = 1)

Seja uma viga engastada-apoiada conforme mostra a Figura 2.1. Esta viga apresenta rigidez à flexão igual a *EI* e grau de hiperestaticidade externo (g_e) igual a 1. Para determinar as reações vinculares e os esforços internos desta estrutura pelo Método das Forças, é necessário determinar inicialmente o seu sistema principal, que é um sistema estrutural isostático, equivalente ao sistema estrutural real, hiperestático. A determinação deste sistema consiste na substituição das vinculações excedentes por suas respectivas forças reativas, devendo-se respeitar as condições de compatibilidade de deslocamentos.

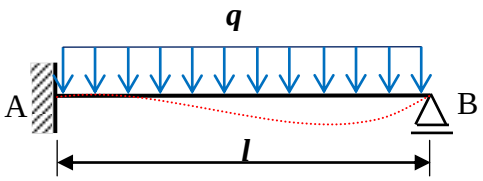


Figura 2.1: Viga engastada-apoiada

A Figura 2.2 apresenta dois sistemas principais possíveis para a viga engastada-apoiada mostrada na Figura 2.1. Na Figura 2.2a obteve-se o sistema principal substituindo-se o apoio do primeiro gênero à direita pela reação correspondente, R_B, devendo-se aplicar a condição de compatibilidade de deslocamentos de deslocamento vertical nulo em B (δ_B=**0**). Já o sistema principal mostrado na Figura 2.2b foi obtido sustituindo-se o vínculo de restrição à rotação do engaste à esquerda pela reação de momento correspondente, M_A, e impondo-se a condição de compatibilidade de rotação nula no ponto A (θ_A = **0**).

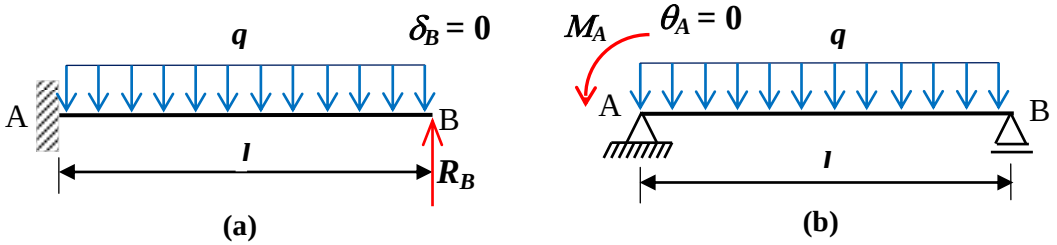


Figura 2.2: Sistemas principais com os respectivos hiperestáticos

As reações dos vínculos excedentes são denominadas reações hiperestáticas, ou simplesmente hiperestáticos, e podem ser obtidas a partir das equações de compatibilidade de deslocamentos. Supondo-se que a estrutura tenha comportamento linear (constituída de material com comportamento elástico-linear e sujeita a pequenos deslocamentos e deformações), pode-se utilizar superposição de efeitos do carregamento externo e do hiperestático em questão no cálculo dos deslocamentos (BEER e JOHNSTON, 1982; POPOV, 1978; TIMOSHENKO, 1967).

Adotando-se o sistema principal da Figura 2.2a (uma viga engastada e livre), para o qual a condição de compatibilidade é de deslocamento vertical nulo no ponto B, pode-se então escrever a equação de compatibilidade de deslocamentos usando-se o princípio de superposição de efeitos, conforme ilustra a Figura 2.3:

$$\Delta_B = \Delta_B^C + \Delta_B^R = 0 \tag{2.1}$$

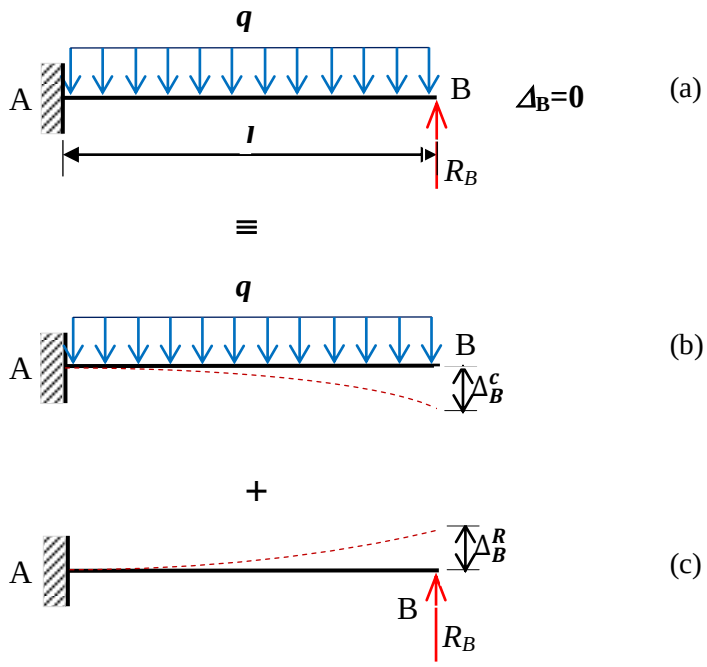


Figura 2.3: Superposição dos efeitos: (a) sistema principal, (b) deslocamento causado pela carga externa, (c) deslocamento causado pelo hiperestático.

Na equação (2.1) a primeira parcela representa o deslocamento produzido por uma carga uniformemente distribuída no sistema principal (ver Figura 2.3b):

$$\Delta_B^C = -\frac{ql^4}{8EI} \tag{2.2}$$

e a segunda parcela é o deslocamento produzido no sistema principal por uma carga concentrada R_B na extremidade direita (ver Figura 2.3c):

$$\Delta_B^R = \frac{R_B l^3}{3EI} \tag{2.3}$$

Substituindo-se as equações (2.2) e (2.3) na equação de compatibilidade (2.1), tem-se que:

$$-\frac{ql^4}{8EI} + \frac{R_B l^3}{3EI} = 0 \tag{2.4}$$

da qual se obtém a reação hiperestática ou hiperestático:

$$R_B = \frac{3}{8} ql\,. \tag{2.5}$$

Em seguida, conhecida a reação em B, podem-se determinar as demais reações de apoio da viga a partir das equações de equilíbrio da Estática, e também seus esforços internos, pois eliminou-se a incógnita a mais do vínculo excedente, logo o sistema principal fica uma viga isostática, conforme mostra a Figura 2.4.

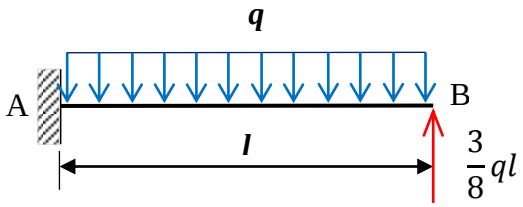


Figura 2.4: Sistema principal com o valor do hiperestático determinado

Aplicando-se um carregamento unitário no ponto B, este se deslocará de δ_B (ver Figura 2.5). Portanto, aplicando-se uma força R_B, obter-se-á um deslocamento igual a $\Delta_B^R = R_B \times \delta_B$.

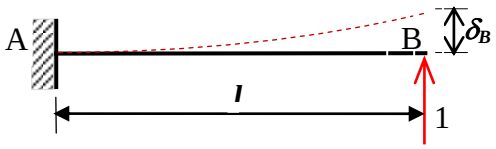


Figura 2.5: Deslocamento produzido por uma força unitária

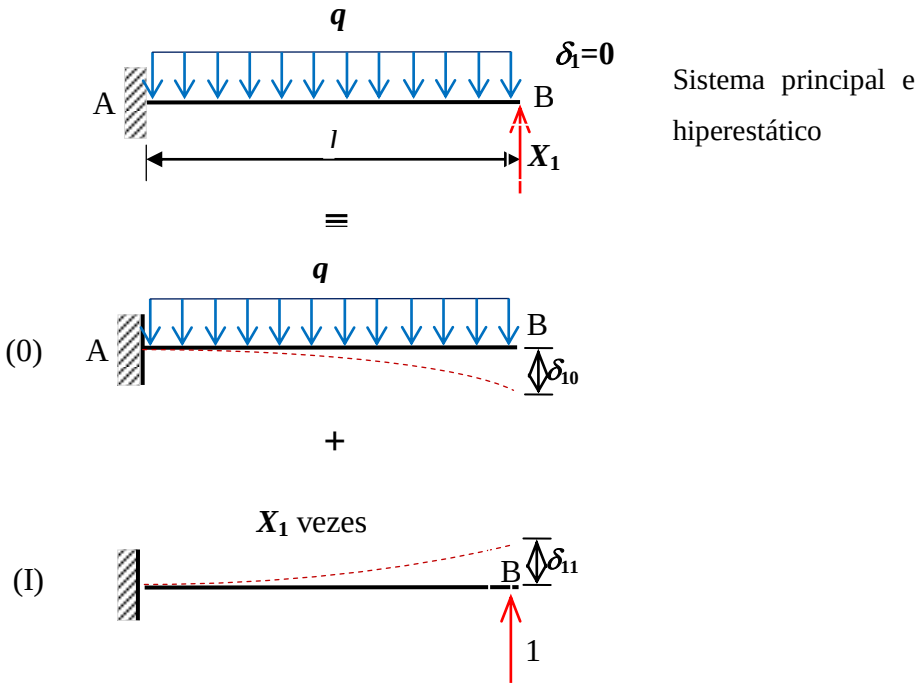
Deste modo, a equação de compatibilidade dos deslocamentos fica:

$$\Delta_B^R + R_B \cdot \delta_B^R = 0 \tag{2.6}$$

Logo

$$R_B = -\frac{\Delta_B^R}{\delta_B^R} \tag{2.7}$$

A fim de formalizar o Método das Forças para o sistema uma vez hiperestático da Figura 2.1, adota-se o sistema principal da Figura 2.2a. Nesta apostila será adotada a notação proposta por SUSSEKIND (1994), sendo as reações hiperestáticas generalizadas (forças ou momentos), ou hiperestáticos, denominados de X_1, X_2, X_3... (incógnitas do problema) e os deslocamentos generalizados (translação ou rotação) de δ_{ij}. O índice *i* indica o ponto e a direção em que ocorre o deslocamento generalizado onde foi removido um apoio, e o índice *j* indica a causa deste deslocamento. Os deslocamentos generalizados provocados pelo carregamento externo apresentarão o índice *j* igual a zero (δ_{i0}). Portanto, para o exemplo da Figura 2.2a, o deslocamento na direção do hiperestático X_1 provocado pelo carregamento externo é expresso por δ_{10} e o deslocamento na direção do hiperestático X_1 provocado pela força unitária é expresso por δ_{11} (ver Figura 2.6).



Sistema principal e hiperestático

Figura 2.6: Decomposição dos efeitos do carregamento e do hiperestático sobre a viga

O deslocamento no ponto B na direção do hiperestático 1 (δ_1) é nulo, portanto a equação de compatibilidade de deslocamentos pode ser escrita na forma genérica:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \tag{2.8}$$

Logo

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}. \tag{2.9}$$

Os deslocamentos δ_{ij} podem ser calculados por diversos métodos (método de integração direta, método de analogia de Mohr, Princípio dos Trabalhos Virtuais, etc...), sendo que para estruturas isostáticas simples os valores de deslocamentos para alguns tipos de carregamento encontram-se tabelados em diversos livros. Para o exemplo da Figura 2.2a, tem-se que:

$$\delta_{10} = -\frac{ql^4}{8EI} \tag{2.10}$$

$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot l^3}{3EI} \tag{2.11}$$

Substituindo-se os valores das expressões (2.10) e (2.11) na equação (2.9), obtém-se o valor da reação hiperestática:

$$X_1 = -\frac{\left(-\frac{ql^4}{8EI}\right)}{\frac{1 \cdot l^3}{3EI}} = \frac{3}{8}ql \tag{2.12}$$

sendo X_1 neste exemplo a força reativa em B e o seu sinal positivo indica que o sentido arbitrado está correto.

Outro sistema principal possível seria o da Figura 2.2b. Usando a notação proposta por SUSSEKIND (1994) tem-se que a reação de momento no engaste A é denominada de hiperestático X_1, e a rotação na direção de X_1 é denominada δ_1 conforme mostrado na Figura 2.7. Sabe-se que a rotação no ponto A da viga original engastada-apoiada (Figura 2.1) é nula ($\delta_1 = 0$ ou seja, $\theta_A = 0$).

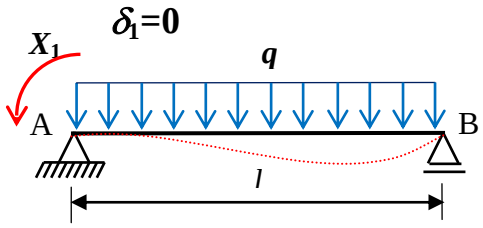


Figura 2.7: Sistema principal e hiperestático

Usando-se superposição de efeitos, a soma da rotação causada pela carga distribuída com a rotação causada pelo hiperestático X_1 deve então se anular (ver Figura 2.8). Admitindo-se que δ_1 é positivo no sentido de X_1, a rotação em A, direção 1, produzida por uma carga distribuída (Figura 2.8, etapa (0)) é:

$$\delta_{10} = -\frac{ql^3}{24EI} \tag{2.14}$$

e a rotação em A, direção 1, produzida pelo momento unitário aplicado em A, direção 1, (Figura 2.8, etapa (I)) é:

$$\delta_{11} = +\frac{1 \cdot l}{3EI}. \tag{2.15}$$

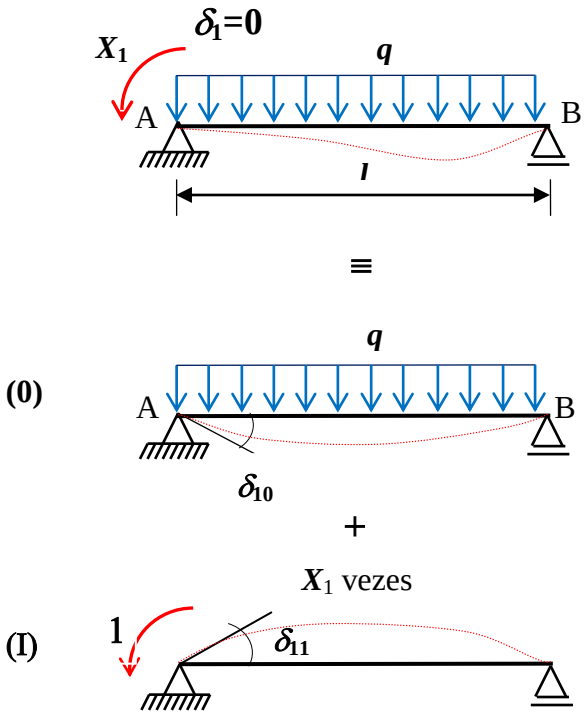


Figura 2.8: Superposição dos efeitos do carregamento externo e do hiperestático

Utilizando-se em seguida a condição de compatibilidade de rotação, $\delta_1 = 0$, tem-se que:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \qquad (2.16)$$

Observa-se que esta equação tem a mesma forma genérica usada anteriormente para o outro sistema principal (equação 2.8).

Substituindo-se as expressões (2.14) e (2.15) na equação de compatibilidade (2.16) vem:

$$-\frac{ql^3}{24EI} + X_1 \cdot \frac{1 \cdot l}{3EI} = 0 \qquad (2.17)$$

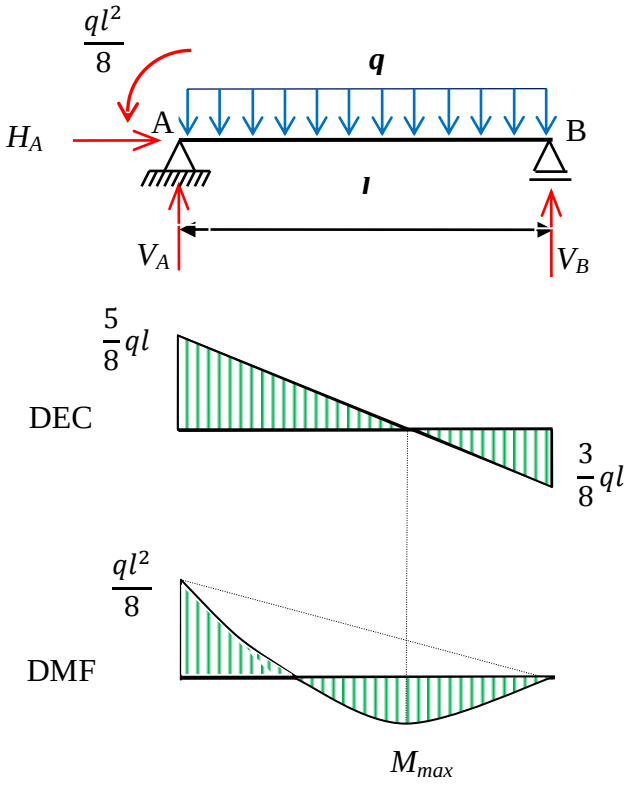
da qual se obtém o valor da reação hiperestática:

$$X_1 = \frac{ql^2}{8} \qquad (2.18)$$

sendo X_1 o momento reativo em A, e o seu sinal positivo indica que o sentido arbitrado está correto.

Substituindo-se o valor de X_1 no sistema principal utilizado (ver Figura 2.7), obtêm-se as demais reações de apoio da viga (H_A, V_A e V_B), usando-se as equações de equilíbrio da Estática. Conhecidas todas as reações, podem ser calculados os esforços internos (esforço

cortante, *V*, e momento fletor, *M*) da viga ao longo de seu eixo, possibilitando o traçado dos diagramas de esforços cortante (DEC) e de momento fletor (DMF).



Cálculo das reações:

$$\sum F_x = 0 \quad \therefore \quad H_A = 0$$

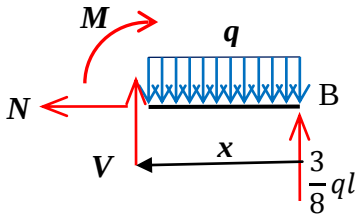
Por superposição de efeitos :

$$V_A = \frac{ql}{2} + \frac{\frac{ql^2}{8}}{l} = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{8} = \frac{5}{8}ql$$

$$V_B = \frac{ql}{2} - \frac{\frac{ql^2}{8}}{l} = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{8} = \frac{3}{8}ql$$

Como era esperado, observa-se que o valor encontrado para V_B coincide com o valor encontrado anteriormente para R_B, usando-se o sistema principal da Figura 2.2a, ver equação (2.5). As mesmas reações de apoio e esforços internos são obtidos nos dois sistemas principais.

Cálculo do momento máximo positivo M_{max}



O momento fletor é máximo quando o esforço cortante é nulo. Tomando-se um segmento de viga (parte da direita), conforme mostra a figura ao lado, e efetuando-se o equilíbrio de forças e momentos na seção indicada, a qual dista *x* da extremidade direita, tem-se :

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow V = qx - \frac{3}{8}ql = 0 \rightarrow \quad x = \frac{3}{8}l$$

Portanto o momento fletor máximo positivo correspondente à seção em que o esforço cortante é nulo ($V = 0$) é :

$$M^+_{max} = \left(\frac{3}{8}ql\right)\cdot\left(\frac{3}{8}l\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{3}{8}l\right)^2 \rightarrow \quad M^+_{max} = \frac{9}{128}ql^2$$

Esta formulação do Método das Forças em termos de deslocamentos e forças generalizadas e a notação de SUSSEKIND (1994) serão utilizadas nesta apostila para todos os tipos de estrutura (vigas, treliças, pórticos e grelhas) e será estendida mais adiante para estruturas com grau de hiperestaticidade superior a 1 (duas, três ou mais vezes hiperestática).

2.1.1.1. Exemplo 1- Pórtico plano

Seja encontrar as reações de apoio e os diagramas de esforços do pórtico plano mostrado na Figura 2.9. Todas as três barras do pórtico são prismáticas (seção transversal constante), com momento de inércia em relação ao eixo horizontal da seção igual a *I*, e são constituídas de mesmo material cujo módulo de elasticidade é igual a *E*. Portanto a rigidez à flexão de todas as barras é igual a *EI*, conforme indicado na figura.

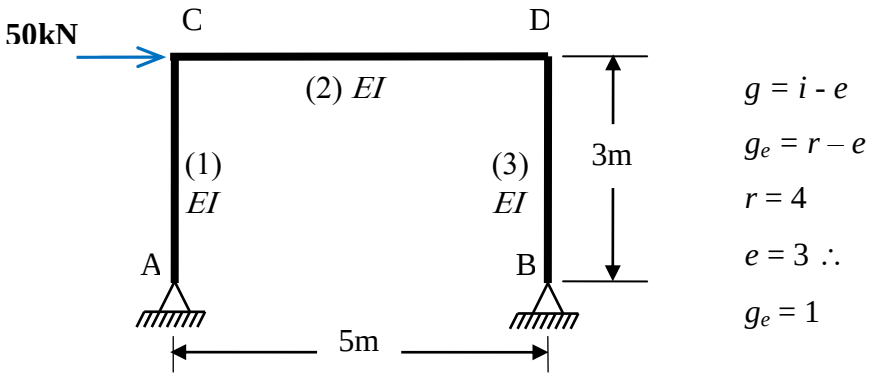


Figura 2.9: Exemplo 1 – Pórtico plano uma vez hiperestático

O pórtico é uma vez hiperestático, pois tem grau de hiperestaticidade (g_e) igual a 1, conforme calculado na Figura 2.9. Para traçar os diagramas de esforços desse pórtico plano, é necessário primeiramente determinar as suas reações de apoio. Utilizar-se-á o Método das Forças, descrito no item anterior, para a determinação da reação hiperestática.

Para a aplicação do Método das Forças, admite-se a hipótese que o pórtico apresenta comportamento linear, ou seja, o seu material constituinte segue a lei de Hooke e o pórtico sofrerá pequenos deslocamentos e deformações ao ser carregado. Admitida esta hipótese, os deslocamentos de um sistema elástico são funções lineares das cargas exteriores. Se as cargas crescem numa certa proporção, todos os deslocamentos crescem na mesma proporção (TIMOSHENKO 1967; POPOV 1978; BEER e JOHNSTON 1982).

Para resolver o pórtico da Figura 2.9 pelo Método das Forças, inicialmente determina-se o sistema principal, que é um sistema isostático equivalente, substituindo-se um vínculo excedente por sua respectiva força reativa e impondo-se a condição de compatibilidade de deslocamento ($\delta_1 = 0$). Um sistema principal possível está mostrado na Figura 2.10b.

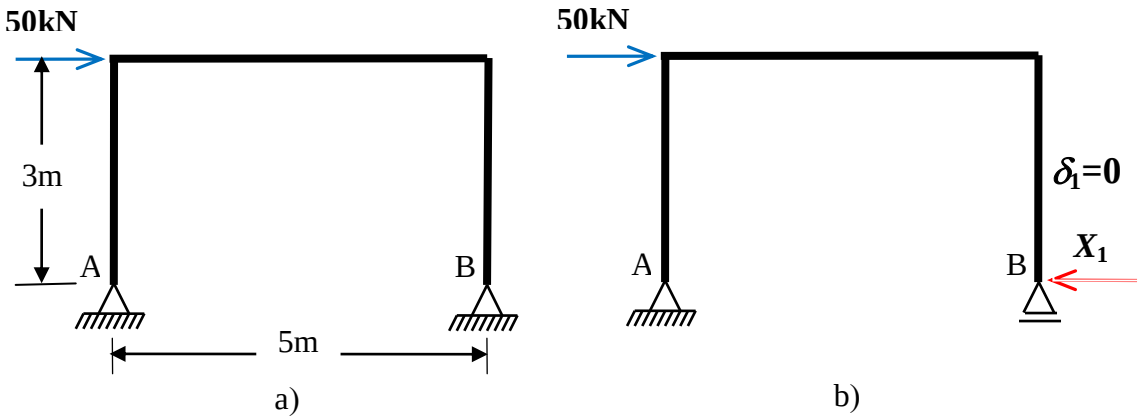


Figura 2.10: a) pórtico plano hiperestático; b) sistema principal isostático equivalente.

Nesse exemplo X_1 representa a reação horizontal do apoio em B e δ_1 representa o deslocamento correspondente, na mesma direção e ponto de aplicação de X_1 (ver Figura 2.10b). Como se admite a hipótese de comportamento linear, pode-se aplicar o princípio de superposição dos efeitos devido aos carregamentos no sistema principal. Portanto o deslocamento horizontal na direção e ponto onde está sendo aplicado o hiperestático (ponto B) provocado pelo carregamento externo mais o deslocamento horizontal nesse mesmo ponto provocado pelo hiperestático X_1 deve se anular, para que a condição de compatibilidade de deslocamentos seja obedecida ($\delta_1 = 0$). Usando-se a notação de SUSSEKIND (1994), esta equação se escreve:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1\delta_{11} = 0 \qquad (2.19)$$

onde os deslocamentos generalizados são definidos da mesma forma vista no item anterior: δ_{10} é o deslocamento na direção 1 (direção e ponto de aplicação da força X_1) causado pelo carregamento externo (ver Figura 2.11a); e δ_{11} é o deslocamento na direção 1 (direção e ponto de aplicação da força X_1) causado pela aplicação de uma força unitária na direção 1 (ver Figura 2.11b).

Como é admitido comportamento linear, o deslocamento provocado pela força X_1 será igual à $X_1 \times \delta_{11}$.

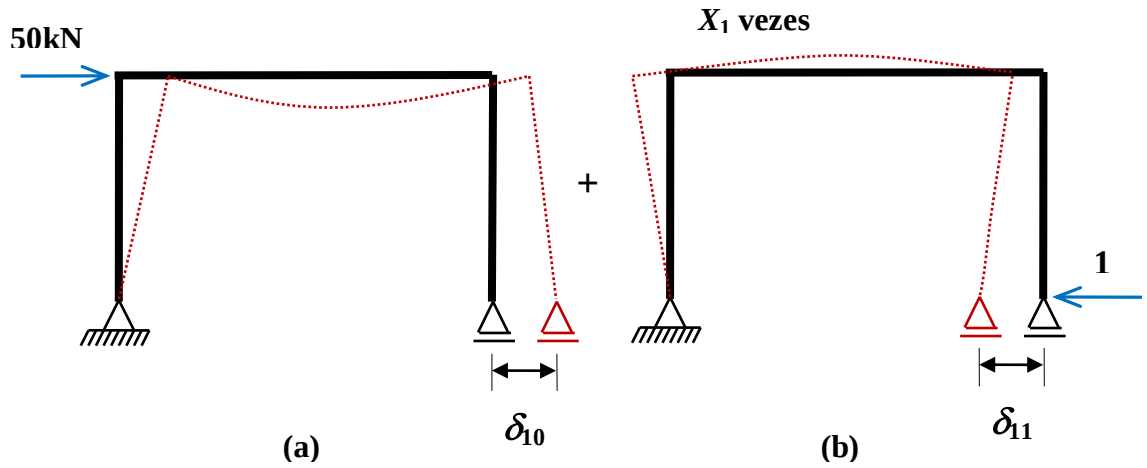


Figura 2.11: a) deslocamento provocado na estrutura pelo carregamento externo; b) deslocamento provocado por uma carga unitária vezes a força X_1.

Para determinar o valor do hiperestático X_1 é preciso, primeiramente, determinar os deslocamentos generalizados δ_{10} e δ_{11}. Estes deslocamentos podem ser encontrados por diversos métodos, sendo usado nesta apostila o Princípio dos Trabalhos Virtuais (TIMOSHENKO, 1967; POPOV, 1978; SUSSEKIND, 1994). Segundo o teorema do Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicado aos corpos elásticos em equilíbrio, o trabalho virtual das forças externas é igual ao trabalho virtual das forças internas para quaisquer deslocamentos virtuais impostos, compatíveis com os vínculos da estrutura.

$$W_{ext} = W_{\text{int}} \tag{2.20}$$

Será adotado o "Princípio dos Trabalhos Virtuais da Carga Unitária" (SUSSEKIND, 1994) descrito brevemente no que se segue.

Seja uma estrutura composta de barras, por exemplo, uma viga composta de uma única barra de comprimento *l*, cujo material tem módulo de elasticidade *E* e módulo de cisalhamento *G*, e cujas propriedades geométricas da seção são conhecidas (área *A*, momento de inércia em relação ao eixo horizontal que passa pelo baricentro da seção *I*, e momento de inércia à torção J_t), submetida a um certo carregamento (que podem ser forças, variação de temperatura ou recalque dos apoios), em que se deseja conhecer o deslocamento de um determinado ponto de seu eixo, em uma determinada direção.

A estrutura real (denominada *estado de deformação*) irá se deformar e seu eixo irá assumir uma certa configuração deformada. Define-se em seguida outra estrutura, virtual

(denominada *estado de carregamento*), com as mesmas características mecânicas e geométricas da real. Nessa estrutura virtual aplica-se uma força virtual ($\overline{P}$) unitária na direção e ponto que se deseja calcular o deslocamento, e impõe-se para esta estrutura virtual uma configuração de deformações idêntica à da estrutura real. Admitindo-se que os apoios são fixos, logo as reações de apoio não realizam trabalho, tem-se então que a única força externa que realiza trabalho na estrutural virtual é a carga unitária:

$$W_{ext} = \overline{P} \cdot \delta = 1 \cdot \delta = \delta \tag{2.21}$$

Essa força virtual unitária irá causar na estrutura esforços internos virtuais de flexão ($\overline{M}$), axial ($\overline{N}$), de cisalhamento ($\overline{V}$) e de torção ($\overline{T}$) através do corpo. Como esta estrutura virtual está submetida ao estado de deformação da estrutura real, o trabalho total interno realizado pelas forças internas virtuais ($\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{V}$ e $\overline{T}$) é dado pela integração ao longo do eixo da estrutura do produto das forças internas virtuais ($\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{V}$ e $\overline{T}$) pelas respectivas deformações da estrutural real ($d\theta, du, dh, d\varphi$), dado por:

$$W_{int} = \int_0^l \bar{M} d\theta + \int_0^l \bar{N} du + \int_0^l \bar{V} dh + \int_0^l \bar{V} d\varphi \tag{2.22}$$

sendo:

$d\theta = \frac{M}{EI} dx$	deformação rotacional da estrutura real
$du = \frac{N}{EA} dx$	deformação axial da estrutura real
$dh = \chi \frac{V}{GA} dx$	deformação angular da estrutura real χ: fator usado para levar em conta o fato das tensões e deformações por cisalhamento não serem constantes ao longo da altura da seção
$d\varphi = \frac{T}{GJ_t} dx$	deformação de torção da estrutura real

Substituindo-se as expressões das deformações da estrutura real, expressas em função dos esforços internos causados pelo carregamento na estrutura real (*M*, *N*, *V* e *T*) na equação (2.22), tem-se:

$$W_{int} = \int_0^l \bar{M} \frac{M}{EI} dx + \int_0^l \bar{N} \frac{N}{EA} dx + \int_0^l \bar{V} \chi \frac{V}{GA} dx + \int_0^l \bar{T} \frac{T}{GJ_t} dx$$

Pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, como a estrutura virtual está em equilíbrio, o trabalho realizado pelas forças externas virtuais deverá ser igual ao trabalho total realizado pelas forças internas virtuais, ou seja, $W_{ext} = W_{\text{int}}$.

$$\delta = \int_0^l \bar{M}\frac{M}{EI}dx + \int_0^l \bar{N}\frac{N}{EA}dx + \int_0^l \bar{V}\chi\frac{V}{GA}dx + \int_0^l \bar{T}\frac{T}{GJ_t}dx \tag{2.23}$$

Na prática, a contribuição de algumas parcelas de deformação pode ser desprezada em relação às outras, dependendo da sua importância relativa. A deformação devido ao cisalhamento pode ser negligenciada para o caso de barras em que seu eixo é bem maior do que a altura da seção transversal, caso da maioria de vigas e pilares normalmente utilizados na construção civil; porém esta parcela torna-se muito importante em vigas ou pilares-parede e nas estruturas constituídas de materiais em que a relação *E/G* é grande, como por exemplo madeira, madeira laminada colada, materiais poliméricos reforçados com fibra, etc. A parcela de deformação axial pode ser desprezada em peças que não trabalhem fundamentalmente com esforço normal, ou naquelas cuja rigidez axial for bem maior do que a rigidez à flexão.

Voltando ao exemplo do pórtico, supondo que os eixos das barras são longos em comparação com a altura da seção transversal e que a rigidez axial *EA* é bem maior do que a de flexão *EI*, pode-se desprezar no cálculo dos deslocamentos as deformações por cisalhamento e axiais (no próximo exemplo será investigado o efeito da deformação axial no cálculo dos deslocamentos). Como não há momento torsor agindo no pórtico, para se calcular o deslocamento em um determinado ponto do pórtico será levada em conta apenas a parcela da deformação por flexão em cada barra (índice *k*) e deve-se somar a contribuição das três barras do pórtico para se obter o deslocamento total:

$$\delta = \sum_{k=1}^{3} \int_0^{l_k} \bar{M}\frac{M}{E_k I_k}dx \tag{2.24}$$

A solução dessas integrais pode ser realizada com auxílio de tabelas encontradas na literatura, como, por exemplo, as elaboradas por Kurt-Beyer contidas em SUSSEKIND (1994), sendo uma delas reproduzida na Figura 2.133, ao final deste capítulo.

Para a determinação do deslocamento generalizado δ_{10} (deslocamento na direção de X_1 causado pelo carregamento externo, no caso uma força horizontal de 50 kN na barra horizontal), têm-se os *estados de deformação e de carregamento* mostrados na Figura 2.12. As reações e os esforços solicitantes mostrados na figura para os *estados de deformação e de carregamento* são determinados utilizando-se as equações de equilíbrio da Estática. O traçado dos diagramas pode ser efetuado usando-se o Método das Seções (SUSSEKIND, 1994). Observe que na figura abaixo a força virtual é adimensional, ou seja, não possui unidade.

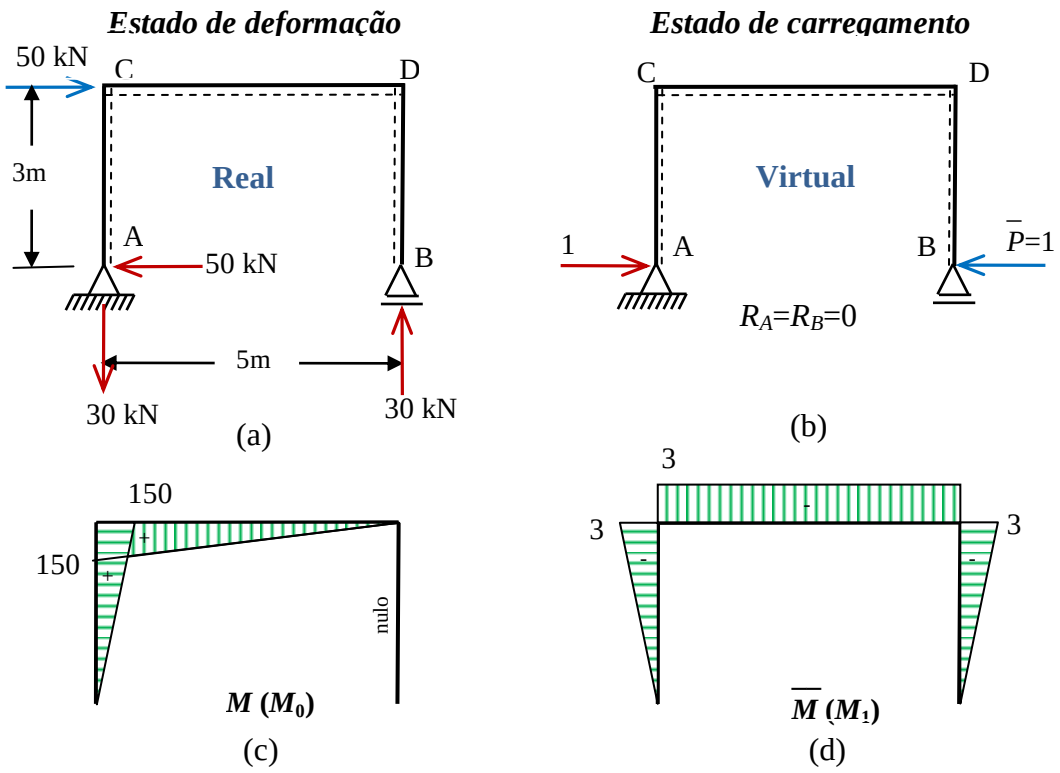
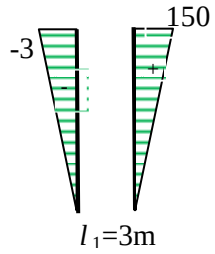
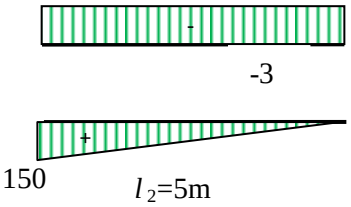
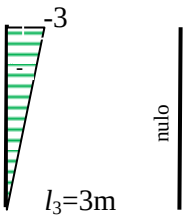


Figura 2.12: Cálculo de δ_{10}: a) estado de deformação; b) estado de carregamento; c) diagrama de momento fletor M (kNm) **; d) diagrama de momento fletor** $\overline{M}$ (kNm)**.**

Após a determinação do diagrama de momentos nas barras, efetua-se a integral do produto das funções ($\overline{M} \times M$) com o auxílio da tabela de Kurt-Beyer, para cada barra isoladamente, combinando-se os diagramas conforme indicado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Combinação dos diagramas de momentos fletores para cálculo da integral do produto de duas funções (momentos fletores)

Barra 1	Barra 2	Barra 3
		
$\int_0^{l_1} \overline{M} M dx = \frac{1}{3} l_1.(-3).150$	$\int_0^{l_2} \overline{M} M dx = \frac{1}{2} l_2.(-3).150$	$\int_0^{l_3} \overline{M} M dx = 0$

Tendo em vista que a rigidez à flexão e o módulo de elasticidade é constante ao longo de cada barra, podendo ser colocada para fora da integral, a equação (2.24) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\delta_{10} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{E_k I_k} \int_0^{l_k} \bar{M} M dx \tag{2.25}$$

e como todas as barras do pórtico têm a mesma rigidez, $E_k I_k = EI$, pode-se colocá-la em evidência; assim para o cálculo de δ_{10} tem-se:

$$EI * \delta_{10} = \int_0^{l_1} \bar{M} M dx + \int_0^{l_2} \bar{M} M dx + \int_0^{l_3} \bar{M} M dx \tag{2.26}$$

Substituindo-se em seguida os valores encontrados na Tabela 2.1 na equação (2.26), vem:

$$EI \cdot \delta_{10} = \frac{1}{3}.3.(-3).(150) + \frac{1}{2}5.(-3).(150) \tag{2.27}$$

$$EI.\delta_{10} = -450 - 1125 \quad \therefore \tag{2.28}$$

$$\delta_{10} = -\frac{1575}{EI} \tag{2.29}$$

Por simplicidade não foram mostradas as unidades nas equações acima, sendo que o valor do deslocamento δ_{10} está em metros (unidade consistente com a utilizada nas dimensões do pórtico).

O cálculo do deslocamento δ_{11}, que é o deslocamento horizontal em 1 devido à carga unitária na direção do hiperestático X_1, é efetuado a partir dos *estados de deformação e de carregamento* mostrados na Figura 2.13. As reações e os esforços solicitantes mostrados na

figura para ambos os estados são determinados utilizando-se as equações de equilíbrio da Estática. O traçado dos diagramas pode ser efetuado usando-se o Método das Seções (SUSSEKIND, 1994).

Após a determinação do diagrama de momentos nas barras, efetua-se a integral do produto das funções ($\overline{M} \times M$) com auxílio da tabela de Kurt-Beyer (Figura 2.133), para cada barra isoladamente, combinando-se os diagramas conforme indicado na Tabela 2.2.

Analogamente ao que foi feito anteriormente, pode-se reescrever a equação (2.24) para o cálculo de δ_{11}, tendo em vista que a rigidez à flexão é constante ao longo do pórtico:

$$EI.\delta_{11} = \int_0^{l_1} \overline{M} M dx + \int_0^{l_2} \overline{M} M dx + \int_0^{l_3} \overline{M} M dx \qquad (2.30)$$

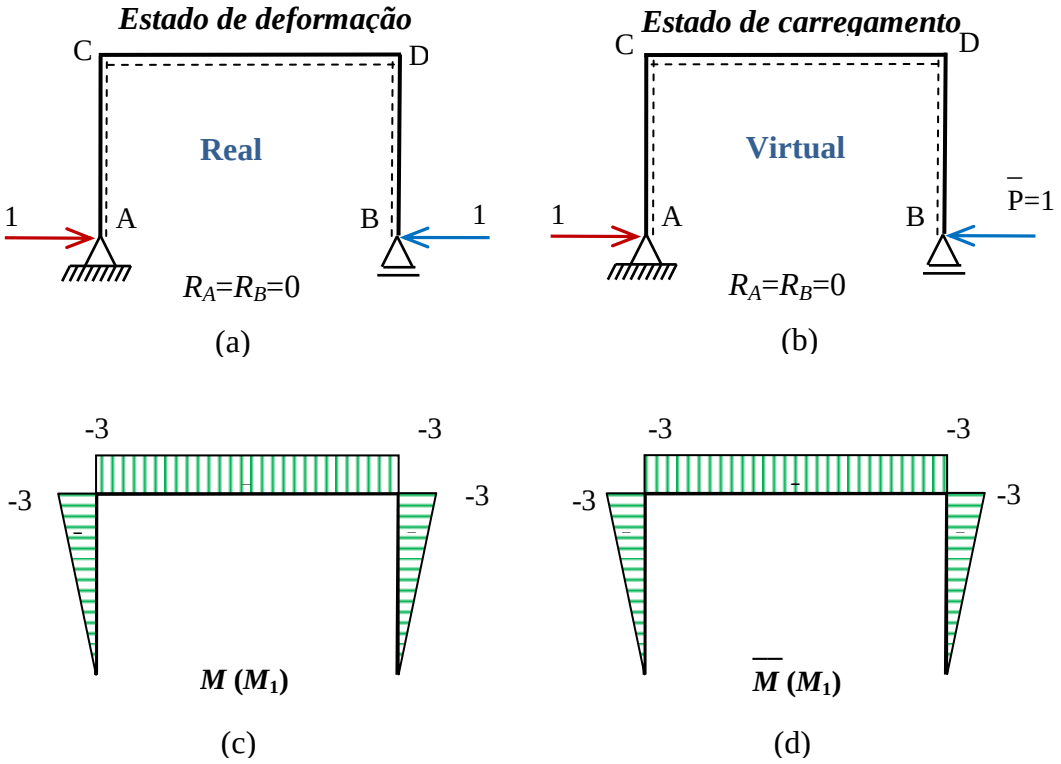
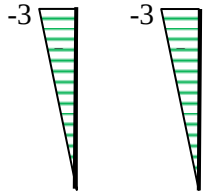
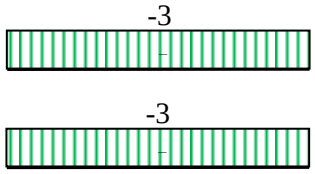
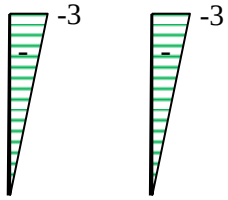


Figura 2.13: Cálculo de δ_{11}: a) estado de deformação; b) estado de carregamento; c) diagrama de momento fletor M (kNm) **; d) diagrama de momento fletor** $\overline{M}$ **(kNm).**

Tabela 2.2: Combinação dos diagramas de momentos fletores para o cálculo de δ_{11}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
 l_1=3m	 l_2=5m	 l_3=3m
$\int_0^{l_1} \overline{M} M dx = \frac{1}{3} l_1 (-3).(-3)$	$\int_0^{l_2} \overline{M} M dx = l_2 (-3).(-3)$	$\int_0^{l_3} \overline{M} M dx = \frac{1}{3} l_3 (-3).(-3)$

Substituindo-se em seguida os valores encontrados na Tabela 2.2 na equação (2.30), vem:

$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{1}{3}(3)(-3)(-3) + (5)(-3)(-3) + \frac{1}{3}(3)(-3)(-3) \tag{2.31}$$

$$EI.\delta_{11} = 9 + 45 + 9 \quad \therefore \tag{2.32}$$

$$\delta_{11} = \frac{63}{EI} \tag{2.33}$$

Por simplicidade não foram mostradas as unidades nas equações acima, sendo que o valor do deslocamento δ_{11} está em m/kN (unidades consistentes).

Finalmente, substituindo-se os deslocamentos generalizados δ_{10} e δ_{11} na equação de compatibilidade ($\delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0$), obtém-se o valor da reação hiperestática:

$$-\frac{1575}{EI} + X_1 \cdot \frac{63}{EI} = 0 \tag{2.34}$$

$$X_1 = \frac{1575}{63} = 25 \tag{2.35}$$

a qual deve ser expressa em kN, unidade consistente com a usada para forças no pórtico:

$$X_1 = 25\,\text{kN} \tag{2.36}$$

Observa-se que o sentido arbitrado para a força X_1 estava correto, pois se encontrou um sinal positivo na equação (2.35).

Na realidade, para a determinação do deslocamento generalizado δ_{11} não é necessário traçar novamente os diagramas de momento fletor para os *estados de deformação e de carregamento*, tendo em vista que eles são iguais ao diagrama do *estado de carregamento* utilizado para o cálculo de δ_{10}, conforme pode ser observado da Figura 2.12 e da Figura 2.13. Assim pode-se simplificar a formulação, traçando-se diretamente os diagramas de momento fletor para cada situação de carregamento, denominando-se M_0 o momento causado pelo carregamento externo e M_1 o momento causado por uma força unitária na direção de X_1, não importando se estão agindo em estrutura real ou virtual, não sendo mais necessário se definir os *estados de deformação e carregamento*.

Portanto, para se obter o deslocamento generalizado δ_{10} pode-se usar a expressão:

$$\delta_{10} = \sum_{barras} \int_0^l \frac{M_1 M_0}{EI} dx \tag{2.37}$$

e para o deslocamento generalizado δ_{11}:

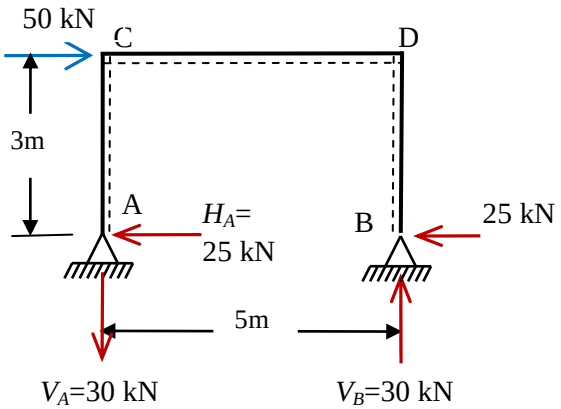
$$\delta_{11} = \sum_{barras} \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EI} dx \tag{2.38}$$

Essas expressões podem ser estendidas para qualquer deslocamento generalizado:

$$\delta_{ij} = \sum_{barras} \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} dx \tag{2.39}$$

o que irá simplificar muito a formulação, inclusive para estruturas duas ou mais vezes hiperestáticas, conforme será visto mais adiante.

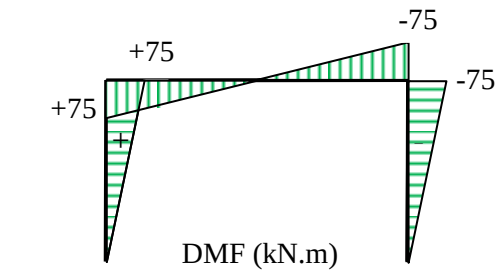
Após a determinação do valor do hiperestático X_1, as reações e os esforços internos no pórtico isostático equivalente (sistema principal) são calculados utilizando-se as equações de equilíbrio da Estática.



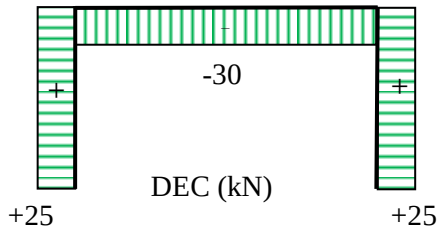
$$\sum F_X = 0$$
$$H_A + 25\,\text{kN} = 50\,\text{kN} \therefore$$
$$H_A = 25\,\text{kN}$$
$$\sum F_Y = 0$$
$$-V_A + V_B = 0 \therefore \quad V_A = V_B$$
$$\sum M_A = 0$$
$$V_B \times 5\,\text{m} = 50\,\text{kN} \times 3\,\text{m} = 150\,\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$\therefore V_B = 30\,\text{kN} \quad \therefore V_A = 30\,\text{kN}$$

Figura 2.14: Reações de apoio do pórtico plano

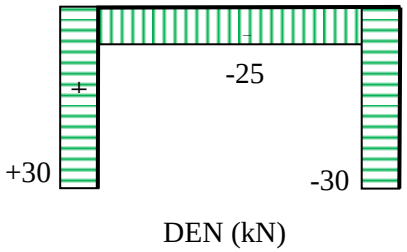
Após a determinação dos esforços internos, são traçados os seus respectivos diagramas como mostrado na Figura 2.15, considerando-se momento fletor positivo aquele que traciona as fibras inferiores das barras, sendo estas assinaladas em tracejado na Figura 2.14.



(a) Diagrama de momento fletor



(b) Diagrama de esforço cortante



(c) Diagrama de esforço normal

Figura 2.15: Diagrama de esforços finais do pórtico plano

Pode-se também encontrar os diagramas de esforços finais usando-se superposição de efeitos:

$$M = M_0 + X_1 M_1$$
$$N = N_0 + X_1 N_1$$
$$V = V_0 + X_1 V_1$$

2.1.1.2. Exemplo 2 - Pórtico plano (considerando deformação axial nos deslocamentos)

Seja determinar as reações de apoio e traçar os diagramas de esforços do pórtico plano mostrado na Figura 2.16, cujas barras apresentam uma seção retangular constante de 20 cm × 40 cm e módulo de elasticidade do material igual a 2.10^7 kN/m^2. Para mostrar a influência da deformação axial no cálculo dos deslocamentos generalizados, serão

consideradas nesse exemplo as deformações causadas por flexão e esforço axial, desprezando-se apenas a deformação por cisalhamento.

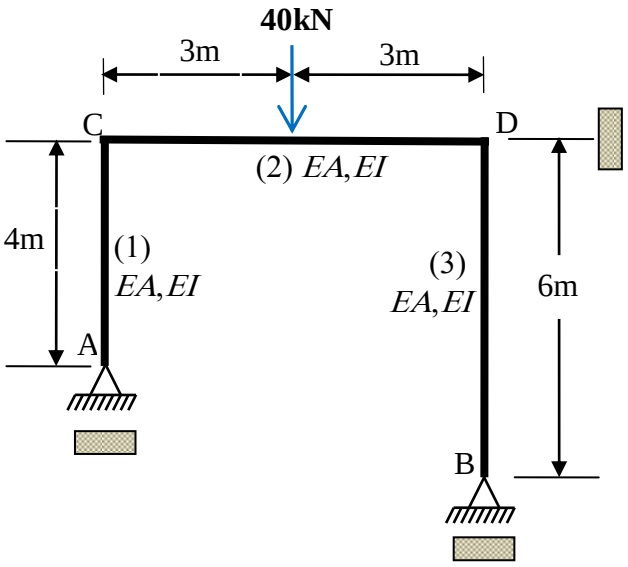


Figura 2.16: Exemplo 2 – Pórtico plano

Para calcular as reações de apoio do pórtico por meio do Método das Forças deve-se inicialmente determinar o sistema principal a ser utilizado (sistema isostático equivalente). O pórtico é uma vez hiperestático, logo deve-se eliminar um vínculo excedente, no caso escolheu-se o vínculo de restrição de deslocamento horizontal do apoio da direita. Substituindo-se esse vínculo pela reação correspondente e impondo-se a condição de compatibilidade de deslocamentos, obtém-se o sistema principal mostrado na Figura 2.17.

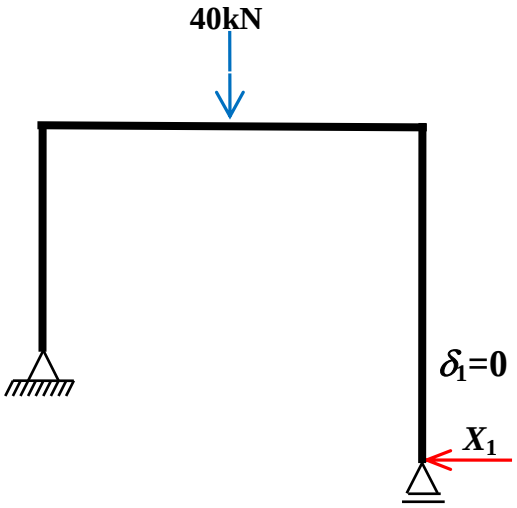


Figura 2.17: Sistema principal para o pórtico plano da Figura 2.16

Será admitido que o pórtico plano apresenta comportamento linear, de forma que o deslocamento total em um ponto da estrutura pode ser determinado pela soma dos deslocamentos de cada uma das ações. Portanto, o deslocamento horizontal δ_1 do pórtico isostático equivalente mostrado na Figura 2.17 pode ser determinado como sendo a soma dos efeitos mostrados na Figura 2.18, sendo δ_{10} o deslocamento na direção do hiperestático X_1 devido ao carregamento externo (força vertical de 40 kN) e δ_{11} o deslocamento na direção do hiperestático X_1 devido à carga unitária na direção do hiperestático X_1.

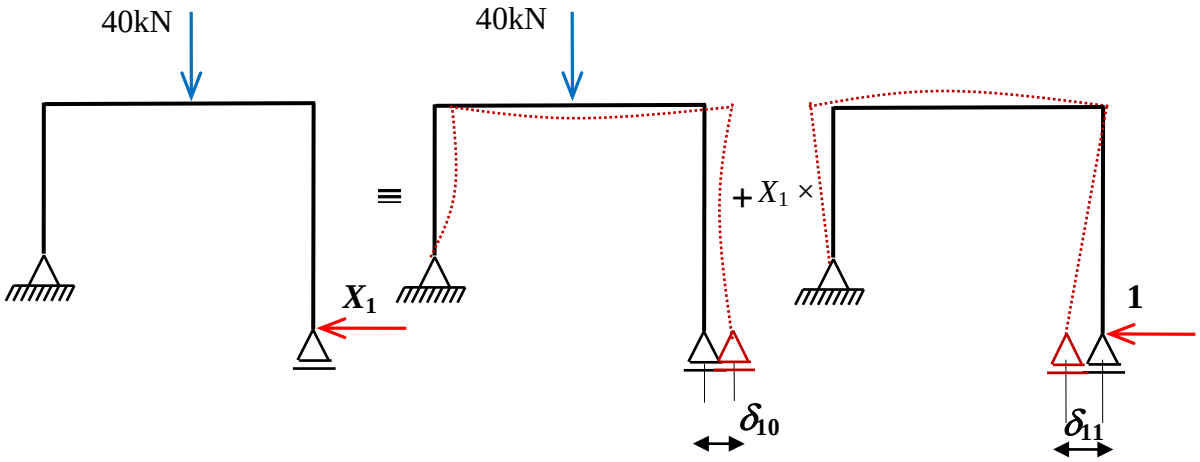


Figura 2.18: Superposição de efeitos causados pelo carregamento externo e pela ação do hiperestático X_1

Como o deslocamento total em 1 deve se anular (δ_1=0), a equação de compatibilidade de deslocamentos pode ser escrita novamente na forma genérica:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0. \tag{2.40}$$

Neste exemplo serão consideradas no cálculo dos deslocamentos generalizados δ_{ij} as contribuições do esforço axial e do momento fletor, portanto tem-se que:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \left(\int_0^{l_k} \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_0^{l_k} \frac{N_i N_j}{EA} dx \right), \tag{2.41}$$

sendo E o módulo de elasticidade do material; A a área da seção transversal das barras e I o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo horizontal da seção que passa por seu centróide.

O momento de inércia da seção retangular da barra é:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{(0{,}2\ m) \cdot (0{,}4\ m)^3}{12} = 0{,}001067\ m^4 \tag{2.42}$$

e a área da seção transversal é:

$$A = b \cdot h = (0{,}2\ \mathrm{m}) \cdot (0{,}4\ \mathrm{m}) = 0{,}08\ \mathrm{m}^2 \tag{2.43}$$

Logo o valor da rigidez axial e de flexão é, respectivamente:

$$EA = 160 \cdot 10^4\ \mathrm{kN} \tag{2.44}$$

$$EI = 2{,}13 \cdot 10^4\ \mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}^2 \tag{2.45}$$

O cálculo dos deslocamentos generalizados é realizado a partir dos diagramas dos esforços normais e fletores do pórtico na situação 0 (devido ao carregamento externo) e na situação I (devido a uma carga unitária na direção e ponto de aplicação do hiperestático X_1). Os diagramas dos esforços N_0 e M_0 estão mostrados na Figura 2.19 e os diagramas N_1 e M_1 estão mostrados na Figura 2.20 (em unidades consistentes).

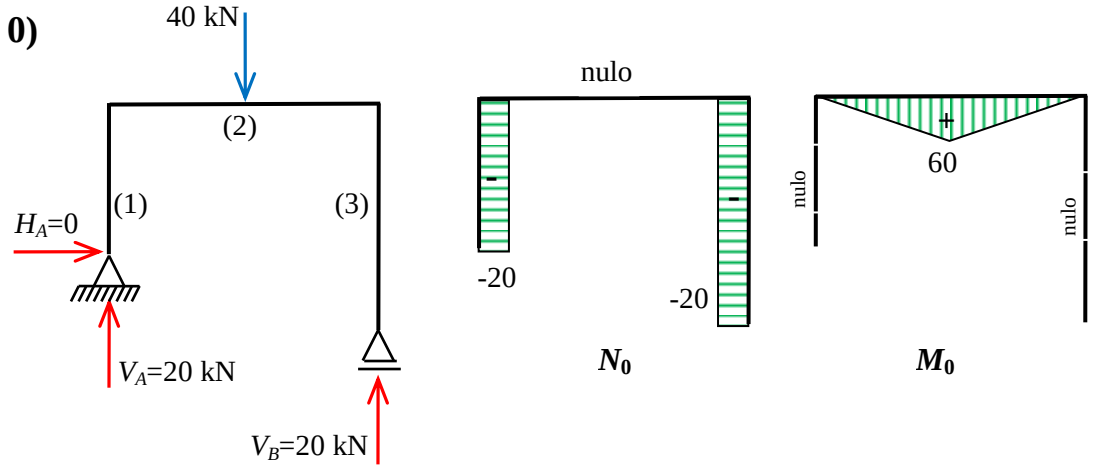


Figura 2.19: Diagramas N_0, M_0 devido ao carregamento externo

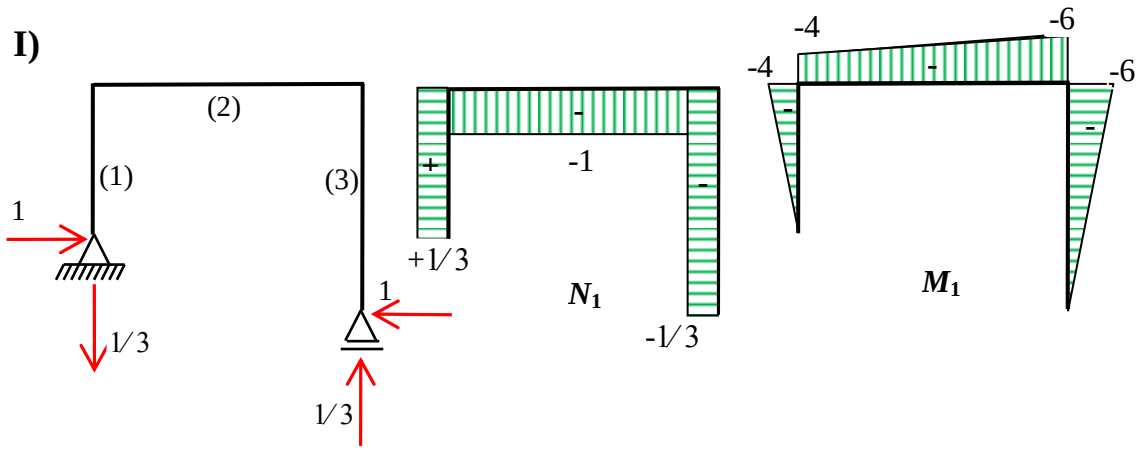


Figura 2.20: Diagramas N_1, M_1 devido à carga unitária na direção 1

Nas figuras acima calcularam-se as reações de apoio bem como os esforços internos utilizando-se as equações de equilíbrio da Estática, sendo usado o Método das Seções para o traçado dos diagramas, considerando-se inferiores as fibras da parte interna do pórtico para a definição do sinal nos diagramas de momentos fletores.

O cálculo do deslocamento generalizado δ_{10} é feito a partir da equação:

$$\delta_{10} = \sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k}\frac{N_1 N_0}{EA_k}dx + \int_0^{l_k}\frac{M_1 M_0}{EI_k}dx\right) \tag{2.46}$$

e tendo em vista que as três barras do pórtico possuem a mesma seção transversal, que é constante ao longo do eixo, pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EA}\sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k} N_1 N_0 dx\right) + \frac{1}{EI}\sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k} M_1 M_0 dx\right) \tag{2.47}$$

Para calcular na equação (2.47) a integral do produto de duas funções, pode-se usar a tabela de Kurt-Bayer, sendo o resultado mostrado na Tabela 2.3 para a combinação (ou produto) dos diagramas de esforços normais N_1 e N_0, e na Tabela 2.4 para a combinação (ou produto) dos diagramas de momentos fletores M_1 e M_0.

Tabela 2.3: Combinação dos esforços N_1 e N_0 para o cálculo de δ_{10}

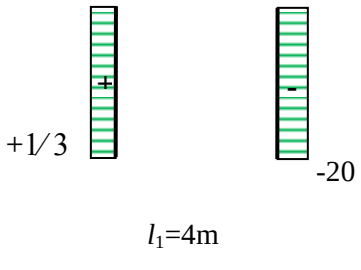
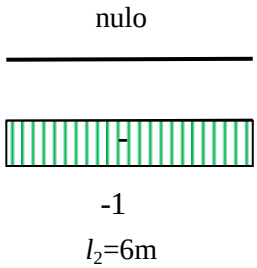
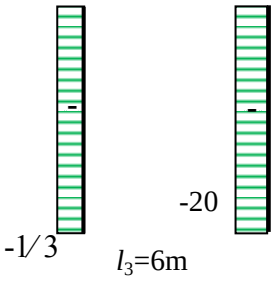
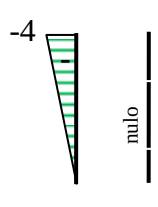
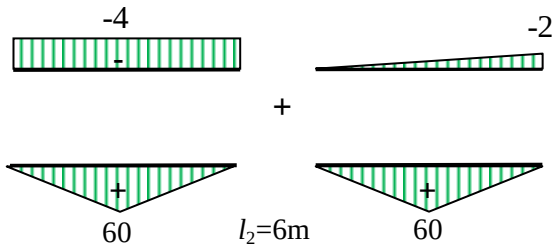
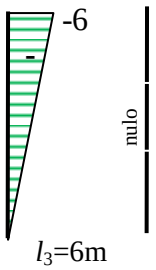
Barra 1	Barra 2	Barra 3
		
$\int_0^{l_1} N_1 N_0 dx_1 = l_1 N_1 N_0 = 4.\frac{1}{3}.(-20) = -\frac{80}{3}$	$\int_0^{l_2} N_1 N_0 dx_2 = 0$	$\int_0^{l_3} N_1 N_0 dx_3 = l_3 N_1 N_0 = \frac{120}{3}$

Tabela 2.4: Combinação dos esforços M_1 e M_0 para o cálculo de δ_{10}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
		
$\int_0^{l_1} M_1 M_0 dx_1 = 0$	$\int_{l_2} M_1 M_0 dx_3 = \frac{l_2}{2} M_1 M_0 + \frac{l_2}{6}(1+\alpha) M_1 M_0 =$ $\frac{6}{2}.(-4).60 + \frac{6}{6}.(1+0{,}5).(-2).60 = -720 - 180 = -900$	$\int_0^{l_3} M_1 M_0 dx_3 = 0$

Substituindo-se em seguida os valores encontrados na Tabela 2.3 e na Tabela 2.4 na equação (2.47), obtém-se:

$$\delta_{10} = \frac{40}{3EA} - \frac{900}{EI} \quad \therefore \tag{2.48}$$

$$\delta_{10} = \frac{40}{3 \cdot 160 \cdot 10^4} - \frac{900}{2{,}13 \cdot 10^4} = (0{,}08 \cdot 10^{-4}) - (421{,}94 \cdot 10^{-4}) = -421{,}86 \cdot 10^{-4}\,(\text{m}) \tag{2.49}$$

Analogamente calcula-se o deslocamento generalizado δ_{11} a partir da equação:

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^{3} \left(\int_0^{l_k} \frac{N_1 N_1}{EA_k} dx + \int_0^{l_k} \frac{M_1 M_1}{EI_k} dx \right) \tag{2.50}$$

a qual pode ser reescrita na forma:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}\sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k} N_1 N_1 dx\right) + \frac{1}{EI}\sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k} M_1 M_1 dx\right) \tag{2.51}$$

Novamente utiliza-se a tabela de Kurt-Bayer para o cálculo da integral do produto de duas funções, conforme mostrado na Tabela 2.5 para a combinação dos diagramas de esforços normais N_1 e N_1 e na Tabela 2.6 para a combinação dos diagramas de momentos fletores M_1 e M_1.

Tabela 2.5: Combinação dos esforços N_1 e N_1 para o cálculo de δ_{11}

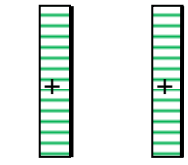
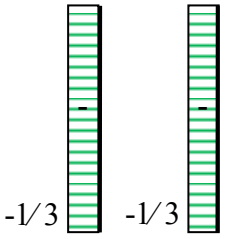
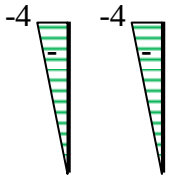
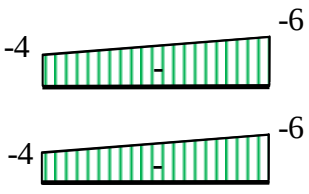
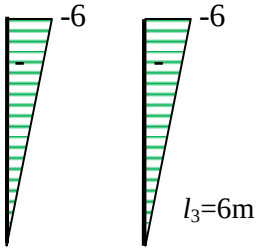
Barra 1	Barra 2	Barra 3
 l_1=4m	 l_2=6m	 l_3=6m
$\int_0^{l_1} N_1 N_1 dx_1 = l_1 N_1 N_1 =$ $4.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$	$\int_0^{l_2} N_1 N_1 dx_2 = l_2 N_1 N_1 =$ $6.(-1).(-1) = 6$	$\int_0^{l_3} N_1 N_1 dx_3 = l_3 N_1 N_1 =$ $6.\left(-\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{9}$

Tabela 2.6: Combinação dos esforços M_1 e M_1 para o cálculo de δ_{11}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
 l_1=4m	 l_2=6m	 l_3=6m
$\int_0^{l_1} M_1 M_1 dx_1 = \frac{1}{3} l_1 M_1 M_1$ $= \frac{1}{3}.4.(-4).(-4) = \frac{64}{3}$	$\int_0^{l_2} M_1 M_1 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 \left[\begin{matrix} M_{1A}(2M_{1A} + M_{1B}) + \\ M_{1B}(2M_{1B} + M_{1A}) \end{matrix}\right] =$ $\frac{1}{6}.6.[4.(2.4+6) + 6.(2.6+4)] = 152$	$\int_0^{l_3} M_1 M_1 dx_3 = \frac{1}{3} l_3 M_1 M_1 =$ $\frac{1}{3}.6.(-6).(-6) = 72$

Substituindo-se os valores encontrados na Tabela 2.5 e na Tabela 2.6 na equação (2.51), e os respectivos valores de rigidez axial e de flexão, vem:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}\left(\frac{4}{9} + 6 + \frac{6}{9}\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{64}{3} + 152 + 72\right) = \frac{64}{9EA} + \frac{736}{3EI} = \frac{64}{9 \cdot 160 \cdot 10^4} + \frac{736}{3 \cdot 2{,}133 \cdot 10^4} \quad (2.52)$$

$$\therefore \delta_{11} = 0{,}044 \cdot 10^{-4} + 115{,}02 \cdot 10^{-4} = 115{,}06 \cdot 10^{-4} \text{ (m/kN)} \quad (2.53)$$

Inserindo-se os deslocamentos generalizados δ_{10} e δ_{11} na equação de compatibilidade (2.40), tem-se então:

$$-421{,}86.10^{-4} + X_1 \cdot 115{,}06.10^{-4} = 0, \quad (2.54)$$

$$\therefore \quad X_1 = +\frac{421{,}86 \cdot 10^{-4}}{115{,}06 \cdot 10^{-4}} = 3{,}67 \quad (2.55)$$

ou seja, valor positivo, indicando que o sentido arbitrado para a reação hiperrestática X_1 estava correto, e deve estar expressa em kN, unidade consistente com a utilizada para forças no pórtico:

$$X_1 = +3{,}67 \text{ kN} \quad (2.56)$$

Observa-se das equações (2.49) e (2.52) que a parcela do deslocamento devido à deformação axial é muito menor do que a parcela devido à deformação por flexão. Caso a deformação axial fosse desprezada não haveria diferença significativa no resultado (cerca de 0,02%), o que nem é observado com a precisão de duas casas decimais:

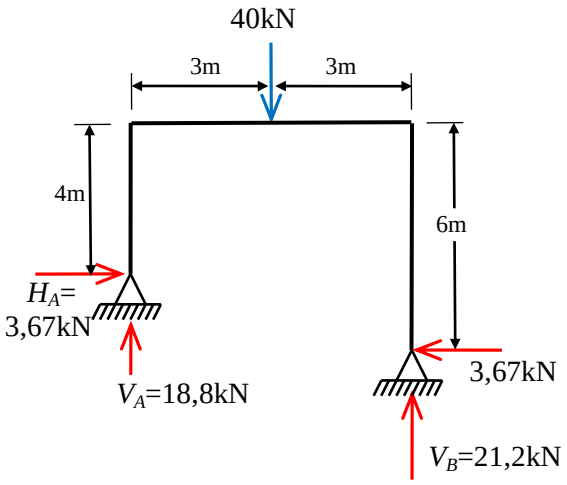
$$\delta_{10} \cong -421{,}94 \cdot 10^{-4} \text{ (m)} \quad (2.57)$$

$$\delta_{11} \cong 115{,}02 \cdot 10^{-4} \quad \text{(m/kN)} \quad (2.58)$$

$$\therefore \quad X_1 \cong +\frac{421{,}94 \cdot 10^{-4}}{115{,}02 \cdot 10^{-4}} = 3{,}67 \text{ (kN)} \quad (2.59)$$

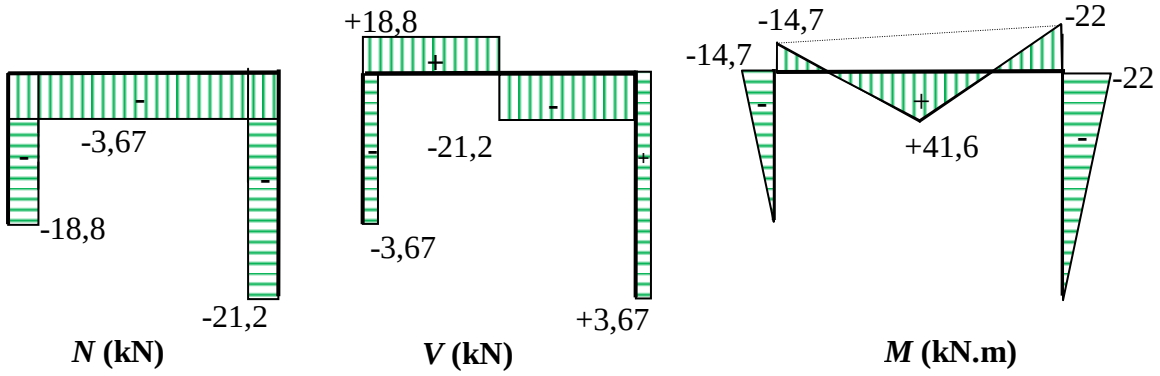
Portanto nos pórticos planos usuais, cujas barras têm seção transversal sólida, costuma-se desprezar a parcela de deflormação axial no cálculo dos deslocamentos. Já no caso de seções vazadas, principalmente de parede fina, como é o caso de alguns perfis esbeltos e seções tubulares metálicos, em que a rigidez axial não é muito maior do que a de flexão, deve-se levar em conta a deformação axial.

Após a determinação da reação hiperestática, determinam-se as demais reações no pórtico isostático do sistema principal (Figura 2.17) utilizando-se as equações de equilíbrio da Estática conforme mostra a Figura 2.21. Conhecendo-se as reações é possível determinar os esforços internos e traçar os seus respectivos diagramas. Os esforços internos podem também ser determinados pelo Princípio de Superposição de Efeitos, segundo as expressões mostradas na Figura 2.22 e utilizando-se os diagramas de esforços encontrados anteriormente para a situação (0) e (I).



$$\sum F_x = 0$$
$$H_A - 3{,}67\,\text{kN} = 0 \;\therefore\; H_A = 3{,}67\,\text{kN}$$
$$\sum M_A = 0$$
$$V_B.6\text{m} - 40\,\text{kN}\cdot 3\text{m} - 3{,}67\,\text{kN}\cdot 2\text{m} = 0$$
$$\therefore V_B = 21{,}2\,\text{kN}$$
$$\sum F_y = 0$$
$$V_A + V_B = 40\ \text{kN}$$
$$\therefore V_A = 18{,}8\,\text{kN}$$

Figura 2.21: Reações de apoio do pórtico plano mostrado na Figura 2.16



$$N = N_0 + X_1 N_1 \qquad V = V_0 + X_1 V_1 \qquad M = M_0 + X_1 M_1$$

a) Diagrama de esforço normal

(b) Diagrama de esforço cortante

(c) Diagrama de momento fletor

Figura 2.22: Diagrama de esforços internos do pórtico plano da Figura 2.16

2.1.1.3. Exemplo 3 – Viga Contínua

Seja a viga contínua, mostrada na Figura 2.23, cujas barras tem seção transversal constante, com rigidez à flexão igual a *EI*. Trata-se de uma viga com grau de hiperestaticidade externo igual a 1 ($g_e = r - e = 4 - 3 = 1$, onde r é o número de reações de apoio e e o número de equações de equilíbrio da estática).

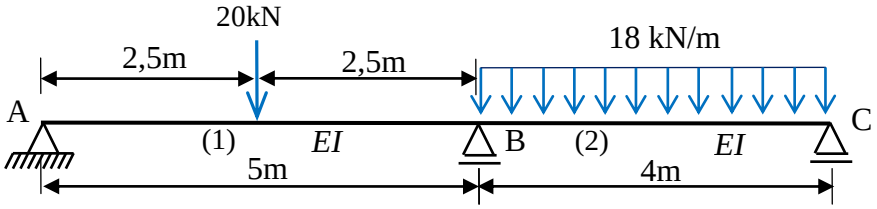


Figura 2.23 Viga contínua de dois vãos, uma vez hiperestática

Existem diversos sistemas principais possíveis para tornar essaa viga numa estrutura isostática equivalente, pelo Método das Forças. Poderia-se, por exemplo, se substituir o apoio de 1º gênero em B pela reação vertical correspondente, impondo-se a condição de deslocamento vertical nulo em B; ou fazer o mesmo no apoio em C; ou ainda se eliminar o vínculo de restrição de deslocamento vertical em A, substituindo-o pela reação vertical e impondo-se deslocamento nulo nesse ponto e direção. No entanto, para facilitar o traçado dos diagramas de momentos fletores necessários ao cálculo dos deslocamentos generalizados δ_{ij}, recomenda-se a utilização do sistema principal mostrado na Figura 2.24:

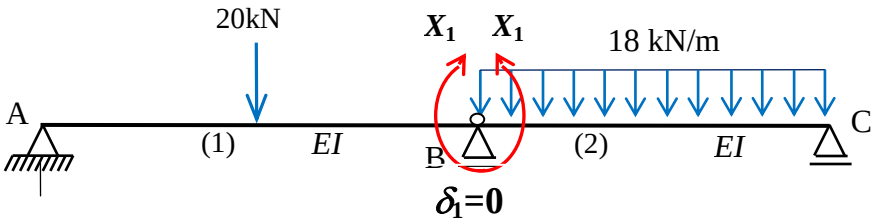


Figura 2.24 Sistema Principal para a viga hiperestática da Figura 2.23

Nesse sistema libera-se o vínculo de rotação na ligação entre as barras no apoio intermediário B, colocando-se uma rótula, e introduzindo-se os momentos fletores atuantes nas barras adjacentes à rotula, que são as incógintas do problema, logo denominados X_1. Impondo-se a condição de compatibilidade de deslocamentos, que a rotação relativa entre

as barras adjacentes à rótula deve se anular ($\delta_1 = \theta_B^{Dir} - \theta_B^{Esq} = 0$), torna-se a viga do sistema principal isostática e equivalente à viga real hiperestática. Admitindo-se que a viga contínua apresente comportamento linear, pode-se considerar separadamente a ação do carregamento externo e do hiperestático e depois somar os seus efeitos. Aplica-se assim a mesma equação de compatibilidade de deslocamentos em sua forma genérica, usada nos exemplos anteriores:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \qquad (2.60)$$

O cálculo dos deslocamentos generalizados é realizado pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, a partir dos diagramas de momentos fletores da viga na situação 0 (devido ao carregamento externo) e na situação I (devido a uma carga unitária na direção e ponto de aplicação do hiperestático X_1). Os diagramas dos momentos fletores M_0 estão mostrados na Figura 2.25 e os diagramas M_1 estão mostrados na Figura 2.26. O traçado e a forma dos diagramas de momentos fletores ficam assim simplificados, pois nesse sistema principal a viga contínua foi transformada em duas vigas isostáticas bi-apoiadas desacopladas.

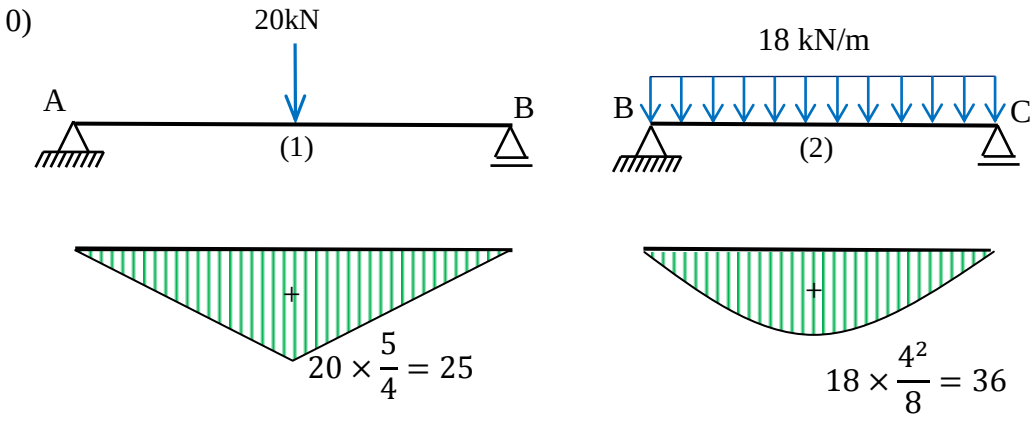


Figura 2.25 Diagramas de momento fletor M_0 (em kN.m)

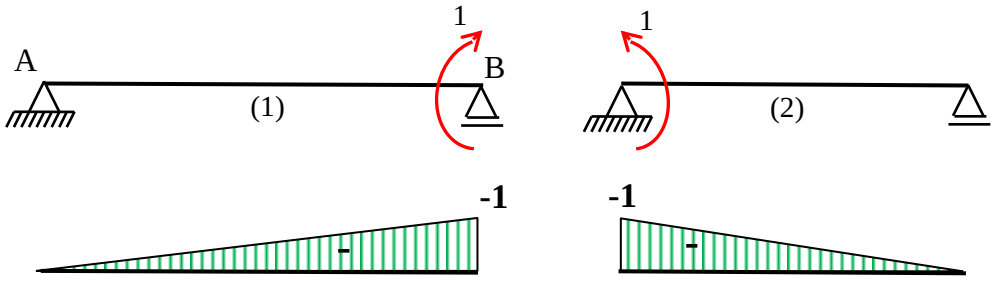


Figura 2.26 Diagramas de momento fletor M_1 (adimensional)

No cálculo dos deslocamentos generalizados despreza-se o efeito da deformação por cisalhamento nas barras, assim considera-se apenas a deformação causada pelo momento fletor. Como a viga tem a mesma seção transversal nas duas barras, constante ao longo de seus eixos, pode-se obter o deslocamento generalizado δ_{10} pela seguinte expressão, colocando-se a rigidez à flexão *EI* fora da integral e do somatório:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^{l_k} M_1 M_0 dx\right) \tag{2.61}$$

Analogamente pode-se calcular o deslocamento generalizado δ_{11} pela expressão:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\sum_{k=1}^{2}\left(\int_0^{l_k} M_1 M_1 dx\right) \tag{2.62}$$

Para calcular o produto das funções de momentos fletores nas expressões (2.61) e (2.62), utiliza-se mais uma vez a tabela de Kurt-Beyer, conforme mostrado na Tabela 2.7 e na Tabela 2.8, respectivamente.

Tabela 2.7 Combinação dos esforços M_1 e M_0 para o cálculo de δ_{10}

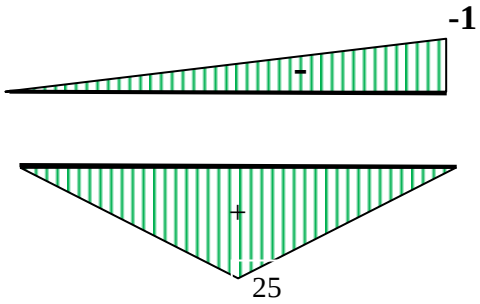
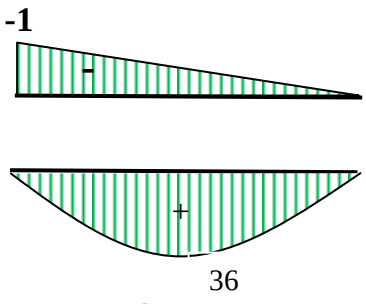
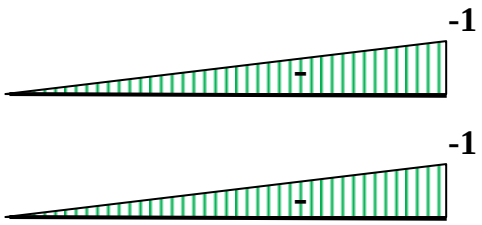
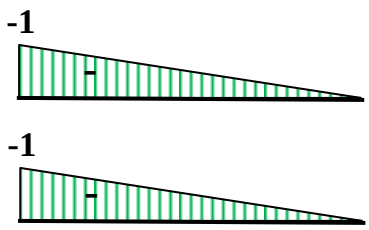
Barra 1	Barra 2
 l_1=5m	 l_2=4m
$\int_0^{l_1} M_1 M_0 dx_1 = \frac{1}{6} l_1 (1+0{,}5) M_1 M_0 =$ $\frac{1}{4}.5.(-1).(25) = -\frac{625}{4} = -31{,}25$	$\int_0^{l_2} M_1 M_0 dx_2 = \frac{1}{3}.l_2.M_1 M_0 =$ $\frac{1}{3}.4.(-1).(36) = -48$

Tabela 2.8 Combinação dos esforços M_1 e M_1 para o cálculo de δ_{11}

Barra 1	Barra 2
 l_1=5m	 l_2=4m
$\int_0^{l_1} M_1 M_1 dx_1 = \frac{1}{3} l_1 M_1 M_1 =$ $\frac{1}{3}.5.(-1).(-1) = \frac{5}{3} \cong 1{,}67$	$\int_0^{l_2} M_1 M_1 dx_2 = \frac{1}{3}.l_2.M_1 M_1 =$ $\frac{1}{3}.4.(-1).(-1) = \frac{4}{3} \cong 1{,}33$

Substituindo-se os valores encontrados nessas tabelas nas expressões (2.61) e (2.62), obtêm-se:

$$\delta_{10} = \frac{-31{,}25 - 48}{EI} = -\frac{79{,}25}{EI} \tag{2.63}$$

$$\delta_{11} = \frac{5}{3EI} + \frac{4}{3EI} = \frac{3}{EI} \tag{2.64}$$

Inserindo-se em seguida os valores obtidos para δ_{10} e δ_{11} na equação de compatilidade (2.60), obtém-se o valor da incógnita hiperestática:

$$X_1 = -\frac{(-79{,}25)}{3} \cong 26{,}42 \ \text{(kN.m)}$$

a qual representa o momento fletor atuando nas extremidades das barras adjacentes ao apoio intermediário B. O sinal encontrado, positivo, indica que o sentido arbitrado para os momentos X_1 estavam corretos, e a unidade está consistente com as utilizadas para forças e distâncias na viga.

Obtido o valor de X_1, pode-se encontar as demais reações de apoio e os esforços finais no sistema principal a partir das equações de equilíbrio da Estática, ou então se usando superposição de efeitos:

$$R = R_0 + X_1 R_1 \qquad V = V_0 + X_1 V_1 \qquad M = M_0 + X_1 M_1 \qquad (2.65)$$

Deixa-se para o leitor, como exercício, encontrar as reações de apoio e os diagramas de esforços finais para esse exemplo de viga contínua.

2.1.2 Estruturas duas vezes hiperestática (g_e = 2)

Seja por exemplo a viga contínua engastada na extremidade esquerda e com dois apoios simples, como mostra a Figura 2.27. Esta estrutura apresenta cinco reações externas: três reações verticais, uma reação horizontal e uma reação de momento, mostradas na Figura 2.28.

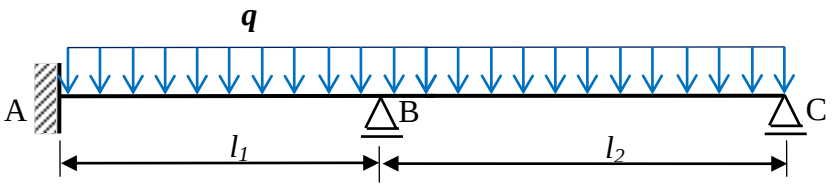


Figura 2.27: Viga engastada com dois apoios simples

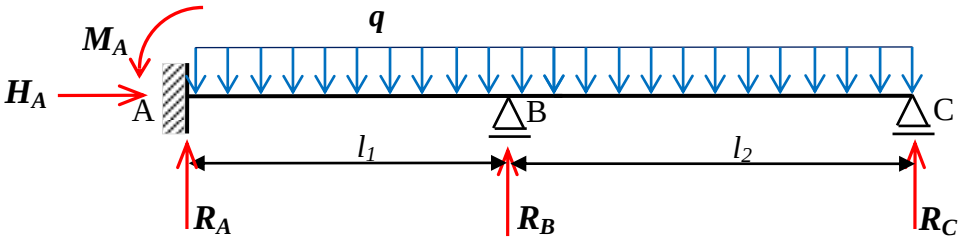


Figura 2.28: Reações de apoio da viga da Figura 2.27

Assim, conforme visto no item 1.2, o grau de hiperestaticidade da viga mostrada na Figura 2.27 é igual a: $g_e = r - e = 5 - 3 = 2$, sendo r o número de reações e e o número de equações de equilíbrio da Estática, portanto a viga é duas vêzes hiperestática.

Para resolução dessa viga pelo Método das Forças, diversos sistemas principais podem ser escolhidos, sendo alguns ilustrados na Figura 2.29. Analogamente ao que foi visto no exemplo anterior, item 2.1.1.3, o sistema principal mostrado na Figura 2.29d é em geral mais conveniente, particularmemente quando o carregamento ou a rigidez são diferentes

nos dois vãos. No entanto, como a visualização das deformadas devido ao carregamento externo e à ação dos hiperestáticos é mais fácil no sistema principal da Figura 2.29a, este sistema foi escolhido nesta apostila para ilustrar a formulação do Método das Forças de estruturas duas vezes hiperestática, como mostrado na Figura 2.30. Admite-se que a viga tenha comportamento linear, logo pode-se utilizar superposição de efeitos, aplicando-se separadamente as ações do carregamento externo, do hiperestático X_1 e do hiperestático X_2. Na Figura 2.30 os deslocamentos generalizados representam: δ_{ij} = deslocamento generalizado na direção i causado pela ação de uma força unitária generalizada agindo na direção j, ou pelo carregamento externo no caso de j=0.

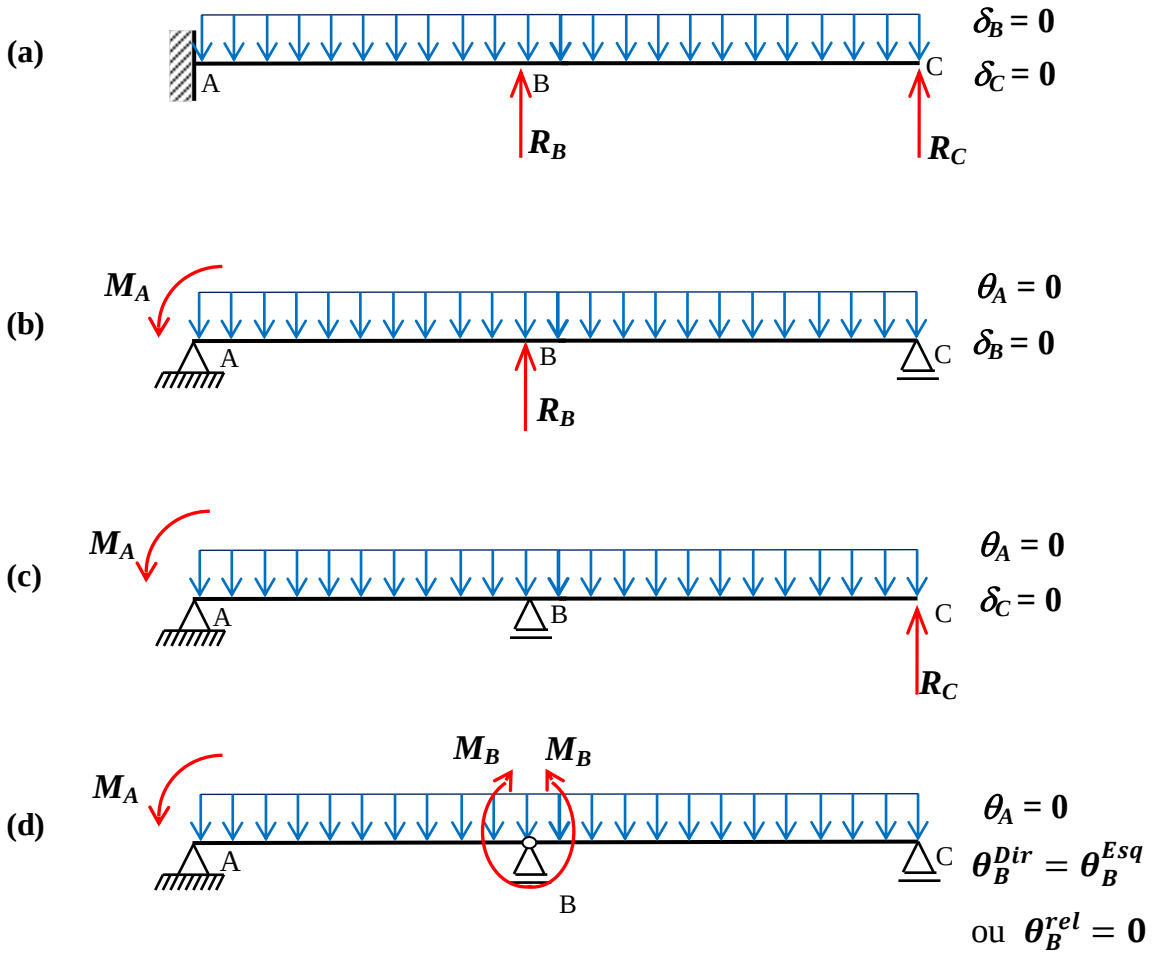


Figura 2.29: Sistemas principais possíveis para a viga mostrada na Figura 2.27

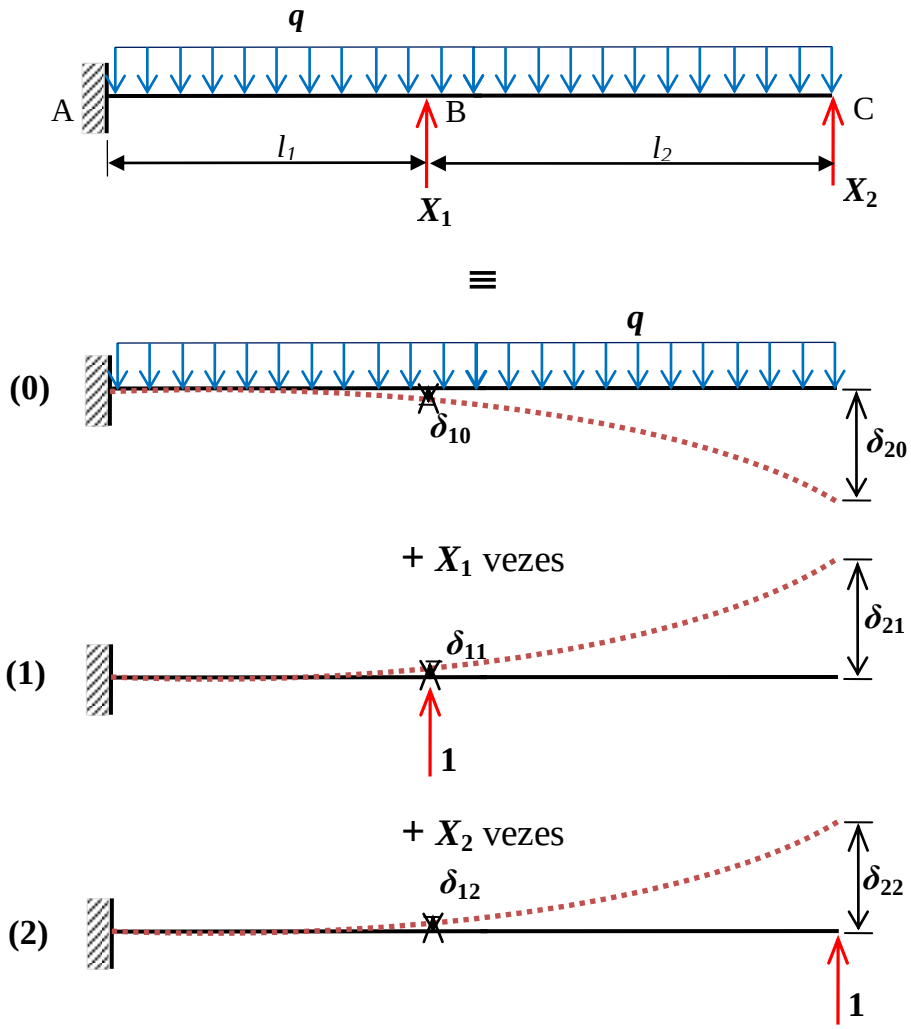


Figura 2.30: Deslocamentos causados pelo carregamento externo e pela ação dos hiperestáticos

As condições de compatibilidade de deslocamentos fornecem um sistema algébrico de duas equações e duas incógnitas:

$$\delta_1 = 0 \rightarrow \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} = 0 \qquad (2.66)$$

$$\delta_2 = 0 \rightarrow \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} = 0$$

Esse sistema de equações pode ser rearranjado na seguinte forma:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = -\delta_{10} \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = -\delta_{20} \end{cases}. \qquad (2.67)$$

o qual pode ser reescrito sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} \text{ ou} \qquad (2.68)$$

$$[\delta]\cdot\{X\}=-\{\delta_0\} \tag{2.69}$$

onde $[\delta]$ é a matriz de flexibilidade da viga, $\{X\}$ é o vetor de esforços ou forças (generalizadas), incógnitas do problema, e $\{\delta_0\}$ é o vetor de deslocamentos (generalizados) devido à ação do carregamento externo.

Para se obter o vetor de incógnitas é necessário inverter a matriz de flexibilidade da estrutura:

$$\{X\}=-[\delta]^{-1}.\{\delta_0\} \tag{2.70}$$

em que $[\delta]^{-1} = [K]$ é a matriz de rigidez da estrutura.

A forma genérica do sistema de equações (2.69) pode ser aplicada para estruturas três ou mais vezes hiperestática, conforme será visto mais adiante. Os coeficientes δ_{ij} podem ser obtidos por diversos métodos, sendo nesta apostila usado o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) conhecido por Método da Carga Unitária.

Ressalta-se que para vigas contínuas é mais conveniente se adotar sistemas principais em que rótulas são introduzidas, conforme o mostrado na Figura 2.29d e conforme será feito no exemplo do próximo item.

2.1.2.1 Exemplo - Viga contínua com três vãos

Seja uma viga contínua com três vãos, cujas barras têm a mesma seção transversal, constante ao longo de seus eixos, com rigidez à flexão *EI* (Figura 2.31).

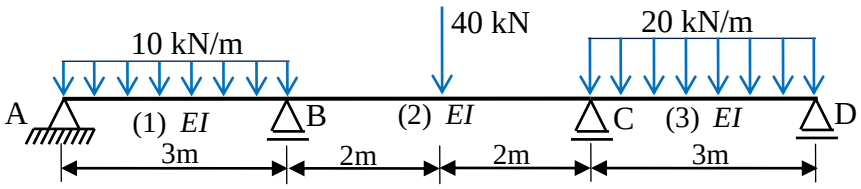


Figura 2.31: Viga contínua com três vãos

Trata-se de uma viga duas vezes hiperestática: $g_e = r - e = 5 - 3 = 2$, sendo r o número de reações e e o número de equações de equilíbrio da Estática. Adota-se o sistema principal em que são introduzidas rótulas nos apoios intermediários, como mostra a Figura 2.32, liberando-se a ligação de momento entre as barras e impondo-se as condições de

compatibilidade de deslocamentos pertinentes (rotação relativa entre as barras adjacentes ao apoio intermediário deve se anular):

$$\delta_1 = \theta_B^{Dir} - \theta_B^{Esq} = 0 \qquad (2.71)$$

$$\delta_2 = \theta_c^{Dir} - \theta_c^{Esq} = 0$$

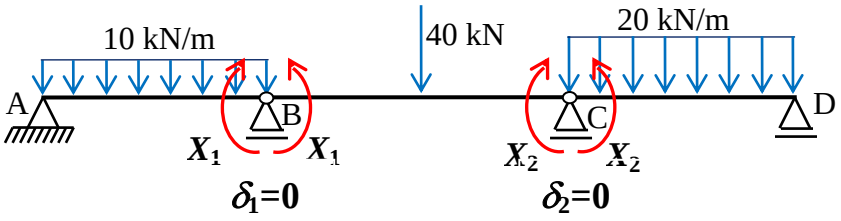


Figura 2.32: Sistema principal da viga contínua mostrada na Figura 2.31.

Admitindo que o sistema principal da Figura 2.32 apresente comportamento linear, aplica-se o Princípio de Superposição de Efeitos considerando-se separadamente na viga as ações do carregamento externo e dos hiperestáticos X_1 e X_2. Portando o sistema de equações de compatibilidade pode ser escrito na forma genérica:

$$\delta_1 = 0 \rightarrow \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} = 0 \qquad (2.72)$$

$$\delta_2 = 0 \rightarrow \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} = 0$$

Com a introdução das rótulas, a viga contínua é transformada em três vigas bi-apoiadas desacopladas, todas isostáticas, o que vem a facilitar o traçado dos diagramas de esforços.

A Figura 2.33 apresenta os diagramas de momentos fletores no sistema principal devido à aplicação do carregamento externo, situação 0 (M_0).

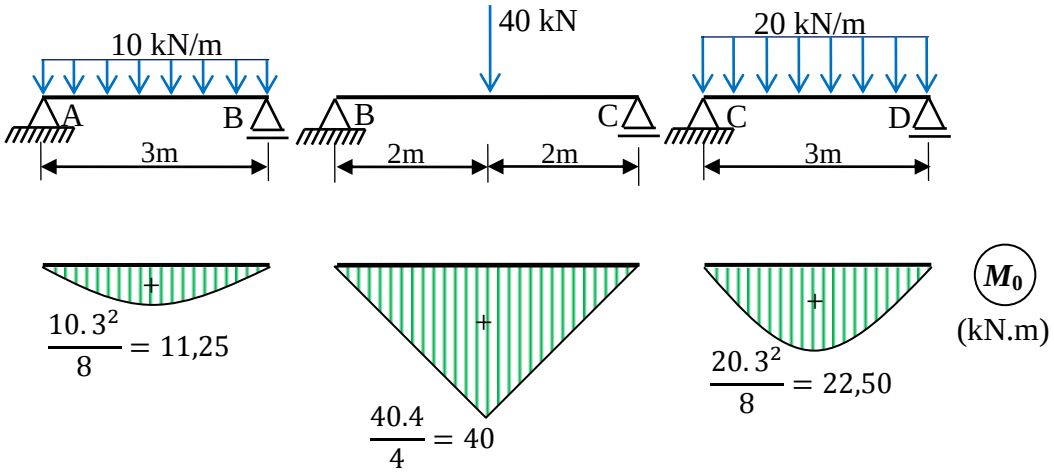


Figura 2.33: Momentos fletores no sistema principal causados pelo carregamento externo (M_0).

Na Figura 2.34 apresentam-se os diagramas de momento fletor no sistema principal devido à aplicação de um momento unitário na direção dos hiperestáticos X_1 (situação I, M_1).

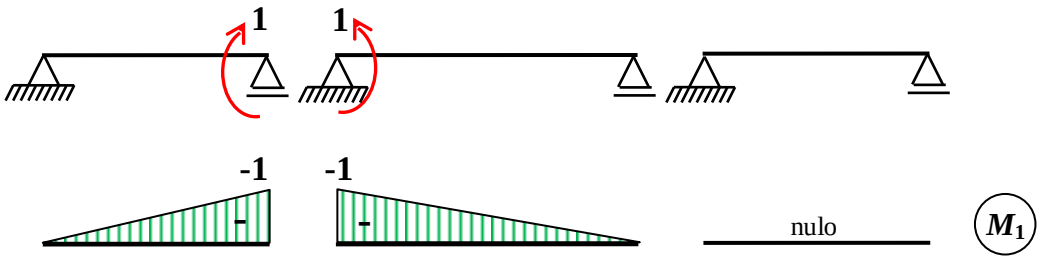


Figura 2.34: Momentos fletores devido à aplicação de um momento unitário na direção dos hiperestáticos X_1 (M_1)

Já a Figura 2.35 apresenta os diagramas de momento fletor no sistema principal devido à aplicação de um momento unitário na direção dos hiperestáticos X_2 (situação II, M_2).

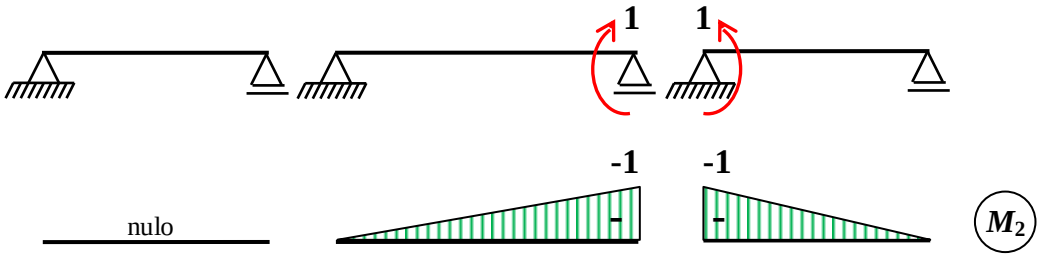


Figura 2.35: Momentos fletores devido à aplicação de um momento unitário na direção dos hiperestáticos X_2 (M_2)

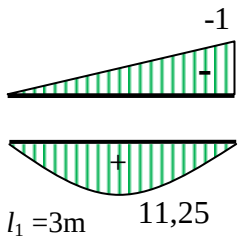
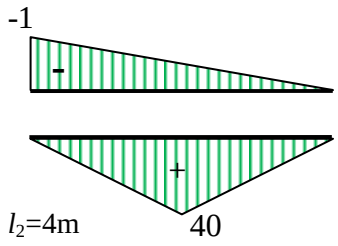
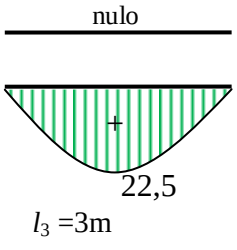
Para obtenção dos deslocamentos generalizados δ_{ij} utiliza-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, e como o esforço axial é nulo e a rigidez à flexão EI é constante ao longo de toda a viga, tem-se que (desprezando-se o efeito da deformação por cisalhamento):

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI}\sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k} M_i M_j dx\right) \tag{2.73}$$

Observa-se da equação acima que como o produto é comutativo, $M_i.M_j = M_j.M_i$, tem-se que $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, logo a matriz de flexibilidade é simétrica, o que está de acordo com o Princípio de Reciprocidade de Betti-Maxwell (SUSSEKIND, 1994a). A integral dos produtos de

momentos na expressão (2.73) pode ser efetuada com o auxílio da tabela de Kurt-Bayer. Para a determinação de δ_{10} esses cálculos estão mostrados na Tabela 2.9.

Tabela 2.9: Combinação de diagramas de momentos para o cálculo de δ_{10}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
		
$\int_{l_1} M_1 M_0 dx_1 = \frac{1}{3} l_1 M_1 M_0 =$ $\frac{1}{3}.3.(-1).11{,}25 = -11{,}25$	$\int_{l_2} M_1 M_0 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 (1+0{,}5) M_1 M_0 =$ $\frac{1}{4}.4.(-1).(40) = -40$	$\int_{l_3} M_1 M_0 dx_3 = 0$

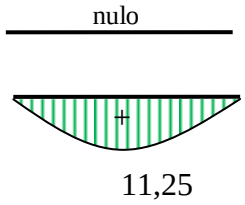
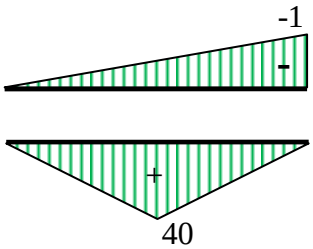
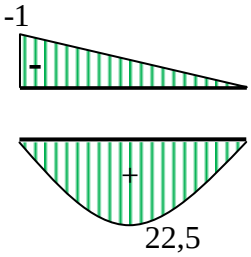
Substituindo-se os valores encontrados na Tabela 2.9 na equação (2.73) tem-se:

$$\delta_{10} = -\frac{11{,}25}{EI} - \frac{40}{EI} = -\frac{51{,}25}{EI} \tag{2.74}$$

Para a determinação de δ_{20} os cálculos estão mostrados na Tabela 2.10, resultando em:

$$\delta_{20} = -\frac{40}{EI} - \frac{22{,}5}{EI} = -\frac{62{,}5}{EI} \tag{2.75}$$

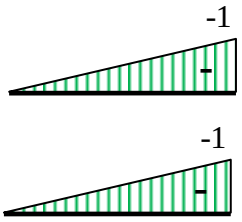
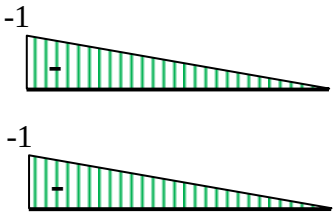
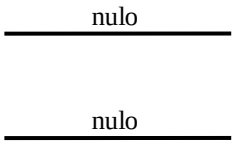
Tabela 2.10: Combinação de diagrama de momentos para o cálculo de δ_{20}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
		
$\int_{l_1} M_2 M_0 dx_1 = 0$	$\int_{l_2} M_2 M_0 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 (1+0{,}5) M_2 M_0 =$ $\frac{1}{4}.4.(-1).(40) = -40$	$\int_{l_3} M_2 M_0 dx_3 = \frac{1}{3} l_3 M_2 M_0 =$ $\frac{1}{3}.3.(-1)(22{,}5) = -22{,}5$

Para a determinação de δ_{11} utilizam-se os cálculos mostrados na Tabela 2.11, obtendo-se:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} + \frac{4}{3EI} = \frac{7}{3EI} \tag{2.76}$$

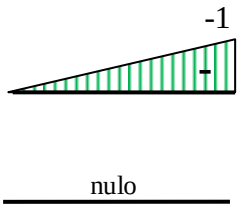
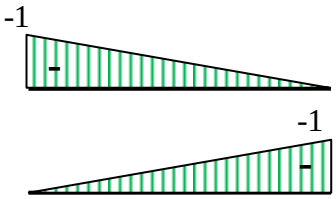
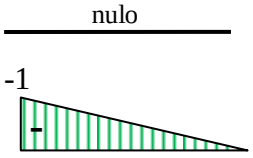
Tabela 2.11: Combinação de diagrama de momentos para o cálculo de δ_{11}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
 l_1 =3m	 l_2 =4m	 l_3 =3m
$\int_{l_1} M_1 M_1 dx_1 = \frac{1}{3} l_1 M_1 M_1 =$ $\frac{1}{3}.3.(-1)(-1) = 1$	$\int_{l_2} M_1 M_1 dx_2 = \frac{1}{3} l_2 M_1 M_1 =$ $\frac{1}{3}.4.(-1)(-1) = \frac{4}{3} \cong 1{,}33$	$\int_{l_3} M_1 M_1 dx_3 = 0$

E para a obtenção de δ12 efetua-se a combinação do diagrama de momentos mostrada na Tabela 2.12, resultando em:

$$\delta_{12} = \frac{2}{3EI} \tag{2.77}$$

Tabela 2.12: Combinação de diagrama de momentos para o cálculo de δ_{12}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
 l_1 =3m	 l_2 =4m	 l_3 =3m
$\int_{l_1} M_1 M_2 dx_1 = 0$	$\int_{l_2} M_1 M_2 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 M_1 M_2 =$ $\frac{1}{6}.4.(-1)(-1) = \frac{2}{3}$	$\int_{l_3} M_1 M_2 dx_3 = 0$

Devido à simetria da matrix de flexibilidade, tem-se que $\delta_{21} = \delta_{12}$.

Para a determinação de δ_{22} efetuam-se os cálculos mostrados na Tabela 2.13, obtendo-se:

$$\delta_{22} = \frac{4}{3EI} + \frac{1}{EI} = \frac{7}{3EI} \tag{2.78}$$

Tabela 2.13: Combinação do diagrama de momentos para o cálculo de δ_{22}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
nulo nulo $l_1 = 3\text{m}$	-1 -1 $l_2 = 4\text{m}$	-1 -1 $l_3 = 3\text{m}$
$\int_{l_1} M_2 M_2 dx_1 = 0$	$\int_{l_2} M_2 M_2 dx_2 = \frac{1}{3} l_2 M_2 M_2 =$ $\frac{1}{3}.4.(-1).(-1) = \frac{4}{3} \cong 1{,}33$	$\int_{l_3} M_2 M_2 dx_3 = \frac{1}{3} l_3 M_2 M_2 =$ $\frac{1}{3}.3.(-1).(-1) = 1$

Para simplificar não foram mostradas as unidades dos valores de δ_{ij} , deixando-se para colocar as unidades apenas nas reações de apoio e esforços, ao final do problema. Finalmente, substituindo-se os deslocamentos generalizados encontrados no sistema de equações (2.72) e multiplicando-se ambos os lados de cada equação por *EI*, vem:

$$\begin{cases} -51{,}25 + \frac{7}{3} X_1 + \frac{2}{3} X_2 = 0 \\ -62{,}5 + \frac{2}{3} X_1 + \frac{7}{3} X_2 = 0 \end{cases} \tag{2.79}$$

cuja solução fornece os valores das incógnitas hiperestáticas:

$$X_1 = 15{,}60 \ (\text{kN} \cdot \text{m}) \tag{2.80}$$
$$X_2 = 22{,}33 \ (\text{kN} \cdot \text{m})$$

Os sinais positivos encontrados indicam que o sentido arbitrado para os momentos X_1 e X_2 estava correto e as unidades indicadas são consistentes com as utilizadas para força (kN) e distâncias (m) para a viga contínua nesse exemplo.

As reações de apoio da viga contínua e seus esforços podem ser obtidos substituindo-se os valores encontrados para X_1 e X_2 no sistema principal isostático equivalente, considerando-se as três vigas bi-apoiadas desacopladas, conforme mostrado na Figura 2.36, e usando-se as equações de equilíbrio da Estática, ou então aplicando-se superposição de efeitos:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{R}_2 \qquad (2.81)$$
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{M}_2$$

Fica como atividade didática para o leitor o cálculo das reações de apoio na viga contínua. Os diagramas de esforços estão apresentados na Figura 2.37, sendo que os valores máximos dos momentos fletores positivos no primeiro e terceiro vão da viga podem ser calculados pelo Método das Seções, na seção correspondente ao esforço cortante nulo.

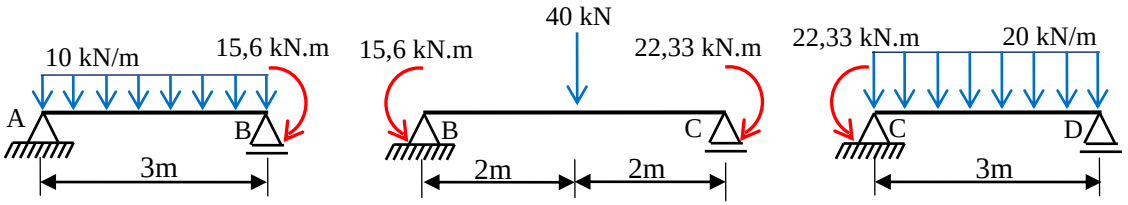


Figura 2.36: Sistema principal isostático – três vigas bi-apoiadas descopladas

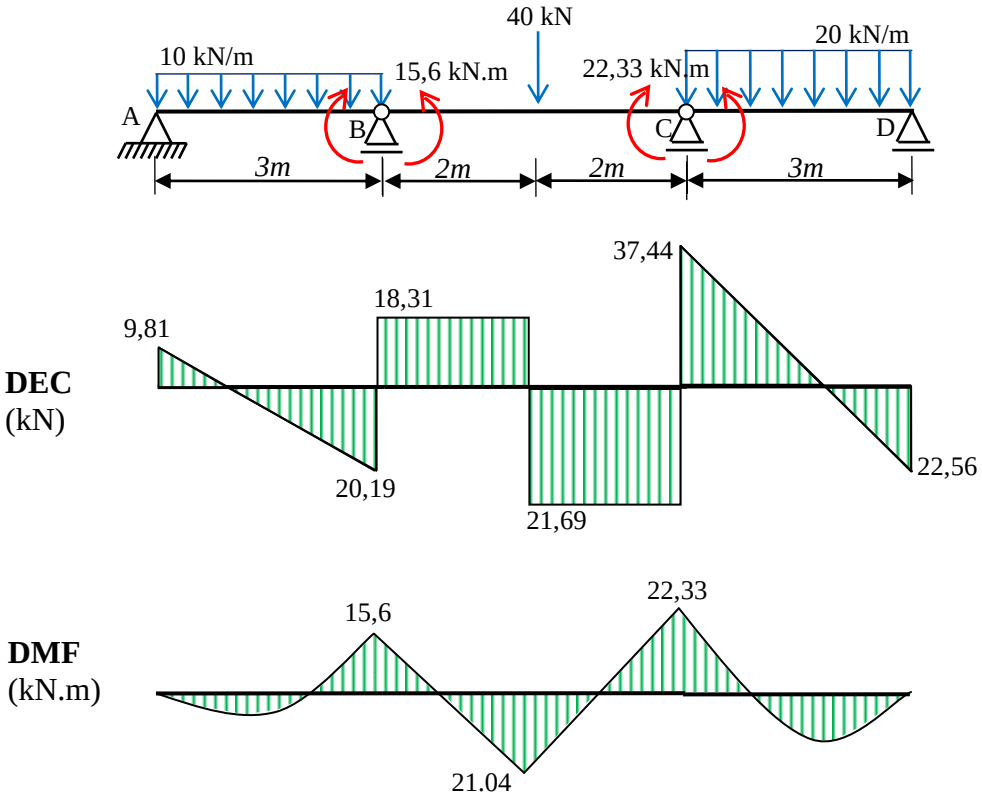


Figura 2.37: Diagramas de esforço cortante e momento fletor da viga da Figura 2.31.

2.1.2.2 Exercício proposto

Seja uma viga contínua de três vãos com um balanço à esquerda conforme mostra a Figura 2.38. Determinar as reações de apoio e traçar os diagramas dos esforços internos da viga, sendo dado o módulo de elasticidade do material igual a E e as inércias das barras I_1 = 4375 cm^4 e I_2 = 4102 cm^4.

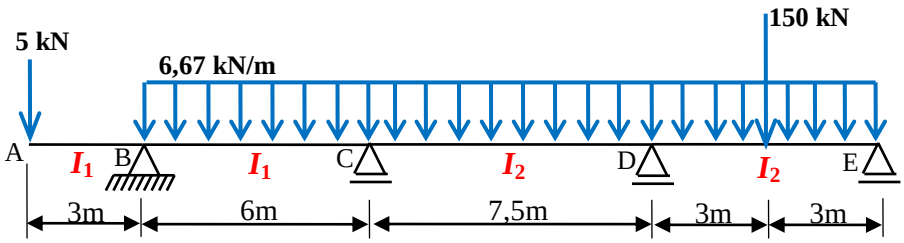


Figura 2.38: Viga contínua de três vãos com balanço à esquerda

2.1.3 Estruturas três vezes hiperestática (g_e = 3)

Seja o pórtico plano bi-engastado mostrado na Figura 2.39, em que todas as barras são constituídas de mesmo material e apresentam a mesma seção transversal, para o qual se deseja determinar as reações de apoio, seus esforços internos e respectivos diagramas. Este pórtico apresenta seis reações vinculares (r) devido aos engastes em A e B, portanto o seu grau de hiperestaticidade externa é: $g_e = r - e = 6 - 3 = 3$ (em que e = nº de equações de equilíbrio da Estática).

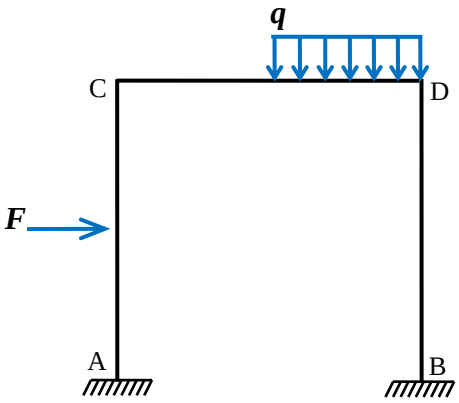


Figura 2.39: Pórtico plano bi-engastado

Na resolução pelo Método das Forças, um dos sistemas principais possíveis para o pórtico plano hiperestático da Figura 2.39 é o mostrado na Figura 2.40. Nesse sistema removeu-se o engaste da direita, em B, substituindo-o pelas reações de apoio correspondentes e

aplicaram-se as respectivas condições de compatibilidade de deslocamentos, indicadas na figura.

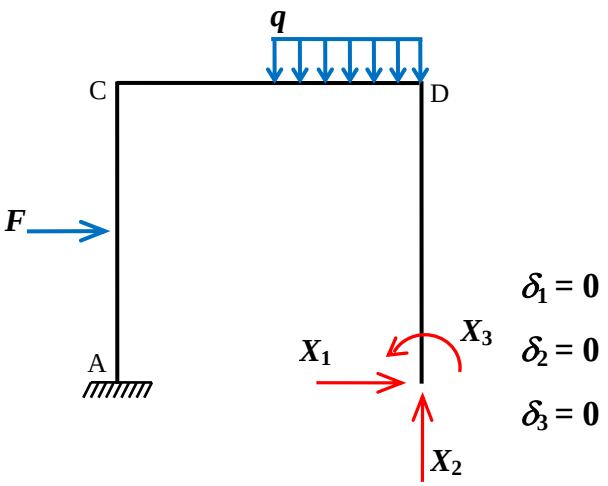


Figura 2.40: Sistema principal para o pórtico plano mostrado na Figura 2.39

Admitindo-se que o pórtico isostático equivalente do sistema principal tenha comportamento linear, pode-se utilizar o Princípio da Superposição de Efeitos, considerando-se separadamente no pórtico a ação do carregamento externo, do hiperestático X_1, do hiperestático X_2 e do hiperestático X_3, e depois somando-se seus efeitos, conforme mostrado na Figura 2.41. Assim sendo as equações de compatibilidade de equações de deslocamentos formam um sistema de três equações algébricas com três incógnitas:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} = 0 \\
\delta_2 &= \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} = 0 \\
\delta_3 &= \delta_{30} + X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} = 0
\end{aligned} \qquad (2.82)$$

o qual pode ser expresso matricialmente sob a forma:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{Bmatrix}$$

ou sob a forma genérica, vista anteriormente para estruturas duas vezes hiperestática:

$$[\delta] \cdot \{X\} = -\{\delta_0\} \quad \therefore \{X\} = -[\delta]^{-1} \{\delta_0\} \qquad (2.83)$$

onde $[\delta]$ é a matriz de flexibilidade do pórtico, $\{X\}$ é o vetor de esforços ou forças (generalizadas), incógnitas do problema, e $\{\delta_0\}$ é o vetor de deslocamentos (generalizados) devido à ação do carregamento externo.

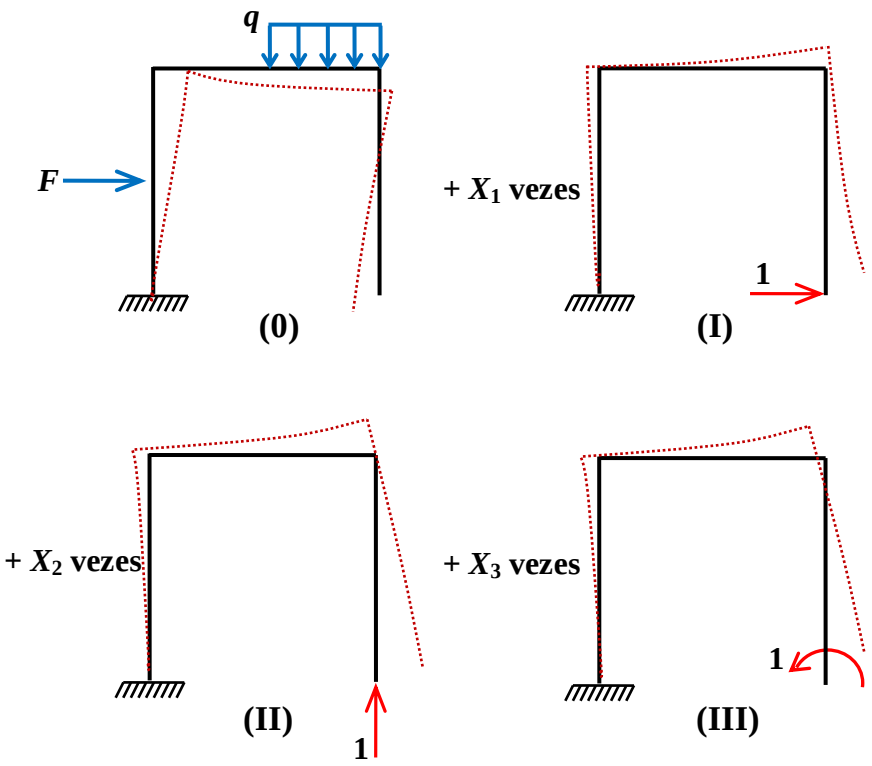


Figura 2.41 Superposição de efeitos: deformações causadas pelo carregamento externo e pela ação dos hiperestáticos no sistema principal

Conforme foi visto anteriormente, os coeficientes δ_{ij} podem ser obtidos pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Desprezando-se no pórtico plano a deformação por cisalhamento, tem-se então que:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \left(\int_0^{l_k} \frac{M_i M_j}{EI_k} dx + \int_0^{l_k} \frac{N_i N_j}{EA_k} dx \right) \tag{2.84}$$

sendo E o módulo de elasticidade do material; A_k a área da seção transversal e I_k o momento de inércia em relação ao eixo horizontal da seção, de cada barra k.

Para uma estrutura com grau de hiperestaticidade igual a 3, deve-se apenas determinar seis coeficientes da matriz de flexibilidade (δ_{11}, δ_{22}, δ_{33}, δ_{12}, δ_{13}, δ_{23}), devido à simetria da matriz [δ], e três coeficientes do vetor força δ_0 (δ_{10}, δ_{20}, δ_{30}). Após obtidos todos os coeficientes, inserem-se seus valores no sistema de equações (2.82), cuja solução fornecerá os valores das incógnitas, no caso reações de apoio hiperestáticas, X_1, X_2 e X_3. Analogamente ao que foi visto anteriormente para estruturas uma ou duas vezes hiperestática, conhecidas as reações hiperestáticas pode-se obter as demais reações de

apoio no sistema principal, a partir das quais obtêm-se os esforços internos e respectivos diagramas do pórtico plano.

2.1.3.1 Exemplo 1: Pórtico Plano bi-engastado

Seja determinar as reações de apoio, esforços internos e respectivos diagramas para o pórtico plano bi-engastado mostrado na Figura 2.42, sabendo que todas as barras são constituídas de mesmo material (módulo de elasticidade *E*), apresentam a mesma seção transversal (inércia *I*), e admitindo que o pórtico apresente comportamento linear.

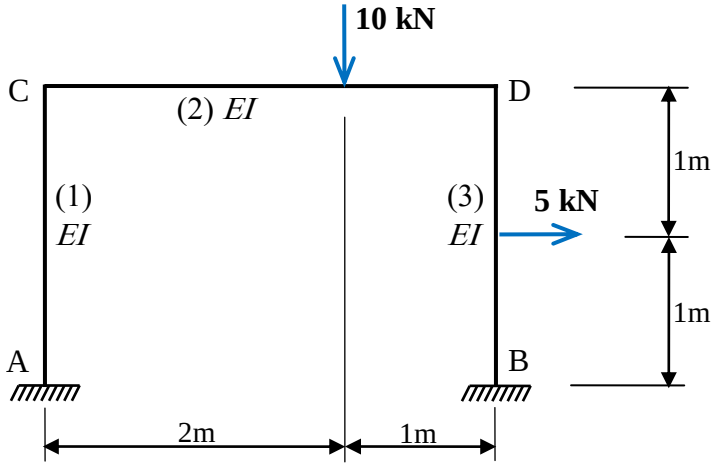


Figura 2.42: Pórtico plano bi-engastado

O pórtico aprsenta seis reações vinculares, logo grau de hiperestaticidade igual a 3 (g_e = 6 – 3 = 3). Entre os diversos sistemas principais possíveis para a resolução desse pórtico plano pelo Método das Forças, pode-se escolher o mostrado na Figura 2.43, em que foram introduzidas rótulas nos engastes e foi liberado o vínculo de restrição de deslocamento horizontal no ponto B, substituindo-se os vínculos pelas respectivas reações de apoio e impondo-se as condições de compatibilidade correspondentes:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} = 0 \\
\delta_2 &= \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} = 0 \\
\delta_3 &= \delta_{30} + X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} = 0
\end{aligned} \qquad (2.85)$$

nas quais utilizou-se o Princípio de Superposição de Efeitos, conforme feito anteriormente (equações 2.82).

Para o cálculo dos deslocamentos generalizados δ_{ij} será utilizado o Princípio dos Trabalhos Virtuais, desprezando-se nesse exemplo as parcelas de deformação axial e cisalhamento:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k} \frac{M_i M_j}{EI_k}\,dx\right) = \frac{1}{EI}\sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k} M_i M_j\,dx\right) \qquad (2.86)$$

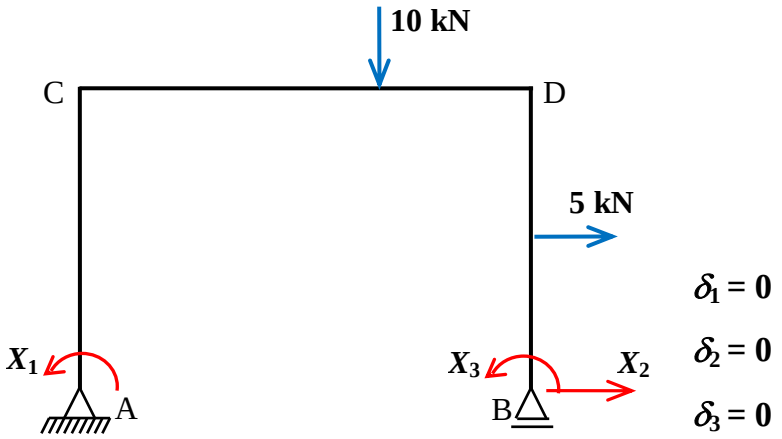


Figura 2.43: Sistema principal e hiperestáticos do pórtico da Figura 2.42

Para se obter os deslocamentos generalizados δ_{ij} é necessário o cálculo das reações de apoio e dos esforços internos no pórtico isostático do sistema principal causados pelo carregamento externo (sistema 0, Figura 2.44) e pela ação de forças generalizadas unitárias atuando nas direções dos hiperestáticos X_1 (Figura 2.45), X_2 (Figura 2.46) e X_3 (Figura 2.47).

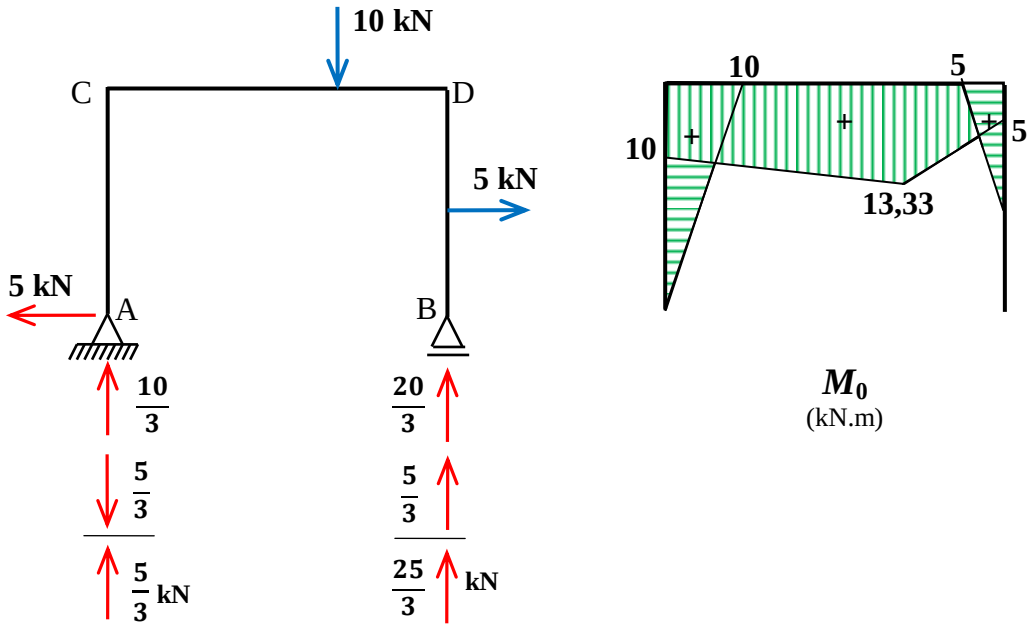


Figura 2.44: Reações e diagrama de momento fletor do sistema 0, M_0

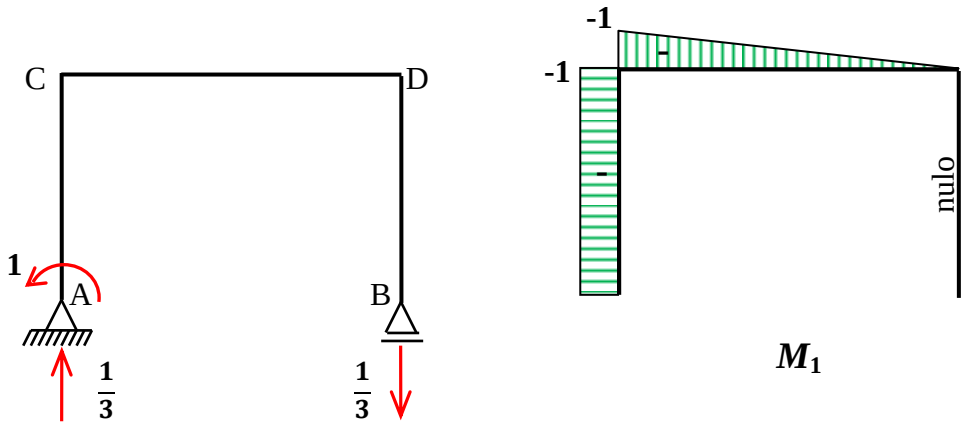


Figura 2.45: Reações e diagrama de momento fletor do sistema I, M_1

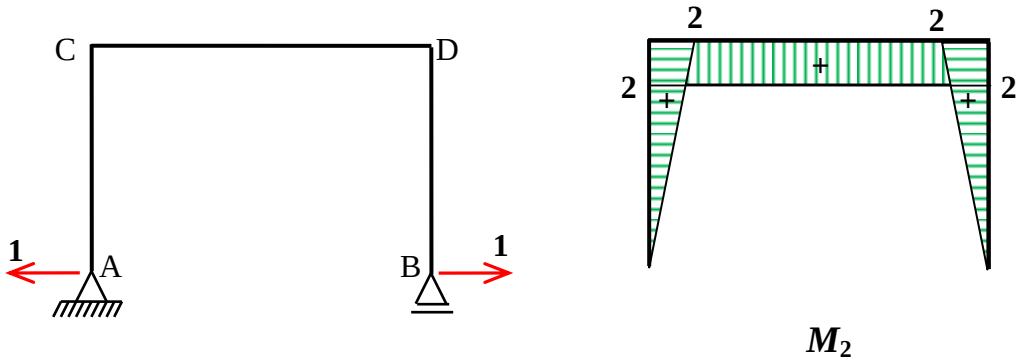


Figura 2.46: Reações e diagrama de momento fletor do sistema II, M_2

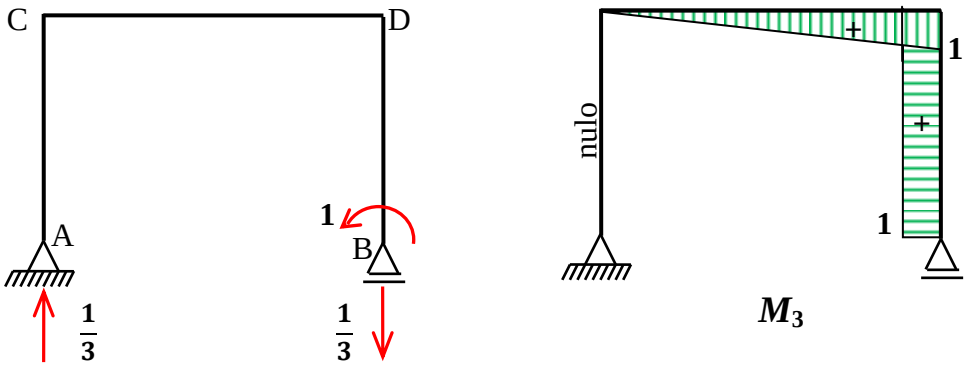


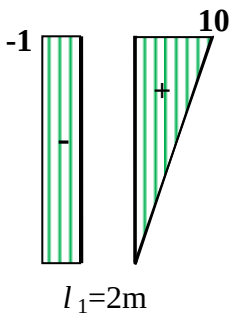
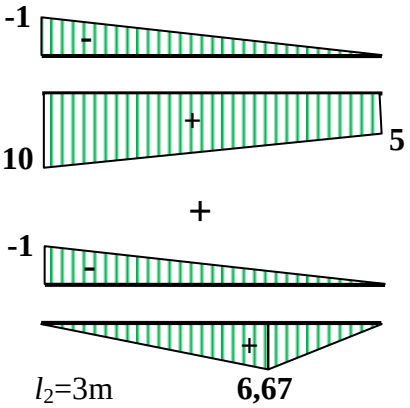
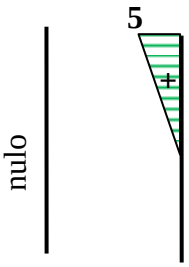
Figura 2.47: Reações e diagrama momentos internos do sistema III, M_3

O deslocamento generalizado δ_{10} é obtido pela combinação de diagramas de momento fletor apresentada na Tabela 2.14. Substituindo-se os valores obtidos para as três barras na equação (2.86) e somando tem-se:

$$\delta_{10} = \frac{-10-12{,}5-4{,}45}{EI} = -\frac{26{,}95}{EI} \tag{2.87}$$

Conforme feito anteriormente, não são mostradas as unidades dos valores de δ_{ij} , deixando-se para colocar as unidades apenas nas reações de apoio e esforços, ao final do problema.

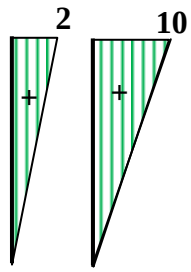
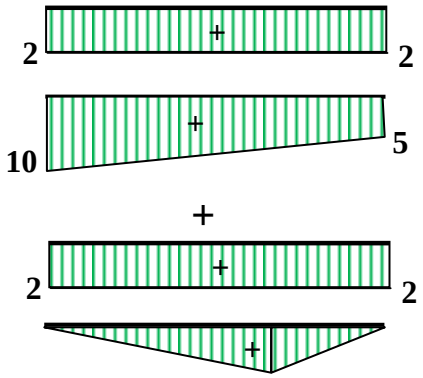
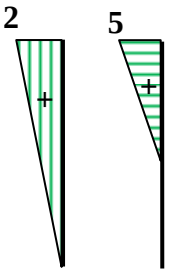
Tabela 2.14: Combinação dos diagramas de momento fletor para o cálculo de δ_{10}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
		
$\int_{l_1} M_1 M_0 dx_1 = \frac{1}{2} l_1 M_1 M_0 =$ $\frac{1}{2}.2.(-1).(10) = -10$	$\int_{l_2} M_1 M_0 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 M_1 \left(2M_0^A + M_0^B\right) +$ $\frac{1}{6} l_2 (1+\beta) M_1 M_0 = \frac{1}{6}.3.(-1).(2.10+5) +$ $\frac{1}{6}.3.\left(1+\frac{1}{3}\right).(-1).(6{,}67) = -12{,}5-4{,}45$	$\int_{l_3} M_1 M_0 dx_3 = 0$

O deslocamento generalizado δ_{20} é obtido pela combinação de momentos mostrada na Tabela 2.15. Introduzindo-se os valores encontrados nessa tabela na equação (2.86) e somando vem:

$$\delta_{20} = \frac{40}{3EI} + \frac{65}{EI} + \frac{25}{6EI} = \frac{82{,}5}{EI} \tag{2.88}$$

Tabela 2.15: Combinação dos diagramas de momentos fletores para o cálculo de δ_{20}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
 l_1=2m	 l_2=3m **6,67**	 l_3=2m
$\int_{l_1} M_2 M_0 dx_1 = \frac{1}{3} l_1 M_2 M_0 =$ $\frac{1}{3}.2.2.10 = \frac{40}{3}$	$\int_{l_2} M_2 M_0 dx_2 = \frac{1}{2} l_2 M_2 \left(M_0^A + M_0^B\right) + \frac{1}{2} l_2 M_2 M_0 =$ $\frac{1}{2}.3.2.(10+5) + \frac{1}{2}.3.2.6{,}67 = 45 + 20 = 65$	$\int_{l_3} M_2 M_0 dx_3 =$ $\frac{1}{6}.\frac{l_3}{2}\left(M_2^A + 2M_2^B\right)M_0 =$ $\frac{1}{6}.\frac{2}{2}.(1+2.2).5 = \frac{25}{6}$

O deslocamento δ_{30} é obtido analogamente, usando-se os cálculos contidos na Tabela 2.16:

$$\delta_{30} = \frac{15{,}56}{EI} + \frac{2{,}5}{EI} = \frac{18{,}06}{EI} \tag{2.89}$$

Para obtenção dos demais deslocamentos generalizados procede-se analogamente, mostrando-se abaixo apenas os resultados finais (sem mostrar as unidades), colocando-se entre parênteses o comprimento das barras:

$$EI \cdot \delta_{11} = (2)\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{3}(3)\cdot 1\cdot 1 = 3$$

$$EI \cdot \delta_{22} = \left[\frac{1}{3}(2)\cdot 2\cdot 2\right]\cdot 2 + (3)\cdot 2\cdot 2 = 17{,}33$$

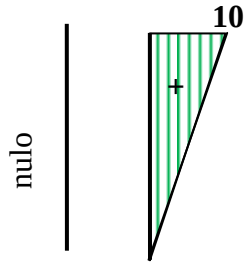
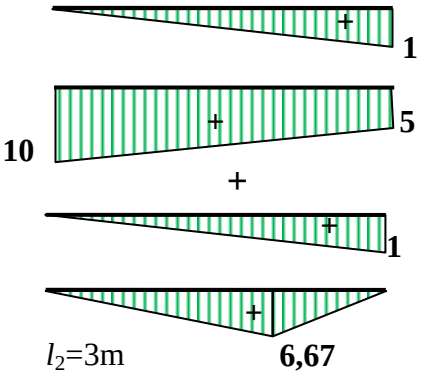
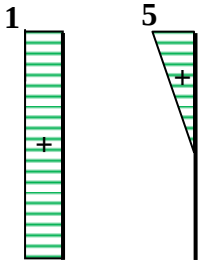
$$EI \cdot \delta_{33} = \frac{1}{3}(3)\cdot 1\cdot 1 + (3)\cdot 1\cdot 1 = 3 \tag{2.90}$$

$$EI \cdot \delta_{12} = -\frac{1}{2}(2)\cdot 1\cdot 2 - \frac{1}{2}(3)\cdot 1\cdot 2 = -5$$

$$EI \cdot \delta_{13} = -\frac{1}{6}(3)\cdot 1\cdot 1 = 0{,}5$$

$$EI \cdot \delta_{23} = \frac{1}{2}(3)\cdot 2\cdot 1 + \frac{1}{2}(2)\cdot 2\cdot 1 = 5$$

Tabela 2.16: Combinação dos diagramas de momentos fletores para o cálculo de δ_{30}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
 l_1=2m	 l_2=3m	 l_3=2m
$\int_{l_1} M_1 M_0 dx_1 = 0$	$\int_{l_2} M_3 M_0 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 M_3 \left(M_0^A + 2M_0^B\right) +$ $\frac{1}{6} l_2 (1+\alpha) M_3 M_0 = \frac{1}{6}.3.1.(10+2.5) +$ $\frac{1}{6}.3.\left(1+\frac{2}{3}\right).1.6{,}67 = 10 + 5{,}56 = 15{,}56$	$\int_{l_3} M_3 M_0 dx_3 = \frac{1}{2}\frac{l_3}{2} M_3 M_0 =$ $\frac{1}{2}\frac{2}{2}.1.5 = 2{,}5$

Para completar, obtêm-se os seguintes deslocamentos generalizados pela simetria da matriz de flexibilidade:

$\delta_{21} = \delta_{12}$; $\delta_{31} = \delta_{13}$; $\delta_{32} = \delta_{23}$

Finalmente, introduzindo-se todos os deslocamentos generalizados encontrados no sistema de equações (2.85), chega-se a:

$$\begin{aligned} 3X_1 - 5X_2 - 0{,}5X_3 - 26{,}95 &= 0 \\ -5X_1 + 17{,}33X_2 + 5X_3 + 82{,}5 &= 0 \\ 0{,}5X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 18{,}06 &= 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

que pode ser escrito sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -0{,}5 \\ -5 & 17{,}33 & 5 \\ -0{,}5 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26{,}95 \\ -82{,}5 \\ -18{,}06 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se esse sistema de equações, obtêm-se as reações de apoio hiperestáticas:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}33\ \text{kN.m} \\ -5{,}98\ \text{kN} \\ 3{,}89\ \text{kN.m} \end{Bmatrix} \tag{2.92}$$

Foram indicadas nas reações unidades consistentes com as utilizadas para forças (kN) e distâncias (m) no pórtico. O sinal negativo encontrado nas reações X_1 e X_2 indica que o sentido das forças é oposto ao arbitrado inicialmente, enquanto que para X_3, sinal positivo, foi arbitrado o sentido correto.

As reações de apoio e os esforços finais no pórtico podem ser obtidos inserindo-se os valores das reações hiperestáticas no sistema principal da Figura 2.43 e usando-se as equações de equilíbrio da Estática e Método das Seções, ou então podem ser encontrados por superposição de efeitos:

$$\begin{aligned} R &= R_0 + R_1 X_1 + R_2 X_2 + R_3 X_3 \\ N &= N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + N_3 X_3 \\ V &= V_0 + V_1 X_1 + V_2 X_2 + V_3 X_3 \\ M &= M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 \end{aligned} \tag{2.93}$$

Como exercício didático, deixa-se para o leitor o cálculo das reações do pórtico plano e o traçado dos diagramas de esforços normal, cortante e de momento fletor, devendo especificar os valores dos momentos máximos (ou mínimos) no diagrama e os locais onde eles ocorrem.

2.2. Estruturas internamente hiperestáticas

2.2.1. Exemplo 1- Treliça plana

Seja a treliça mostrada na Figura 2.48, em que todas as barras são constituídas do mesmo material, de módulo de elasticidade *E*, e tem a mesma seção transversal cuja área é igual a *A*. Assim sendo todas as barras têm a mesma rigidez axial (*EA*), constante. O grau de hiperestaticidade da treliça pode ser calculado pela equação (1.3):

$$g = i - e = r + b - 2n = 3 + 6 - 2 \times 4 = 1$$

Como a treliça tem uma barra a mais do que o necessário para ser classificada como isostática, ela é internamente hiperestática de grau 1 (g_i = 1), ou seja, apresenta uma única incógnita hiperestática a ser determinada. Esta incógnita é o esforço normal em uma das barras.

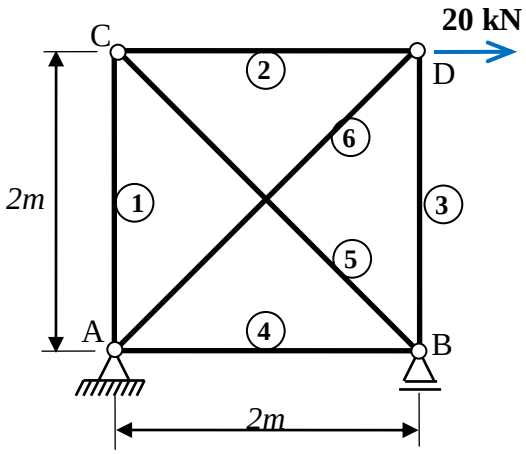


Figura 2.48: Treliça plana internamente hiperestática

Aplicando-se o Método das Forças, deve-se liberar este vínculo interno excedente, ou seja, cortar uma das barras e colocar o esforço interno correspondente (normal ou axial) que atua nas seções adjacentes ao corte, denominado X_1. Optou-se em cortar a barra (6), obtendo-se assim o sistema principal indicado na Figura 2.49. A condição de compatibilidade é dada pelo deslocamento axial relativo nulo entre a seção à esquerda e à direita do corte:

$$\delta_1 = \delta^E - \delta^D = 0 \text{ ou } \delta^E = \delta^D \qquad (2.94)$$

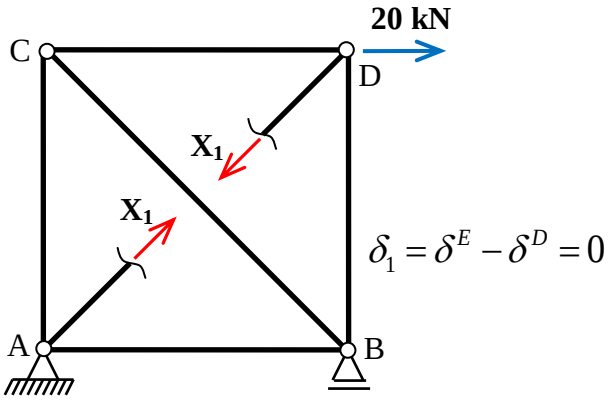


Figura 2.49: Sistema principal e hiperestático da treliça plana

Admitindo que a treliça tenha comportamento linear pode-se utilizar superposição de efeitos, aplicando-se separadamente no sistema principal o carregamento externo (situação 0) e o hiperestático X_1 (X_1 vezes os esforços unitários na direção de X_1, situação I) e depois somando, conforme mostrado na Figura 2.50.

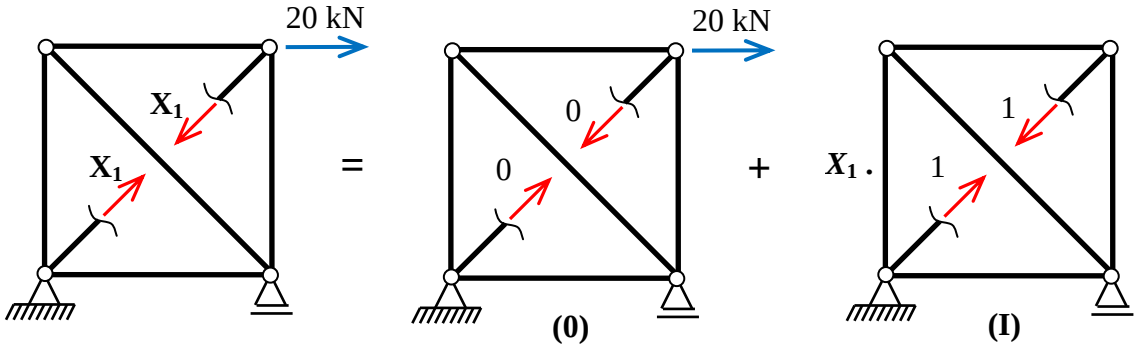


Figura 2.50:Superposição de efeitos do carregamento externo e do hiperestático X_1

Assim sendo pode-se expressar a condição de compatibilidade de deslocamento pela mesma equação genérica usada anteriormente em estruturas externamente hiperestáticas:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \tag{2.95}$$

$$\therefore \quad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \tag{2.96}$$

onde δ_{10} representa o deslocamento axial relativo na seção de corte, na direção 1, causado pelo carregamento externo (0); e δ_{11} é o deslocamento axial relativo na seção de corte (e direção 1) causado por esforços unitários aplicados na seção de corte, na direção de X_1.

Como as barras da treliça têm suas extremidades rotuladas, e admitindo-se que estão submetidas apenas à ação de cargas nodais, ficarão sujeitas unicamente a esforços normais. Portanto, considera-se somente a contribuição da deformação normal ou axial no cálculo dos deslocamentos generalizados pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_0^{l_k} \frac{N_i N_j}{(EA)_k} dx_k \qquad (2.97)$$

sendo que, nesse exemplo, *k* (índice das barras) varia de 1 a 6.

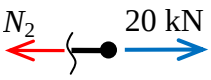
Para a obtenção dos deslocamentos generalizados é necessário então determinar no sistema principal os esforços axiais devido ao carregamento externo no sistema 0, N_0, e devido à ação de esforços unitários na direção dos hiperestáticos X_1 (sistema I, N_1). Estes valores foram calculados utilizando-se o Método de Equilíbrio de Nós, isolando-se cada nó e aplicando-se as equações de equilíbrio de forças da Estática ($\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$). Para a ação do carregamento externo, situação 0, esses cálculos estão mostrados abaixo e os resultados, esforços N_0 e reações de apoio, estão mostrados na Figura 2.51.

Cálculo das reações de apoio:

$$\sum F_x = 0 : -H_A + 20\,\text{kN} = 0 \therefore \quad H_A = 20\,\text{kN}$$
$$\sum M_A = 0 : R_B \times 2\,\text{m} - 20\,\text{kN} \times 2\,\text{m} = 0 \;\; \therefore R_B = 20\,\text{kN}$$
$$\sum F_y = 0 : -R_A + R_B = 0 \;\; \therefore R_A = 20\,\text{kN}$$

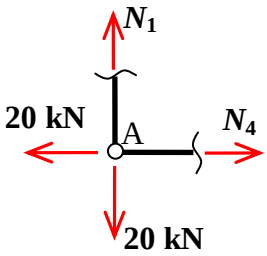
Cálculo dos esforços nas barras:

Nó D



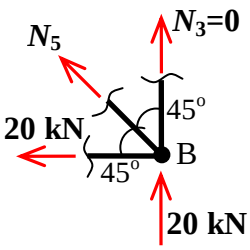
$$\sum F_x = 0 \therefore N_2 = 20\,\text{kN}$$

Nó A



$$\sum F_x = 0 \therefore N_4 = 20\,\text{kN}$$
$$\sum F_y = 0 \therefore N_1 = 20\,\text{kN}$$

Nó B



$$\sum F_x = 0: \quad N_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 20\,\text{kN} = 0 \;\therefore$$

$$N_5 = -\frac{20 \cdot 2}{\sqrt{2}}\,\text{kN} \quad \therefore \quad N_5 = -20\sqrt{2}\,\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0: \quad N_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 20\,\text{kN} = 0$$

$$-20\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 20 = 0 \quad \text{OK}$$

(0)

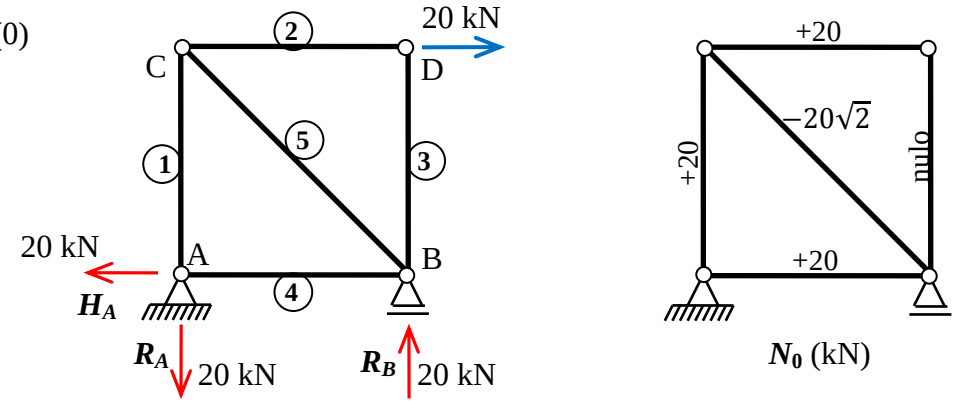


Figura 2.51: Reações de apoio e esforços normais N_0 nas barras devidos ao carregamento externo (0)

Os esforços causados por esforços unitários na direção do hiperestático X_1, N_1, e as reações de apoio na situação (I) estão calculados a seguir e os resultados mostrados na Figura 2.52.

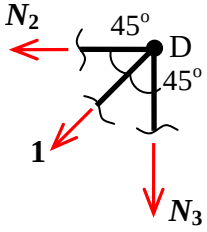
Cálculo das reações de apoio:

$$\sum F_x = 0: H_A + 0 = 0 \;\therefore \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0: R_B \times 2\,\text{m} = 0 \;\therefore R_B = 0$$

$$\sum F_y = 0: -R_A + R_B = 0 \;\therefore R_A = 0$$

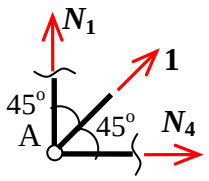
Nó D



$$\sum F_y = 0: \quad N_3 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \;\therefore \quad N_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum F_x = 0: \quad N_2 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \;\therefore \quad N_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

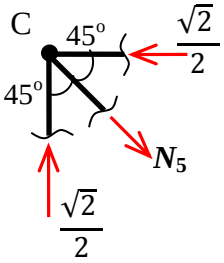
Nó A



$$\sum F_y = 0: \quad N_1 + 1.\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \therefore \quad N_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum F_x = 0: \quad N_4 + 1.\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \therefore \quad N_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nó C



$$\sum F_x = 0 \quad N_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \therefore \quad N_5 = 1$$

$$\sum Fy = 0 \quad N_5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \therefore \quad 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{OK}$$

(I)

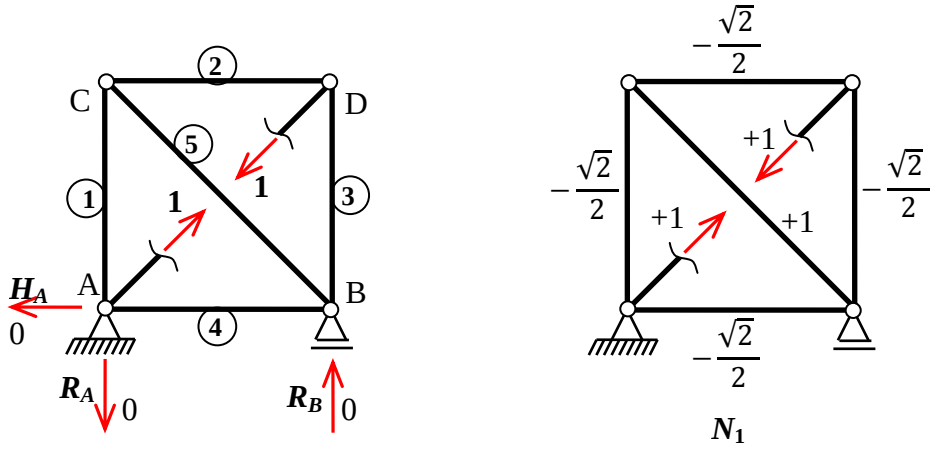


Figura 2.52: Reações de apoio e esforços normais N_1 nas barras, causados por esforços unitários na direção do hiperestático X_1 (I)

Tendo em vista que todas as barras tem seção constante, com mesma rigidez axial, pode-se colocar *EA* para fora da integral na equação (2.97), e, como os esforços axiais são constantes ao longo das barras, pode-se calcular o deslocamento generalizado δ_{10} pela expressão:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EA}\sum_{k=1}^{6}\int_0^{l_k} N_1 N_0 dx_k = \frac{1}{EA}\sum_{k=1}^{6} N_1 N_0 \cdot l_k \qquad (2.98)$$

e o deslocamento generalizado δ_{11} pela expressão:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}\sum_{k=1}^{6}\int_0^{l_k} N_1 N_1 dx_k = \frac{1}{EA}\sum_{k=1}^{6} N_1 N_1 \cdot l_k \qquad (2.99)$$

É recomendável se organizar uma tabela, como a mostrada a seguir (Tabela 2.17), para sistematizar os cálculos das expressões acima.

Tabela 2.17 Cálculo dos deslocamentos generalizados δ_{10} e δ_{11} e esforço final *N*

Barra	l_k (m)	$(EA)_k$	N_0	N_1	$(N_1.N_0.l_k)/EA$	$(N_1.N_1.l_k)/EA$	N (kN)
1	2	EA	+20	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{20\sqrt{2}}{EA}$	$\frac{1}{EA}$	7,93
2	2	EA	+20	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{20\sqrt{2}}{EA}$	$\frac{1}{EA}$	7,93
3	2	EA	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{EA}$	-12,07
4	2	EA	+20	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{20\sqrt{2}}{EA}$	$\frac{1}{EA}$	7,93
5	$2\sqrt{2}$	EA	$-20\sqrt{2}$	1	$-\frac{80}{EA}$	$\frac{2\sqrt{2}}{EA}$	-11,21
6	$2\sqrt{2}$	EA	0	1	0	$\frac{2\sqrt{2}}{EA}$	17,07
$\sum_{k=1}^{6}$					$-\frac{164,85}{EA}$	$\frac{9,66}{EA}$	

Da Tabela 2.17 extraem-se os valores encontrados para os deslocamentos generalizados, com unidades consistentes:

$$\delta_{10} = \frac{-164,85}{EA}\,(\text{m}); \qquad \delta_{11} = \frac{9,66}{EA}\,(\text{m/kN})$$

os quais, inseridos na equação de compatibilidade, fornecem o valor do esforço hiperestático X_1 :

$$\frac{-164,85}{EA} + X_1 \frac{9,66}{EA} = 0 \tag{2.100}$$

$$\therefore \quad X_1 = 17,07\ \text{kN} \tag{2.101}$$

Os esforços normais finais na treliça podem ser obtidos por superposição de efeitos:

$$N = N_0 + X_1 \cdot N_1, \tag{2.102}$$

sendo os resultados apresentados na última coluna da Tabela 2.17.

As reações de apoio finais da treliça também podem ser obtidas por superposição de efeitos, e serão iguais às reações na situação (0), pois as reações na situação (I) são nulas:

$$R = R_0 + X_1 \cdot R_1 = R_0 \tag{2.103}$$

2.2.2. Exemplo 2- Pórtico plano tri-articulado com tirante

Seja um pórtico plano tri-articulado reforçado com um tirante, ilustrado na Figura 2.53. Todas as barras do pórtico são constituídas de mesmo material e têm seção transversal constante, sendo a rigidez à flexão (*EI*) igual a 2.10^4 kN.m, enquanto que o tirante tem rigidez axial $(EA)_t$ igual a 10^4 kN. Observa-se que sem a presença do tirante o pórtico é isostático, ou seja, tem uma barra a mais que o necessário, logo é internamente hiperestático de grau 1 ($g_i = 1$).

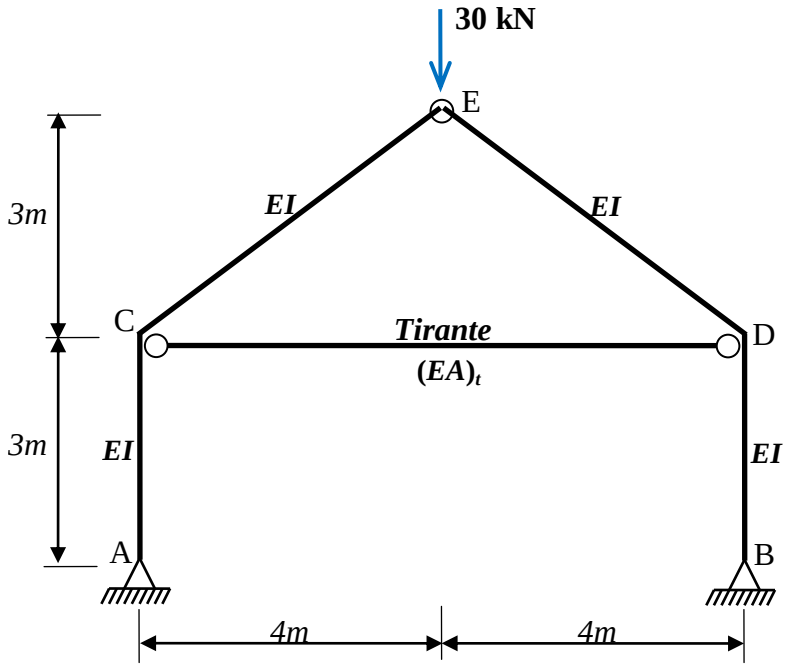


Figura 2.53: Pórtico plano tri-articulado com tirante

Aplica-se o Método das Forças escolhendo-se o sistema principal mostrado na Figura 2.54, cortando-se o tirante e inserindo-se os esforços axiais correspondentes nas seções adjacentes ao corte, denominados de X_1, incógnita hiperestática do problema.

A condição de compatibilidade é dada pelo deslocamento axial relativo nulo na seção de corte: $\delta_1 = \delta_1^{Esq} - \delta_1^{Dir} = 0$.

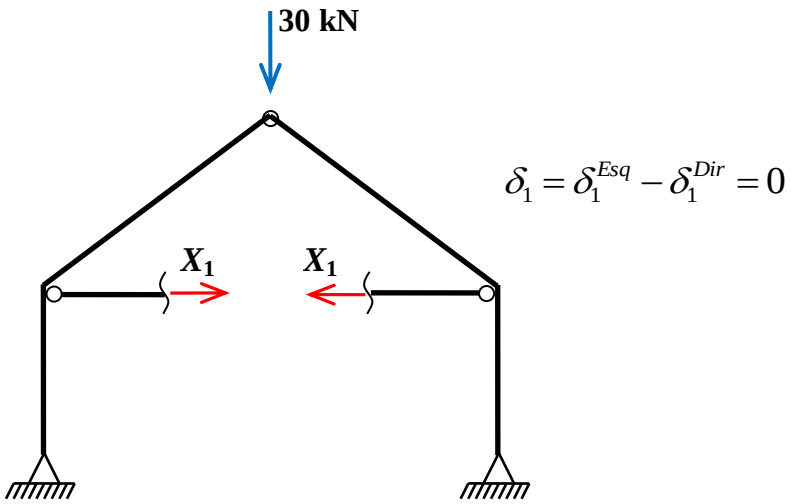


Figura 2.54 Sistema principal para o pórtico mostrado na Figura 2.53

O efeito do carregamento e do hiperestático X_1 sobre o sistema principal pode ser determinado por superposição de efeitos, sendo calculados separadamente os efeitos da carga externa e do hiperestático sobre a estrutura (Figura 2.55). Assim sendo pode-se escrever a equação de compatibilidade de deslocamentos em sua forma genérica:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \qquad (2.104)$$

Para o sistema principal na situação (0), um pórtico tri-articulado isostático, tem-se que, como o pórtico e o carregamento são simétricos, as reações de apoio serão simétricas (R_A = R_B e H_A = H_B = H), conforme mostra a Figura 2.55. Os valores das reações podem ser obtidos utilizando-se as equações de equilíbrio da Estática:

$\sum F_y = 0 : R_A + R_B = 30\,\text{kN} \;\therefore\quad R_A = R_B = 15\,\text{kN}$ (simetria)

$M_E^{esq} = 0$ (momento fletor na rótula (E) é nulo, para parte esquerda do pórtico):

$15\,\text{kN} \times 4\,\text{m} - H \times 6\,\text{m} = 0 \quad \therefore \quad H = 10\,\text{kN}$

Para o sistema principal na situação (I), tem-se novamente que as reações de apoio serão simétricas, conforme mostra a Figura 2.55, sendo seus valores calculados pelas equações de equilíbrio da Estática:

$\sum F_y = 0 : R_A + R_B = 0 \;\therefore\quad R_A = R_B = 0$ (simetria)

$M_E^{esq} = 0$ (momento fletor na rótula (E) é nulo, para parte esquerda do pórtico):

$$-1\times 3\,\text{m}+H\times 6\,\text{m}=0 \quad \therefore \quad H=0{,}5$$

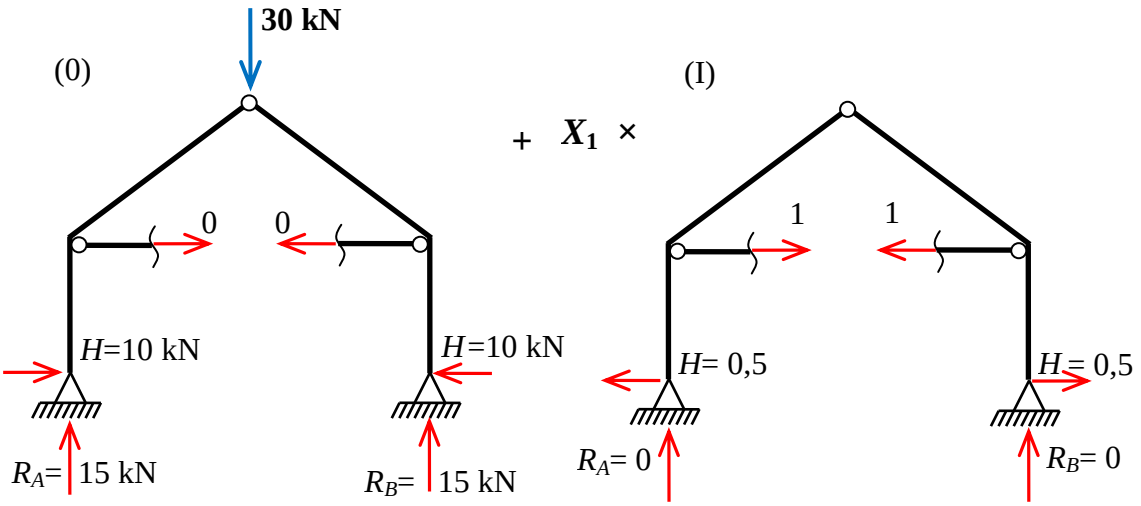


Figura 2.55: Superposição de efeitos: carregamento externo e hiperestático X_1

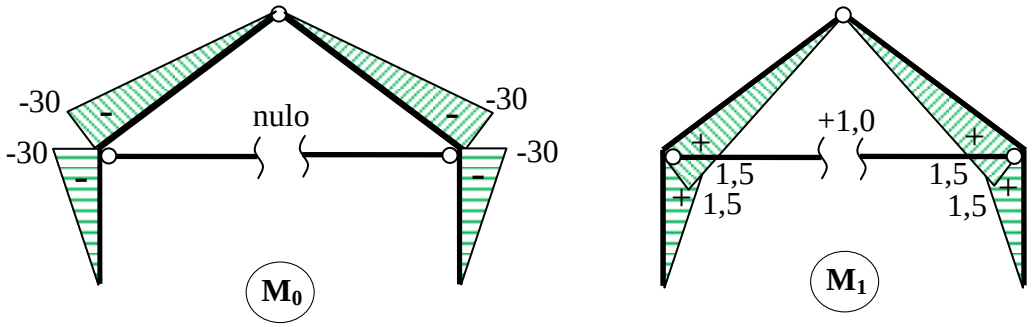


Figura 2.56: Diagramas de momento fletor no pórtico devido ao carregamento externo (M_0) e às forças unitárias aplicadas no tirante na direção de X_1 (M_1)

Os diagramas de momento fletor nas barras do pórtico causados pelo carregamento externo ou situação (0), e por esforços unitários aplicados na direção de X_1, situação (I), respectivamente M_0 e M_1, estão apresentados na Figura 2.56. Os momentos nos diagramas estão em unidades consistentes e para o sinal dos momentos considerou-se a parte interna das barras do pórtico como sendo a sua parte inferior. Salienta-se que no sistema principal, na situação (0), o esforço normal no tirante devido ao carregamento externo é nulo (N_0 = 0), enquanto que, na situação (I), o esforço normal no tirante devido às forças unitárias é constante e igual a 1 (N_1 = 1). Neste exemplo, a deformação axial nas barras externas do pórtico será desprezada no cálculo dos deslocamentos generalizados δ_{ij}, admitindo-se que a sua rigidez axial é bem maior do que a de flexão ($EA >> EI$). Já na barra do tirante a rigidez axial é considerada, pois o único esforço atuante é o esforço axial e a rigidez axial

do tirante é considerável. Assim sendo, a expressão para o cálculo dos deslocamentos generalizados fica:

$$\delta_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ pórtico}}^{4} \left(\int_0^{l_k} \frac{M_i M_j}{EI} dx_k \right) + \int_{\substack{0 \\ tirante}}^{l_t} \frac{N_i N_j}{(EA)_t} dx_t \tag{2.105}$$

Utilizando-se a tabela de Kurt-Bayer para efetuar os cálculos das integrais na equação acima os valores dos deslocamentos generalizados são:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot 2\left\{ -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 30 \cdot 1{,}5 - \frac{1}{3} \cdot 5 \,.30 \cdot 1{,}5 \right\} + 0 \quad \therefore$$

$$\delta_{10} = -\frac{240}{EI} = -\frac{240}{2 \cdot 10^4} = -120 \cdot 10^4 = -12 \cdot 10^{-3} \text{ (m)} \tag{2.106}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot 2\left\{ \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \right\} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 8}{(EA)_t} \quad \therefore$$

$$\delta_{11} = \frac{12}{EI} + \frac{8}{(EA)_t} = \frac{12}{2 \cdot 10^4} + \frac{8}{10^4} = 14 \cdot 10^{-4} = 1{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ (m/kN)} \tag{2.107}$$

Substituindo-se os valores calculados para os deslocamentos generalizados, (2.106) e (2.107), na equação de compatibilidade (2.104), obtém-se o valor do esforço hiperestático:

$$-12 \cdot 10^{-3} + X_1 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3} = 0 \quad \therefore \tag{2.108}$$

$$X_1 = \frac{12}{1{,}4} = 8{,}57 \text{ (kN)} \tag{2.109}$$

As reações de apoio (R) e os momentos fletores finais (M) no pórtico e os esforços axiais finais no tirante podem ser obtidos por

$$R = R_0 + R_1 \cdot X_1 \text{ e} \tag{2.110}$$

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 \tag{2.111}$$

$$N = N_0 + N_1 \cdot X_1 \tag{2.112}$$

sendo as reações de apoio e os esforços normais no tirante mostrados na Figura 2.57 e o diagrama de momento fletor nas barras do pórtico mostrados na Figura 2.58. Fica como exercício didático para o leitor o traçado dos diagramas de esforço normal e cortante no pórtico plano.

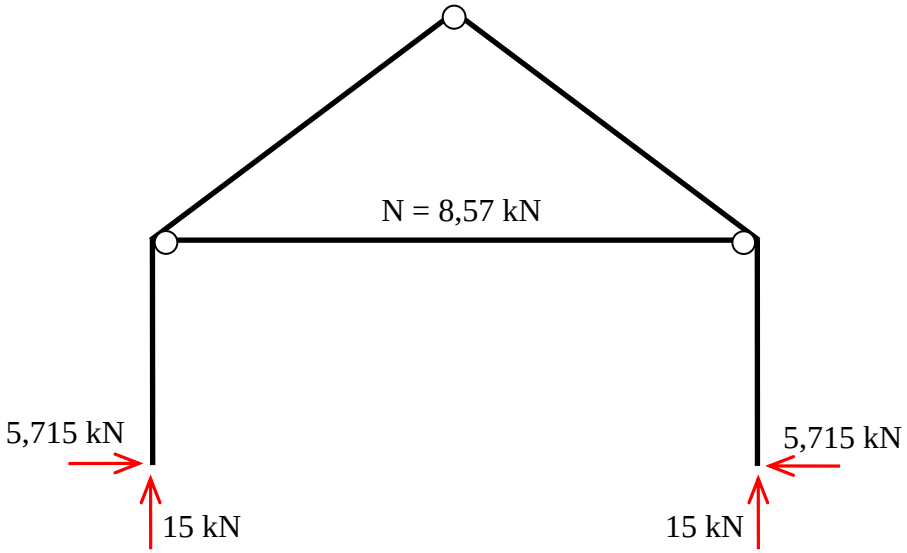


Figura 2.57: Reações de apoio do pórtico e esforço normal no tirante

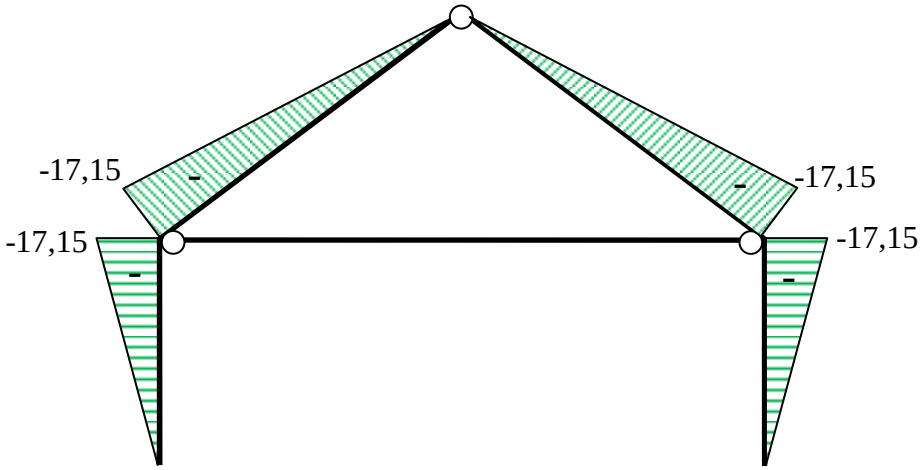
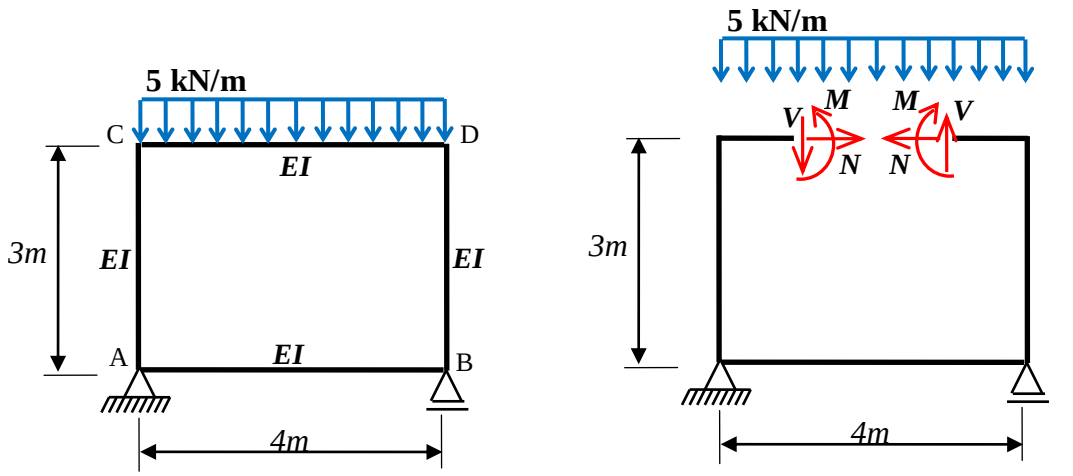


Figura 2.58: Diagrama de momento fletor final no pórtico plano (em kN.m)

2.2.3. Exemplo 3- Quadro bi-apoiado

Seja o quadro bi-apoiado mostrado na Figura 2.59a, em que todas as barras são constituídas de mesmo material (módulo *E*) e apresentam a mesma seção transversal (área *A* e inércia *I*). Por ser uma estrutura fechada, esta estrutura se caracteriza como internamente hiperestática (as reações de apoio podem ser obrtidas sem dificuldades, por meio das equações de equilíbrio da Estática). Para possibiltar o traçado dos diagramas,

conhecidas as reações de apoio, deve-se "abrir" a estrutura, cortando-se uma das barras, conforme ilustrado na Figura 2.59b, tornando assim a estrutura isostática (no caso cortou-se a barra superior bem no meio, mas poderia ter sido cortado qualquer ponto do quadro). Como nas seções adjacentes ao corte surgem três esforços intenos – normal (N), cortante (V) e momento fletor (M) – que são as incógnitas do problema, a estrutura é três vezes hiperestática ($g_i = 3$). Obtidas essas incógnitas torna-se possível encontrar esforços internos em qualquer seção transversal das barras do quadro e o traçado dos respectivos diagramas.



(a) Quadro bi-apoiado (b) Corte no quadro bi-apoiado

Figura 2.59: Quadro bi-apoiado

Essas incógnitas hiperestáticas serão determinadas pelo Método das Forças e, seguindo-se a mesma notação usada anteriormente, denomina-se: $N = X_1$, $V = X_2$ e $M = X_3$. O sistema principal, que é um sistema isostático equivalente, está mostrado na Figura 2.60.

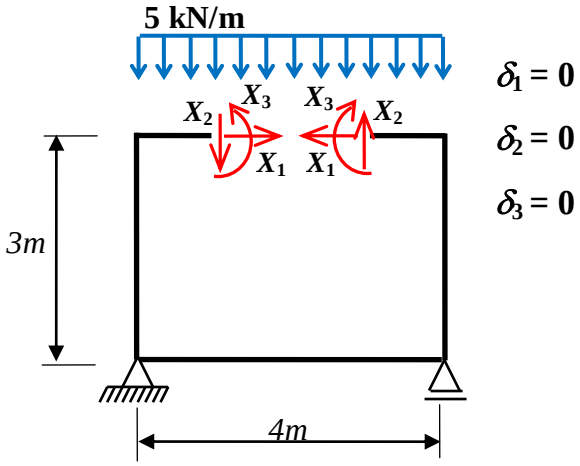


Figura 2.60: Sistema principal e hiperestáticos

As condições de compatibilidade de deslocamentos no sistema principal são definidas impondo-se que os deslocamentos relativos sejam nulos nas seções adjacentes ao corte: deslocamento horizontal relativo, $\delta_1 = 0$; deslocamento vertical relativo, $\delta_2 = 0$; e rotação relativa, $\delta_3 = \left(\theta^{Esq} - \theta^{Dir}\right) = 0$.

Será admitido que o quadro apresenta comportamento linear, podendo-se então utilizar o Princípio de Superposição de Efeitos. Aplicam-se assim separadamente no sistema principal a ação do carregamento externo e dos hiperestáticos X_i, sendo que, para facilitar o cálculo dos deslocamentos generalizados, aplicam-se X_i vezes forças unitárias, conforme mostrado na Figura 2.61.

Conforme feito anteriormente, superpondo-se os efeitos das diversas ações aplicadas, pode-se escrever as equações de compatibilidade de deslocamentos na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = 0 \\
\delta_2 &= \delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = 0 \\
\delta_3 &= \delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = 0
\end{aligned} \qquad (2.113)$$

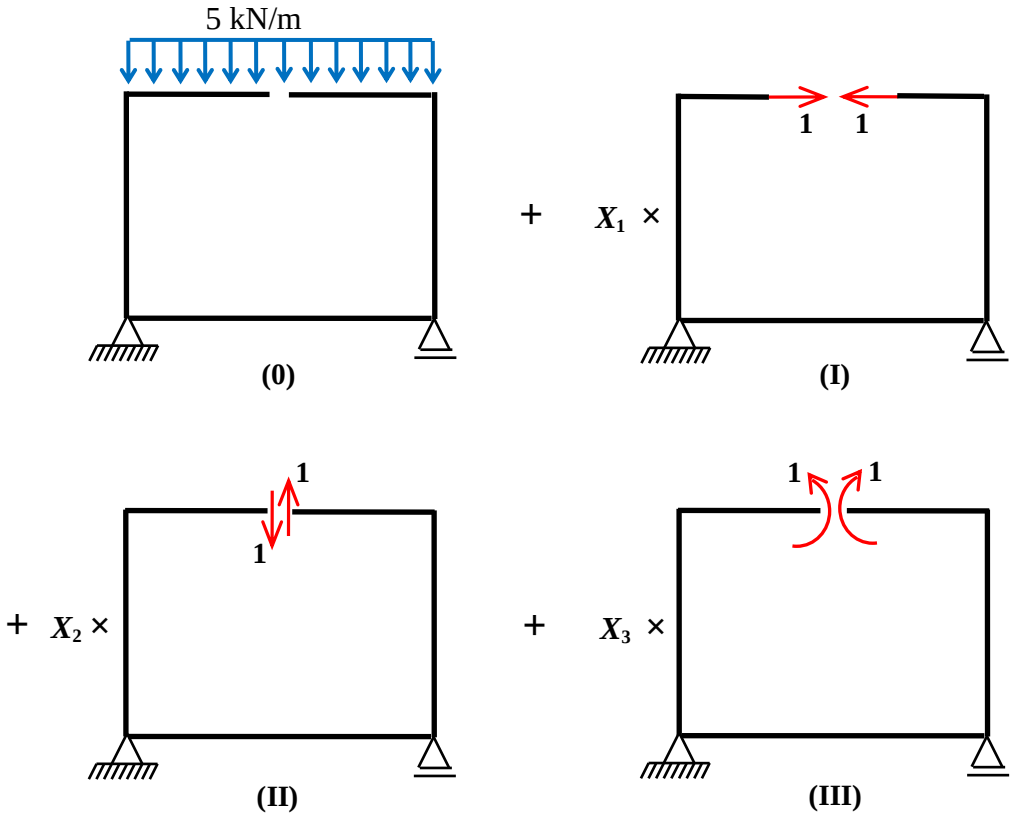


Figura 2.61: Ações do carregamento externo e dos hiperestáticos

sendo que os deslocamentos generalizados δ_{ij} podem ser calculados pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais (desprezando-se a deformação por cisalhamento):

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{4} \left(\int_0^{l_k} \frac{M_i M_j}{EI_k} dx_k + \int_0^{l_k} \frac{N_i N_j}{EA_k} dx_k \right) \tag{2.114}$$

Admitindo-se que a rigidez axial das barras do quadro é bem maior do que sua rigidez à flexão (*EA* >> *EI*), pode-se desprezar a última parcela de deformação axial na equação acima. Como todas as barras do quadro têm a mesma seção e rigidez à flexão, pode-se colocar a rigidez *EI* para fora do somatório na equação (2.114), resultando em:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI} \sum_{k=1}^{4} \left(\int_0^{l_k} M_i M_j dx_k \right) \tag{2.115}$$

Para se encontrar os coeficientes δ_{ij} na equação (2.115), calculam-se inicialmente os diagramas de momento fletor M_0, M_1, M_2 e M_3 para o sistema principal na situação 0 (carregamento externo), I (força unitária na direção de X_1), II (força unitária na direção de X_2) e III (momento unitário na direção de X_3), respectivamente. As reações de apoio e os diagramas de momento fletor estão apresentados nas figuras a seguir, onde são mostradas tracejadas as fibras inferiores das barras, para consideração do sinal do momento fletor. As unidades dos momentos fletores nos diagramas não estão mostradas nas figuras, mas são consistentes com as usadas para forças (kN) e distâncias (m) no quadro, lembrando que as forças unitárias são adimensionais.

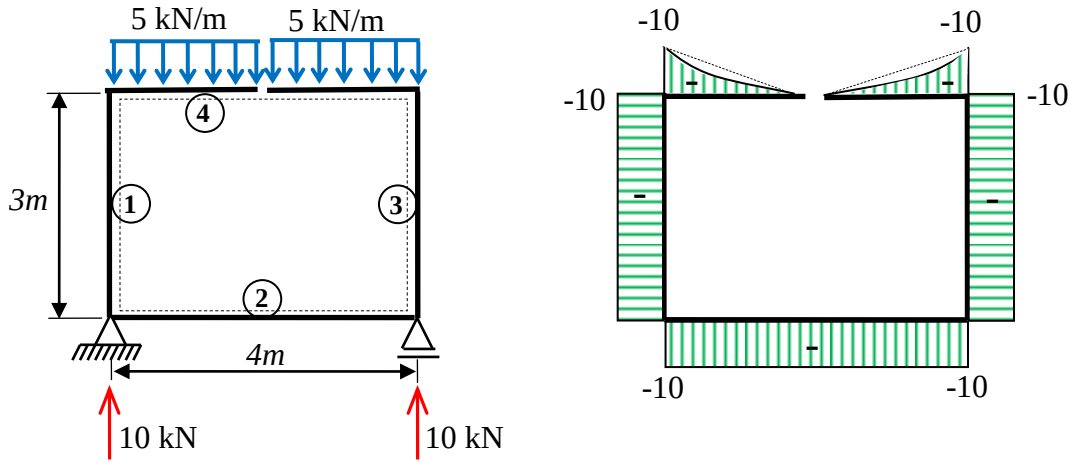


Figura 2.62 Reações e diagramas de momento para o sistema principal na situação 0

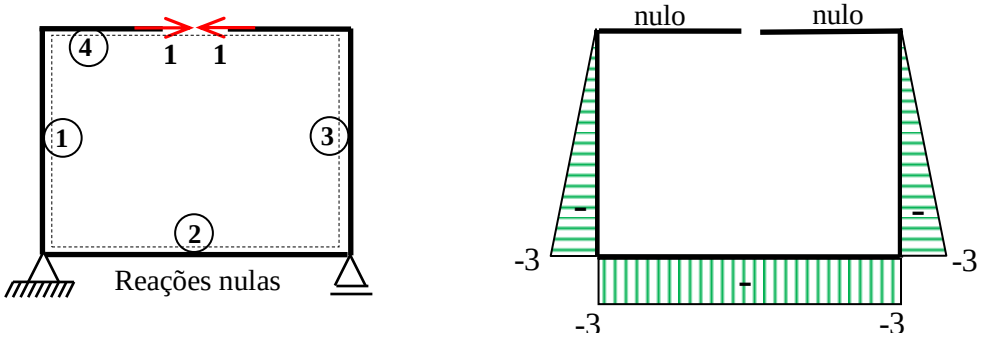


Figura 2.63: Reações e diagrama de momento para o sistema principal na situação I

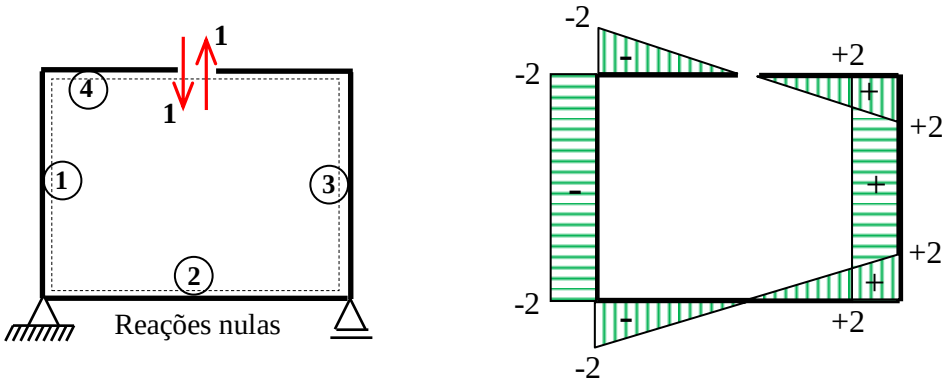


Figura 2.64: Reações e diagrama de momento para o sistema principal na situação II

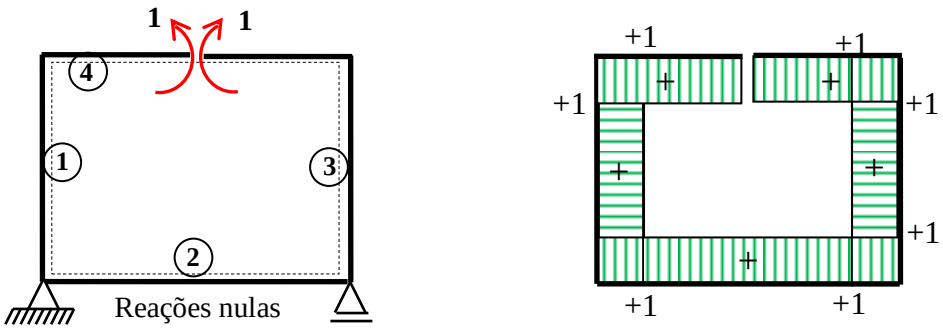
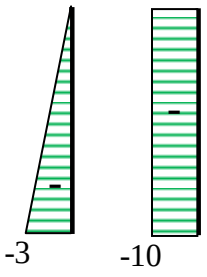
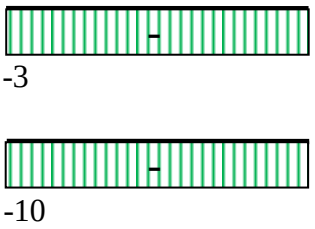
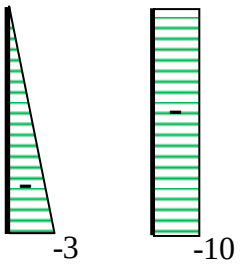
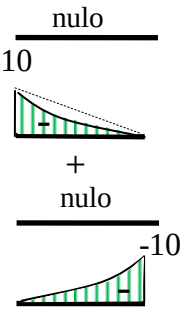


Figura 2.65: Reações e diagrama de momento para o sistema principal na situação III

A partir dos diagramas de momento fletor nas situações 0, I, II e III, calculam-se os coeficientes δ_{ij} pela equação (2.115) efetuando-se o produto dos momentos fletores nas barras com o auxílio da tabela de Kurt-Bayer. A Tabela 2.18 a seguir apresenta a combinação dos diagramas de momento fletor utilizada para o cálculo de δ_{10}.

Tabela 2.18: Combinação dos diagramas de momentos fletores para o cálculo de δ_{10}

Barra 1	Barra 2	Barra 3	Barra 4
			
$\int_{l_1} M_1 M_0 dx_1 = \frac{1}{2} l_1 M_1 M_0$ $= \frac{1}{2}.3.(-3)(-10) = \frac{90}{2}$	$\int_{l_2} M_1 M_0 dx_2 = l_2 M_1 M_0$ $= 4.(-3).(-10) = 120$	$\int_{l_3} M_1 M_0 dx_3 = \frac{1}{2} l_3 M_1 M_0$ $= \frac{1}{2}.3.(-3)(-10) = \frac{90}{2}$	$\int_{l_4} M_1 M_0 dx_4 = 0$

Substituindo-se os valores encontrados na Tabela 2.18 na equação (2.115) vem:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(\frac{90}{2} + 120 + \frac{90}{2}\right) \quad \therefore$$

$$\delta_{10} = \frac{210}{EI} \tag{2.116}$$

Analogamente efetua-se o cálculo de δ_{20} a partir da combinação dos diagramas de momento fletor mostrada na Tabela 2.19. Substituindo-se os valores encontrados nessa tabela na equação (2.115), obtém-se:

$$\delta_{20} = \frac{(60-60)}{EI} = 0 \tag{2.117}$$

Nota-se que o valor final encontrado igual a zero poderia ter sido calculado a priori, observando-se que os diagramas de momento fletor na situação (II) são antissimétricos e os na situação (0) são simétricos em relação ao eixo vertical que passa pelo meio da estrutura (o qual coincide com a seção de corte). Isto irá sempre ocorrer, uma vez que a integral do produto de duas funções de (x) em que uma é simétrica (f) e a outra é antissimétrica (g) em relação a um eixo transversal a x no meio do intervalo de integração é sempre nula, conforme pode ser observado na Figura 2.66:

$$\int_0^L f(x) \cdot g(x) = 0 \qquad (2.118)$$

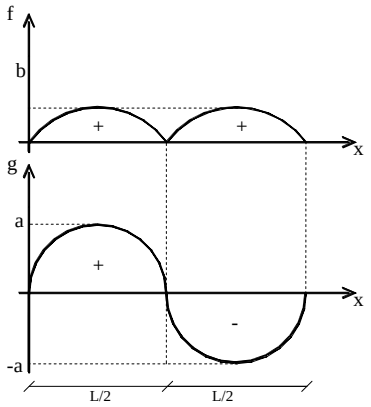


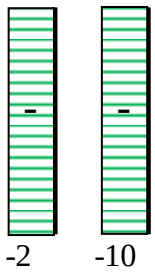
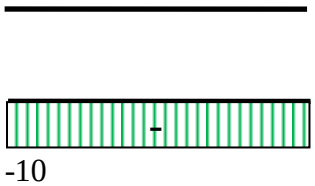
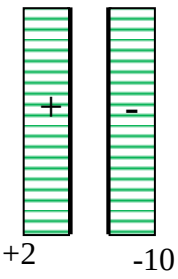
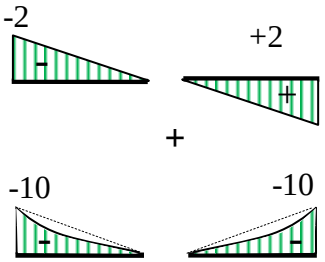
Figura 2.66: Função *f*(*x*) simétrica e função *g*(*x*) antissimétrica em relação ao eixo vertical que passa por *x*= L/2

Da mesma forma tem-se que

$$\int_0^{\pi} sen\, mx\, sen\, nx\, dx = \begin{Bmatrix} 0 \text{ se } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} \text{ se } m = n \end{Bmatrix} \qquad (2.119)$$

onde *m*, *n* são números inteiros.

Tabela 2.19: Combinação dos diagramas de momento fletor para o cálculo de δ_{20}

Barra 1	Barra 2	Barra 3	Barra 4
			
$\int_{l_1} M_2 M_0 dx_1 =$ $l_1 M_2 M_0 =$ $= 3.(-2).(-10)$ $= +60$	$\int_{l_2} M_2 M_0 dx_2 = 0$	$\int_{l_3} M_2 M_0 dx_3 =$ $l_3 M_2 M_0 =$ $3.2.(-10) = -60$	$\int_{l_4} M_2 M_0 dx_4 =$ $\frac{1}{4}.2.(-2).(-10) +$ $\frac{1}{4}.2.2.(-10) = 0$

Isto vem a simplificar o cálculo dos deslocamentos generalizados em estruturas simétricas. Se o diagrama M_i for simétrico em relação ao eixo de simetria da estrutura e M_j for anti-simétrico (ou vice-versa), então tem-se que:

$$\delta_{ij} = \int_{Barras} \frac{M_i M_j}{EI} dx = 0 \qquad (2.119)$$

Para este exemplo, têm-se que M_0, M_1 e M_3 são simétricos e M_2 é antissimétrico. Portanto, pode-se afirmar a priori, sem efetuar os cálculos, que:

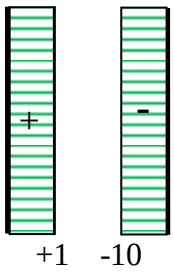
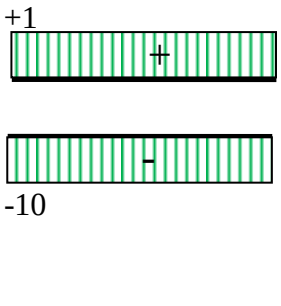
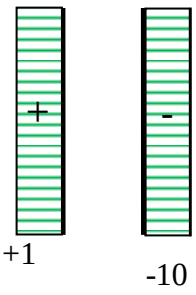
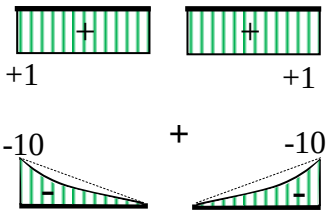
$$\delta_{20} = 0;\ \delta_{12} = \delta_{21} = 0 \text{ e } \delta_{32} = \delta_{23} = 0 \qquad (2.120)$$

Além disso, quando M_i e M_j são simétricos, pode-se calcular o produto dos diagramas para metade da estrutura e multiplicar o resultado por 2.

A Tabela 2.20 apresenta a combinação dos diagramas de momentos utilizada para o cálculo de δ_{30}, resultando em:

$$\delta_{30} = \frac{1}{EI}.\left(-30-40-30-\frac{40}{3}\right) = -\frac{113{,}33}{EI} \qquad (2.121)$$

Tabela 2.20: Combinação dos diagramas de momento fletor para o cálculo de δ_{30}

Barra 1	Barra 2	Barra 3	Barra 4
			
$\int_{l_1} M_3 M_0 dx_1 =$ $l_1 M_3 M_0 =$ $3.1.(-10) = -30$	$\int_{l_2} M_3 M_0 dx_2 = l_2 M_3 M_0$ $= 4.1.(-10) = -40$	$\int_{l_3} M_3 M_0 dx_3 =$ $l_3 M_3 M_0 =$ $3.1.(-10) = -30$	$\int_{l_4} M_3 M_0 dx_4 = 2 \times \frac{1}{3}\frac{l_4}{2} M_3 M_0$ $= 2 \times \frac{1}{3}.\frac{4}{2}.1.(-10) = -\frac{40}{3}$

Analogamente podem-se encontrar os demais deslocamentos generalizados, a partir da combinação dos diagramas de momento fletor para as diversas situações, obtendo-se:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}.2\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot(3)\cdot 3\cdot 3+(2)\cdot 3\cdot 3\right]=\frac{54}{EI} \tag{2.122}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}.2.\left[(3).2.2+\frac{1}{3}\cdot(2)\cdot 2\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot(2)\cdot 2\cdot 2\right]=\frac{34{,}67}{EI} \tag{2.123}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI}.2\cdot\left[(3)\cdot 1\cdot 1+(2)\cdot 1\cdot 1+(2)\cdot 1\cdot 1\right]=\frac{14}{EI} \tag{2.124}$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EI}.2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(3)\cdot(-3)\cdot 1+(2)\cdot(-3)\cdot 1\right]=-\frac{21}{EI} \tag{2.125}$$

Reescrevendo o sistema de equações de compatibilidade de deslocamentos (2.113) sob a forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\\ \delta_{30}\end{Bmatrix} \tag{2.126}$$

e substituindo-se em seguida todos os deslocamentos generalizados calculados nesse sistema de equações (2.126), vem:

$$\begin{bmatrix}54 & 0 & -21\\ 0 & 34{,}67 & 0\\ -21 & 0 & 14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}210\\ 0\\ -113{,}33\end{Bmatrix} \tag{2.127}$$

Da segunda linha do sistema de equações acima tira-se diretamente que

$$X_2 = 0 \tag{2.128}$$

como era esperado, pois o quadro é uma estrutura simétrica (tendo em vista que não há cargas horizontais aplicadas, logo a reação de apoio horizontal é nula, e não haverá portanto deslocamentos horizontais no quadro desprezando-se a deformação axial) e tem carregamento simétrico aplicado em relação ao eixo de simetria da estrutura, logo sempre haverá esforço cortante nulo no eixo de simetria ($V = 0$). No próximo item o assunto simetria será abordado com mais detalhes.

Observa-se também que os esforços hiperestáticos X_1 e X_3 não dependem de X_2, logo o sistema de equações (2.127) fica desacoplado, podendo ser rearranjado na forma:

$$\begin{bmatrix}54 & -21\\ -21 & 14\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-210\\ 113{,}33\end{Bmatrix} \tag{2.129}$$

Resolvendo o sistema de equações (2.129) acima, obtêm-se as incógnitas hiperestáticas

$$X_1 = -1{,}78 \text{ kN} \tag{2.130}$$

$$X_3 = 5{,}43 \text{ kN.m} \tag{2.131}$$

Foram inseridas as unidades consistentes nos esforços hiperestáticos encontrados, sendo que como X_1 é negativo tem o sentido oposto ao arbitrado (compressão na barra), enquanto que X_3 é positivo, logo o sentido coincide com o arbitrado inicialmente (tracionando as fibras inferiores da barra). A Figura 2.67 apresenta o quadro com o carregamento externo, as reações de apoio, e os esforços internos na seção de corte calculados a partir do Método das Forças.

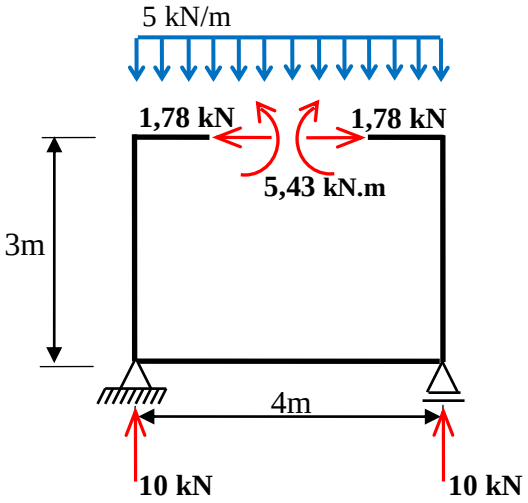


Figura 2.67: Quadro com as reações de apoio e esforços internos na seção de corte

Os esforços internos finais (E) no quadro podem ser obtidos por superposição de efeitos, de tal modo que

$$E = E_0 + E_1 \cdot X_1 + E_2 \cdot X_2 + E_3 \cdot X_3 \tag{2.132}$$

Portanto os momentos fletores finais no quadro podem ser calculados por:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_3 \cdot X_3 \tag{2.133}$$

O diagrama de momento fletor final no quadro está apresentado na Figura 2.68. Fica como exercício didático para o leitor o traçado dos diagramas de esforço normal e esforço cortante no quadro.

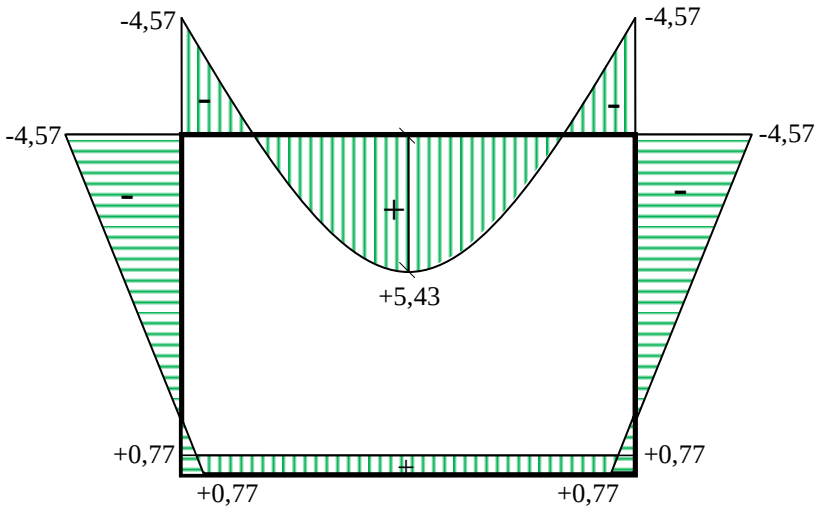


Figura 2.68: Diagrama de momento fletor final nas barras do quadro (em kN.m)

Usualmente as estruturas de caixa d´água elevadas são modeladas como quadros bi-apoiados. No caso de caixas d´água ou reservatórios apoiados sobre o terreno, ou enterrados, têm-se as chamadas estruturas auto-equilibradas (ver Figura 2.69). Essas estruturas também podem ser analisadas pelo Método das Forças, analogamente ao visto aqui para quadros bi-apoiados.

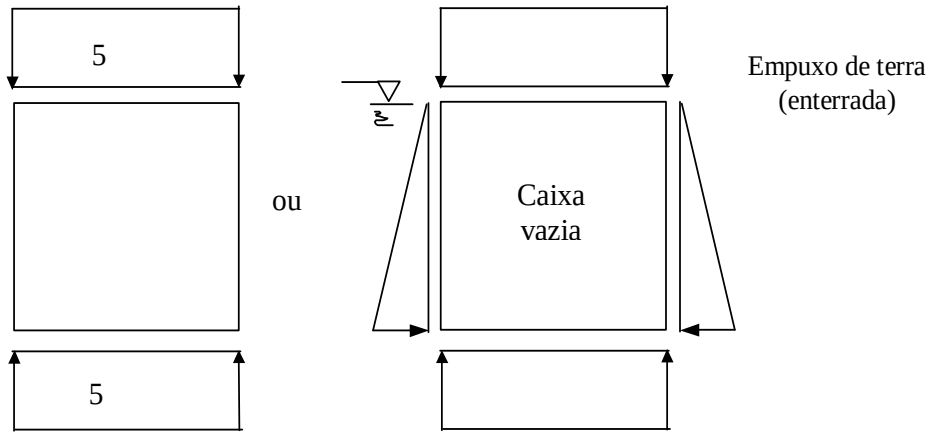


Figura 2.69: Exemplos de quadros: (a) apoiado sobre o terreno; (b) enterrado

Esse procedimento utilizado para resolução pelo Método das Forças de estruturas fechadas, como o caso de quadros, também se aplica a estruturas externamente hiperestáticas, tais como pórticos, o que será conveniente caso sejam estruturas simétricas, conforme apresentado no exemplo a seguir.

2.2.4. Exemplo 4- Pórtico plano bi-engastado

Seja o pórtico plano bi-engastado mostrado na Figura 2.70a, cujas barras são constituídas de mesmo material e têm a mesma seção transversal. O pórtico é três vezes hiperestático, tendo em vista que: $g_e = r - e = 6 - 3 = 3$ (em que r = nº de reações de apoio e e = nº de equações de equilíbrio da Estática).

Trata-se de uma estrutura simétrica em relação ao eixo vertical que corta a barra superior no seu centro e o carregamento aplicado é simétrico em relação ao eixo de simetria da estrutura. Assim sendo fica conveniente se escolher o sistema principal mostrado na Figura 2.70b, em que se cortou a barra horizontal do pórtico no seu eixo de simetria. Como se trata de uma barra de pórtico, surgem três esforços internos nas seções adjacentes ao corte, a saber, esforço normal (X_1), esforço cortante (X_2) e momento fletor (X_3), que são as incógnitas do problema. Como no pórtico hiperestático a barra cortada é monolítica, devem ser aplicadas equações de compatibilidade de deslocamentos relativos nulos na seção de corte: deslocamento horizontal relativo, $\delta_1 = 0$; deslocamento vertical relativo, $\delta_2 = 0$; e rotação relativa, $\delta_3 = \left(\theta^{Esq} - \theta^{Dir}\right) = 0$, da mesma forma que no exemplo do quadro visto no item anterior (o qual era internamente hiperestático).

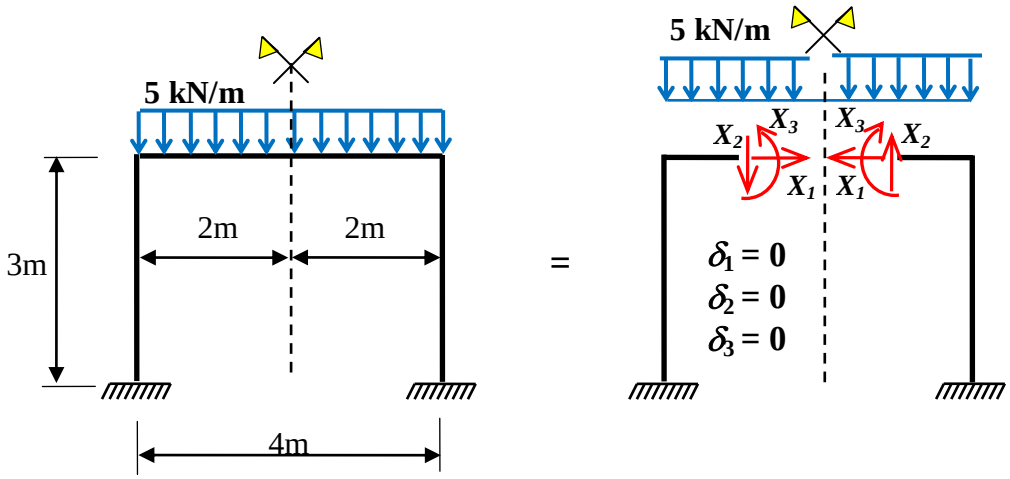


Figura 2.70: a) Pórtico plano bi-engastado; b) sistema principal e hiperestáticos

Novamente aplica-se o Princípio de Superposição de Efeitos na resolução do pórtico plano pelo Método das Forças, considerando-se separadamente as ações do carregamento externo e dos hiperestáticos e somando-se, posteriormente, seus efeitos. Como se trata de uma estrutura simétrica com carregamento simétrico aplicado, já se sabe que o esforço cortante

deve ser nulo na seção do eixo de simetria, portanto já se sabe a priori que X_2 =0, ou seja, na realidade é como se a estrutura fosse apenas duas vezes hiperestática, pois restam apenas duas incógnitas a serem determinadas, X_1 e X_3.

Devido ao fato do diagrama de momento fletor na situação (II), M_2, ser antissimétrico em relação ao eixo de simetria do pórtico, e os diagramas nas demais situações, M_1, M_3, e M_0 serem simétricos, tem-se que os coeficientes δ_{20}, δ_{21} e δ_{23} serão nulos. Porém, mesmo que o carregamento aplicado não fosse simétrico, teria-se que $\delta_{20} \neq 0$ e $X_2 \neq 0$ (o esforço cortante não seria nulo), mas os coeficientes δ_{21} e δ_{23} seriam nulos, ou seja, o sistema de equações de compatibilidade a resolver ficaria desacoplado, o que já representaria uma vantagem na escolha desse sistema principal. Já se o carregamento aplicado no pórtico fosse antissimétrico, teria-se que $\delta_{20} \neq 0$ e $\delta_{10} = \delta_{30} = 0$ o que implicaria em se ter o esforço normal e o momento fletor nulos no eixo de simetria, $X_1 = 0$ e $X_3 = 0$. Estas conclusões podem ser extrapoladas para qualquer estrutura simétrica em que a seção S de corte encontra-se no eixo de simetria (perpendicular à barra), conforme será visto no próximo item: se o carregamento aplicado for simétrico, tem-se que $V = 0$ (no eixo de simetria), e se o carregamento aplicado for antissimétrico: $M = 0$ e $N = 0$ (no eixo de simetria).

2.2.5. Exemplo 5- Pórtico plano simétrico com carregamento simétrico

Seja o pórtico plano ilustrado na Figura 2.71, em que todas as barras apresentam a mesma seção transversal e são constituídas do mesmo material. Trata-se de uma estrutura simétrica em que o carregamento aplicado é simétrico em relação ao eixo de simetria da estrutura. O pórtico tem seis reações de apoio (r) e duas barras ligadas por rótula, logo seu grau de hiperestaticidade é igual a 2: $g_e = r - e - nr = 6 - 3 - 1 = 2$ (sendo nr o nº de barras ligadas por rótula menos 1 e e o nº de equações de equilíbrio da Estática).

Sabe-se que na seção de simetria de uma estrutura simétrica com carregamento simétrico o esforço cortante é nulo, portanto é conveniente se escolher o sistema principal mostrado na Figura 2.72, em que se corta a barra horizontal do pórtico no seu eixo de simetria, na seção S. Usualmente surgem três esforços internos ao se seccionar uma barra de pórtico, no entanto, devido à presença da rótula o momento fletor é nulo ($M = 0$), e devido à simetria o

esforço cortante é nulo ($V = 0$). Portanto, cortando-se a estrutura na seção S, tem-se apenas uma incógnita hiperestática (X_1) que é o esforço axial ou normal (Figura 2.72).

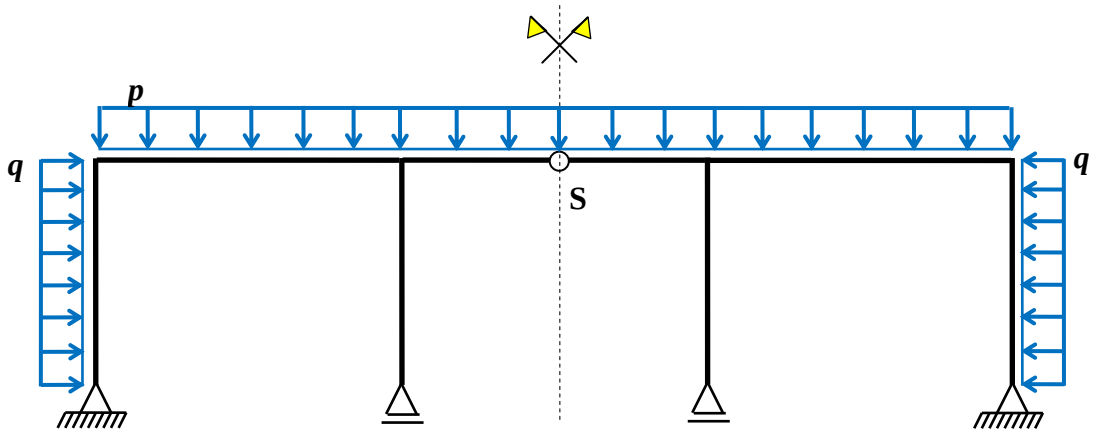


Figura 2.71: Pórtico plano simétrico com carregamento simétrico

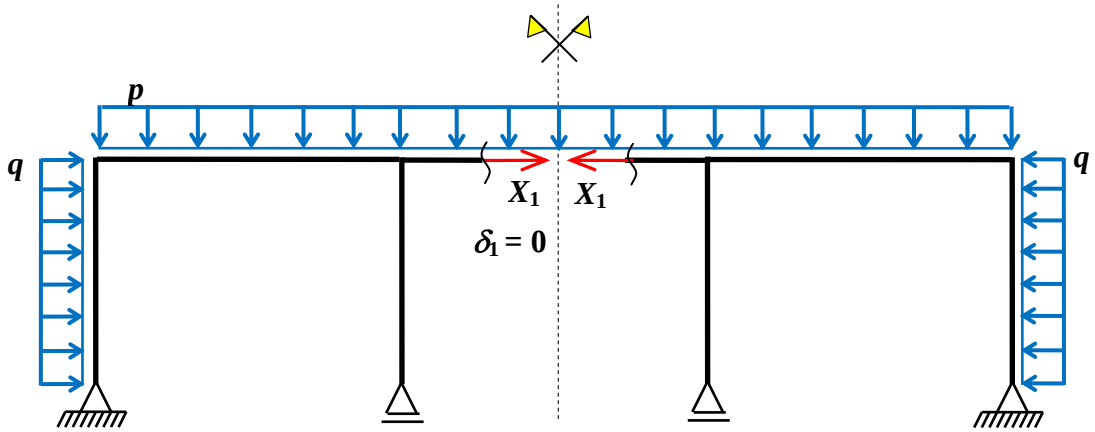


Figura 2.72: Sistema principal e hiperestático para o pórtico da Figura 2.71

A condição de compatibilidade é de deslocamento horizontal relativo nulo na seção de corte S, no eixo de simetria: $\delta_1 = 0$. Utilizando-se superposição de efeitos, essa condição pode ser escrita em sua forma genérica, conforme feito nos exemplos anteriores:

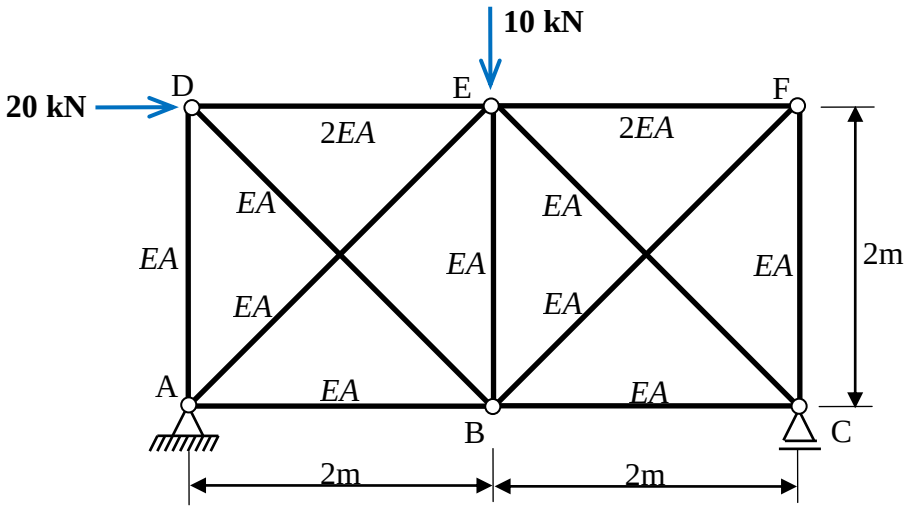
$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \qquad (2.134)$$

A solução desta equação fornecerá o valor da incógnita hiperestática X_1. Mais adiante, no item 2.3, esse tópico de simetria será abordado com mais detalhes.

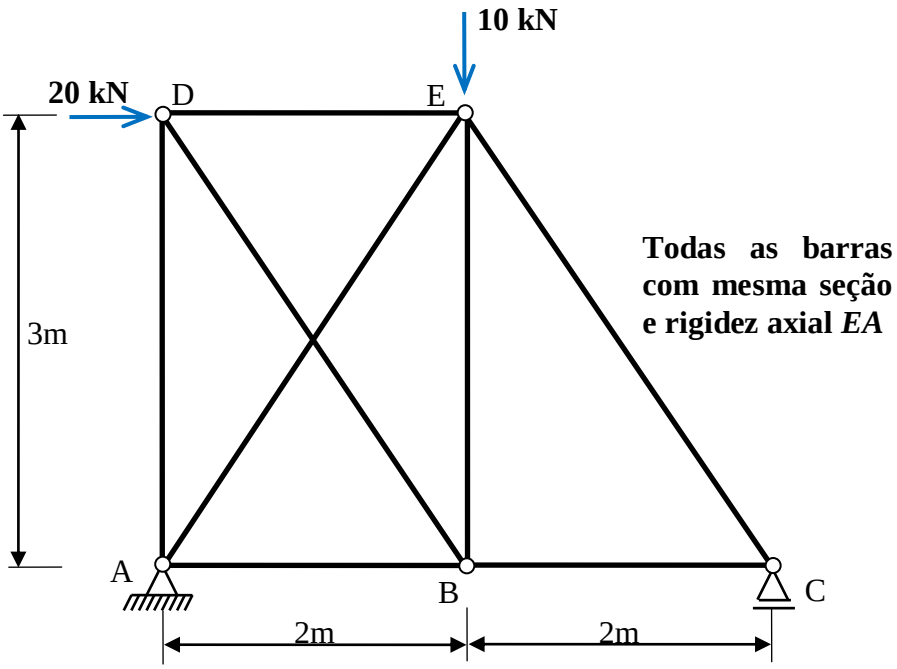
2.2.6. Exercícios propostos

Determine as reações de apoio e os esforços axiais nas barras das treliças hiperestáticas abaixo.

a)



b)



2.3.Tirando proveito da simetria

2.3.1. Estruturas simétricas com carregamento simétrico

2.3.1.1. Exemplo 1: Viga bi-apoiada

Seja a viga da Figura 2.73, de seção transversal constante e mesmo material, que está auto-equilibrada em relação a forças horizontais (de forma que o centro da viga tem deslocamento horizontal nulo), portanto a viga fica isostática. As reações de apoio e os diagramas de esforços estão mostrados na Figura 2.73. A viga é simétrica em relação ao eixo vertical que passa pelo seu centro e está submetida a carregamento simétrico em relação a esse eixo. Observa-se da Figura 2.73 que as reações da viga são simétricas, o diagrama de esforço normal (*N*) e de momento fletor (*M*) também são simétricos e o diagrama de esforço cortante (*V*) é antissimétrico, em relação ao eixo de simetria da viga.

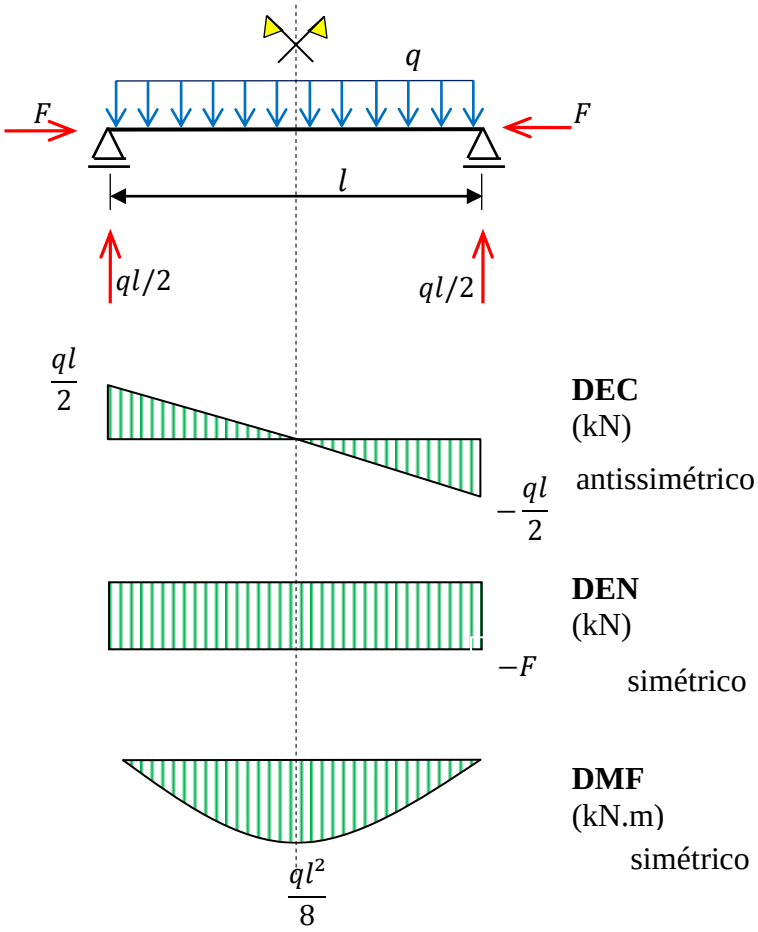


Figura 2.73: Viga bi-apoiada simétrica com carregamento simétrico

Com relação às deformações sofridas pelo eixo horizontal da viga, observa-se que a seção central, cortada pelo eixo de simetria, sofre deslocamento horizontal (δ_H) e rotação (θ) nulos, enquanto que o deslocamento vertical (δ_V) não é nulo, conforme pode se notar na Figura 2.74a. Para se tirar proveito da simetria, pode-se cortar a viga ao meio no eixo de simetria e considerar apenas uma de suas metades, por exemplo, a metade da esquerda (ver Figura 2.74b). Na seção de corte deve-se incluir o apoio pertinente que represente as condições cinemáticas da viga real, inteira. O apoio que impede deslocamento horizontal e rotação no plano, mas não impede deslocamento vertical, é o mostrado na Figura 2.74b. Como esse apoio impede dois deslocamentos, haverá duas reações de apoio correspondentes, uma horizontal (H_B) e uma de momento (M_B), ilustradas na Figura 2.75a.

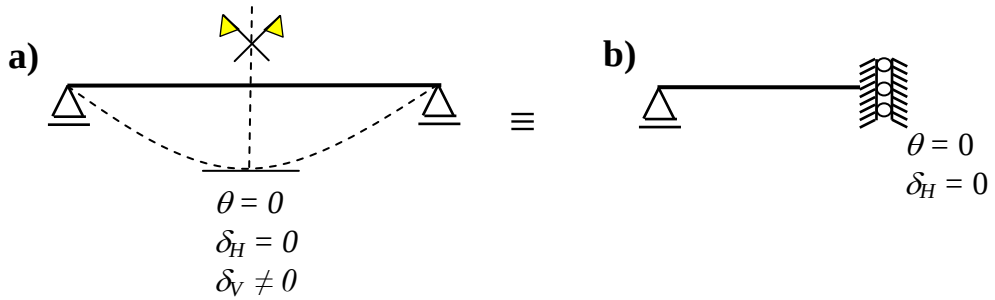


Figura 2.74: a) Deformação do eixo da viga inteira; b) metade da viga com apoio correspondente na seção de corte

Resolve-se assim apenas a metade da estrutura original, como mostrado na Figura 2.75a, obtendo-se suas reações de apoio (R_A, H_B e M_B) pelas equações de equilíbrio da Estática (ver Figura 2.75b). A partir dessas reações podem-se obter os esforços internos em qualquer seção e traçar os respectivos diagramas. Em seguida calculam-se as reações para a viga inteira, levando em conta que estas são simétricas, e estendem-se os diagramas traçados para metade da viga para a viga inteira, original, lembrando que os diagramas de esforço normal, N, e de momento fletor, M, são simétricos e o diagrama de esforço cortante, V, é antissimétrico. Esse procedimento visto nesse exemplo de viga pode ser aplicado a outras estruturas simétricas com carregamento simétrico, conforme será visto no próximo exemplo.

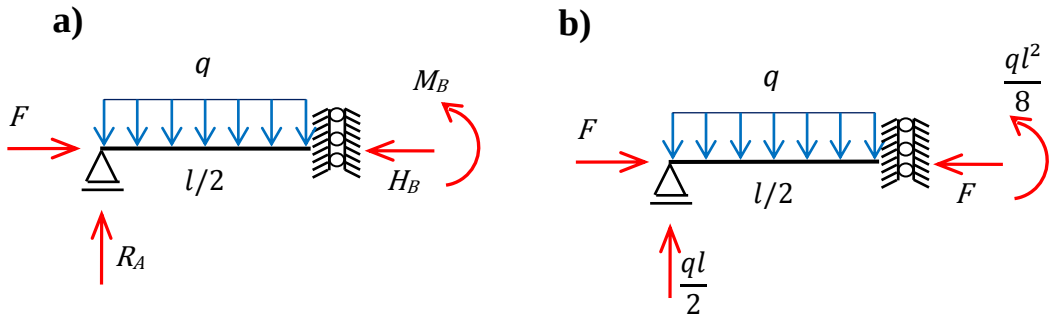


Figura 2.75: a) Metade da viga original com apoio pertinente na seção de corte; b) reações de apoio calculadas para metade da viga

2.3.1.2. Exemplo 2: Pórtico plano bi-engastado

Seja agora outro exemplo de estrutura simétrica, o pórtico plano mostrado na Figura 2.76a, formado por barras com seção transversal constante, todas fabricadas com o mesmo material. O pórtico está submetido a carregamento simétrico em relação a seu eixo de simetria e tem grau de hiperestaticidade igual a três ($g_e = r - e = 6 - 3 = 3$). Analogamente ao que foi visto no exemplo anterior (viga bi-apoiada), da deformação do pórtico observa-se que no ponto central do eixo da barra horizontal, cortada pelo eixo vertical de simetria, o deslocamento horizontal e a rotação são nulos ($\delta_H = 0$ e $\theta = 0$). Assim sendo pode-se tirar proveito da simetria e se cortar a estrutura ao meio, ficando apenas com uma metade (no caso a esquerda) e inserindo-se o apoio correspondente às condições cinemáticas do pórtico original, como ilustra a Figura 2.76b. Esse apoio restringe dois deslocamentos, logo haverá duas reações de apoio, uma horizontal (H) e uma de momento (M), como indicado na Figura 2.76b.

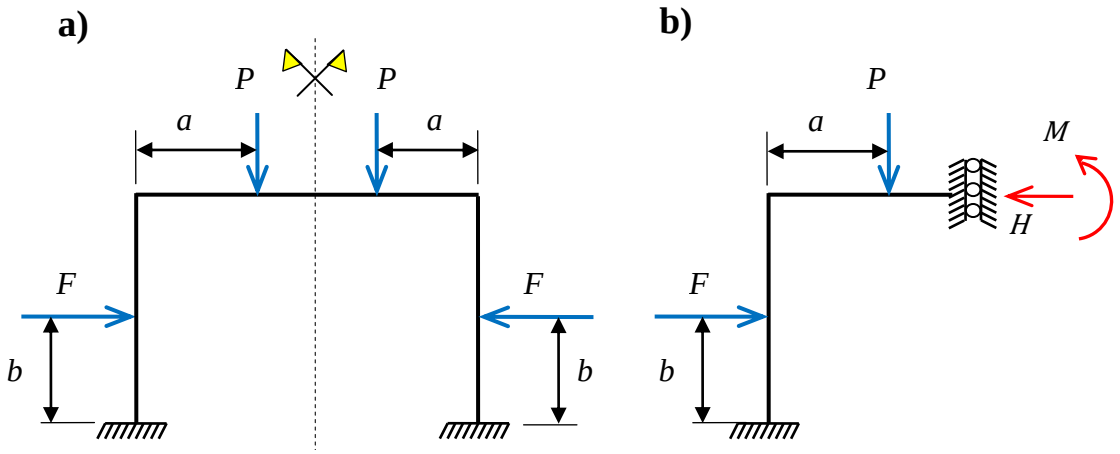


Figura 2.76 a) Pórtico plano simétrico com carregamento simétrico ($g_e = 3$); b) metade do pórtico plano com apoio correspondente na seção de corte ($g_e = 2$)

Trabalha-se então com uma estrutura equivalente, a metade do pórtico plano, que é uma estrutura duas vezes hiperestática ($g_e = r - e = 5 - 3 = 2$). Aplicando-se o Método das Forças, deve-se liberar os dois vínculos excedentes, no caso optou-se por liberar os vínculos do apoio da direita, substituindo-os pelas reações correspondentes, X_1 e X_2, e impondo-se as condições de compatibilidade de deslocamentos, conforme indicado na Figura 2.77.

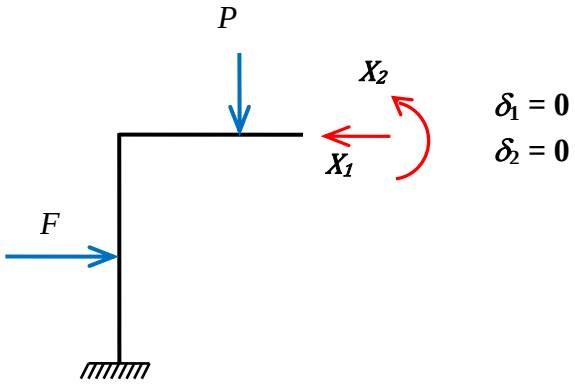


Figura 2.77: Sistema principal para a estrutura equivalente (metade esquerda do pórtico original)

Utilizando-se o Princípio de Superposição de Efeitos, aplicam-se separadamente no sistema principal as ações do carregamento externo e dos hiperestáticos, somando-se em seguida os efeitos ou deformações correspondentes. Dessa forma as equações de compatibilidade de deslocamentos podem ser escritas em sua forma genérica:

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} = 0 \qquad (2.135)$$

$$\delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} = 0$$

Em seguida obtêm-se os deslocamentos generalizados δ_{ij} da maneira usual, os quais são inseridos no sistema de equações acima, (2.135). Resolvendo-se esse sistema de equações obtêm-se os valores das incógnitas hiperestáticas X_1 e X_2. As demais reações de apoio do sistema principal podem ser obtidas pelas equações de equilíbrio da Estática. Após determinadas as reações e os esforços internos na metade do pórtico, determinam-se as reações e esforços no pórtico original, lembrando que as reações e os diagramas de esforço normal e momento fletor são simétricos, enquanto que o diagrama de esforço cortante é antissimétrico, em relação ao eixo de simetria do pórtico. A vantagem desse procedimento que aproveita a simetria em relação ao procedimento visto anteriormente no exemplo do

item 2.2.4, em que o pórtico plano bi-engastado é tratado como uma estrutura internamente hiperestática, cortando-se a barra superior no eixo de simetria e inserindo-se os esforços internos correspondentes (apenas dois, esforço normal e momento fletor, uma vez que o esforço cortante se anula), é a simplicidade de se trabalhar apenas com a metade da estrutura. Nos dois procedimentos têm-se apenas duas incógnitas hiperestáticas.

2.3.2. Estruturas simétricas com carregamento antissimétrico

2.3.2.1. Exemplo 1: Viga bi-apoiada

Seja agora a viga da Figura 2.78, de seção transversal constante e mesmo material, que é uma vez hiperestática, pois possui um vínculo horizontal excedente ($g_e = r - e = 4 - 3 = 1$). Resolvendo a viga pelo Método das Forças pode-se obter o valor da reação hiperestática, e as demais reações podem ser encontradas por meio das equações de equilíbrio da Estática. Os resultados de todas as reações estão mostrados na Figura 2.78. A partir das reações de apoio se obtêm os esforços internos em qualquer seção, possibilitando o traçado dos respectivos diagramas mostrados na figura. A viga é simétrica em relação ao eixo vertical que passa pelo seu centro e está submetida a carregamento antissimétrico em relação a esse eixo. Observa-se da Figura 2.78 que as reações da viga são antissimétricas, o diagrama de esforço normal (N) e de momento fletor (M) também são antissimétricos e o diagrama de esforço cortante (V) é simétrico, em relação ao eixo de simetria da viga.

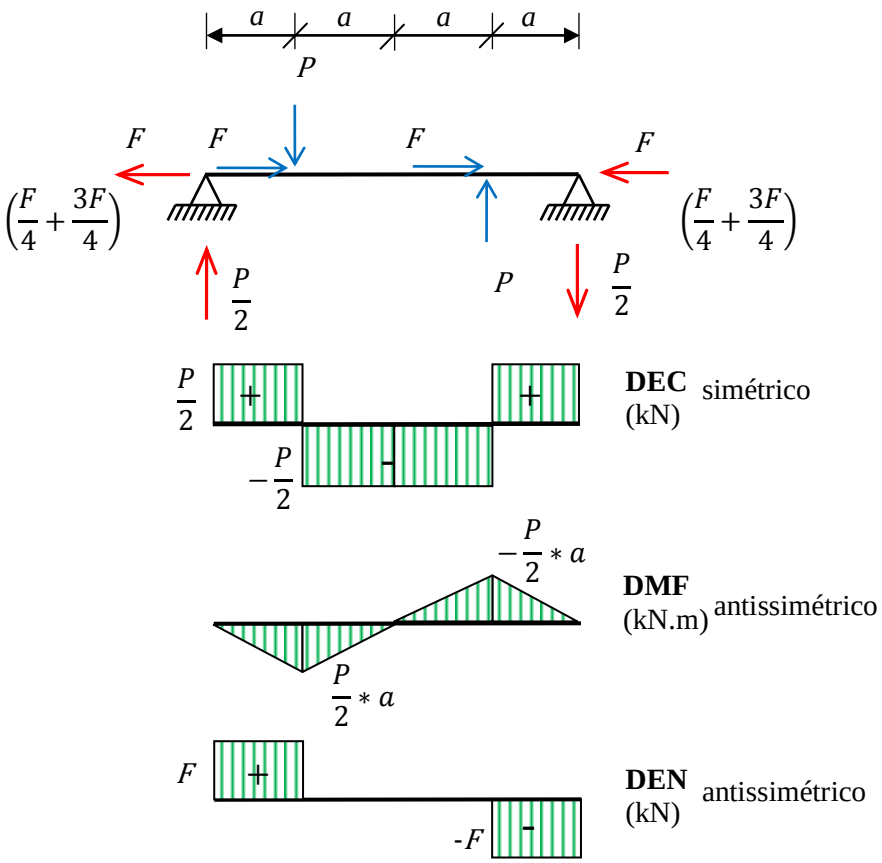


Figura 2.78: Viga simétrica submetida a carregamento antissimétrico

A deformada do eixo horizontal da viga bi-apoiada está ilustrada na Figura 2.79a. Observa-se dessa figura que na seção central, cortada pelo eixo de simetria, o deslocamento vertical (δ_V) é nulo, enquanto que o deslocamento horizontal (δ_H) e a rotação (θ) não são nulos. Para se tirar proveito da simetria, pode-se cortar a viga ao meio no eixo de simetria e considerar apenas uma de suas metades, por exemplo, a metade da esquerda (ver Figura 2.79b). Na seção de corte deve-se incluir o apoio pertinente que represente as condições cinemáticas da viga real, inteira. O apoio que impede apenas deslocamento vertical é o apoio simples, ou do 1º gênero, mostrado na Figura 2.79b. Nesse apoio haverá apenas uma reação vertical, correspondente à direção impedida de se deslocar. Assim sendo a estrutura resultante equivalente é isostática.

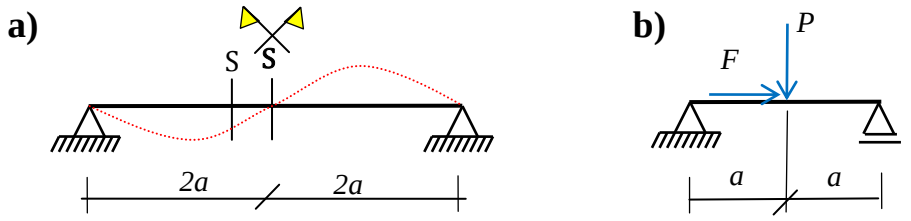


Figura 2.79: a) Deformada do eixo da viga inteira; b) viga equivalente (metade da viga com apoio pertinente na seção de corte e cargas aplicadas

Resolve-se assim apenas a metade da estrutura original, mostrada na Figura 2.79b, obtendo-se suas reações de apoio, esforços internos e respectivos diagramas. Em seguida calculam-se as reações para a viga inteira, levando em conta que estas são antissimétricas, e estendem-se os diagramas traçados na metade da viga para a viga inteira, original, lembrando que os diagramas de esforço normal, *N*, e de momento fletor, *M*, são antissimétricos e o diagrama de esforço cortante, *V*, é simétrico. Esse procedimento visto nesse exemplo de viga pode ser aplicado a outras estruturas simétricas com carregamento antissimétrico, conforme será visto no próximo exemplo.

2.3.2.2. Exemplo 3: Pórtico plano bi-engastado

Nesse exemplo analisa-se um pórtico plano bi-engastado simétrico (todas as barras são constituídas do mesmo material e têm a mesma seção transversal), submetido a carregamento antissimétrico, conforme mostra a Figura 2.80a. Este pórtico apresenta seis reações de apoio e, portanto, seu grau de hiperestaticidade é igual a 3. Tirando proveito da simetria, corta-se a barra superior do pórtico na seção central, no eixo de simetria, tomando-se a metade à esquerda e inserindo-se um apoio simples na seção de corte, de forma a simular a deformada do pórtico inteiro (ver Figura 2.80b). O pórtico equivalente resultante (metade do pórtico original) apresenta quatro reações de apoio, sendo assim uma vez hiperestático.

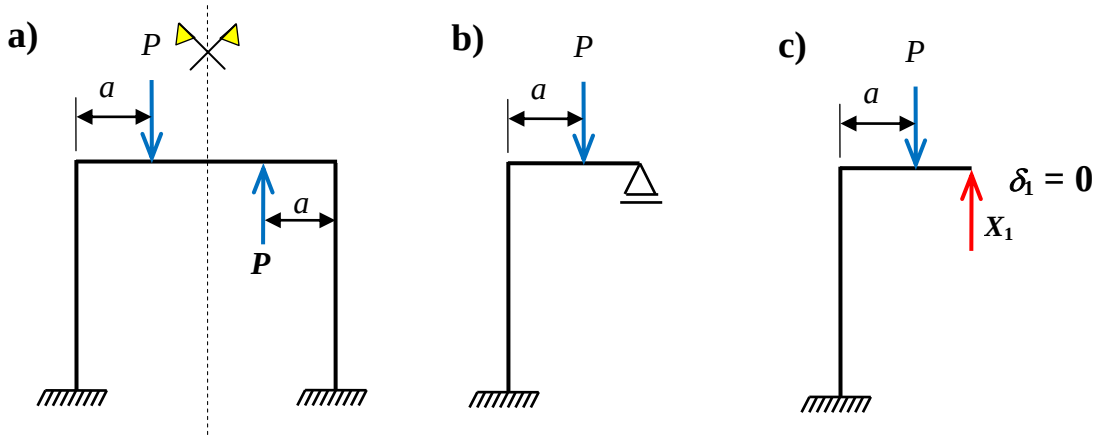


Figura 2.80: a) Pórtico plano bi-engastado submetido a carregamento antissimétrico; b) pórtico equivalente (metade do pórtico com apoio pertinente); c) sistema principal

Aplicando-se o Método das Forças ao pórtico equivalente deve-se liberar um vínculo excedente. Um sistema principal possível é obtido pela remoção do apoio simples, substituindo-o pela reação correspondente, X_1, e impondo-se a condição de compatibilidade de deslocamento vertical nulo ($\delta_1 = 0$), conforme indicado na Figura 2.80c. A solução desta equação de compatibilidade fornecerá o valor da incógnita hiperestática X_1. Em seguida obtêm-se as demais reações de apoio e traçam-se os diagramas de esforços internos no sistema principal do pórtico equivalente. As reações de apoio e os diagramas de esforços no pórtico original são então calculados utilizando-se a simetria do problema, sabendo-se que: reações de apoio, diagramas de esforço normal e momento fletor são antissimétricos, enquanto que o diagrama de esforço cortante é simétrico.

2.3.3. Estruturas simétricas com carregamento qualquer

Admitindo-se que a estrutura tenha comportamento linear, pode-se ainda tirar proveito da simetria no caso de estrutura simétrica submetida a um carregamento qualquer, sem simetria, sabendo-se que qualquer carregamento pode ser decomposto na soma de um carregamento simétrico (a) com outro antissimétrico (b) (em relação ao eixo de simetria da estrutura), conforme ilustrado na Figura 2.81 para um pórtico plano bi-engastado, simétrico, que é três vezes hiperestático.

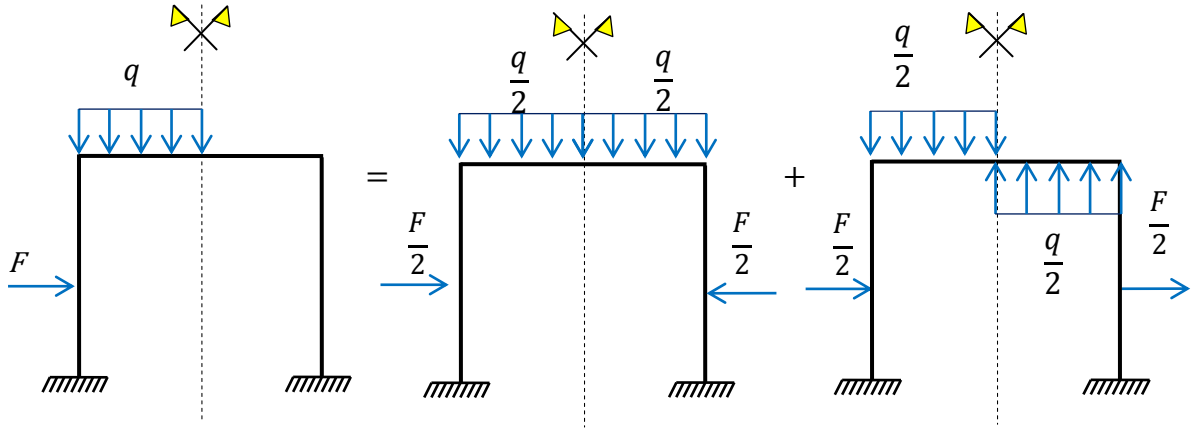


Figura 2.81: Estrutura simétrica submetida a um carregamento qualquer, decomposto na soma de uma parcela simétrica com outra antissimétrica

Após a decomposição do carregamento, pode-se tirar partido da simetria da estrutura cortando-a ao meio e considerando uma estrutura equivalente formada por apenas uma de suas metades. Assim sendo, no caso (a), carregamento simétrico, partindo-se o pórtico original ao meio e considerando apenas metade do pórtico (ver Figura 2.82a) resulta em uma estrutura duas vezes hiperestática, conforme visto no item 2.3.1.2. Já no caso (b), carregamento antissimétrico, partindo-se o pórtico original ao meio tem-se que a metade do pórtico fica uma vez hiperestática (ver Figura 2.82b), conforme visto no item 2.3.2.2. Analisam-se os pórticos equivalentes (metade do pórtico) separadamente, caso (a) e caso (b), por meio do Método das Forças. Depois de obtidas as reações de apoio e os diagramas de esforços nos pórticos equivalentes, estendem-se as reações e esforços para o pórtico inteiro, original, lembrando que, para o caso (a): as reações e os diagramas de esforço normal e momento fletor são simétricos, enquanto que o diagrama de esforço cortante é antissimétrico, em relação ao eixo de simetria do pórtico; já para o caso (b): as reações de apoio, os diagramas de esforço normal e momento fletor são antissimétricos, enquanto que o diagrama de esforço cortante é simétrico. Finalmente as reações de apoio e os diagramas de esforços no pórtico bi-engastado são encontrados somando-se os valores obtidos para o caso (a) com os obtidos para o caso (b). Além da vantagem de se trabalhar com a metade da estrutura, esse procedimento apresenta a facilidade de se resolver dois sistemas de equações de compatibilidade separadamente, sendo um com duas incógnitas e outro com uma incógnita, ao invés de se resolver um sistema com três incógnitas (caso do pórtico inteiro, bi-engastado).

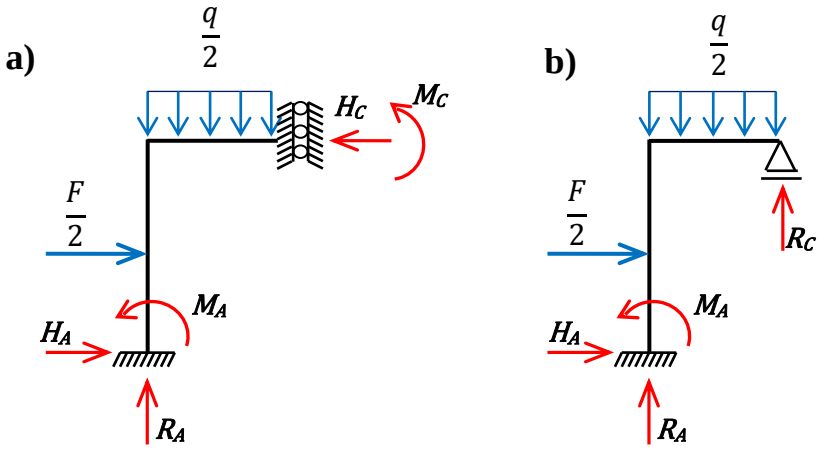


Figura 2.82: Pórticos equivalentes (metade) com apoios pertinentes na seção de corte e reações de apoio: a) carregamento simétrico; b) carregamento antissimétrico

Alguns sistemas estruturais apresentam dupla simetria. Neste caso, pode-se analisar apenas um quarto da estrutura. A Figura 2.83a apresenta um quadro auto-equilibrado (como por exemplo no caso de estrutura apoiada diretamente sobre o terreno) com dupla simetria (simetria em relação ao eixo vertical e horizontal que passa pelo seu centro), cujo grau de hiperestaticidade (interna) é igual a 3. Tirando proveito da simetria, pode-se cortar a estrutura segundo seu eixo vertical de simetria (ver Figura 2.83b), colocar os apoios pertinentes nas barras cortadas e se analisar apenas essa metade da estrutura (estrutura equivalente), a qual passa a ser uma vez hiperestática. Outra opção seria cortar esta estrutura equivalente ao meio (ver Figura 2.83c), segundo seu eixo horizontal de simetria, inserir o apoio pertinente na barra cortada e se analisar essa nova estrutura equivalente, formada por um quarto da estrutura original. Nesta outra opção a estrutura equivalente também é uma vez hiperestática. Assim as duas estruturas equivalentes são convenientes, podendo-se escolher tanto uma como outra na análise pelo Método das Forças.

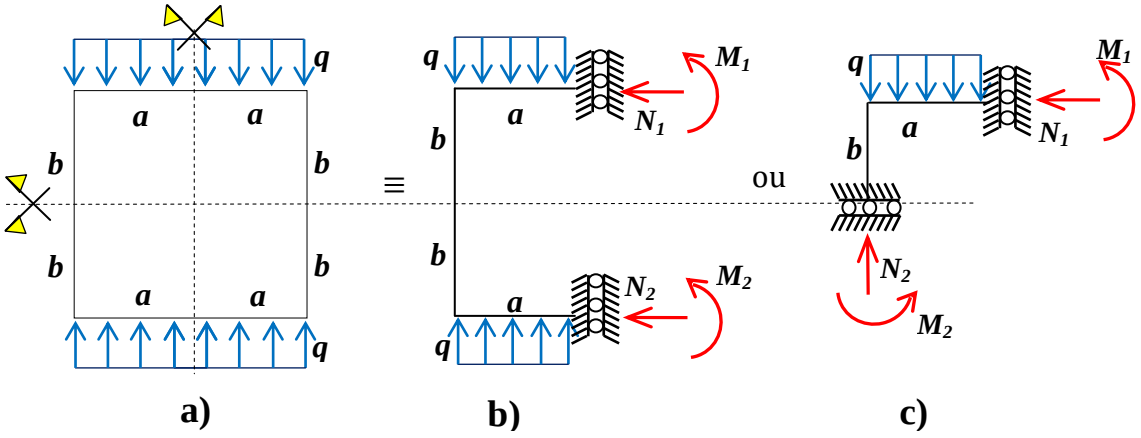


Figura 2.83: a) Quadro com dupla simetria; b) estrutura equivalente – metade esquerda do quadro; c) estrutura equivalente – um quarto do quadro original

Um outro exemplo de estrutura com dupla simetria é o anel mostrado na Figura 2.84, apoiado sobre uma superfície, com uma força vertical aplicada no topo, como ilustra a Figura 2.84a. Trata-se de uma estrutura auto-equilibrada e três vezes hiperestática. Analogamente ao caso do quadro visto acima, há duas alternativas: i) corta-se a estrutura segundo seu eixo vertical de simetria (ver Figura 2.84b), colocando-se os apoios pertinentes, e analisa-se apenas essa metade da estrutura (estrutura equivalente); íi) corta-se a estrutura segundo os dois eixos de simetria, colocando-se os apoios pertinentes e obtendo-se uma estrutura equivalente formada por um quarto do anel (ver Figura 2.84c). Em ambas alternativas a estrutura equivalente é uma vez hiperestática, o que é vantajoso para resolução pelo Método das Forças.

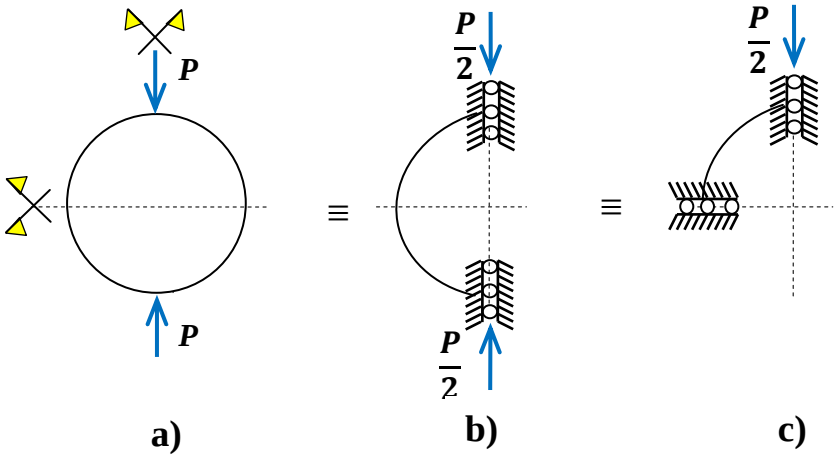


Figura 2.84: a) Anel com dupla simetria; b) Estrutura equivalente – metade esquerda do anel; c) estrutura equivalente – um quarto do anel original

2.3.3.1. Exemplo de pórtico plano bi-engastado simétrico, submetido a carregamento qualquer

Seja um pórtico plano bi-engastado, simétrico em relação ao eixo vertical que passa pelo seu centro, submetido ao carregamento mostrado na Figura 2.85, o qual não é simétrico nem antissimétrico em relação ao eixo de simetria do pórtico. Todas as barras do pórtico são constituídas de mesmo material e apresentam a mesma seção transversal, com rigidez à flexão *EI*. O pórtico apresenta seis reações de apoio, logo grau de hiperestaticidade igual a 3. Admite-se que o pórtico apresente comportamento linear e que se pode desprezar a parcela de deformação axial no cálculo dos deslocamentos generalizados.

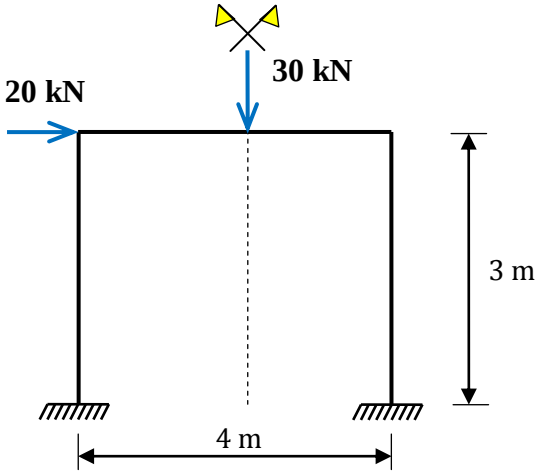


Figura 2.85: Pórtico bi-engastado simétrico submetido a carregamento sem simetria

O carregamento aplicado no pórtico pode ser decomposto em duas parcelas, uma simétrica, mostrada na Figura 2.86a, e outra antissimétrica, mostrada na Figura 2.86b.

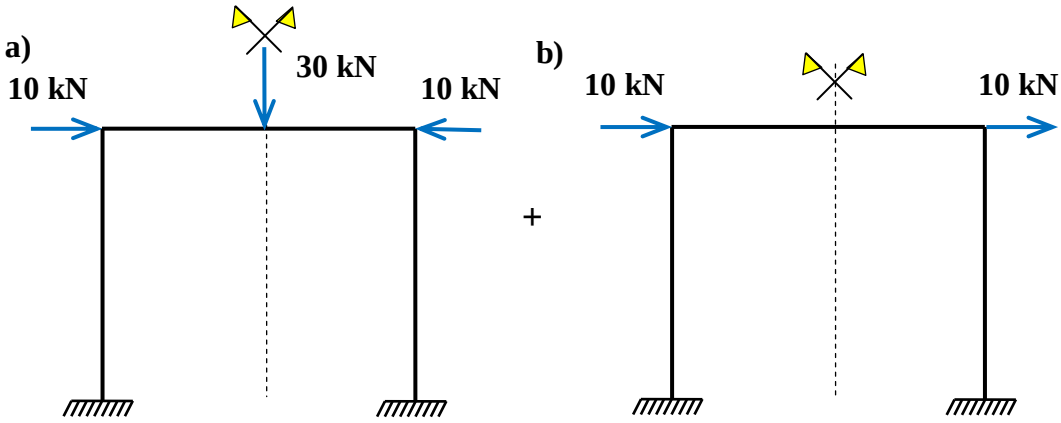


Figura 2.86: Decomposição do carregamento aplicado no pórtico, igual a:
a) carregamento simétrico + b) carregamento antissimétrico

Resolução do pórtico com carregamento simétrico (a)

Tirando-se proveito da simetria, pode-se cortar o pórtico mostrado na Figura 2.86a ao longo de seu eixo de simetria, inserindo o apoio pertinente na barra cortada, e analisar apenas a metade do pórtico (no caso escolheu-se a parte esquerda, conforme ilustrado na Figura 2.87a). O pórtico equivalente apresenta cinco reações de apoio, logo é duas vezes hiperestático. Pelo Método das Forças deve-se encontrar um sistema principal que seja isostático, equivalente ao sistema real hiperestático. Escolheu-se o sistema principal mostrado na Figura 2.87b, no qual removeram-se os dois vínculos do apoio à direita, sendo

substituídos pelas reações correspondentes e aplicando-se as respectivas equações de compatibilidade de deslocamentos.

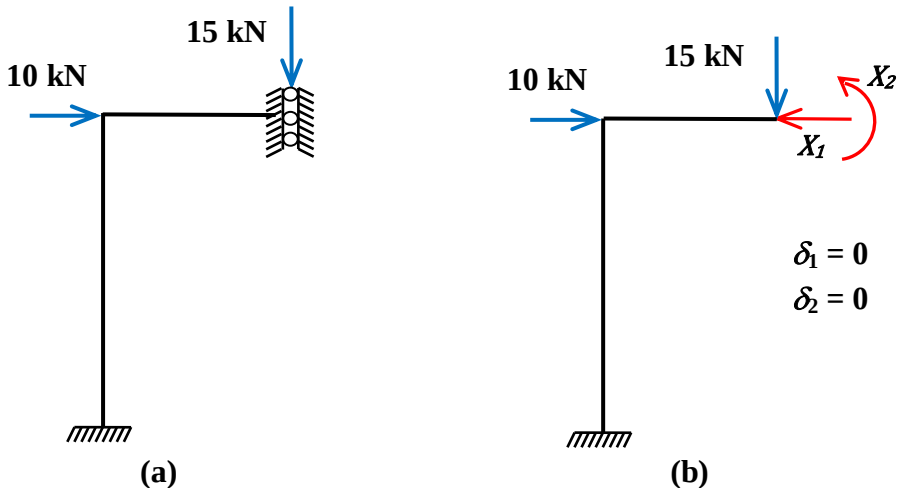


Figura 2.87: a) Pórtico equivalente para carregamento simétrico (metade esquerda do pórtico original); b) sistema principal

Admitindo que o pórtico apresente comportamento linear, pode-se utilizar superposição de efeitos aplicando-se separadamente no sistema principal as ações do carregamento externo (situação (0)); do hiperestático X_1 vezes força unitária em sua direção (situação (I)) e do hiperestático X_2 vezes força unitária em sua direção (situação (II)), somando-se após os seus efeitos. As reações de apoio e o diagrama de momento fletor para a situação (0), situação (I) e situação (II) estão apresentados na Figura 2.88, Figura 2.89 e Figura 2.90, respectivamente. No traçado dos diagramas de momento fletor, considerou-se positivo o momento que traciona as fibras internas das barras do pórtico.

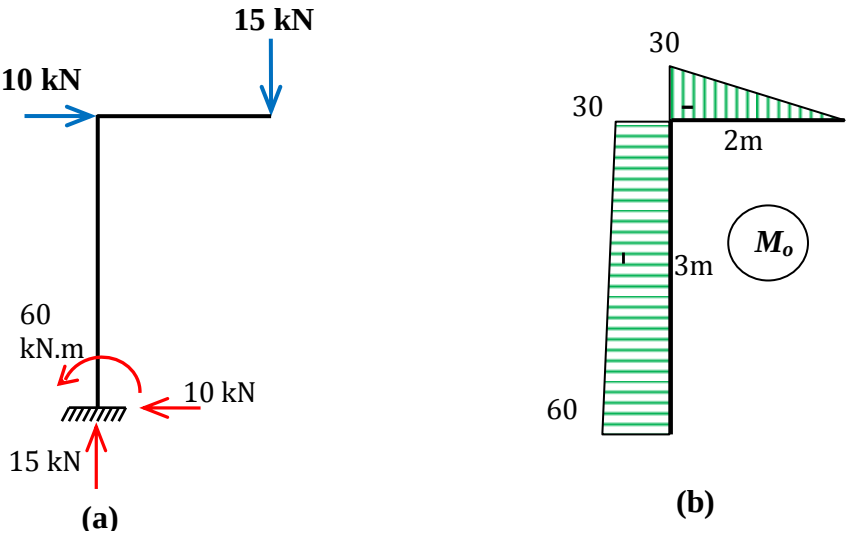


Figura 2.88: a) Sistema principal submetido a carregamento externo (0) com reações de apoio; b) diagrama de momento fletor (M_0)

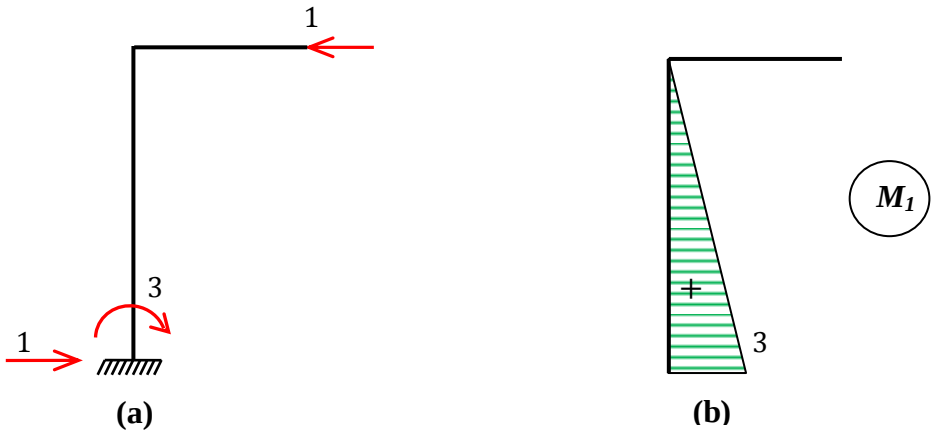


Figura 2.89: a) Sistema principal submetido a força unitária na direção de X_1 com reações de apoio; b) diagrama de momento fletor (M_1)

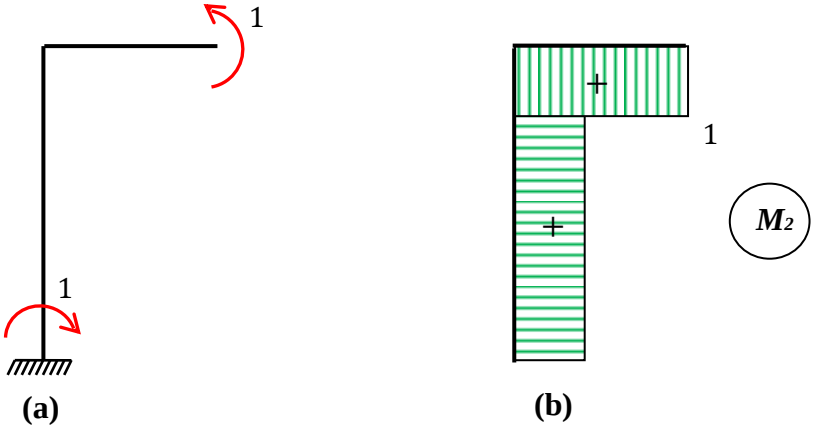


Figura 2.90: a) Sistema principal submetido a força unitária na direção de X_2 com reações de apoio; b) diagrama de momento fletor (M_2)

A partir dos diagramas de momento fletor nas diversas situações, calculam-se os deslocamentos generalizados (desprezando-se a parcela de deformação axial e de cisalhamento) pela expressão:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI}\sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k} M_i M_j dx_k\right) \tag{2.136}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}.\left[\frac{1}{6}\cdot(3)\cdot 3\cdot(2\times(-60)-30)\right] = -\frac{225}{EI} \tag{2.137}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}.\left[\frac{1}{2}\cdot(3)\cdot 1\cdot(-60-30)+\frac{1}{2}\cdot(2)\cdot 1.(-30)\right] = -\frac{165}{EI} \tag{2.138}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}.\left[\frac{1}{3}(3)\cdot 3\cdot 3\right] = \frac{9}{EI} \tag{2.139}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}.[(2)\cdot 1.1 + (3)\cdot 1.1] = \frac{5}{EI} \tag{2.140}$$

$$\delta_{12} = \delta_{12} = \frac{1}{EI}.\left[\frac{1}{2}(3)\cdot 1\cdot 3\right] = \frac{4{,}5}{EI} \tag{2.141}$$

Inserindo-se os valores encontrados no sistema de equações de compatibilidade de deslocamentos (ver eq.(2.135)), vem:

$$\begin{cases} -225 + 9X_1 + 4{,}5X_2 = 0 \\ -165 + 4{,}5X_1 + 5X_2 = 0 \end{cases} \tag{2.142}$$

cuja solução fornece os valores das reações hiperestáticas:

$$X_1 = 15{,}45 \ \text{(kN)} \tag{2.143}$$

$$X_2 = 19{,}09 \ \text{(kN}\cdot\text{m)}$$

Conhecidas as reações hiperestáticas pode-se encontrar no pórtico equivalente as demais reações de apoio por equilíbrio ou por superposição de efeitos. Os resultados de reações de apoio e de momento fletor para o pórtico equivalente estão mostrados na Figura 2.91 e, a partir destes resultados, pode-se obter as reações de apoio e o diagrama de momento fletor para o pórtico inteiro, bi-engastado, usando-se a condição de simetria para carregamento simétrico, conforme mostrado na Figura 2.92.

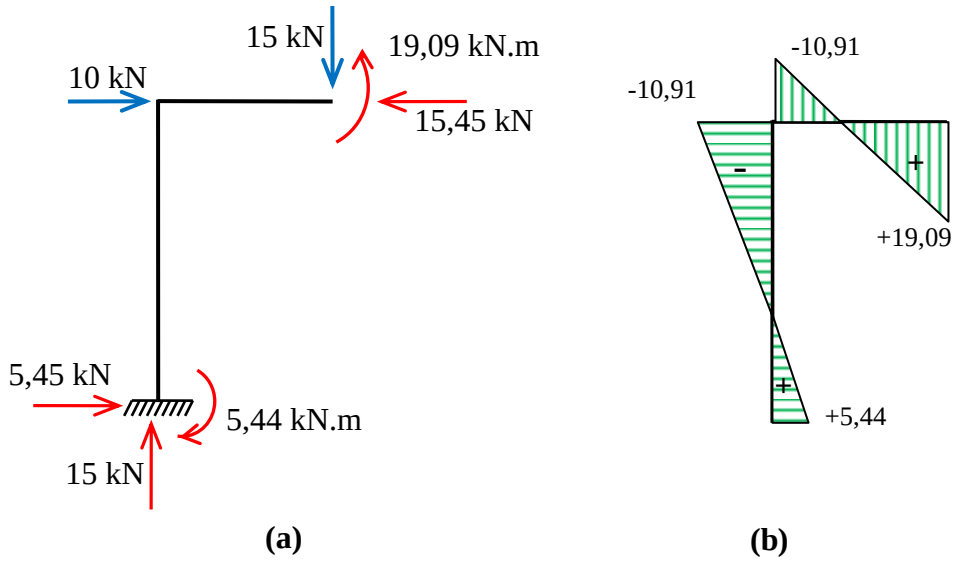


Figura 2.91: Pórtico plano equivalente (carregamento simétrico): a) reações de apoio; b) diagrama de momento fletor (em kN.m)

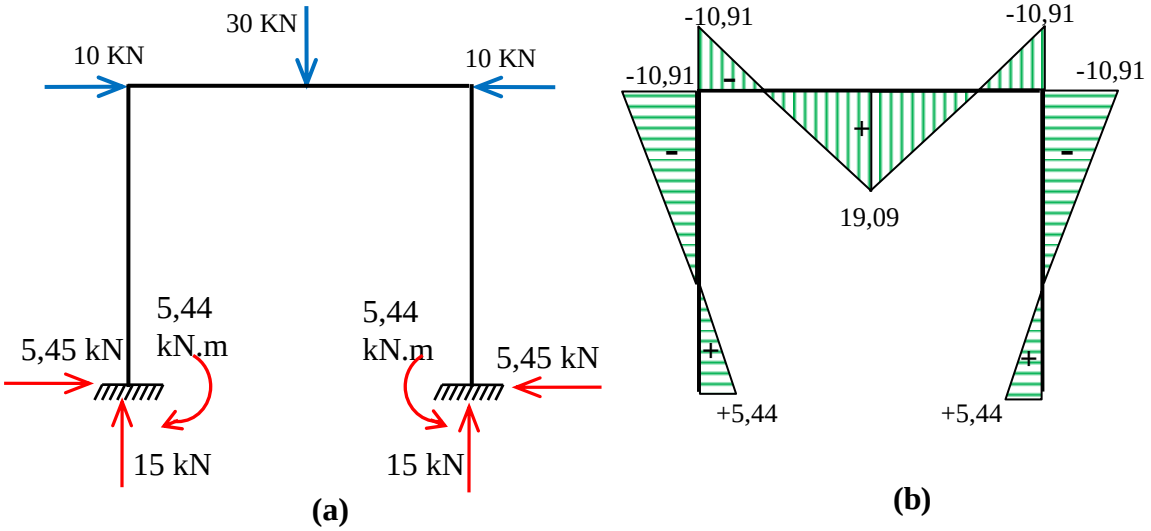


Figura 2.92: Pórtico bi-engastado submetido a parcela de carregamento simétrico: a) reações de apoio; b) diagrama de momento fletor (em kN.m)

Resolução do pórtico com carregamento antissimétrico (b)

Explorando novamente a simetria, pode-se cortar o pórtico mostrado na Figura 2.86b ao longo de seu eixo de simetria, inserindo-se o apoio pertinente na barra cortada, e se analisar apenas a metade do pórtico (no caso escolheu-se a parte esquerda, conforme ilustrado na Figura 2.93a). O pórtico equivalente apresenta quatro reações de apoio, logo é uma vez hiperestático. Pelo Método das Forças deve-se encontrar um sistema principal que seja isostático, equivalente ao sistema real hiperestático. Escolheu-se o sistema principal mostrado na Figura 2.93b, no qual removeu-se o apoio simples à direita, substituindo-o pela reação vertical correspondente e impondo-se a condição de compatibilidade de deslocamento vertical nulo, conforme indicado na figura.

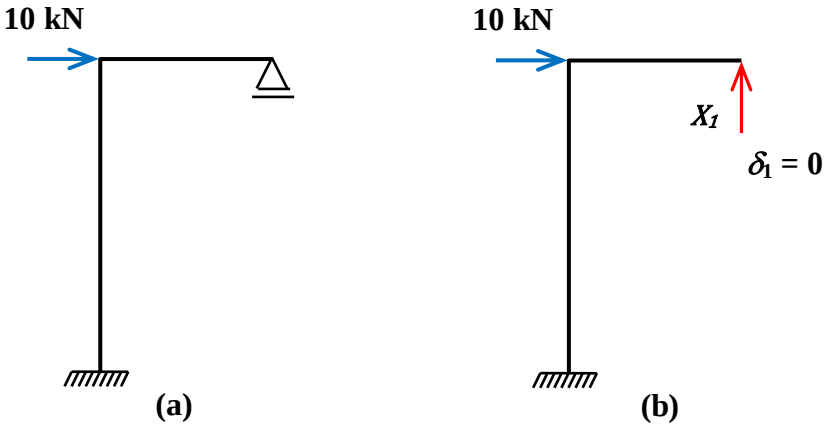


Figura 2.93: a) Pórtico equivalente para carregamento antissimétrico (metade esquerda do pórtico original); b) Sistema principal

Admitindo que o pórtico apresente comportamento linear, pode-se utilizar superposição de efeitos aplicando-se separadamente no sistema principal as ações do carregamento externo (situação (0)) e do hiperestático X_1 vezes uma força unitária em sua direção (situação (I)), somando-se após os seus efeitos. As reações de apoio e o diagrama de momento fletor para a situação (0) e para a situação (I) estão mostrados na Figura 2.94 e Figura 2.95, respectivamente. No traçado dos diagramas de momento fletor, considerou-se positivo o momento que traciona as fibras internas das barras do pórtico.

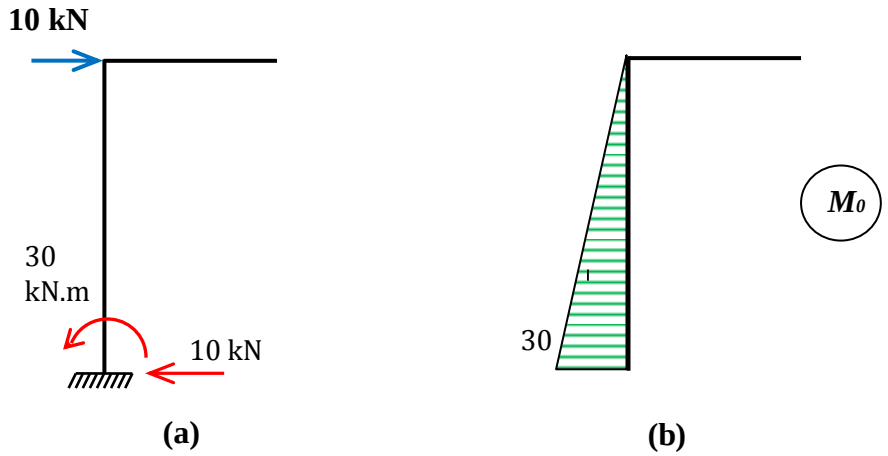


Figura 2.94: a) Sistema principal submetido a carregamento externo (0) com reações de apoio; b) diagrama de momento fletor (M_0)

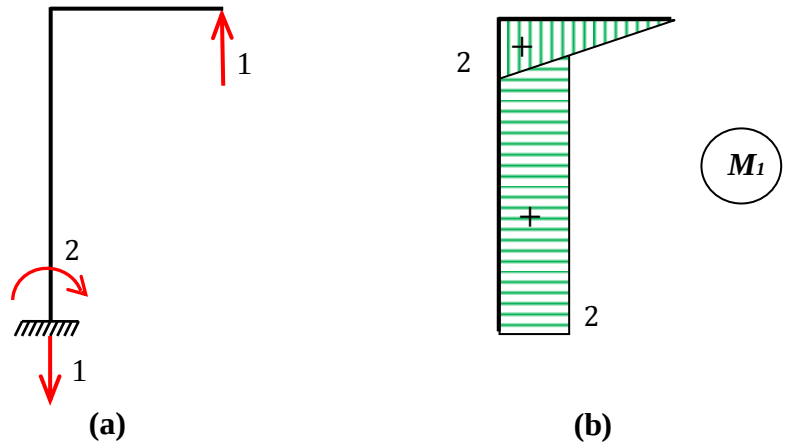


Figura 2.95: a) Sistema principal submetido a força unitária na direção de X_1 com reações de apoio; b) diagrama de momento fletor (M_1)

A partir dos diagramas de momento fletor nas duas situações, calculam-se os deslocamentos generalizados (desprezando-se a parcela de deformação axial e de cisalhamento) pela expressão (2.136), obtendo-se:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}.\left[\frac{1}{2}\cdot(3)\cdot 2\cdot(-30)\right] = -\frac{90}{EI} \qquad (2.144)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}.\left[(3)\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot(2)\cdot 2.2\right] = \frac{44}{3.EI} \qquad (2.145)$$

Inserindo-se em seguida esses valores encontrados na equação de compatibilidade de deslocamentos, obtém-se:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1\cdot\delta_{11} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{90}{EI} + \frac{40}{3EI}.X_1 = 0 \qquad (2.146)$$

cuja solução fornece o valor da reação hiperestática:

$$X_1 = 6{,}14 \ \text{(kN)} \qquad (2.147)$$

Inserindo-se o valor dessa reação no sistema principal (Figura 2.93b), pode-se obter as demais reações de apoio por equilíbrio ou, como alternativa, pode-se encontrá-las por superposição de efeitos. Os resultados de reações de apoio e o diagrama de momento fletor para o pórtico equivalente estão apresentados na Figura 2.96. Usando-se as condições de simetria para carregamento antissimétrico, obtêm-se as reações de apoio e o diagrama de momento fletor para o pórtico inteiro, bi-engastado, submetido à parcela de carregamento antissimétrico, como ilustrado na Figura 2.97.

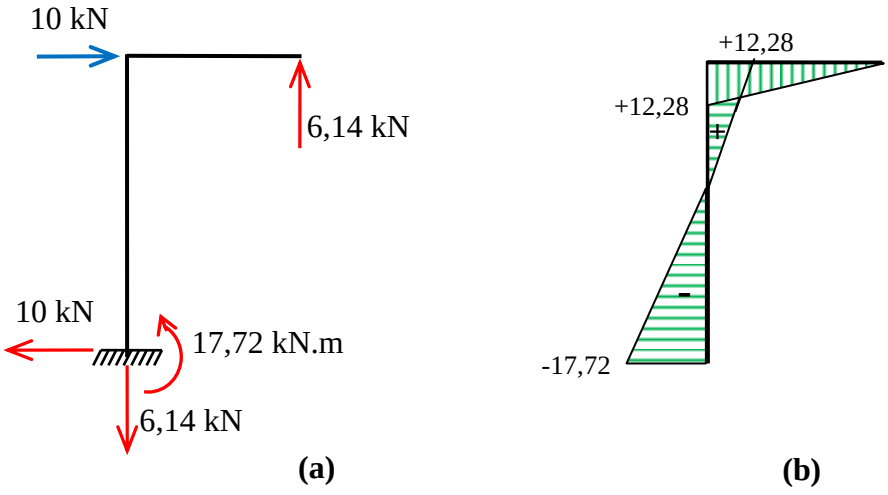


Figura 2.96: Pórtico plano equivalente (carregamento antissimétrico): a) reações de apoio; b) diagrama de momento fletor (em kN.m)

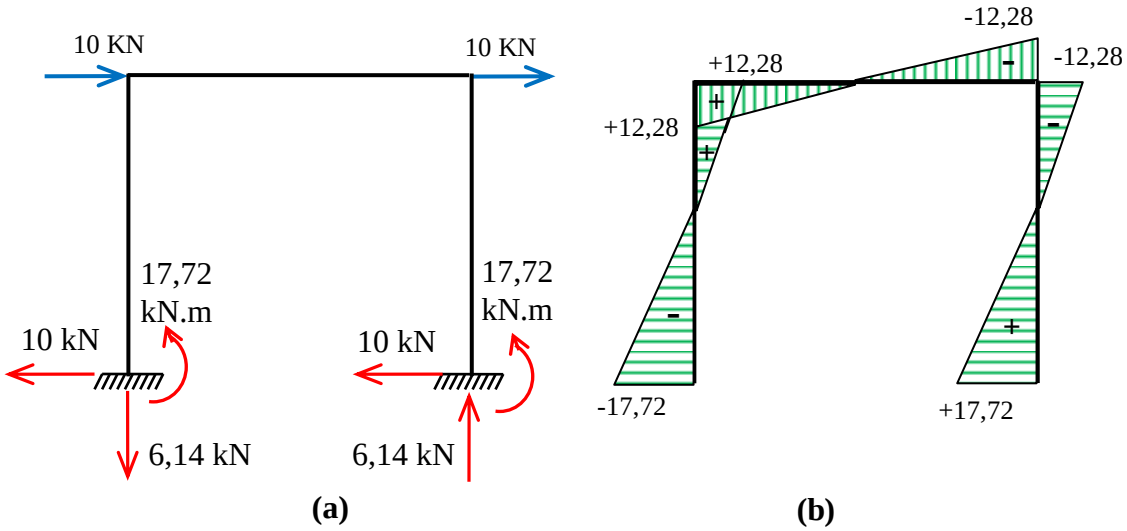


Figura 2.97: Pórtico bi-engastado submetido à parcela de carregamento antissimétrico: a) reações de apoio; b) diagrama de momento fletor (em kN.m)

Finalmente, somando-se os resultados obtidos para as duas parcelas de carregamento, simétrico (ver Figura 2.92) e antissimétrico (ver Figura 2.97), encontram-se as reações finais e o diagrama de momento fletor no pórtico bi-engastado, conforme mostrado na Figura 2.98. Fica como exercício didático para o leitor o traçado dos diagramas de esforço normal e esforço cortante para o pórtico bi-engastado.

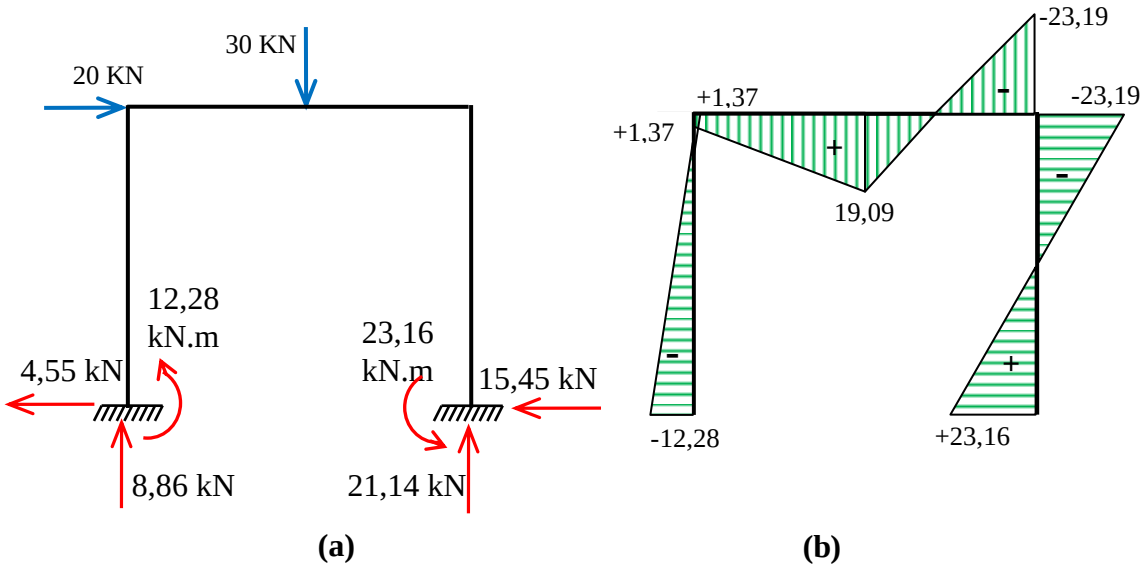


Figura 2.98: Pórtico bi-engastado submetido a carregamento total (simétrico + antissimétrico): a) reações de apoio; b) diagrama de momento fletor (em kN.m)

2.4. Grelhas

As grelhas são estruturas reticuladas cujos eixos das barras situam-se em um mesmo plano (*XY*) que suportam forças atuantes perpendicularmente a este plano (paralelas ao eixo *Z*) e os binários atuantes têm seta dupla no plano *XY*. Devido a essas ações, as barras de uma grelha ficam submetidas aos esforços internos: cortante (*V*), momentos fletor (*M*) e momento torçor (*T*). As parcelas mais importantes na consideração da energia de deformação são os momentos fletores e torçores. Portanto, no cálculo de grelhas hiperestáticas utilizando o Método das Forças, a expressão para o cálculo dos deslocamentos generalizados pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais é dada por:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{\text{no.de barras}} \left[\int_0^{l_k} \frac{M_i M_j}{EI} dx_k + \int_0^{l_k} \frac{T_i T_j}{GJ_O} dx_k \right] \tag{2.148}$$

na qual despreza-se a parcela devido ao esforço cortante, supondo que o eixo das barras é longo em comparação à altura de sua seção transversal.

2.4.1. Exemplo 1- Estrutura simétrica – carregamento qualquer

Seja a grelha mostrada na Figura 2.99, cujas rigidezes à flexão (*EI*) e à torção (GJ_o) são constantes para todas as barras, sendo $EI = 1{,}5 \cdot GJ_o$. Trata-se de uma estrutura simétrica que está submetida a um carregamento qualquer, que não apresenta simetria.

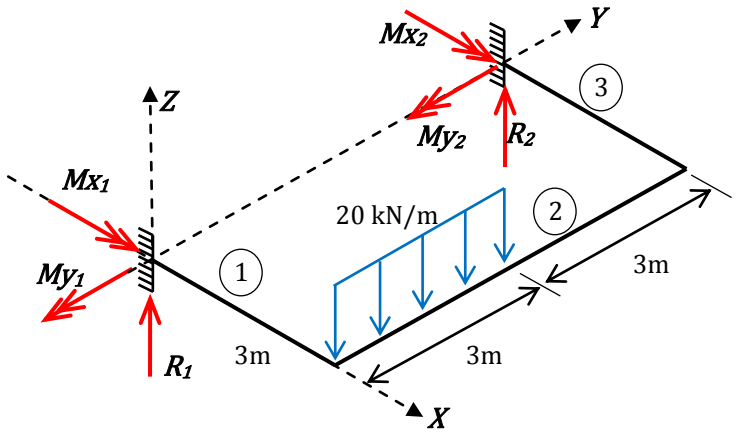


Figura 2.99: Grelha Simétrica submetida a carregamento sem simetria – geometria e reações de apoio

A grelha da Figura 2.99 tem grau de hiperestaticidade igual a 3 ($g_e = r - e = 6 - 3 = 3$) e suas barras estão submetidas a esforço cortante (*V*), momento fletor (*M*) e momento torçor (*T*). Cortando a barra 2 no eixo de simetria da grelha, obtém-se o sistema principal

ilustrado pela Figura 2.100, sendo as incógnitas hiperestáticas os esforços internos adjacentes à seção de corte (momento fletor, X_1; momento torçor, X_2; cortante, X_3) e as condições de compatibilidade na seção são: rotação relativa em torno do eixo *X* nula ($\delta_1 = 0$), rotação relativa em torno do eixo *Y* nula ($\delta_2 = 0$) e deslocamento vertical relativo, paralelo ao eixo *Z*, nulo ($\delta_3 = 0$).

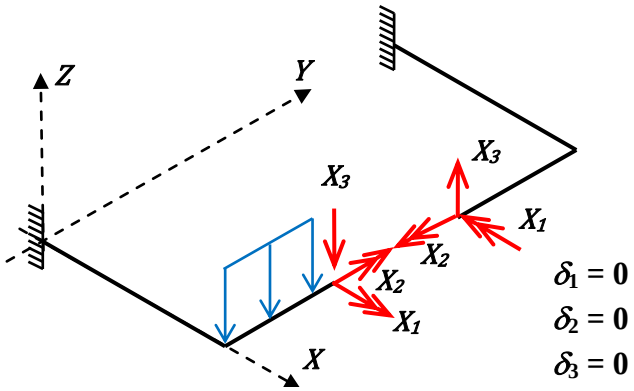


Figura 2.100: Sistema principal e hiperestáticos da grelha da Figura 2.99

Aplicando o princípio da superposição dos efeitos ao sistema principal mostrado na Figura 2.100, obtém-se:

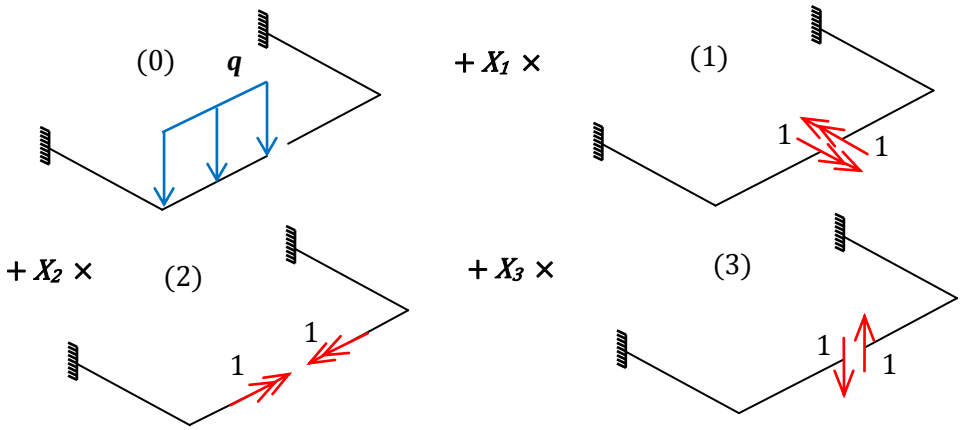


Figura 2.101: Superposição de efeitos aplicado ao sistema principal da grelha mostrado na Figura 2.100

Efetuando-se a superposição das forças aplicadas ao sistema principal, mostradas na Figura 2.101, e aplicando-se as condições de compatibilidade de deslocamentos, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = 0 \quad (2.149)$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = 0$$
$$\delta_3 = \delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = 0$$

Para a determinação dos deslocamentos generalizados, δ_{ij}, é necessário traçar os diagramas de momentos fletor e torçor causados pela ação do carregamento externo (0) e pela ação de forças ou momentos unitários na direção dos hiperestáticos 1, 2 e 3, conforme mostrado na Figura 2.102, Figura 2.103, Figura 2.104 e Figura 2.105, respectivamente.

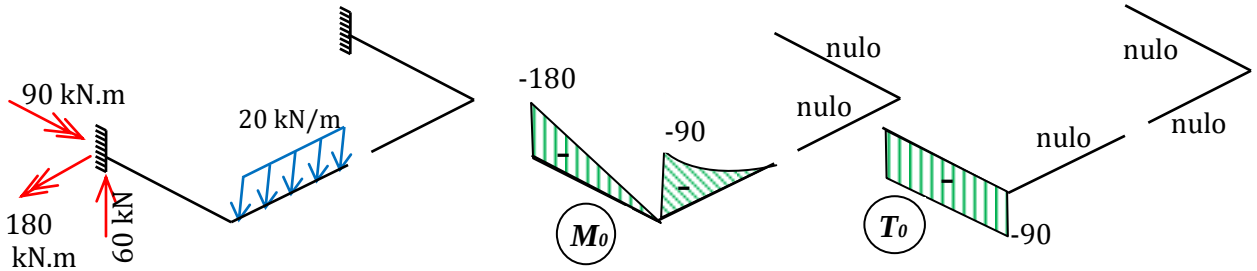


Figura 2.102: Reações de apoio e diagrama de esforços no sistema principal devido à ação do carregamento externo (0)

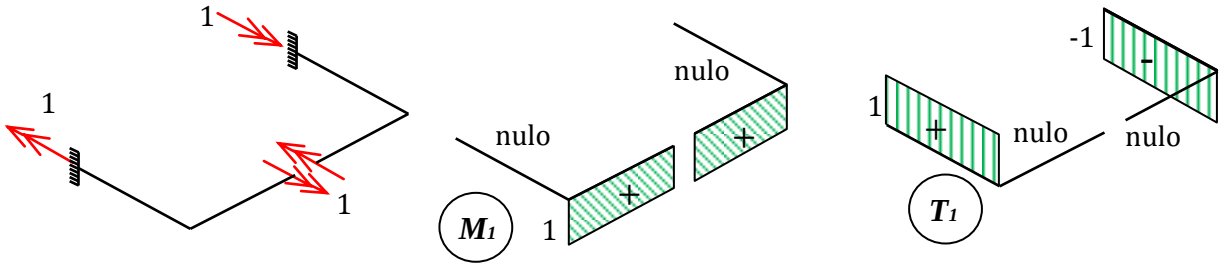


Figura 2.103: Reações de apoio e diagrama de esforços no sistema principal devido à aplicação de momento unitário na direção do hiperestático 1

Observa-se que a aplicação de um binário conjugado simétrico $\overset{1}{\curvearrowleft}\overset{1}{\curvearrowright}$ no eixo de simetria da grelha resulta em reações de apoio simétricas e em diagrama de momento fletor (*M*) simétrico e de momento torçor (*T*) antissimétrico (Figura 2.103). Por outro lado, a aplicação de esforços antissimétricos no eixo de simetria da grelha, sejam esforços de torção, como o mostrado na Figura 2.104, sejam esforços cortantes, como os da Figura

2.105, resultam em reações de apoio antissimétricas e em diagrama de momento fletor (*M*) antissimétrico e de momento torçor (*T*) simétrico.

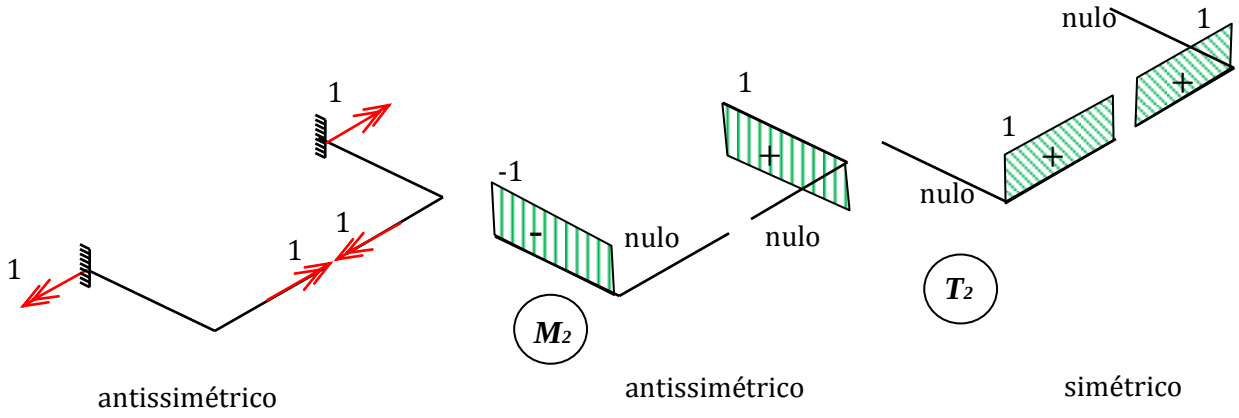


Figura 2.104: Reações de apoio e diagrama de esforços no sistema principal devido à aplicação de momento unitário na direção do hiperestático 2.

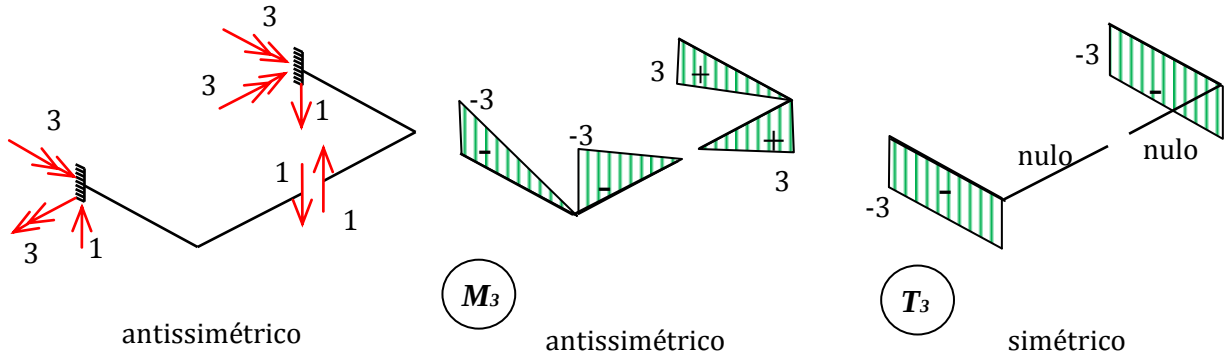


Figura 2.105: Reações de apoio e diagrama de esforços no sistema principal devido à aplicação de forças unitárias na direção do hiperestático 3.

Para a determinação dos esforços hiperestáticos generalizados devem-se calcular os deslocamentos generalizados por meio da seguinte equação:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\left[\int_0^{l_k} \frac{M_i M_j}{EI}\,dx_k + \int_0^{l_k} \frac{T_i T_j}{GJ_O}\,dx_k\right] \qquad (2.150)$$

a qual pode ser reescrita, inserindo-se o valor da rigidez à torção em função do valor da rigidez à flexão $\left(EI = 1{,}5 \cdot GJ_o \therefore \frac{1}{GJ_o} = \frac{1{,}5}{EI}\right)$ e colocando-se *EI* em evidência, uma vez que todas as barras têm a mesma seção transversal e rigidez constante ao longo do eixo.

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\left[\int_0^{l_k} \frac{M_i M_j}{EI}\,dx_k + 1{,}5.\int_0^{l_k} \frac{T_i T_j}{EI}\,dx_k\right] = \frac{1}{EI}\sum_{k=1}^{3}\left[\int_0^{l_k} M_i M_j\,dx_k + 1{,}5.\int_0^{l_k} T_i T_j\,dx_k\right] \qquad (2.151)$$

Na obtenção dos deslocamentos generalizados pela equação (2.151) acima, pode-se efetuar o cálculo das integrais do produto de duas funções utilizando-se a tabela de Kurt-Bayer. Para o cálculo de $\delta_{10,}$ o resultado das combinações de momento fletor está mostrado na Tabela 2.21 e das combinações de momento torçor na Tabela 2.22.

Tabela 2.21: Combinação dos esforços M_1 e M_0 para cálculo de δ_{10}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
nulo -180 + l_1 = 3m	1 + nulo -90 - nulo tangente horizontal (cortante nulo) l_2 /2 = 3m l_2 /2 = 3m	nulo nulo l_3 = 3m
$\int_{l_1} M_1 \cdot M_0\,dx_1 = 0$	$\int_{l_2} M_1 \cdot M_0\,dx_2 = \frac{1}{3}\cdot(3m)1\cdot(-90)+0 = -90$	$\int_{l_3} M_1 \cdot M_0\,dx_3 = 0$

Tabela 2.22: Combinação dos esforços T_1 e T_0 para cálculo de δ_{10}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
1 + -90 - l_1 = 3m	nulo nulo nulo nulo l_2 /2 = 3m l_2 /2 = 3m	- -1 nulo l_3 = 3m
$\int_{l_1} T_1 \cdot T_0\,dx_1 = (3m)\cdot 1\cdot(-90) = -270$	$\int_{l_2} T_1 \cdot T_0\,dx_2 = 0$	$\int_{l_3} T_1 \cdot T_0\,dx_3 = 0$

A partir dos resultados das Tabelas 2.21 e 2.22 obtém-se então:

$$EI\cdot\delta_{10} = -90 + (-270\times 1{,}5) = -495$$

Para o cálculo de $\delta_{20,}$ o resultado das combinações de momento fletor está mostrado na Tabela 2.23 e das combinações de momento torçor na Tabela 2.24.

Tabela 2.23: Combinação dos esforços M_2 e M_0 para cálculo de δ_{20}

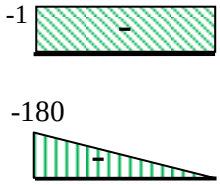
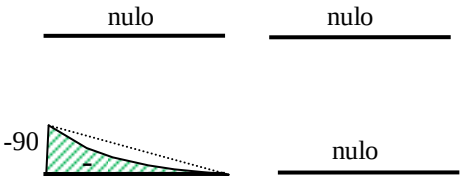
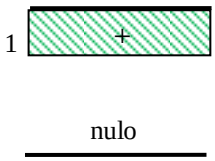
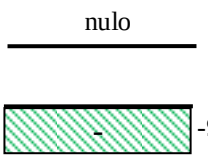
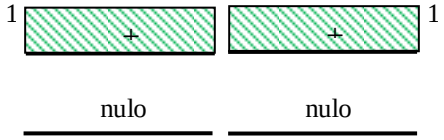
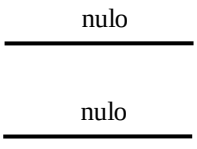
Barra 1	Barra 2	Barra 3
 $l_1 = 3\text{m}$	 $l_2/2 = 3\text{m}$ $l_2/2 = 3\text{m}$	 $l_3 = 3\text{m}$
$\int_{l_1} M_2 \cdot M_0 \, dx_1 =$ $\frac{1}{2} \cdot (3m) \cdot (-1) \cdot (-180) = 270$	$\int_{l_2} M_2 \cdot M_0 \, dx_2 = 0$	$\int_{l_3} M_2 \cdot M_0 \, dx_3 = 0$

Tabela 2.24: Combinação dos esforços T_2 e T_0 para cálculo de δ_{20}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
 $l_1 = 3\text{m}$	 $l_2/2 = 3\text{m}$ $l_2/2 = 3\text{m}$	 $l_3 = 3\text{m}$
$\int_{l_1} T_2 \cdot T_0 \, dx_1 = 0$	$\int_{l_2} T_2 \cdot T_0 \, dx_2 = 0$	$\int_{l_3} T_2 \cdot T_0 \, dx_3 = 0$

A partir dos resultados das Tabelas 2.23 e 2.24 vem:

$$EI \cdot \delta_{20} = 270 + 0 = 270$$

Para o cálculo de δ_{30}, o resultado das combinações de momento fletor está mostrado na Tabela 2.25 e das combinações de momento torçor na Tabela 2.26.

Tabela 2.25: Combinação dos esforços M_3 e M_0 para cálculo de δ_{30}

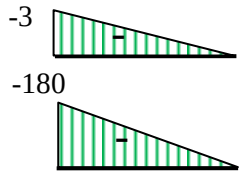
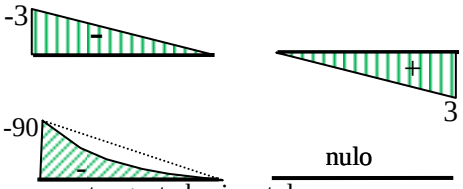
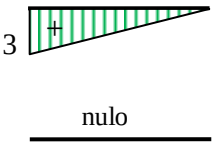
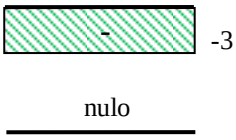
Barra 1	Barra 2	Barra 3
 $l_1 = 3\text{m}$	 $l_2/2 = 3\text{m}$ $l_2/2 = 3\text{m}$	 $l_3 = 3\text{m}$
$\int_{l_1} M_3 \cdot M_0 \, dx_1 =$ $\frac{1}{3}(3m)\cdot(-3)\cdot(-180) = 540$	$\int_{l_2} M_3 \cdot M_0 \, dx_2 = \frac{1}{4}\cdot(3m)(-3).(-90) + 0 = 202{,}5$	$\int_{l_3} M_3 \cdot M_0 \, dx_3 = 0$

Tabela 2.26: Combinação dos esforços T_3 e T_0 para cálculo de δ_{30}

Barra 1	Barra 2	Barra 3
 $l_1 = 3\text{m}$	 $l_2/2 = 3\text{m}$ $l_2/2 = 3\text{m}$	 $l_3 = 3\text{m}$
$\int_{l_1} T_3 \cdot T_0 \, dx_1 = (3m)\cdot(-3)\cdot(-90) = 810$	$\int_{l_2} T_3 \cdot T_0 \, dx_2 = 0$	$\int_{l_3} T_3 \cdot T_0 \, dx_3 = 0$

A partir dos resultados das Tabelas 2.25 e 2.26 vem:

$$EI \cdot \delta_{30} = (540 + 202{,}5) + (810 \times 1{,}5) = 1957{,}5$$

Para o cálculo dos demais deslocamentos generalizados procede-se analogamente, mostrando-se abaixo apenas os resultados finais. Pode-se tirar partido da simetria, lembrando que o produto de um diagrama simétrico por um antissimético (em que o eixo de simetria passa pelo meio da estrutura) é nulo e também que no produto de dois diagramas simétricos (ou de dois diagramas antissimétricos) pode-se calcular o produto para metade da estrutura e multiplicar o resultado por 2. Assim obtém-se:

$$\begin{matrix}\int M_1 \cdot M_2\, dx = 0 \quad (sim. \times antissim.) \\ \int T_1 \cdot T_2\, dx = 0 \quad (antisssim. \times sim.)\end{matrix} \Rightarrow \delta_{12} = 0$$

$$\begin{matrix}\int M_1 \cdot M_3\, dx = 0 \quad (sim. \times antissim.) \\ \int T_1 \cdot T_3\, dx = 0 \quad (antisssim. \times sim.)\end{matrix} \Rightarrow \delta_{13} = 0$$

$$\int M_2 \cdot M_3\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2}[(3m)(1)(3)] = 9$$

$$\int T_2 \cdot T_3\, dx = 0$$

$$\int M_1 \cdot M_1\, dx = 2 \cdot [(3m)(1)(1)] = 6$$

$$\int T_1 \cdot T_1\, dx = 2 \cdot [(3m)(1)(1)] = 6$$

$$\int M_2 \cdot M_2\, dx = 2.[(3m).(1).(1)] = 6$$

$$\int T_2 \cdot T_2\, dx = 2.[(3m).(1).(1)] = 6$$

$$\int M_3 \cdot M_3\, dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{3}(3m)(3)(3) + \frac{1}{3}(3m)(3)(3)\right] = 36$$

$$\int T_3 \cdot T_3\, dx = 2 \cdot [(3m)(3)(3)] = 54$$

Introduzindo-se os resultados obtidos acima na expressão (2.151), obtêm-se os coeficientes δ_{ij} da matriz de flexibilidade da estrutura multiplicados pela rigidez *EI*, lembrando que a matriz de flexibilidade é simétrica, conforme já visto anteriormente:

$$EI \cdot \delta_{11} = 6 + (6 \times 1{,}5) = 15$$

$$EI \cdot \delta_{12} = 0 = EI \cdot \delta_{21}$$

$$EI \cdot \delta_{13} = 0 = EI \cdot \delta_{31}$$

$$EI \cdot \delta_{22} = 6 + (6 \cdot 1{,}5) = 15$$

$$EI \cdot \delta_{23} = 9 + 0 = 9 = EI \cdot \delta_{32}$$

$$EI \cdot \delta_{33} = 36 + (54 \times 1{,}5) = 117$$

Substituindo-se os deslocamentos generalizados no sistema de equações (2.149), obtém-se:

$$\begin{matrix}15 \cdot X_1 + 0 + 0 = 495 \\ 0 + 15 \cdot X_2 + 9 \cdot X_3 = -270 \\ 0 + 9 \cdot X_2 + 117 X_3 = -1957{,}5\end{matrix} \qquad (2.152)$$

Resolvendo-se este sistema de equações (2.152) obtêm-se as incógnitas, que são os esforços hiperestáticos (esforços internos adjacentes à seção de corte, no eixo de simetria da grelha, ver Figura 2.100):

$$X_1 = +33\ kN \cdot m \qquad (2.153)$$
$$X_2 = -8{,}35\ kN \cdot m$$
$$X_3 = -16{,}09\ kN$$

As reações de apoio finais podem ser encontradas por superposição de efeitos (ver Figura 2.106):

$$R = R_0 + R_1 X_1 + R_2 X_2 + R_3 X_3 \qquad (2.154)$$

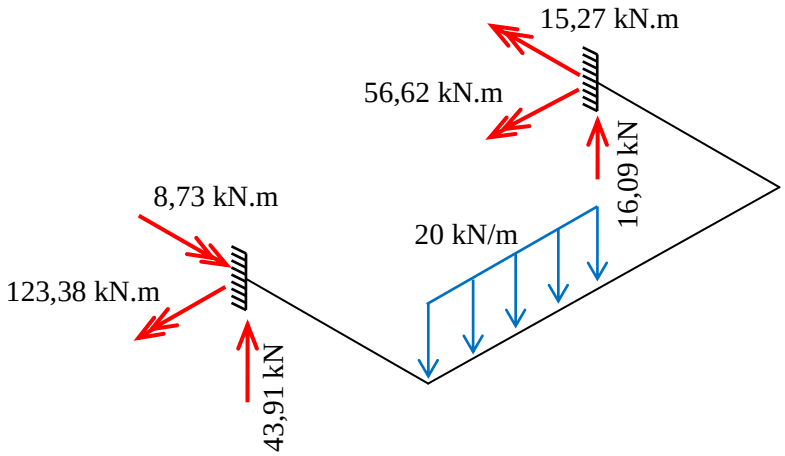


Figura 2.106: Reações de apoio finais da grelha hiperestática

Analogamente, os esforços finais podem ser encontrados fazendo-se:

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 \qquad (2.155)$$

$$V = V_0 + V_1 X_1 + V_2 X_2 + V_3 X_3 \qquad (2.156)$$

$$T = T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2 + T_3 X_3 \qquad (2.157)$$

Os diagramas dos esforços finais estão mostrados nas figuras a seguir.

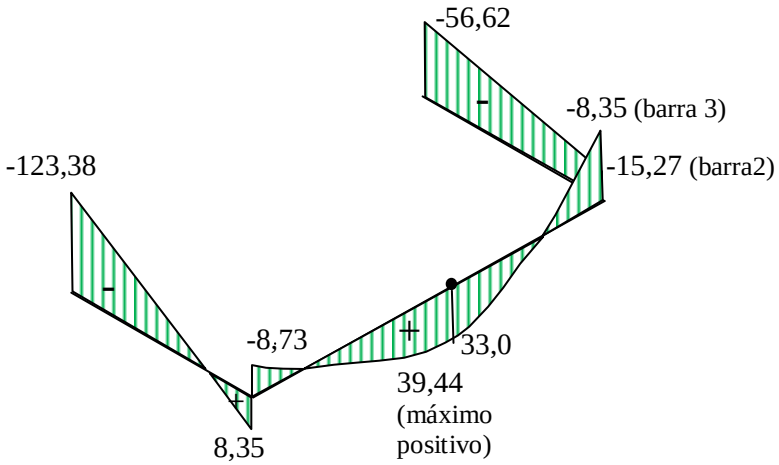


Figura 2.107: Diagrama de momento fletor da grelha (kN.m)

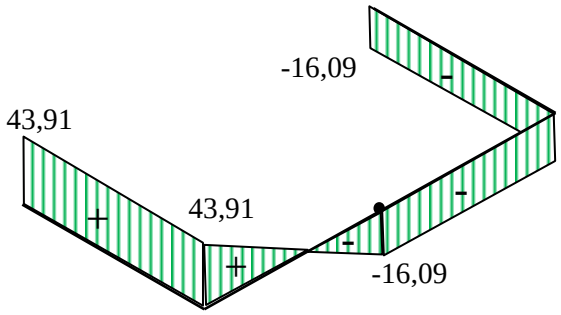


Figura 2.108: Diagrama de esforço cortante da grelha (kN)

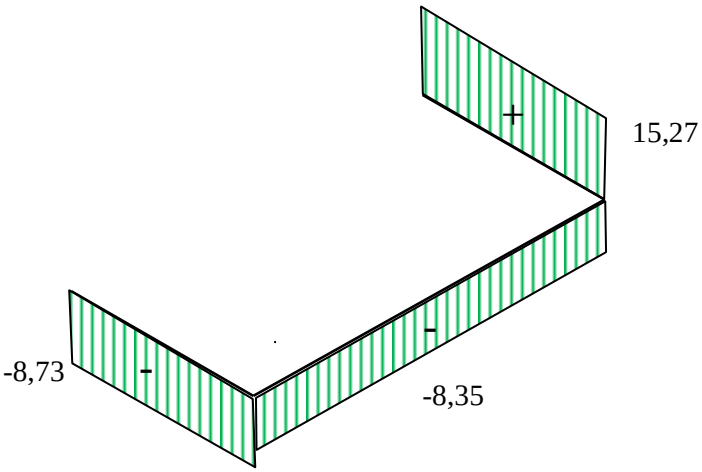


Figura 2.109: Diagrama de momento torçor da grelha (kN.m)

2.4.2. Exemplo 2 – Grelha simétrica com carregamento simétrico

Seja a grelha mostrada na Figura 2.110, cujas barras têm seção transversal constante. Trata-se de uma estrutura simétrica submetida a um carregamento simétrico em relação a seu eixo de simetria. Inicialmente esta grelha seria classificada como três vezes hiperestática ($g_e = r - e = 6 - 3 = 3$). No entanto, tirando-se proveito da simetria e cortando-se a barra 2 da grelha em seu eixo de simetria, esta passa a ser classificada como uma vez hiperestática, pois ao invés de três esforços internos – fletor, torçor e cortante (M, T, e V ou X_1, X_2 e X_3) que surgem nas seções adjacentes ao corte, conforme mostra o sistema principal da Figura 2.111, tem-se apenas um esforço, o momento fletor (X_1), tendo em vista que os esforços de torção e cortante serão nulos ($X_2 = X_3 = 0$). Isto porque, devido à simetria do carregamento externo, o diagrama M_0 é simétrico e T_0 é antissimétrico, enquanto que a ação unitária na direção dos hiperestáticos 2 e 3 resulta em diagramas M_2 e M_3 antissimétricos e diagramas T_2 e T_3 simétricos, o que implica em $\delta_{20} = \delta_{30} = 0$ (ver equação 2.150) e, portanto, do sistema de equações de compatibilidade de deslocamentos (2.149) obtém-se $X_2 = X_3 = 0$.

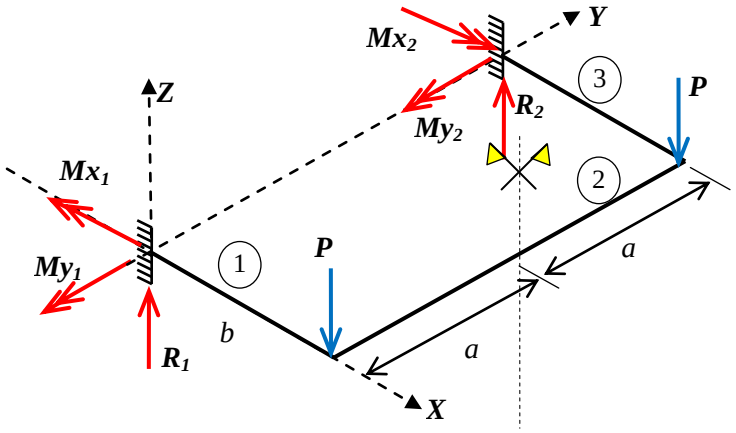


Figura 2.110: Grelha simétrica com carregamento simétrico

Portanto, tirando-se proveito da simetria, pode-se reduzir a hiperestaticidade da estrutura e se trabalhar diretamente com o sistema principal mostrado na Figura 2.112, de uma grelha uma vez hiperestática.

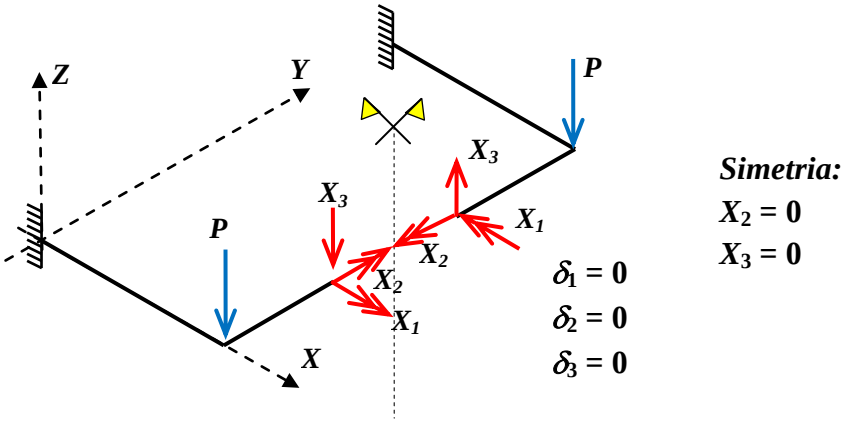


Figura 2.111: Sistema principal da grelha simétrica com carregamento simétrico

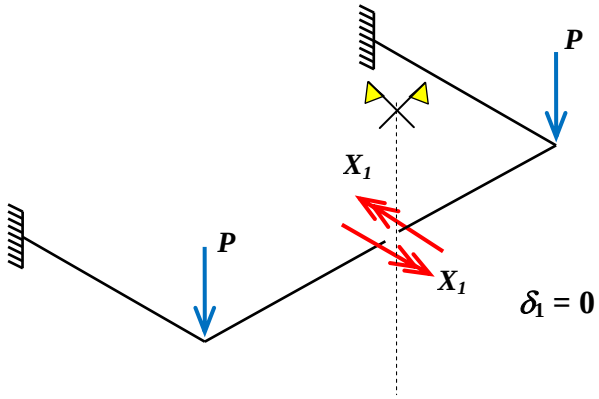


Figura 2.112: Sistema principal final da grelha simétrica com carregamento simétrico tirando proveito da simetria

2.4.3. Exemplo 3 – Grelha simétrica com carregamento antissimétrico

Seja agora a grelha mostrada na Figura 2.113, cujas barras têm seção transversal constante. Trata-se de uma estrutura simétrica submetida a um carregamento antissimétrico em relação a seu eixo de simetria. Inicialmente esta grelha seria classificada como três vezes hiperestática ($g_e = r - e = 6 - 3 = 3$). No entanto, tirando-se proveito da simetria e cortando-se a barra 2 da grelha em seu eixo de simetria, esta passa a ser classificada como duas vezes hiperestática, pois ao invés de três esforços internos – fletor, torçor e cortante (M, T, e V ou X_1, X_2 e X_3) que surgem nas seções adjacentes ao corte, conforme mostra o

sistema principal da Figura 2.114, tem-se apenas dois esforços, momento torçor (X_2) e esforço cortante (X_3), tendo em vista que o momento fletor (X_1) será nulo. Isto é devido à antissimetria do carregamento externo, que resulta em diagrama M_0 antissimétrico e em diagrama T_0 simétrico, enquanto que a ação unitária na direção do hiperestático 1 resulta em diagrama M_1 simétrico e diagrama T_1 antissimétrico, o que implica em $\delta_{10} = 0$ (ver equação 2.150) e, portanto, do sistema de equações de compatibilidade de deslocamentos (2.149) obtém-se $X_1 = 0$.

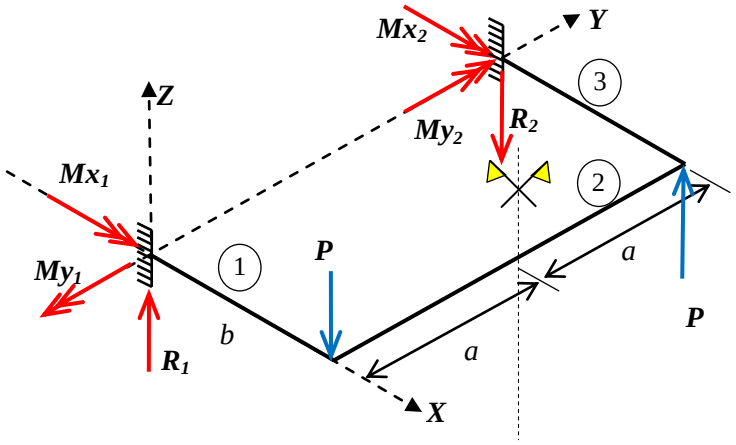


Figura 2.113: Grelha simétrica com carregamento antissimétrico

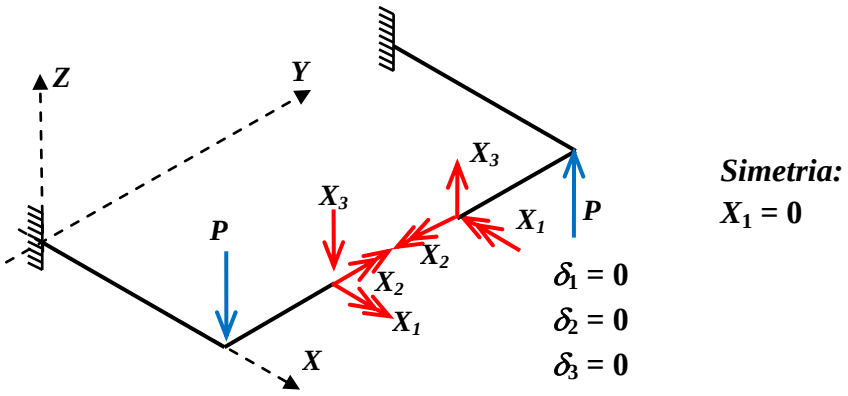


Figura 2.114: Sistema principal da grelha simétrica com carregamento antissimétrico

Assim, tirando-se proveito da simetria, pode-se reduzir a hiperestaticidade da estrutura e se trabalhar diretamente com o sistema principal mostrado na Figura 2.115, de uma grelha duas vezes hiperestática.

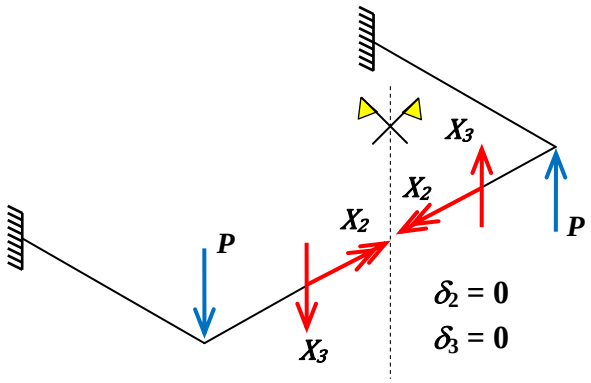


Figura 2.115: Sistema principal final da grelha simétrica com carregamento antissimétrico, tirando proveito da simetria

Conforme já foi visto anteriormente, para uma grelha simétrica submetida a um carregamento qualquer, como, por exemplo, a vista no Exemplo 1, item 2.4.1, pode-se sempre decompor um carregamento qualquer na soma de duas parcelas, uma simétrica e uma antissimétrica. Assim, ao invés de se trabalhar com uma estrutura três vezes hiperestática, tem-se a opção de se trabalhar com duas estruturas separadamente, uma com carregamento simétrico (uma vez hiperestática) e outra com carregamento antissimétrico (duas vezes hiperestática), somando-se ao final os resultados obtidos.

2.5. Estruturas submetidas a variação de temperatura

Uma estrutura submetida a uma variação de temperatura (um acréscimo ou decréscimo de temperatura ambiente em relação à temperatura da estrutura na ocasião em que foi construída) poderá se deformar, sendo a deformação proporcional ao coeficiente de dilatação térmica do material que a constitui. A variação de temperatura pode ser de três tipos: a) uniforme - quando todos os pontos da seção do elemento estrutural sofrerem a mesma variação de temperatura; b) gradiente – quando houver uma variação de temperatura linear ao longo da altura da seção do elemento estrutural; c) uma combinação dos tipos (a) e (b).

Não havendo restrição ou impedimento ao movimento causado por esta deformação não haverá tensões, e, consequentemente, não haverá esforços na estrutura decorrentes da variação de temperatura, caso das estruturas isostáticas em geral. Já no caso de estruturas hiperestáticas, em que haverá impedimento das deformações causadas por variação de temperatura, surgirão tensões e, consequentemente, esforços na estrutura. Apresenta-se inicialmente uma revisão de deformações causadas por variação de temperatura em estruturas isostáticas, no item 2.5.1, e, em seguida, esforços em estruturas hiperestáticas causados por variação de temperatura (item 2.5.2).

2.5.1 Estruturas isostáticas - deformações causadas por variação de temperatura

a) Variação uniforme

Seja uma barra fixa em uma extremidade e livre em outra, de material homogêneo, elástico-linear, comprimento l e seção transversal constante, conforme mostra a Figura 2.116. a qual foi construída a uma temperatura ambiente de T_g. Supondo que a temperatura externa atual é T_e, haverá uma variação de temperatura uniforme (a mesma em todos os pontos da seção transversal da barra) igual a $\Delta T = T_e - T_g$. A barra irá se deformar, sofrendo uma variação de comprimento Δl, sendo esta um alongamento no caso de variação de temperatura positiva, conforme admitido no desenho da Figura 2.116.

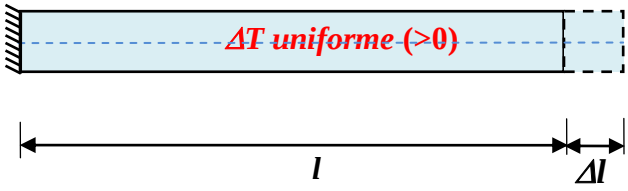


Figura 2.116: Barra fixa e livre submetida a variação uniforme de temperatura

Para calcular a variação de comprimento Δl, parte-se da deformação específica da barra, a qual é proporcional à variação de temperatura sofrida e ao coeficiente de dilatação térmica do material, α:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta T \quad \therefore \quad \Delta l = \alpha \cdot \Delta T.l \tag{2.158}$$

Esta é a deformação axial total da barra, e, de uma maneira geral, para se calcular a deformação axial *du* de um elemento infinitesimal *dx* de uma barra, conforme mostrado na Figura 2.117 abaixo, utilizam-se as equações:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \alpha \cdot \Delta T \text{ ou} \tag{2.159}$$

$$du = \alpha \cdot \Delta T.dx \tag{2.160}$$

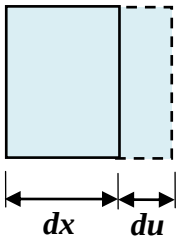


Figura 2.117: Deformação axial *du* de um elemento infinitesimal *dx*

Ressalta-se que, como a barra é isostática e não há impedimento de deslocamento horizontal ou axial (direção *x*), a barra irá se deformar mas NÃO HAVERÁ ESFORÇO AXIAL.

b) Gradiente

Admite-se agora que uma barra bi-apoiada de material homogêneo e elástico-linear, com seção transversal constante de altura igual a *h*, também construída a uma temperatura ambiente T_g, esteja submetida a um gradiente de temperatura, conforme ilustrado na Figura 2.118. A parte superior da barra está sob uma temperatura atual de T_s e, a inferior, sob a temperatura atual de T_i, de tal forma que haverá uma variação de temperatura linear ao longo da altura, sendo a variação igual a ΔT_s na parte superior, e, na parte inferior, igual a ΔT_i, admitidas iguais em módulo. Devido a este gradiente de temperatura a barra irá se deformar, curvando seu eixo, sendo que, no caso de uma variação de temperatura positiva na parte inferior e negativa na parte superior, as fibras inferiores da barra irão se distender e, as superiores, encurtarão, conforme ilustrado na Figura 2.118.

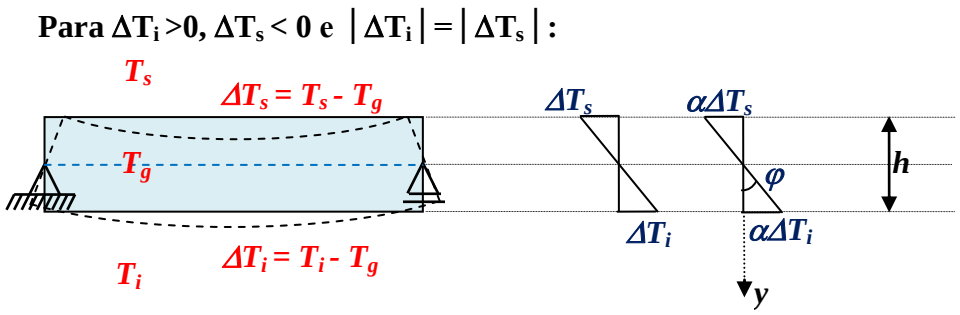


Figura 2.118: Barra bi-apoiada submetida a um gradiente de temperatura

Como a deformação específica na barra é diretamente proporcional à variação de temperatura (ver equação (2.158)), esta irá variar linearmente com a altura da seção (eixo y), conforme mostrado na Figura 2.118:

$$\varepsilon_i = \alpha \cdot \Delta T_i \quad ; \quad \varepsilon_s = \alpha \cdot \Delta T_s \tag{2.161}$$

$$\varphi \cong tg\varphi = \frac{\alpha \cdot \Delta T_i - \alpha \cdot \Delta T_s}{h} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \varphi . y$$

onde φ é a curvatura do eixo da barra, definida por:

$$\varphi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \cong \frac{d\theta}{dx} \tag{2.162}$$

em que ρ é o raio de curvatura para um elemento infinitesimal *dx*, e $d\theta$ é o ângulo formado entre as seções adjacentes a este elemento, após o encurvamento do eixo da barra (ver Figura 2.119). Portanto, pode-se calcular a deformação por flexão de um elemento infinitesimal de uma barra, causada por gradiente de temperatura, pela expressão:

$$d\theta = \varphi . dx = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx \tag{2.163}$$

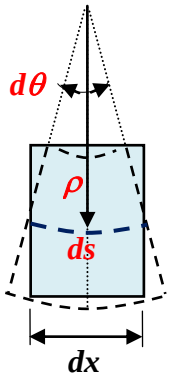


Figura 2.119: Deformação $d\theta$ de um elemento infinitesimal *dx* da viga bi-apoiada submetida a um gradiente de temperatura

Ressalta-se que, como a barra é isostática e não há impedimento de rotação em suas extremidades, a barra irá se deformar mas NÃO HAVERÁ ESFORÇO DE FLEXÃO.

c) Combinação dos casos (a) e (b)

Para o caso de uma barra submetida à combinação dos casos de temperatura vistos anteriormente: (a) variação uniforme + (b) gradiente, admitindo que a barra tenha comportamento linear pode-se aplicar superposição de efeitos, logo a deformação específica total da barra pode ser obtida somando-se a deformação axial, causada pela variação uniforme, com a deformação específica causada pelo gradiente de temperatura:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o + \varphi.y = \alpha \cdot \Delta T_o + \frac{\alpha.(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h}.y \qquad (2.164)$$

onde ΔT_o é a variação de temperatura atuando na altura do centróide da seção transversal (G), por onde passa o eixo longitudinal da barra. Para o caso de seção simétrica em relação a seu eixo horizontal, em que G está a meia altura da seção, tem-se que:

$$\Delta T_o = \frac{(\Delta T_i + \Delta T_s)}{2} \qquad (2.165)$$

Para este caso de combinação de variação uniforme mais gradiente de temperatura, que é o caso mais genérico, um elemento infinitesimal *dx* irá sofrer tanto deformação axial *du* (ver equação (2.160)) como deformação por flexão $d\theta$ (ver equação (2.163)), conforme ilustra a Figura 2.120.

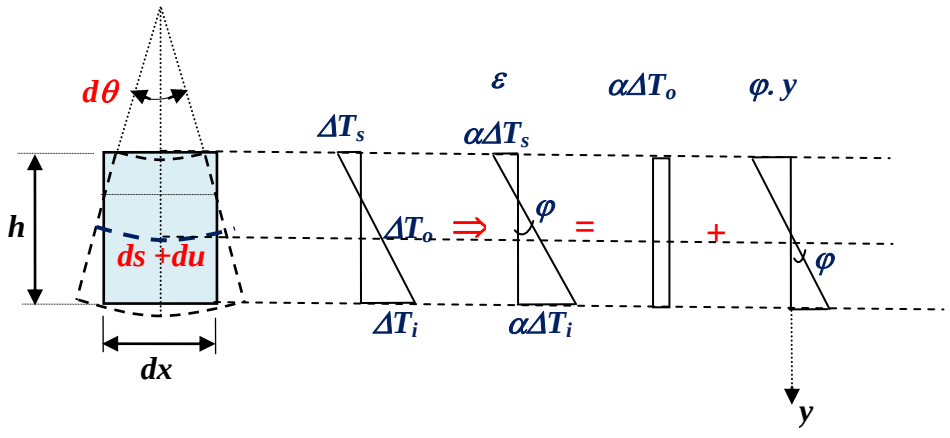
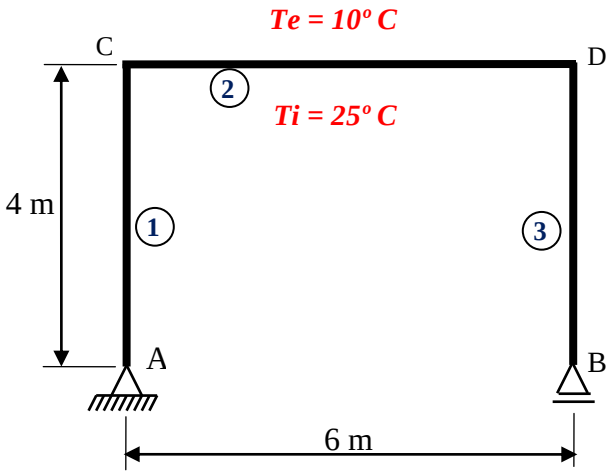


Figura 2.120: Elemento infinitesimal de uma barra submetida à combinação de variação uniforme mais gradiente de temperatura

Se as deformações na barra não forem impedidas não haverá esforços, conforme será visto no exemplo a seguir.

2.5.1.1. Exemplo: Pórtico Plano isostático submetido à variação de temperatura

Seja o pórtico plano ilustrado na Figura 2.121, formado por barras de mesma seção transversal, retangular (constante), constituídas de material homogêneo e elástico-linear. A geometria do pórtico e as propriedades do material estão mostradas na Figura 2.122. O pórtico plano foi construído à temperatura T_g = 15°C e encontra-se agora submetido a uma temperatura externa de T_e = 10º C e, internamente, a uma temperatura T_i = 25º C. Pede-se para calcular o deslocamento horizontal sofrido pelo apoio no ponto B, δ_B, causado pela variação de temperatura.



Temperatura ao ser construído:
T_g = 15°C

Módulo de Elasticidade:
E = 2,0 x 10^7 kN/m²

Coeficiente de dilatação térmica do material:
α = 10^{-5} /°C

Seção transversal retangular de todas as barras (1,2 e 3):
b = 20 cm; h = 50 cm

Figura 2.121: Pórtico plano isostático submetido a variação de temperatura

A partir da geometria da seção das barras encontram-se as propriedades geométricas e a rigidez das barras:

$A = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1\ m^2$ $\qquad$ $I = 0{,}2 \times (0{,}5)^3 / 12 = 0{,}0021 m^4$

$EA = 2 \times 10^6$ kN $\qquad$ $EI = 4{,}17 \times 10^4$ kN.m^2

Calculam-se em seguida as variações de temperatura nas barras do pórtico:

$\Delta T_e = 10 - 15 = -\ 5°C$ $\qquad$ (externa)

$\Delta T_i = 25 - 15 = +\ 10°C$ $\qquad$ (interna)

$\Delta T_o = (10 - 5)/2 = +\ 2{,}5°C$ $\qquad$ (centróide)

A partir destas variações, encontram-se as deformações específicas normais ao longo da altura das barras, conforme mostrado na Figura 2.122.

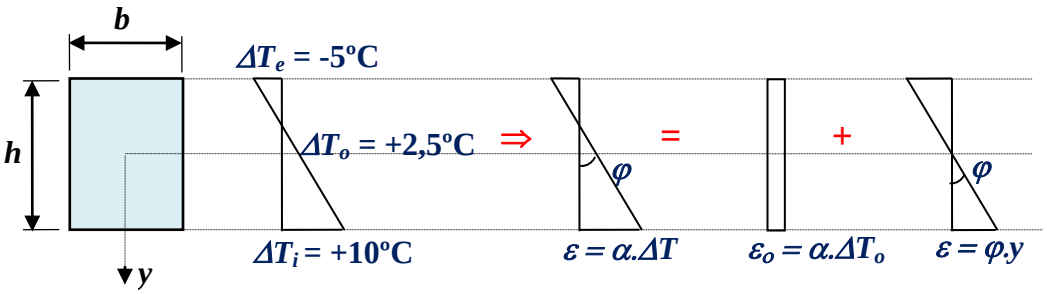


Figura 2.122: Deformações nas barras do pórtico devido a variação de temperatura

Para calcular o deslocamento horizontal do apoio B, utiliza-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, aplicando-se uma carga unitária horizontal no apoio B na estrutura virtual, cuja deformada é igual à deformada da estrutura real, conforme mostra a Figura 2.123.

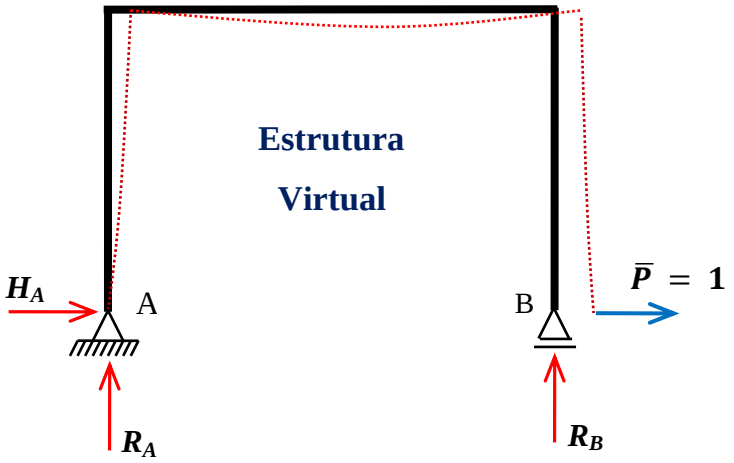


Figura 2.123: Estrutura virtual com deformada submetida a carga unitária

A partir das equações de equilíbrio da Estática obtêm-se as reações de apoio na estrutura virtual: $H_A = -1$ $R_A = R_B = 0$

E, a partir das reações de apoio, traçam-se os diagramas de esforço normal e momento fletor na estrutura virtual, mostrados na Figura 2.124.

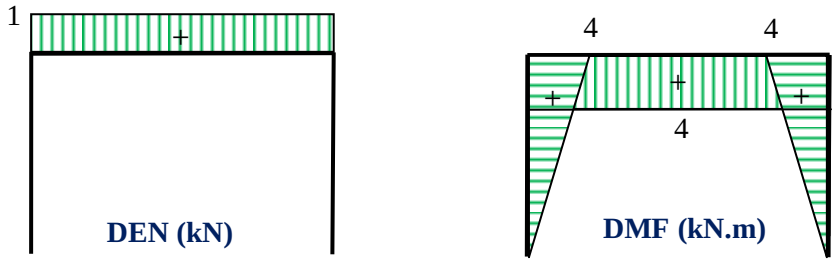


Figura 2.124: Diagramas de esforço normal e de momento fletor da estrutura virtual

Aplica-se em seguida o Princípio dos Trabalhos Virtuais, igualando-se na estrutura virtual o trabalho desenvolvido pelas forças externas ao desenvolvido pelas forças internas:

$$\overline{W_e} = 1.\delta_B = \overline{W_i} = \sum_{k=1}^{3}\left\{\int \overline{N}.d\overline{u} + \int \overline{M}.d\overline{\theta}\right\}$$

As deformações normal e de flexão na estrutura real, causadas pela variação de temperatura uniforme e gradiente, podem ser obtidas pelas equações (2.160) e (2.163), respectivamente,:

$du = \varepsilon_o \ . dx = \alpha.\ \Delta T_o.dx = 2{,}5.\alpha.dx$

$$\varphi = \frac{\alpha.(\Delta T_i - \Delta T_e)}{h} \quad \therefore \quad d\theta = \varphi\ .\ dx = \frac{\alpha.(10-(-5))}{0{,}5}.dx = \frac{15.\alpha}{0{,}5}.dx = 30.\ \alpha.dx$$

Como as deformações na estrutura virtual são iguais às deformações da estrutura real, a expressão de trabalho das forças internas na estrutura virtual fica sendo:

$$d\overline{u} = du = 2{,}5.\alpha.dx \quad ; \quad d\overline{\theta} = d\theta = 30.\alpha.dx \quad \Rightarrow$$

$$\overline{W_i} = \sum_{k=1}^{3}\left\{\int \overline{N}.du + \int \overline{M}.d\theta\right\} = \sum_{k=1}^{3}\left\{\int \overline{N}.2{,}5.\alpha.dx + \int \overline{M}.30.\alpha.dx\right\} =$$

$$\left\{2{,}5.\alpha \times \sum_{k=1}^{3}\left(\int \overline{N}.dx\right) + 30.\alpha \times \sum_{k=1}^{3}\left(\int \overline{M}.dx\right)\right\} \quad \therefore \quad \overline{W_i} = \quad 2{,}5.\alpha \times A_{\overline{N}} + 30.\alpha \times A_{\overline{M}}$$

onde $A_{\overline{N}}$ é a área total do diagrama de esforço normal e $A_{\overline{M}}$ a área total do diagrama de momento fletor na estrutura virtual.

Por fim, igualando-se o trabalho das forças externas ao das forças internas na estrutura virtual, obtém-se o deslocamento horizontal do apoio simples, ponto B:

$$\overline{W_e} = 1 \times \delta_B = \overline{W_i} = A_{\overline{N}} \times 2{,}5.\alpha + A_{\overline{M}} \times 30.\alpha \quad \therefore$$

$$\delta_B = A_{\overline{N}} \times 2{,}5.\alpha + A_{\overline{M}} \times 30.\alpha \quad \therefore$$

$$\delta_B = 6 \times 2{,}5 \times 10^{-5} + 40 \times 30 \times 10^{-5} = 1215 \times 10^{-5}\,\text{m} \quad \therefore \quad \delta_B = 1{,}215\,\text{cm}$$

Ressalta-se que o pórtico é isostático, logo se deforma mas **NÃO HÁ ESFORÇOS.**

2.5.2 Estruturas hiperestáticas – esforços causados por variação de temperatura

a) Variação uniforme

Seja agora uma barra bi-engastada de material elástico-linear, comprimento l e seção transversal constante, conforme mostra a Figura 2.125. Admitindo que a barra foi construída a uma temperatura ambiente de T_g, e que a temperatura externa atual é T_e, haverá uma variação de temperatura uniforme (a mesma em todos os pontos da seção transversal da barra) igual a $\Delta T = T_e - T_g$. Como a barra é hiperestática, sendo impedida de se deformar axialmente, surgirão reações de apoio horizontais, com sentido contrário à tendência de deformação, sendo estas proporcionais à deformação impedida, que por sua vez é proporcional à variação de temperatura sofrida e ao coeficiente de dilatação térmica, conforme já visto anteriormente, na equação (2.158):

$$R = \sigma_x.A = E.\varepsilon_x.A = E.\alpha \cdot \Delta T.A \qquad (2.166)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material e A a área da seção transversal da barra.

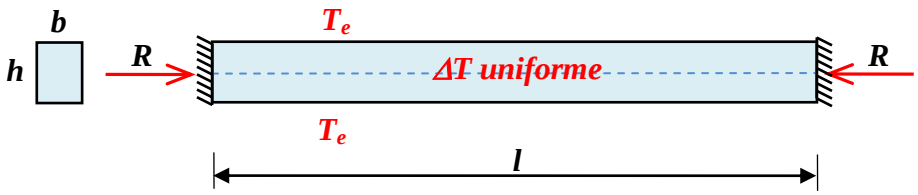


Figura 2.125: Barra bi-engastada submetida a variação uniforme de temperatura

Assim sendo a barra estará submetida a esforço axial, no caso constante ao longo de seu eixo, sendo que, para uma variação de temperatura positiva, $\Delta T > 0$, as reações de apoio têm o sentido indicado na Figura 2.125, ficando a barra submetida a esforço axial de compressão, constante ($N = -R$).

b) Gradiente

Seja agora uma barra bi-engastada de material homogêneo e elástico-linear, comprimento l e seção transversal constante com altura igual a h, construída a uma temperatura ambiente T_g, submetida a um gradiente de temperatura, conforme ilustrado na Figura 2.126. A parte superior da barra está sob uma temperatura atual de T_s e, a inferior, sob a temperatura atual de T_i, de tal forma que haverá uma variação de temperatura linear ao longo da altura, sendo a variação igual a ΔT_s na parte superior, e, na parte inferior, igual a ΔT_i, admitidas iguais

em módulo. Como a barra é hiperestática, com os engastes impedindo a tendência de rotação das extremidades da barra devido ao gradiente de temperatura, surgirão reações de apoio de momento proporcionais às deformações impedidas (ver equações (2.161) e (2.162)):

$$M = EI.\varphi. = EI.\frac{\alpha.(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} \qquad (2.167)$$

onde EI é a rigidez à flexão da barra, sendo E o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia da seção transversal da barra, em relação a seu eixo horizontal.

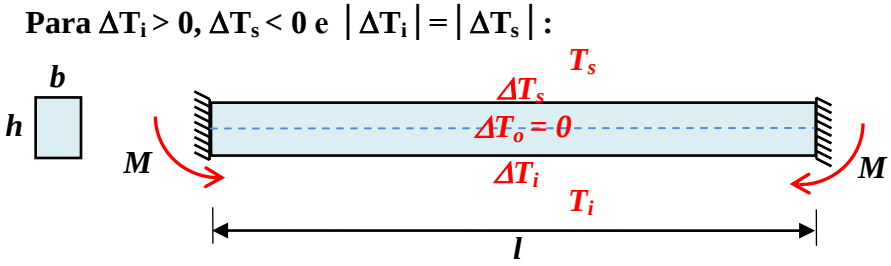


Figura 2.126: Barra bi-engastada submetida a gradiente de temperatura

Assim sendo a barra estará submetida a momento fletor, no caso constante ao longo de seu eixo. Para o caso de um gradiente de temperatura positivo ($\Delta T_i > \Delta T_s$) as reações de apoio terão o sentido indicado na Figura 2.126, contrário à tendência de roração das extremidades da barra, logo a barra ficará submetida a momento fletor negativo, segundo a convenção adotada, sendo constante ao longo da barra (-M).

c) Combinação dos casos (a) e (b)

Finalmente, seja a barra bi-engastada de material homogêneo e elástico-linear, de comprimento l e seção transversal constante com altura igual a h, construída a uma temperatura ambiente T_g, submetida agora tanto a uma variação de temperatura uniforme como a um gradiente de temperatura, conforme ilustrado na Figura 2.128. Admite-se que a variação de temperatura é linear ao longo da altura, sendo a variação igual a ΔT_s na parte superior, ΔT_i na parte inferior, e ΔT_o na altura do eixo da barra, que passa pelo centróide da seção. Observa-se que este caso corresponde à soma dos casos (a) e (b) vistos acima, logo, admitindo que a barra tenha comportamento linear, pode-se aplicar superposição de efeitos. Como a barra é hiperestática, com os engastes impedindo tanto a tendência de deformação axial, devido à variação uniforme de temperatura, como a de rotação das

extremidades da barra, devido ao gradiente de temperatura, surgirão reações de apoio tanto horizontais (*R*, ver equação (2.166)) como de momento (*M*, ver equação (2.167)), proporcionais às deformações impedidas, conforme mostra a Figura 2.127:

$$R = E.A.\alpha \cdot \Delta T \tag{2.168}$$

$$M = EI.\frac{\alpha.(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h}$$

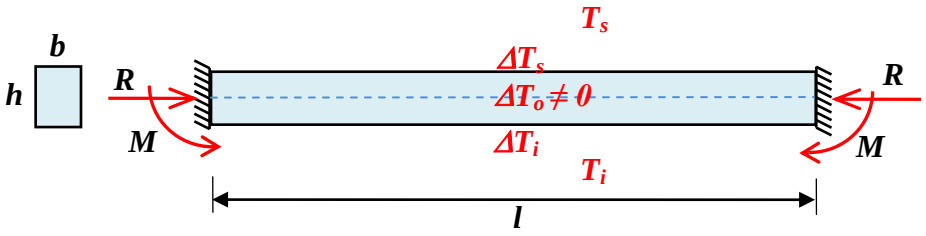
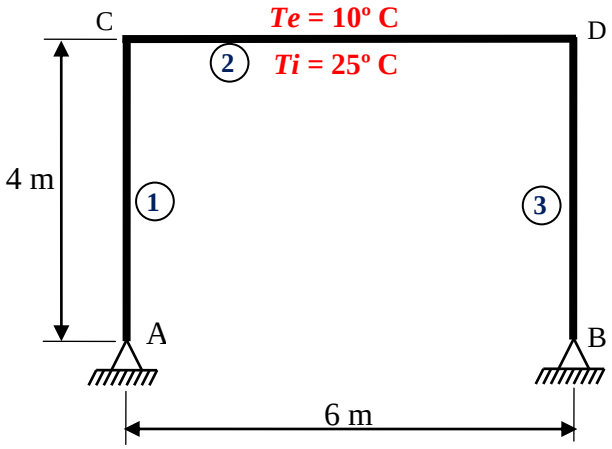


Figura 2.127: Barra bi-engastada submetida a variação uniforme e gradiente de temperatura

Os sentidos das reações na Figura 2.127 correspondem a sentidos positivos da variação uniforme de temperatura ($\Delta T_o > 0$) e do gradiente de temperatura ($\Delta T_i - \Delta T_s > 0$). Assim sendo surgirá tanto esforço axial como de momento fletor na barra, sendo constantes ao longo de seu eixo.

2.5.2.1. Exemplo: Pórtico Plano hiperestático submetido a variação de temperatura

Seja agora o pórtico plano ilustrado na Figura 2.128, formado por barras de seção transversal constante, retangular, constituídas de material homogêneo e elástico-linear. A geometria do pórtico e as propriedades do material são as mesmas do exemplo visto no item 2.5.1.1 (pórtico isostático). O pórtico plano foi construído à temperatura T_g = 15°C e encontra-se submetido a uma temperatura externa de T_e = 10º C e, internamente, a uma temperatura T_1 = 25º C, portanto a variação de temperatura será a mesma sofrida pelo pórtico isostático do exemplo anterior (item 2.5.1.1). Pede-se para calcular as reações de apoio e os esforços no pórtico plano causados pela variação de temperatura.



Temperatura ao ser construído:
T_g **= 15°C**

Módulo de Elasticidade:
E **= 2,0 x 107 kN/m²**

Coeficiente de dilatação térmica do material:
α **= 10^{-5} /°C**

Seção transversal retangular de todas as barras (1,2 e 3):
b **= 20 cm;** h **= 50cm**

Figura 2.128: Pórtico hiperestático submetido a variação de temperatura

Da geometria da seção das barras encontram-se as propriedades geométricas e a rigidez das barras, conforme já calculado no exemplo anterior:

$A = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1\ m^2$ $\qquad$ $I = 0{,}2 \times (0{,}5)^3 / 12 = 0{,}0021 m^4$

$EA = 2 \times 10^6$ kN $\qquad$ $EI = 4{,}17 \times 10^4$ kN.m^2

E as variações de temperatura nas barras do pórtico também são as mesmas do exemplo anterior:

$\Delta T_e = 10 - 15 = -\ 5°C$ $\qquad$ (externa)

$\Delta T_i = 25 - 15 = +\ 10°C$ $\qquad$ (interna)

$\Delta T_o = (10 - 5)/2 = +\ 2{,}5°C$ $\qquad$ (centróide)

O pórtico plano é uma vez hiperestático (externamente), tendo em vista que o número de reações é igual a 4 e o número de equações da Estática igual a 3 ($g_e = r - e = 4 - 3 = 1$). Utilizando-se o Método das Forças para resolução do pórtico, libera-se um dos vínculos excedentes para transformar a estrutura em uma estrutura isostática equivalente (sistema principal) e aplica-se a condição de compatibilidade de deslocamentos. No caso optou-se por liberar o vínculo horizontal do apoio B à direita, substituindo-o pela reação de apoio correspondente (X_1) e impondo a condição de deslocamento horizontal nulo em B ($\delta_1 = 0$), conforme indicado na Figura 2.129:

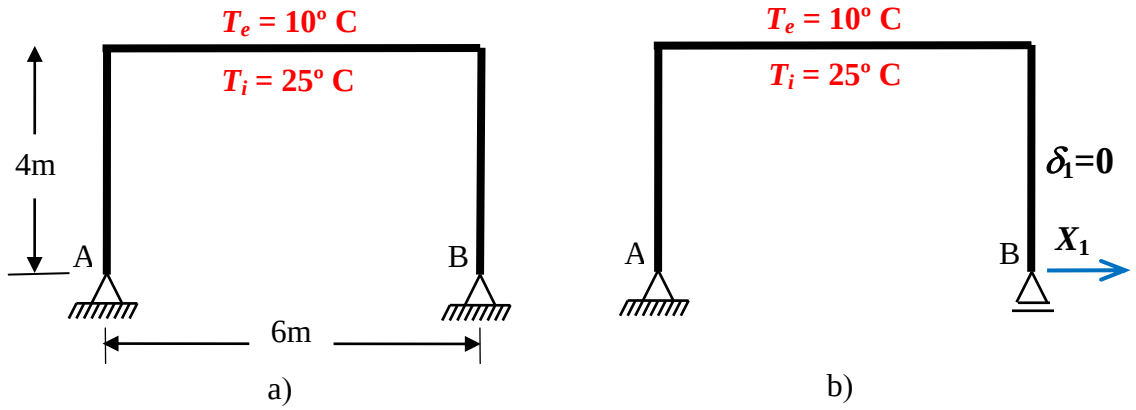


Figura 2.129: a) pórtico submetido a variação de temperatura; b) sistema principal e hiperestático

Em seguida, admitindo-se que o pórtico tenha comportamento linear, aplica-se o Princípio de Superposição de Efeitos, conforme ilustrado na Figura 2.130:

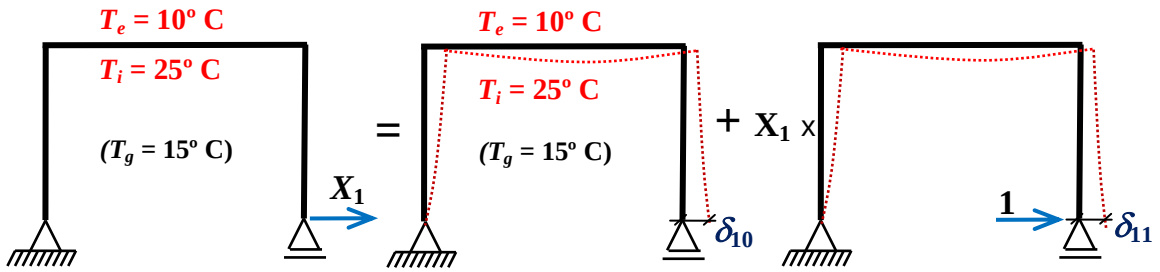


Figura 2.130: Superposição de efeitos causados pelo carregamento externo e pela ação do hiperestático X_1

Portanto, conforme visto anteriormente para estruturas com grau de hiperestaticidade igual a 1, a equação de compatibilidade de deslocamento pode ser escrita sob a forma:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1\delta_{11} = 0 \qquad (2.169)$$

onde

- δ_{10} representa o deslocamento na direção 1 (deslocamento horizontal do apoio B) causado pela variação de temperatura, o qual já foi calculado no exemplo anterior (item 2.5.1.1): δ_{10} = 1,215 cm = 12,15 x 10^{-3} m; e

- δ_{11} representa o deslocamento na direção 1 (deslocamento horizontal do apoio B) causado por uma força unitária na direção e ponto de aplicação de X_1. Este deslocamento pode ser calculado pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, pela equação:

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^{3}\left(\int_0^{l_k} \frac{M_1 M_1}{EI} dx + \int_0^{l_k} \frac{N_1 N_1}{EA} dx \right), \qquad (2.170)$$

em que considerou-se o efeito da deformação por flexão e de esforço axial, mas desprezou-se o efeito da deformação por cisalhamento (supondo que as barras são longas em relação à altura da seção). Para o cálculo deste deslocamento δ_{11} deve-se calcular os esforços normal N_1 e de momento fletor M_1, causados pela carga unitária na direção X_1, conforme mostra a Figura 2.131:

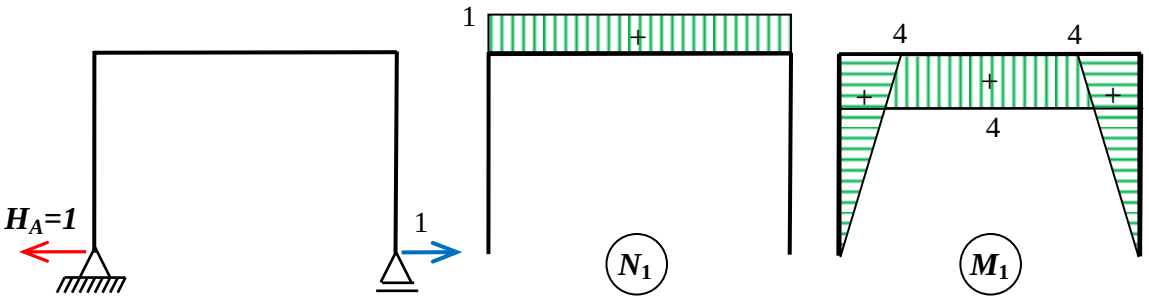


Figura 2.131: Diagramas de esforço normal e momento fletor devido a carga unitária

As integrais contidas na equação (2.170) podem ser calculadas com o auxílio da tabela de Kurt-Bayer (ver Figura 2.133):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}(1.1.6\,\text{m}) + \frac{1}{EI}\left(2 \times \frac{1}{3}.4.4.4\,\text{m} + 4.4.6\,\text{m}\right) = 33{,}31 \times 10^{-3}\,\text{m/kN}$$

Inserindo-se os valores de δ_{10} e δ_{11} na equação de compatibilidade (2.169), obtém-se o valor da reação hiperestática X_1:

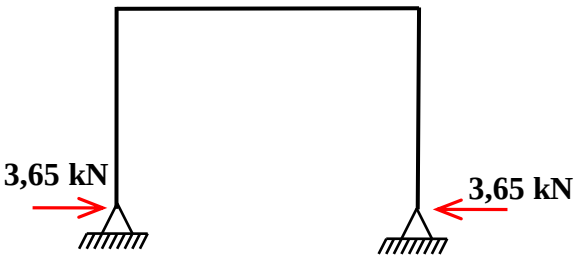
$$12{,}15 \cdot 10^{-3} + 33{,}31 \cdot 10^{-3} \cdot X_1 = 0 \quad \therefore$$

$$X_1 = -0{,}365\,kN$$

As demais reações de apoio e os esforços finais nas barras podem ser calculados empregando-se o princípio da superposição dos efeitos, conforme mostrado na Figura 2.132. Observa-se assim que em um pórtico plano hiperestático submetido a variação de temperatura HAVERÁ ESFORÇOS, conforme mencioando anteriormente.

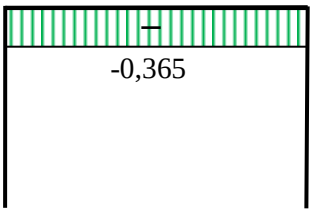
Reações Finais:

$$R = R_0 + X_1 \cdot R_1$$



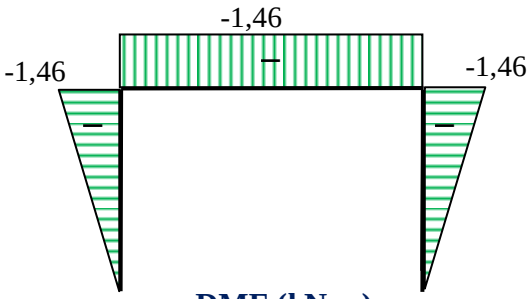
Diagramas Finais:

$$N = N_0 + X_1 \cdot N_1$$



DEN (kN)

$$M = M_0 + X_1 \cdot M_1$$



DMF (kN.m)

Figura 2.132: Reações de apoio e diagramas finais do pórtico hiperestático

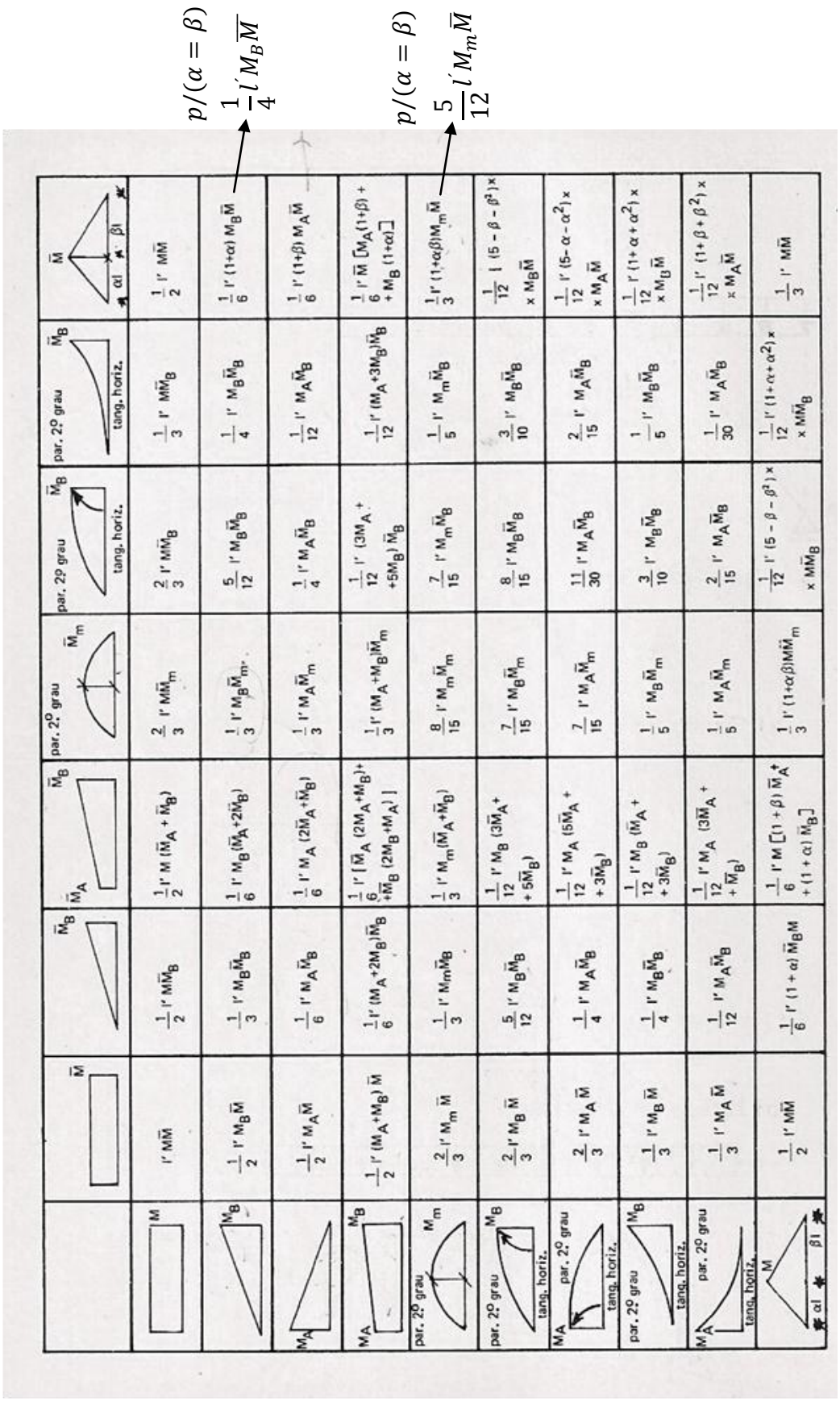
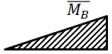
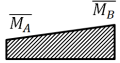
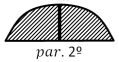
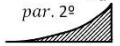
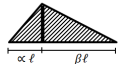
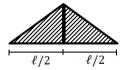
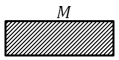
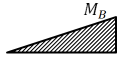
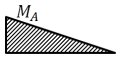
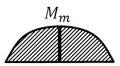
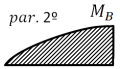
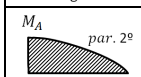
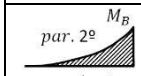
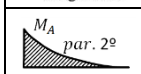
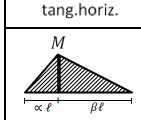


Figura 2.133: Tabela de Kurt-Bayer adaptada de Sussekind (1994)

Tabela de Kurt-Bayer

(adaptada de Sussekind, 1994)

								
	$\ell M\overline{M}$	$\frac{1}{2}\ell M\overline{M_B}$	$\frac{1}{2}\ell M(\overline{M_A}+\overline{M_B})$	$\frac{2}{3}\ell M\overline{M_m}$	$\frac{2}{3}\ell M\overline{M_B}$	$\frac{1}{3}\ell M\overline{M_B}$	$\frac{1}{2}\ell M\overline{M}$	$\frac{1}{2}\ell M\overline{M}$
	$\frac{1}{2}\ell M_B\overline{M}$	$\frac{1}{3}\ell M_B\overline{M_B}$	$\frac{1}{6}\ell M_B(\overline{M_A}+2\overline{M_B})$	$\frac{1}{3}\ell M_B\overline{M_m}$	$\frac{5}{12}\ell M_B\overline{M_B}$	$\frac{1}{4}\ell M_B\overline{M_B}$	$\frac{1}{6}\ell(1+\alpha)M_B\overline{M}$	$\frac{1}{4}\ell M_B\overline{M}$
	$\frac{1}{2}\ell M_A\overline{M}$	$\frac{1}{6}\ell M_A\overline{M_B}$	$\frac{1}{6}\ell M_A(2\overline{M_A}+\overline{M_B})$	$\frac{1}{3}\ell M_A\overline{M_m}$	$\frac{1}{4}\ell M_A\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell M_A\overline{M_B}$	$\frac{1}{6}\ell(1+\beta)M_A\overline{M}$	$\frac{1}{4}\ell M_A\overline{M}$
	$\frac{1}{2}\ell(M_A+M_B)\overline{M}$	$\frac{1}{6}\ell(M_A+2M_B)\overline{M_B}$	$\frac{1}{6}\ell[\overline{M_A}(2M_A+M_B)+\overline{M_B}(2M_B+M_A)]$	$\frac{1}{3}\ell(M_A+M_B)\overline{M_m}$	$\frac{1}{12}\ell(3M_A+5M_B)\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell(M_A+3M_B)\overline{M_B}$	$\frac{1}{6}\ell\overline{M}[M_A(1+\beta)+M_B(1+\alpha)]$	$\frac{1}{4}\ell\overline{M}(M_A+M_B)$
	$\frac{2}{3}\ell M_m\overline{M}$	$\frac{1}{3}\ell M_m\overline{M_B}$	$\frac{1}{3}\ell M_m(\overline{M_A}+\overline{M_B})$	$\frac{8}{15}\ell M_m\overline{M_m}$	$\frac{7}{15}\ell M_m\overline{M_B}$	$\frac{1}{5}\ell M_m\overline{M_B}$	$\frac{1}{3}\ell(1+\alpha\beta)M_m\overline{M}$	$\frac{5}{12}\ell M_m\overline{M}$
	$\frac{2}{3}\ell M_B\overline{M}$	$\frac{5}{12}\ell M_B\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell M_B(3\overline{M_A}+5\overline{M_B})$	$\frac{7}{15}\ell M_B\overline{M_m}$	$\frac{8}{15}\ell M_B\overline{M_B}$	$\frac{3}{10}\ell M_B\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell(5-\beta-\beta^2)M_B\overline{M}$	$\frac{17}{48}\ell M_B\overline{M}$
	$\frac{2}{3}\ell M_A\overline{M}$	$\frac{1}{4}\ell M_A\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell M_A(5\overline{M_A}+3\overline{M_B})$	$\frac{7}{15}\ell M_A\overline{M_m}$	$\frac{11}{30}\ell M_A\overline{M_B}$	$\frac{2}{15}\ell M_A\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell(5-\alpha-\alpha^2)M_A\overline{M}$	$\frac{17}{48}\ell M_A\overline{M}$
	$\frac{1}{3}\ell M_B\overline{M}$	$\frac{1}{4}\ell M_B\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell M_B(\overline{M_A}+3\overline{M_B})$	$\frac{1}{5}\ell M_B\overline{M_m}$	$\frac{3}{10}\ell M_B\overline{M_B}$	$\frac{1}{5}\ell M_B\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell(1+\alpha+\alpha^2)M_B\overline{M}$	$\frac{7}{48}\ell M_B\overline{M}$
	$\frac{1}{3}\ell M_A\overline{M}$	$\frac{1}{12}\ell M_A\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell M_A(3\overline{M_A}+\overline{M_B})$	$\frac{1}{5}\ell M_A\overline{M_m}$	$\frac{2}{15}\ell M_A\overline{M_B}$	$\frac{1}{30}\ell M_A\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell(1+\beta+\beta^2)M_A\overline{M}$	$\frac{7}{48}\ell M_A\overline{M}$
	$\frac{1}{2}\ell M\overline{M}$	$\frac{1}{6}\ell(1+\alpha)\overline{M_B}M$	$\frac{1}{6}\ell M[(1+\beta)\overline{M_A}+(1+\alpha)\overline{M_B}]$	$\frac{1}{3}\ell(1+\alpha\beta)M\overline{M_m}$	$\frac{1}{12}\ell(5-\beta-\beta^2)M\overline{M_B}$	$\frac{1}{12}\ell(1+\alpha+\alpha^2)M\overline{M_B}$	$\frac{1}{3}\ell M\overline{M}$	

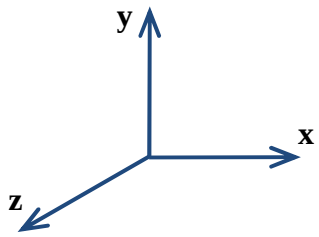
3. MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS OU MÉTODO DA RIGIDEZ

3.1. Introdução

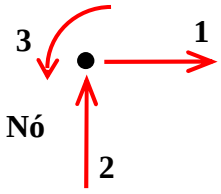
No Método dos Deslocamentos determinam-se inicialmente os deslocamentos e, indiretamente, a partir destes, os esforços; as incógnitas são então os deslocamentos. O método pode ser usado para analisar qualquer estrutura, isostática ou hiperestática. A única estrutura que não pode ser resolvida por este método é a viga bi-engastada quando modelada por uma única barra.

No caso de estruturas reticuladas, que são formadas por barras ligadas por pontos nodais, denominados “nós”, o número total de incógnitas será o número de deslocamentos nodais de todos os nós da estrutura ou o número total de “graus de liberdade” (GL).

Define-se grau de liberdade (GL) de um nó como a direção possível deste se deslocar. No caso de estruturas espaciais há seis direções possíveis de deslocamento ou grau de liberdade para cada nó. Já no caso de estruturas planas, como o caso de pórticos planos, cujos eixos das barras situam-se, por exemplo, no plano XY (Figura 3.1a), existem três direções possíveis de deslocamento para cada nó, as quais são numeradas sequencialmente, conforme mostra a Figura 3.1b: 1- translação paralela ao eixo X; 2- translação paralela ao eixo Y e 3- rotação em torno do eixo Z. Consideram-se positivos os deslocamentos nodais nos sentidos dos eixos correspondentes



(a) Sistema de referência



(b) Direções possíveis de deslocamento ou GL para pórticos planos

Figura 3.1: Sistema de referência e direções possíveis de deslocamento (GL)

Nesta apostila, no caso de vigas não serão considerados deslocamentos axiais, portanto cada nó terá apenas 2 GL: translação paralela ao eixo Y (1) e rotação em torno do eixo Z (2) (Figura 3.2). Quando existirem desloccamentos axiais significativos ou forças horizontais aplicadas nas vigas, estas deverão ser modeladas como pórtico plano.

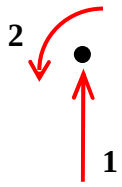


Figura 3.2: Graus de liberdade de um nó de viga

O Método dos deslocamentos consiste em inicialmente fixar completamente a estrutura, introduzindo-se vínculos fictícios em todos os graus de liberdade de seus nós, tornando a estrutura cinematicamente determinada (sistema principal). Consideram-se as cargas aplicadas nas barras e calculam-se os esforços causados pelas cargas para a estrutura fixa (sistema principal).

Impõem-se em seguida os deslocamentos nos nós e calculam-se os esforços decorrentes destes na estrutura, os quais serão proporcionais aos deslocamentos impostos (incógnitas do problema), sendo a proporcionalidade dada pelos coeficientes de rigidez da estrutura. Por superposição de efeitos calculam-se os esforços totais que devem estar em equilíbrio com as forças externas aplicadas nos nós. Chega-se assim a um sistema de equações algébricas de equilíbrio de forças em torno dos nós da estrutura. Conforme será visto mais adiante, formulando este método matricialmente deverá se formar a *matriz de rigidez da estrutura*, sendo também o método conhecido como *Método da Rigidez*.

Para estruturas reticuladas, o sistema principal é único, pois é obtido pela fixação de todos os graus de liberdade de todos os nós. É por isto que este método é mais conveniente para utilização em programas computacionais de que o Método das Forças.

3.1.1. Exemplos de número de graus de liberdade – Vigas contínuas

Como para vigas não será considerado deslocamento axial, cada nó de uma viga tem apenas dois graus de liberdade (translação paralela a Y e rotação em torno de Z, ver Figura 3.2). A viga da Figura 3.3a tem três nós e um total de três graus de liberdade, enquanto a viga da Figura 3.3b tem quatro nós e um total de três graus de liberdade. As barras são representadas por linhas que coincidem com o eixo longitudinal das mesmas (passando pelo centroide da seção).

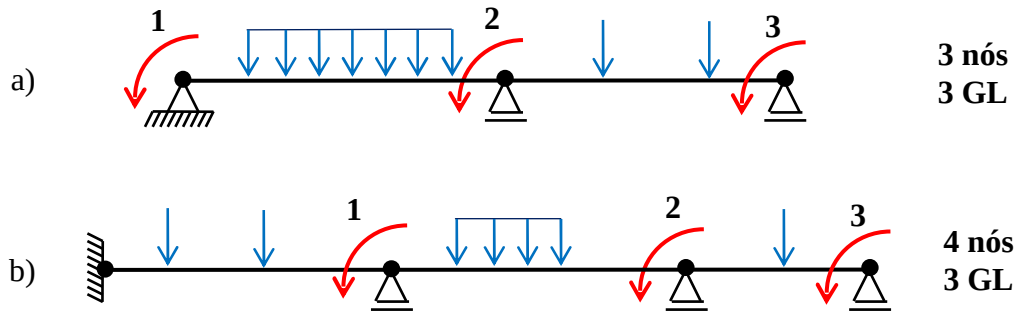


Figura 3.3: Graus de liberdade de vigas contínuas

3.1.2. Exemplos de número de graus de liberdade - Pórtico plano

O pórtico plano da Figura 3.4a tem quatro nós e um total de seis graus de liberdade, enquanto o pórtico plano da Figura 3.4b tem cinco nós e um total de dez graus de liberdade. As barras são representadas por linhas que coincidem com o eixo longitudinal das mesmas (passando pelo centroide da seção). Observa-se que em uma extremidade livre, assim como em uma extremidade ligada a um vínculo, também se deve inserir um nó.

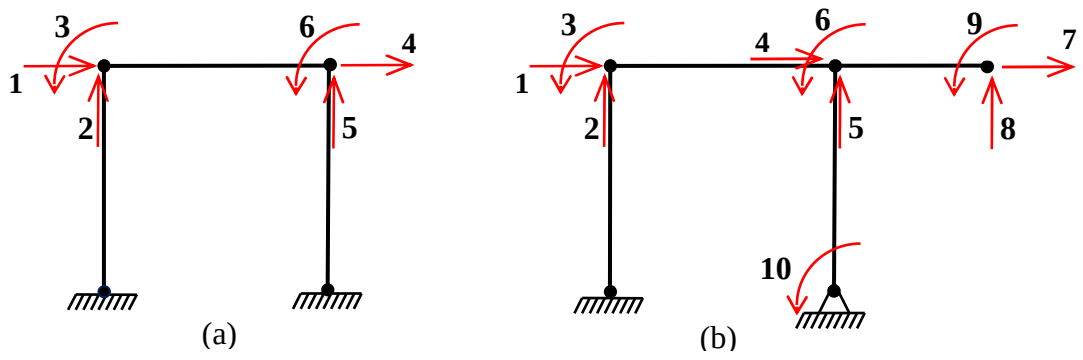
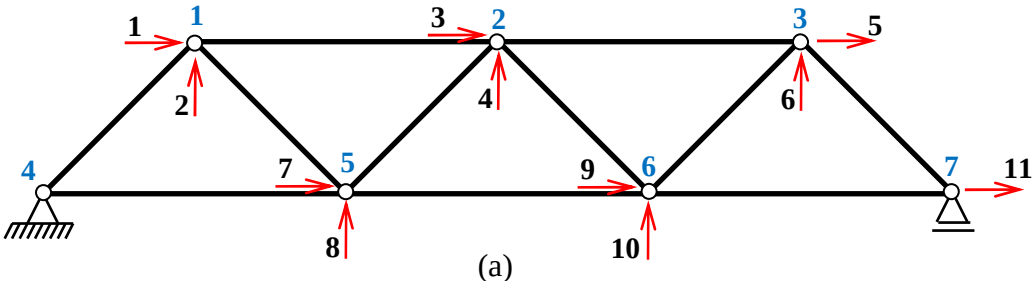


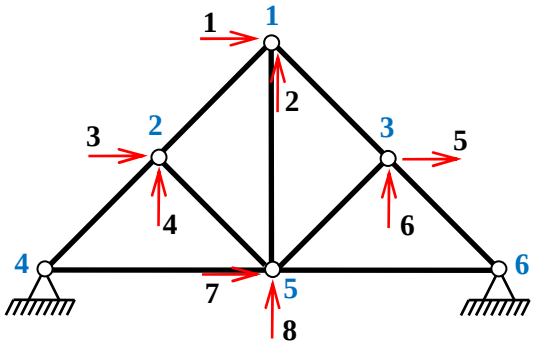
Figura 3.4: Graus de liberdade de pórticos planos: a) pórtico plano de 4 nós e 6 GL; b) pórtico plano de 5 nós e 10 GL

3.1.3. Exemplos de número de graus de liberdade – Treliça plana

No caso de treliça plana, considera-se que as barras da treliça são ligadas por rótulas e que as forças estão aplicadas nos nós, assim as barras ficam submetidas apenas a esforço axial. Como as barras estão rotuladas em suas extremidades, não haverá esforço causado pela rotação dos nós, portanto não se consideram estes graus de liberdade de rotação, considerando-se portanto que cada nó tem apenas dois graus de liberdade de translação (1– paralelo a X e 2– paralelo a Y, para eixos das barras situados no plano XY). A treliça plana da Figura 3.5a tem sete nós e um total de onze graus de liberdade, enquanto a treliça plana da Figura 3.5Figura 3.4b tem seis nós e um total de oito graus de liberdade. As barras são representadas por linhas que coincidem com o eixo longitudinal das mesmas (passando pelo centroide da seção).



(a)



(b)

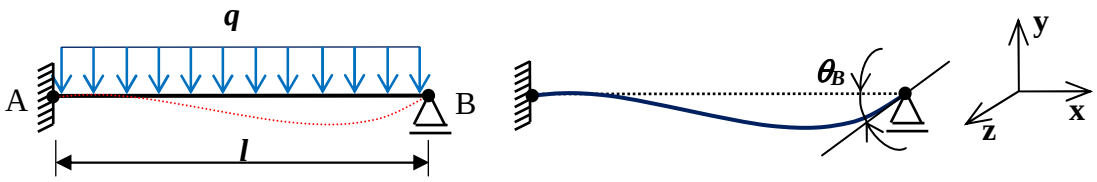
Figura 3.5: Graus de liberdade de treliças planas

3.2. Vigas -Sistema de um grau de liberdade

3.2.1. Exemplo 1 - Viga engastada-apoiada

Seja a viga engastada na extremidade esquerda e simplesmente apoiada na extremidade direita, de comprimento igual a *l*, constituída de material homogêneo, elástico-linear

(módulo de elasticidade igual a *E*) e seção transversal constante (momento de inércia em relação ao eixo horizontal da seção igual a *I*), conforme ilustra a Figura 3.6a. A viga é modelada por uma única barra, que é representada pelo eixo longitudinal da viga, (passando pelo centroide da seção transversal) situado no plano XY, com dois nós (A e B). A viga tem rigidez à flexão constante igual a *EI* e está submetida a uma carga vertical uniformemente distribuída, *q*. Cada nó da viga tem dois possíveis graus de liberdade (ver Figura 3.2), mas como o nó A está totalmente fixo e o nó B está impedido de se deslocar na vertical, o único grau de liberdade da viga é a rotação do nó B (θ_B) (ver Figura 3.6b). Diz-se então que a viga é um sistema de 1 GL. Considera-se positiva a rotação do nó no sentido anti-horário (seta dupla no sentido Z), como mostra a Figura 3.6b.



(a) Viga engastada-apoiada (b) Deformada da viga engastada-apoiada

Figura 3.6: Viga engastada-apoiada e sua deformada

Primeiramente determina-se o sistema principal fixando-se totalmente todos os graus de liberdade dos nós da estrutura (engastes fictícios). Aplica-se no sistema principal o carregamento externo e calculam-se os esforços denominados de esforços de engastamento perfeito. Deve-se calcular, no sistema principal, o esforço (momento M_B) que surge na extremidade da barra na direção do GL (rotação em B) devido ao carregamento externo (Figura 3.7).

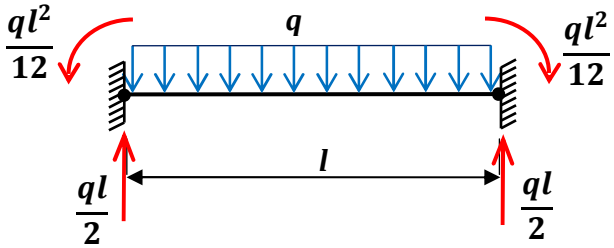


Figura 3.7: Esforços de engastamento perfeito no sistema principal devido ao carregamento externo

Em seguida, impõe-se no sistema principal o deslocamento θ_B no nó B, pois na estrutura real o nó B não é totalmente fixo e sofre um deslocamento θ_B. Calcula-se o esforço correspondente ao deslocamento imposto na direção do GL (momento em torno do eixo Z no ponto B), ver Figura 3.8. Este momento, M_B, será proporcional ao deslocamento imposto (θ_B) proporcionalidade esta dada pelo coeficiente de rigidez da barra, que conforme será visto mais adiante, é igual a ($^{4EI}/_{l}$).

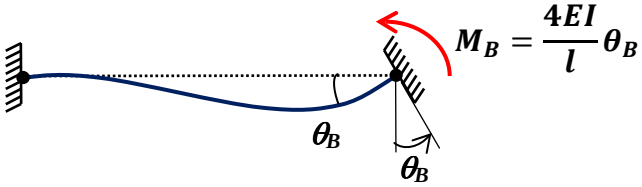


Figura 3.8: Esforço devido ao deslocamento θ_B imposto

Finalmente efetua-se o equilíbrio de forças em torno do nó B, na direção do GL considerado. Por superposição de efeitos, calcula-se o esforço total na extremidade da barra e iguala-se à força aplicada no nó, na direção do GL (momento em torno do eixo Z, no nó B, que neste exemplo é nulo):

$$-\frac{ql^2}{12}+\frac{4EI}{l}.\theta_B = 0 \qquad (3.1)$$

(a soma das forças internas é igual à força externa aplicada).

Resolvendo-se esta equação, cuja incógnita é θ_B, obtém-se:

$$\theta_B = \frac{l}{4\,EI}.\frac{ql^2}{12} \quad \therefore$$

$$\theta_B = \frac{ql^3}{48\,EI}$$

De uma maneira geral, pode-se escrever a equação de equilíbrio de forças para sistemas de 1 GL sob a seguinte forma:

$$F_{EP} + S \cdot d = F_{no} = A \qquad (3.2)$$

onde F_{EP} é o esforço de engastamento perfeito (generalizado, força ou momento); S o coeficiente de rigidez; d o deslocamento do nó (generalizado, translação ou rotação) e A a ação externa (generalizada, força ou momento) aplicada no nó.

Para sistematizar o Método dos Deslocamentos e facilitar os cálculos, ao invés de se impor os deslocamentos reais impõem-se deslocamentos unitários na direção dos GL. Para $d_1 = 1$ tem-se $M_B = \frac{4EI}{l} = S_{11}$ (Figura 3-9), onde S_{11} é o coeficiente de rigidez que representa o esforço na barra na direção ou GL 1, causado por um deslocamento unitário imposto na direção ou GL 1. Logo, para $d_1 = \theta_B$ tem-se que: $M_B = \frac{4EI}{l}.\theta_B$ ou $M_B = S_{11}.\theta_B = S_{11}.d_1$.

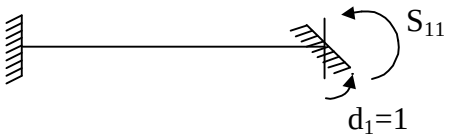


Figura 3-9: Esforço na barra causado por um deslocamento unitário (coeficiente de rigidez)

De uma maneira geral, tem-se para sistemas de um grau de liberdade a seguinte equação de equilíbrio de forças na direção ou GL 1:

$$F_{EP1} + S_{11} \cdot d_1 = A_1 \tag{3.3}$$

Como será visto mais adiante, para muitos graus de liberdade encontra-se um sistema de equações algébricas de equilíbrio de forças em torno dos nós:

$$\{F_{EP}\} + [S].\{D\} = \{A\} \tag{3.4}$$

onde $\{F_{EP}\}$ é o vetor de esforços de engastamento perfeito; $[S]$ é a matriz de rigidez da estrutura; $\{D\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $\{A\}$ é o vetor de ações nodais. Cada coeficiente S_{ij} da matriz de rigidez (onde: i = efeito, j = causa), representa o esforço na barra na direção ou GL i, causado por um deslocamento unitário imposto na direção ou grau de liberdade j, mantendo-se nulos os demais deslocamentos nodais.

3.3. Vigas - Esforços de engastamento perfeito

Os esforços de engastamento perfeito podem ser encontrados pelo Método das Forças. Seja um exemplo de viga bi-engastada com carga distribuída (Figura 3-10). Têm-se

quatro incógnitas (desprezando esforço axial) e duas equações de equilíbrio estático, logo a viga é duas vezes hiperestática ($g_e = 2$).

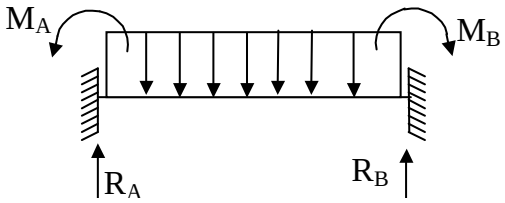


Figura 3-10: Viga bi-engastada

O sistema principal está mostrado na Figura 3-11, e, por simetria, obtém-se que $X_1 = X_2$.

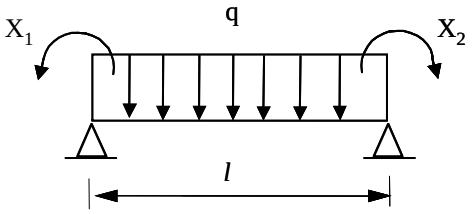
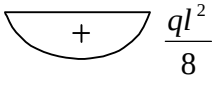
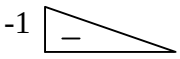
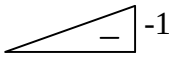


Figura 3-11: Sistema principal e hiperestáticos

Tabela 3-1: Tabela de diagramas de momentos fletores

		
Situação 0 (M_o)	Situação 1 (M_1)	Situação 2 (M_2)
(a)	(b)	(c)

Efetuando-se a combinação dos diagramas de momentos fletores da Tabela 3-1, obtêm-se os coeficientes de deslocamentos generalizados:

$$EI\delta_{10} = EI\delta_{20} = -\frac{1}{3}\cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} = -\frac{ql^3}{24}$$

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \frac{1}{3}l$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{1}{6}l$$

As equações de compatibilidade são dadas por

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}\cdot X_1 + \delta_{12}\cdot X_2 = 0 \qquad (3.5)$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0 \qquad (3.6)$$

Substituindo-se os coeficientes δ_{ij} nas equações de compatibilidade (3.5) e (3.6), chega-se ao sistema de equações:

$$\frac{l}{3} X_1 + \frac{l}{6} X_2 = \frac{ql^3}{24} \text{ e}$$

$$\frac{l}{6} X_1 + \frac{l}{3} X_2 = \frac{ql^3}{24}$$

Resolvendo, tem-se que:

$$X_2 = \frac{ql^2}{12} = X_1 \qquad (3.7)$$

Portanto os esforços de engastamento perfeito são os indicados na Figura 3-12. Existem disponíveis na literatura tabelas de esforços de engastamento perfeito para barras bi-engastadas submetidas a vários tipos de carregamento (que podem ser consultadas diretamente, sem necessidade de se resolver cada caso pelo Método das Forças).

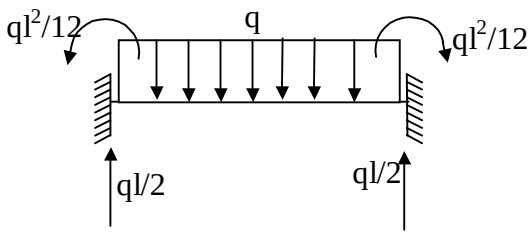


Figura 3-12: Esforços de engastamento perfeito

3.4. Vigas - Coeficientes de rigidez

Os coeficientes de rigidez podem também ser encontrados pelo Método das Forças, impondo-se deslocamentos unitários nos graus de liberdade.

Seja por exemplo o caso da viga engastada e apoiada vista no item 3.2.1, onde se deseja encontrar o coeficiente S_{11} (esforço na extremidade da barra na direção ou grau de liberdade 1 causado por um deslocamento unitário imposto na direção 1). Fixa-se a estrutura e impõe-se um deslocamento unitário no grau de liberdade 1, mantendo-se nulos os deslocamentos nos demais graus de liberdade (ver Figura 3-13). A Figura 3-13 mostra o sistema principal, estrutura fixa (que é duas vezes hiperestática) com $d_1 = 1$.

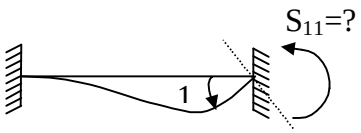


Figura 3-13: Viga engastada-apoiada e seu sistema principal

Pelo Método das Forças, eliminando-se os vínculos excedentes na viga acima, obtém-se o sistema principal (Figura 3-14), cujas condições de compatibilidade são $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = 0$.

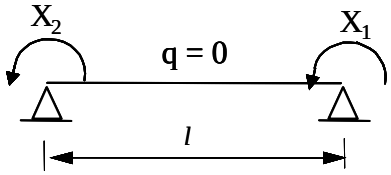


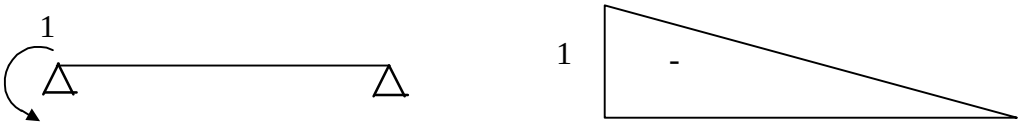
Figura 3-14 Sistema principal com hiperestáticos

O diagrama de momento fletor na viga devido ao carregamento externo (q = 0) é nulo. O diagrama de momento fletor devido ao momento unitário na direção do hiperestático X_1 está mostrado na Figura 3-15 (situação 1) e o devido ao momento unitário na direção do hiperestático X_2 (situação 2) está mostrado na Figura 3-16.



(a) Momento unitário (b) Diagrama de momento

Figura 3-15: Momento unitário e seu respectivo diagrama (M_1)



(a) Momento unitário (b) Diagrama de momento

Figura 3-16: Momento unitário e seu respectivo diagrama (M_2)

A partir dos diagramas de momentos mostrados nas Figura 3-15 e Figura 3-16, calculam-se os deslocamentos generalizados:

$$EI\delta_{10} = EI\delta_{20} = 0$$

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot l$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -\frac{1}{6} \cdot l$$

Das condições de compatibilidade, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} EI(\delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12}) = EI\delta_1 = EI \cdot 1 = EI \\ EI(\delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22}) = EI\delta_2 = EI \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Substituindo-se os coeficientes δ_{ij} encontrados nas equações de compatibilidade (3.8), chega-se ao sistema de equações (3.9), cuja solução é dada pelas expressões (3.10) e (3.11).

$$\begin{cases} \frac{l}{3} X_1 - \frac{l}{6} X_2 = EI \\ -\frac{l}{6} X_1 + \frac{l}{3} X_2 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$X_1 = \frac{4EI}{l} \quad (3.10)$$

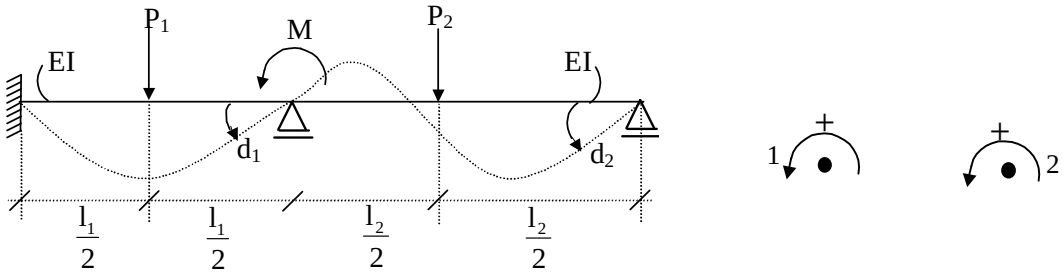
$$X_2 = \frac{2EI}{l} \quad (3.11)$$

Portanto o coeficiente de rigidez é $S_{11} = X_1 = \frac{4EI}{l}$. O esforço na extremidade da barra é igual à reação no engaste, e observa-se que na outra extremidade o esforço é a metade.

3.5. Vigas - Sistema de dois graus de liberdade

3.5.1. Exemplo 1 - Viga contínua

Seja a viga contínua mostrada na Figura 3-17, com dois graus de liberdade d_1, d_2 (não considerando deslocamento horizontal).



(a) Viga contínua **(b) Convenção de sinais**

Figura 3-17: Viga contínua

Aplicando-se o Princípio de Superposição de Efeitos, inicialmente fixam-se todos os nós da estrutura (sistema principal), aplicam-se as cargas nas barras e calculam-se os esforços de engastamento perfeito (etapa 0). Usando-se as tabelas de esforços de engastamento perfeito, obtêm-se F_{EP1} e F_{EP2} (Figura 3-18).

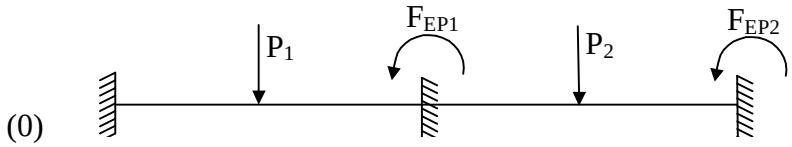


Figura 3-18: Momentos de engastamento perfeito

Em seguida impõe-se um deslocamento unitário no grau de liberdade (GL) 1 (d_1 =1 e d_2 = 0), etapa 1. Encontram-se os esforços correspondentes, que são os coeficientes de rigidez S_{11} no GL1 e S_{21} no GL2 (Figura 3-19).

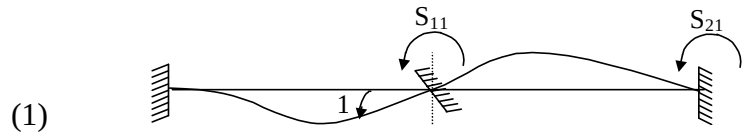


Figura 3-19: Deslocamento unitário imposto no GL1

Na próxima etapa, 2, impõe-se um deslocamento unitário no GL2 (d_1 = 0 e d_2 = 1). Encontram-se os esforços correspondentes, que são os coeficientes de rigidez S_{12} no GL1 e S_{22} no GL2 (Figura 3-20):

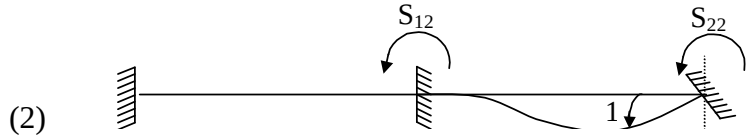


Figura 3-20: Deslocamento unitário imposto no GL 2

Por equilíbrio, a soma dos esforços em um nó em uma certa direção ou GL tem que ser igual à ação aplicada neste mesmo nó na mesma direção. No grau de liberdade 1, tem-se:

$$F_{EP1} + S_{11} \cdot d_1 + S_{12} \cdot d_2 = A_1 = M \tag{3.12}$$

Analogamente, no grau de liberdade 2, tem-se:

$$F_{EP2} + S_{21} \cdot d_1 + S_{22} \cdot d_2 = A_2 = 0 \tag{3.13}$$

Este sistema de duas equações e duas incógnitas pode ser escrito matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} F_{EP1} \\ F_{EP2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ ou} \tag{3.14}$$

$$\{F_{EP}\} + [S].\{D\} = \{A\} \tag{3.15}$$

onde $\{F_{EP}\}$ é o vetor de esforços de engastamento perfeito; $[S]$ é a matriz de rigidez da estrutura; $\{D\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $\{A\}$ é o vetor de ações nodais ou ações externas aplicadas diretamente nos nós (forças ou binários). O produto $[S]$ $\{D\}$ equivale aos esforços internos causados pelos deslocamentos nos nós, e a soma $\{F_{EP}\}$ + $[S]$ $\{D\}$ é o total de esforços internos, que devem estar em equilíbrio com as ações externas aplicadas diretamente nos nós (em cada grau de liberdade).

Resolvendo-se o sistema de equações (3.15) obtém-se o vetor de deslocamentos nodais $\{D\}$:

$$[S].\{D\} = \{A\} - \{F_{EP}\}$$

$$\{D\} = [S]^{-1}.\{A - F_{EP}\} \tag{3.16}$$

Se a estrutura for isostática ou hiperestática, a matriz $[S]$ poderá ser invertida sempre, logo, do sistema de equações obtém-se $\{D\}$. Se a estrutura for hipoestática, a matriz $[S]$ será singular (determinante de $[S] = 0$) e o sistema de equações não terá solução.

Os coeficientes de rigidez possuem dois subíndices, *i* e *j*, sendo que o primeiro indica a direção do efeito e o segundo a direção da causa. Assim pode-se definir o coeficiente de rigidez S_{ij} como sendo: esforço que surge no GL *i* causado por um deslocamento unitário imposto no GL *j* (mantendo-se nulos os deslocamentos nos demais GL $\neq j$).

3.5.2. Exemplo 2

Seja a viga contínua mostrada abaixo na Figura 3-21, cuja rigidez à flexão (*EI*) das barras é constante e igual a 72×10^3 kNm^2. Trata-se de um sistema de 2 graus de liberdade, conforme mostra a Figura 3-22a, submetido às ações nodais, mostradas na Figura 3-22b.

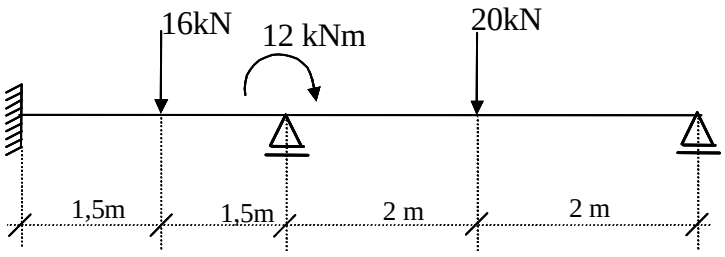
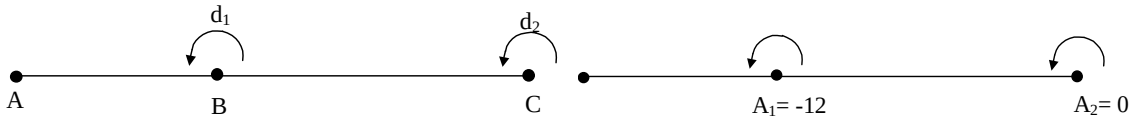


Figura 3-21: Viga contínua



(a) Graus de liberdade (+) (b) Ações aplicadas nos nós

Figura 3-22: Graus de liberdade e ações aplicadas nos nós

Fixam-se todos os nós da estrutura (sistema principal), aplicam-se as cargas nas barras (Figura 3-23) e encontram-se os esforços de engastamento perfeito (ver Figura 3-24).

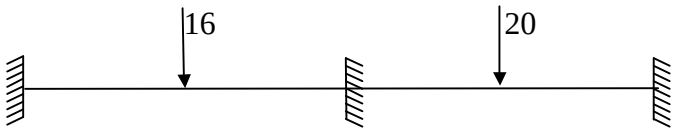
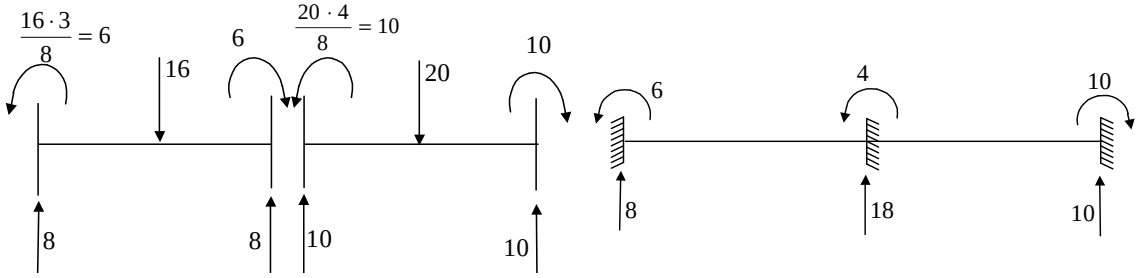


Figura 3-23: Sistema principal

Os esforços (momentos) de engastamento perfeito resultantes nos GL 1 e 2 são ():

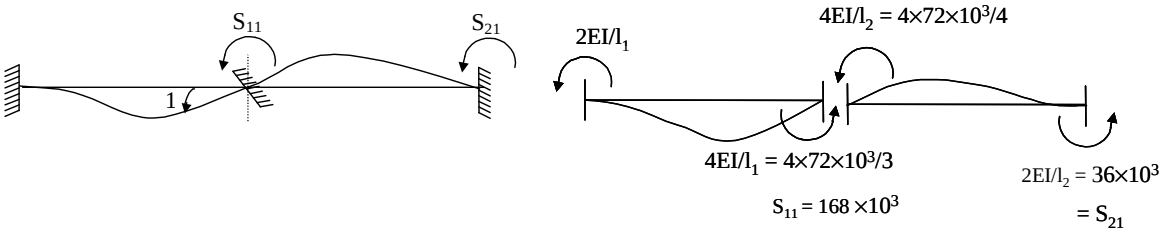
$F_{EP1} = 4$ e $F_{EP2} = -10 \therefore \{F_{EP}\} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -10 \end{Bmatrix}$



(a) Esforços nas extremidades das barras (tabelas) (b) Esforços de engastamento perfeito

Figura 3-24: Esforços de engastamento perfeito

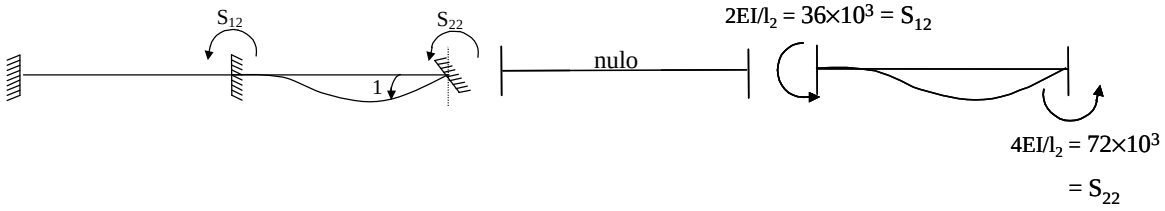
Aplica-se em seguida d_1 = 1 (mantendo d_2 = 0) e encontram-se os esforços correspondentes (Figura 3-25):



(a) **(b)**

Figura 3-25 Coeficientes de rigidez da viga para d_1 = 1

Aplica-se após d_2 = 1 (mantendo d_1 = 0) e encontram-se os esforços correspondentes (Figura 3-26):



(a) **(b)**

Figura 3-26 Coeficientes de rigidez da viga para d_2 = 1

Aplicando-se superposição de efeitos, escreve-se o sistema de equações de equilíbrio de forças para os nós. No nó B (grau de liberdade 1) tem-se que:

$$F_{EP1} + S_{11} \cdot d_1 + S_{12} \cdot d_2 = A_1 \qquad (3.17)$$

e no nó C (grau de liberdade 2):

$$F_{EP2} + S_{21} \cdot d_1 + S_{22} \cdot d_2 = A_2 \,. \tag{3.18}$$

As equações (3.17) e (3.18) formam um sistema de equações que pode ser escrito sob a forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_{EP1} \\ F_{EP2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \quad \therefore \tag{3.19}$$

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ -10 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.20}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 - 4 \\ 0 \quad +10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

cuja solução fornece:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}14 \times 10^{-3} \text{rad} \\ 0{,}21 \times 10^{-3} \text{rad} \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

A partir dos deslocamentos nodais d_1 e d_2, podem-se encontrar os esforços nas barras multiplicando-se os coeficientes de rigidez de cada barra pelos deslocamentos sofridos nas suas extremidades e somando-se o resultado com os esforços de engastamento perfeito nas extremidades das barras. As reações de apoio também podem ser calculadas a partir dos deslocamentos nodais, conforme será visto mais adiante.

Neste exemplo, a estrutura foi considerada globalmente. Entretanto, fica mais fácil dividir a estrutura em elementos e tratar cada elemento separadamente, formando-se depois o sistema de equações de equilíbrio da estrutura, levando em conta a contribuição de todos os elementos, como será visto no item 3.8.

3.6. Treliças – Sistema de um grau de liberdade

3.6.1. Exemplo – Barra de material homogêneo e seção transversal constante submetida à carga axial

Seja uma barra discretizada por um elemento de treliça, que coincide com o eixo longitudinal da barra, com dois nós na extremidade (Figura 3-27). A barra está submetida apenas a esforço axial, e como está fixa à esquerda, o deslocamento

horizontal do nó 2 é nulo, $u_2 = 0$. Logo o sistema fica reduzido a um sistema com apenas 1 grau de liberdade (GL), o deslocamento axial (horizontal) do nó 1, u_1.

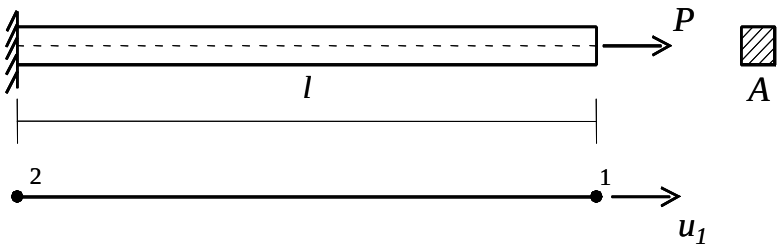


Figura 3-27: Barra de seção transversal constante

Em analogia a uma mola elástica de rigidez *k*, deve-se ter que a força aplicada *P* é proporcional ao deslocamento u_1, sendo esta proporcionalidade dada pela rigidez axial da barra ou do elemento (Figura 3-28). Pode-se então escrever a equação de equilíbrio de forças para o nó 1, na direção 1, conforme mostra a Figura 3-28:

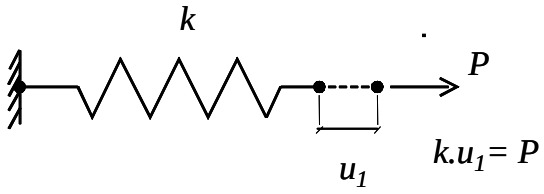


Figura 3-28 Barra de treliça idealizada por mola elástica

Supondo conhecida a rigidez axial da barra, que é o inverso da flexibilidade, sendo esta obtida, por exemplo, a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\delta = \frac{l}{EA} \quad \therefore \quad k = \frac{1}{\delta} = \frac{EA}{l} \tag{3.22}$$

Pode-se obter então a solução da equação de equilíbrio de forças para este sistema de 1 GL:

$$u_1 = \frac{P}{k} = \frac{Pl}{EA} \tag{3.23}$$

3.7. Treliças – Sistema de dois graus de liberdade

3.7.1. Exemplo - Haste composta de duas barras de materiais, comprimentos e seções diferentes, submetida a uma carga axial

Seja agora uma haste composta de duas barras de materiais, comprimentos, e seções transversais diferentes (Figura 3-29), engastada na extremidade esquerda e submetida a uma força axial P na extremidade direita.

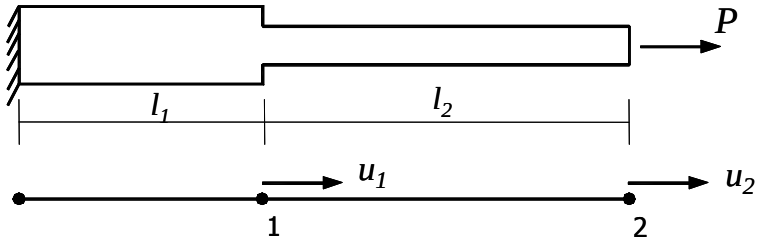


Figura 3-29 Haste discretizada por elementos de treliça com dois graus de liberdade

Esta estrutura pode ser idealizada pela associação de dois elementos de treliça de rigidez diferente, k_1 e k_2, interligados por nós, o que corresponde a um sistema discreto de três pontos materiais ligados por duas molas elásticas diferentes, em série (Figura 3-30):

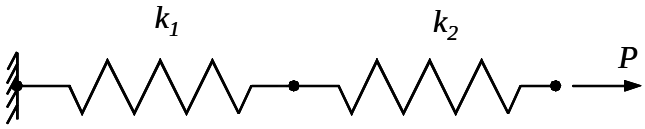


Figura 3-30 Idealização da estrutura por duas molas elásticas em série

sendo as constantes elásticas das molas iguais a:

$$k_1 = \frac{E_1 A_1}{l_1} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2} \tag{3.24}$$

Como a barra está submetida apenas a esforço axial e sua extremidade à esquerda está fixa, trata-se de um problema de 2 graus de liberdade, (u_1 e u_2). As equações de equilíbrio de forças em torno dos nós da estrutura resultam em um sistema de duas equações e duas incógnitas, de tal forma que se pode escrever:

$$\begin{cases} S_{11}\, u_1 + S_{12}\, u_2 = A_1 = 0 \\ S_{21}\, u_1 + S_{22}\, u_2 = A_2 = P \end{cases} \tag{3.25}$$

ou então, sob a forma matricial:

$$[S].\{D\} = \{A\} \tag{3.26}$$

A matriz de rigidez da estrutura [*S*] pode ser obtida da seguinte maneira. Impõem-se os deslocamentos $u_1 = 1$ e $u_2 = 0$ à estrutura (Figura 3-31), obtendo-se assim os coeficientes $S_{11} = k_1 + k_2$ e $S_{21} = -k_2$.

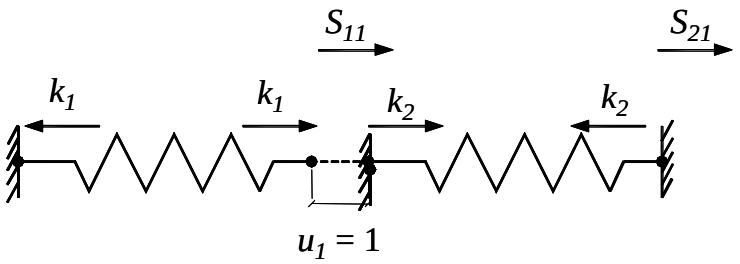


Figura 3-31 Coeficientes de rigidez para deslocamento unitário imposto no GL1

Impõem-se em seguida os deslocamentos $u_1 = 0$ e $u_2 = 1$ à estrutura (Figura 3-32), obtendo-se assim os coeficientes $S_{12} = -k_2$ e $S_{22} = k_2$.

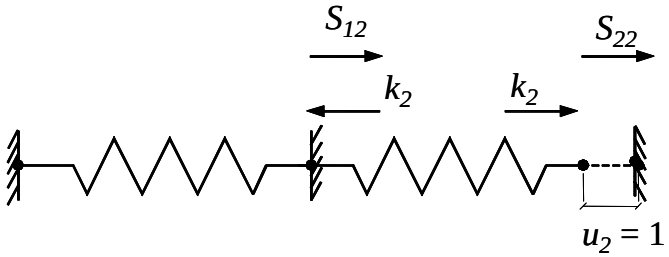


Figura 3-32 Coeficientes de rigidez para deslocamento unitário imposto no GL2

Substituindo-se os coeficientes S_{ij} no sistema de equações de equilíbrio de forças, vem:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

Resolvendo-se o sistema de equações (3.27), obtêm-se as incógnitas do problema, u_1 e u_2. Mais adiante será visto como se obter as reações de apoio e os esforços nas barras a partir dos deslocamentos nodais. Ressalta-se que neste exemplo não há esforços de engastamento perfeito, uma vez que não há forças axiais aplicadas nas barras (usualmente não ocorrem em barras de treliça). No caso de existirem cargas axiais aplicadas, devem-se incluir no equilíbrio de forças dos nós os esforços de engastamento perfeito.

Para estruturas compostas de muitas barras, em vez de se tratar a estrutura globalmente, como neste exemplo, divide-se a estrutura em elementos conforme será visto no próximo item. As matrizes de rigidez de cada elemento são calculadas então

isoladamente e, a partir destas, obtém-se a matriz de rigidez da estrutura, somando-se os coeficientes correspondentes aos mesmos graus de liberdade.

3.8. Divisão em elementos – Sistema de coordenadas

As estruturas reticuladas são divididas em elementos ligados entre si por pontos nodais denominados nós, aonde se admitem concentradas todas as forças de ligação entre elementos. As ações e deslocamentos são discretizados nos nós e a composição destes elementos para constituir a estrutura resulta em um sistema de equações algébricas que é tratado matricialmente.

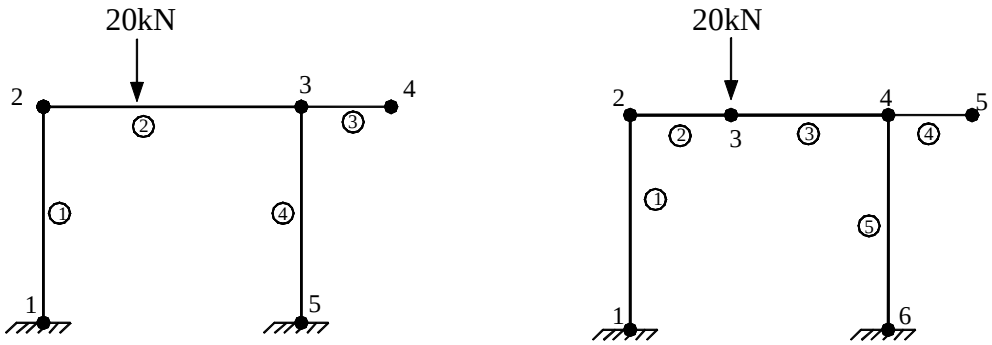
No caso do método dos deslocamentos, estas equações são equações de equilíbrio de forças em torno dos nós. Uma estrutura com N nós, em que cada nó tem M graus de liberdade (GL), resultará em um sistema de N×M equações algébricas, incluindo-se as direções restringidas por vínculos.

3.8.1. Modelagem - Algumas considerações sobre divisão da estrutura em elementos

Cada elemento é representado por uma linha reta, que coincide com o eixo da barra, ligando dois nós, os quais não podem ocupar a mesma posição no espaço.

Em uma extremidade livre, assim como uma extremidade vinculada a um apoio, também é considerado um nó (ver Figura 3-33).

A noção de nó pode ser generalizada quando for conveniente, dividindo-se uma barra em dois elementos separados por um nó fictício. Deve-se criar um nó fictício sempre que houver descontinuidade de tipo de material ou de tipo de seção de barra. Pode-se também criar um nó fictício sob uma carga concentrada, conforme mostra o exemplo da Figura 3-33b, mas não é necessário.



(a) 5 nós e 4 elementos (b) 6 nós e 5 elementos

Figura 3-33: Exemplo de divisão em elementos para pórtico plano.

3.8.2. Sistema de coordenadas

Para estruturas reticuladas utiliza-se o sistema de coordenadas cartesianas. A estrutura é definida em relação a um sistema global de coordenadas (X,Y,Z) e os elementos em relação a um sistema local (x,y,z ou x_L, y_L ,z_L). Os três eixos cartesianos são perpendiculares entre si e formam um sistema destrógiro (satisfazem a regra da mão direita). No sistema local, o eixo local x (ou x_L) coincide com o eixo longitudinal da barra passando pelo centróide da seção e o sentido positivo deste eixo é definido pela incidência dos nós no elemento (do nó inicial para o nó final), conforme mostra a Figura 3-34 para um exemplo de pórtico plano. Em geral o eixo vertical da seção é denominado eixo y (ou y_L) e o horizontal eixo z (ou z_L), exceção feita aos elementos de grelha.

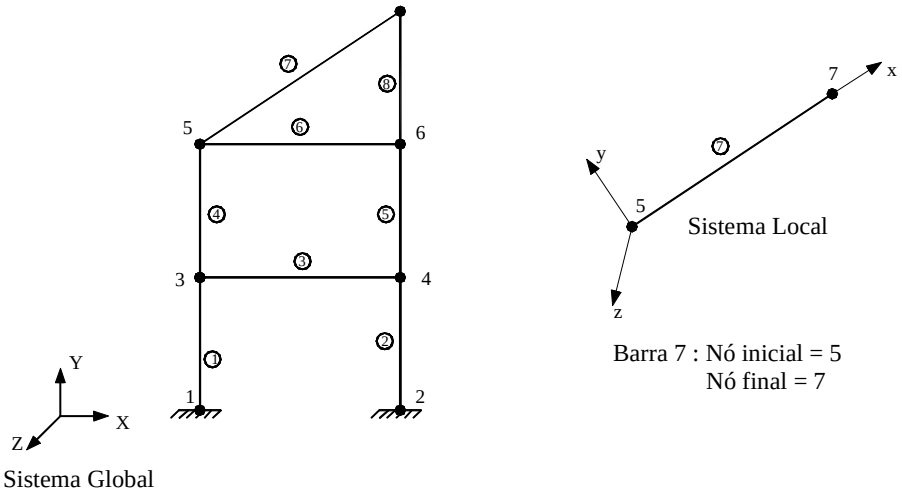


Figura 3-34: Sistemas global e local de coordenadas de um pórtico plano

3.8.3. Graus de liberdade

Com relação ao sistema de coordenadas globais, definem-se os graus de liberdade de cada nó da estrutura na Figura 3-35: translação paralela ao eixo X (UX); translação paralela ao eixo Y (UY); translação paralela ao eixo Z (UZ); rotação em torno do eixo X (RX); rotação em torno do eixo Y (RY); rotação em torno do eixo Z (RZ).

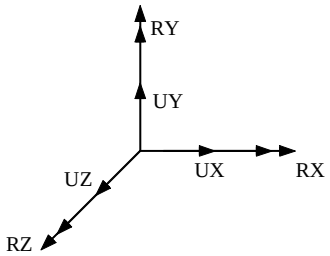


Figura 3-35: Graus de liberdade

3.9. Tipos de estruturas reticuladas

Estruturas reticuladas são aquelas em que uma de suas dimensões predomina sobre as outras duas. As estruturas reticuladas podem ser classificadas em seis tipos: vigas, treliças planas, pórticos planos, treliças espaciais, grelhas e pórticos espaciais. Cada tipo apresenta características geométricas e mecânicas especiais. Quando os eixos das barras situam-se em um plano e se deformam neste mesmo plano as estruturas são classificadas de planas, caso contrário são classificadas de espaciais.

Deve-se ressaltar que para que as estruturas planas (no plano XY, por exemplo) se deformem no mesmo plano em que se situam os eixos de suas barras (x) é necessário que o eixo vertical da seção das barras (y) seja um eixo de simetria. Desta forma o produto de inércia da seção em relação aos eixos da seção transversal (x, y) é nulo logo x,y são eixos principais de inércia e o centróide coincide com o centro de torção da seção, ou seja, se as forças aplicadas (concentradas ou distribuídas) situarem-se no plano XY (ou xy) e os binários também atuarem no plano XY, em torno de um eixo paralelo a Z, as barras se deformarão no plano XY ou xy (deformação por flexão, axial, por cisalhamento), não haverá torção. Caso contrário, se y não for um eixo de simetria, haverá torção e a barra se deformará, portanto, fora do plano XY.

Nesta apostila as barras das estruturas reticuladas serão consideradas prismáticas, ou seja, de seção transversal constante, e de eixo reto. Em geral as ligações de barras de treliças planas ou espaciais são articuladas e as ligações de barras de vigas, grelhas, pórticos planos e espaciais são rígidas, mas pode haver algumas ligações articuladas.

Os deslocamentos em uma estrutura são causados pelos efeitos acumulados das deformações de todos seus elementos conforme descrito no que se segue.

3.9.1. Deformações

Seja uma barra de eixo longitudinal x, comprimento *l* e seção transversal circular com eixos y (vertical) e z (horizontal), de material elástico-linear (módulo de elasticidade *E* e de cisalhamento *G*), conforme mostrado na Figura 3-36. A barra está submetida aos seguintes esforços: axial paralelo ao eixo x (N), flexão em torno do eixo z (M_z), cortante paralelo ao eixo y (V_y) e torção em torno do eixo x (T).

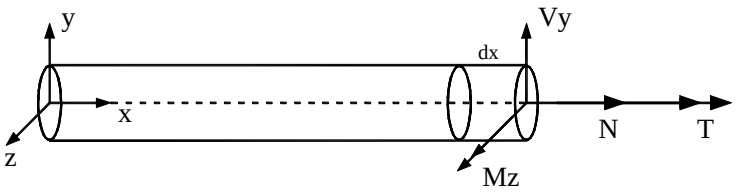


Figura 3-36 Barra de seção transversal circular e esforços atuamtes

Estes esforços provocam as seguintes deformações correspondentes em um elemento infinitesimal *dx* da barra:

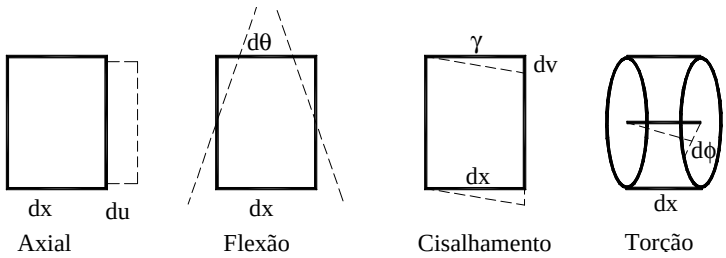


Figura 3-37: Tipos de deformação em uma barra

Nas treliças planas e espaciais haverá apenas esforço e deformação axiais se as cargas forem aplicadas diretamente nos nós, ou se houver apenas cargas axiais ao longo das barras, caso contrário haverá também flexão e esforço cortante, sendo que a deformação axial predomina.

No caso de vigas e pórticos planos predomina a deformação por flexão, em geral despreza-se a deformação axial em vigas. Como as barras de estruturas reticuladas são em geral longas, costuma-se desprezar as deformações por cisalhamento, mas pode-se também considerá-las no caso de vigas ou pilares-parede. Será admitido nesta apostila que os deslocamentos sofridos pelos eixos das barras são pequenos, não havendo, portanto interação entre esforço axial e de flexão nos pórticos planos e espaciais (desprezam-se os efeitos de segunda ordem). Nas grelhas e pórticos espaciais em geral predomina também a deformação por flexão, mas em barras rígidas à torção, como as seções em caixão, a deformação por torção pode se tornar significativa. Sendo os dois eixos da seção das barras eixos de simetria, não haverá interação entre flexão e torção.

3.9.2. Exemplos de estruturas reticuladas planas

Exemplos de estruturas reticuladas planas estão mostrados na Figura 3-38.

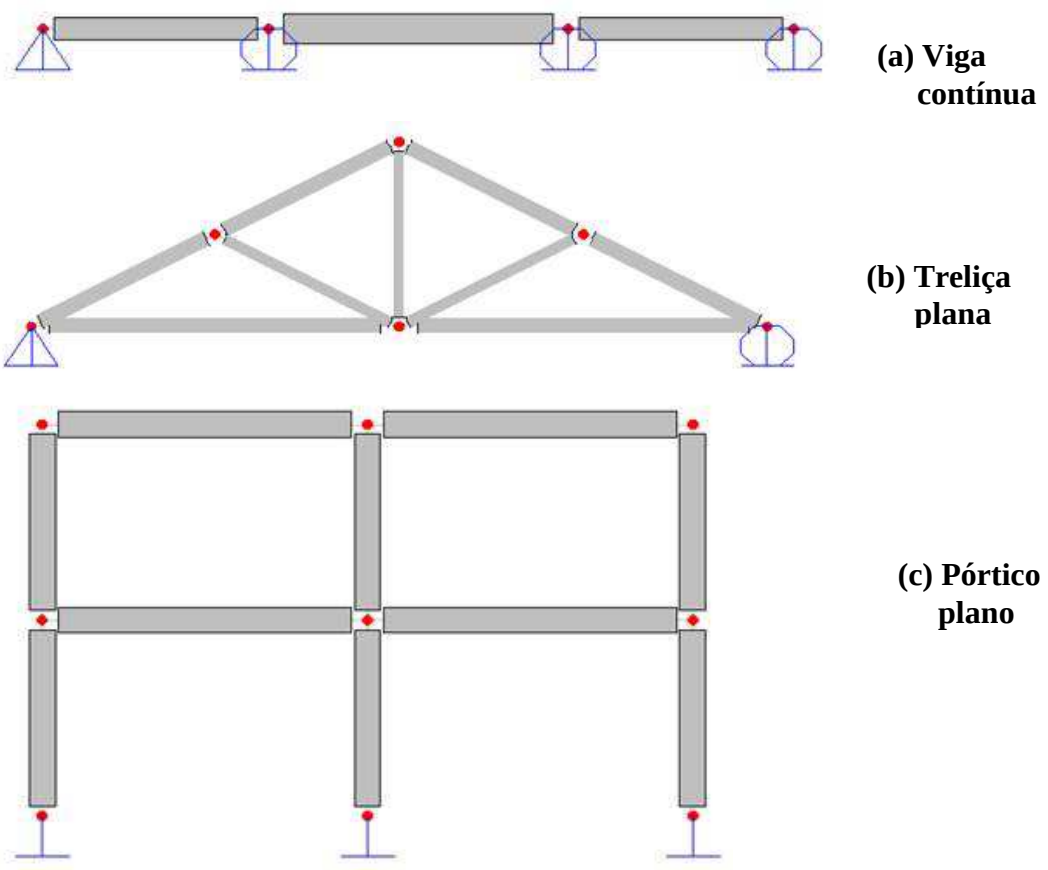
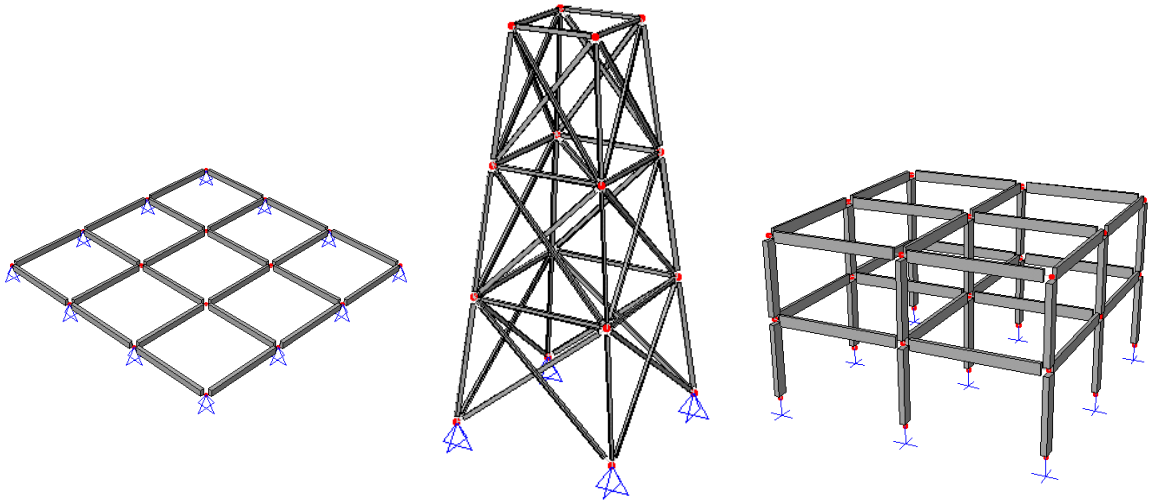


Figura 3-38: Estruturas reticuladas planas (SAP2000, CSI 2009)

3.9.3. Exemplos de estruturas reticuladas espaciais

Exemplos de estruturas reticuladas espaciais estão mostrados na Figura 3-39.



(a) Grelha **(b) Treliça espacial** **(c) Pórtico espacial**

Figura 3-39: Estruturas reticuladas espaciais (SAP2000, CSI 2009)

3.9.4. Elementos de estruturas reticuladas

Características – Graus de Liberdade no Sistema Local

3.9.4.1. Viga

(2 GL por nó → translação paralela a y e rotação em torno de z)

Geometria: estrutura plana em que o eixo longitudinal das barras (x) está contido no eixo XY e é sempre paralelo ao eixo X. O eixo y da seção transversal das barras deve ser um eixo de simetria de maneira a garantir que as barras não sofram torção; os eixos da seção transversal serão assim eixos principais de inércia e o centro de gravidade coincidirá com o centro de torção da seção.

Ligações: as barras são em geral rigidamente ligadas entre si.

Cargas: as forças aplicadas podem ser concentradas ou distribuídas e situam-se no plano XY (que coincide com o plano xy das barras). Os binários aplicados devem ter seus vetores-momento (seta dupla) normais ao plano XY (paralelos ao eixo Z).

Deformações: atendidas as condições acima, os elementos de viga se deformarão no plano xy, não sofrendo torção nem flexão fora do plano. As deformações per flexão

predominam e no caso de vigas longas, em que a relação altura da seção(h) / comprimento do vão (l) for pequena, pode-se desprezar o efeito da força cortante. As deformações axiais não serão consideradas.

Esforços: a viga estará submetida a esforço cortante e momento fletor; não será considerado o esforço axial.

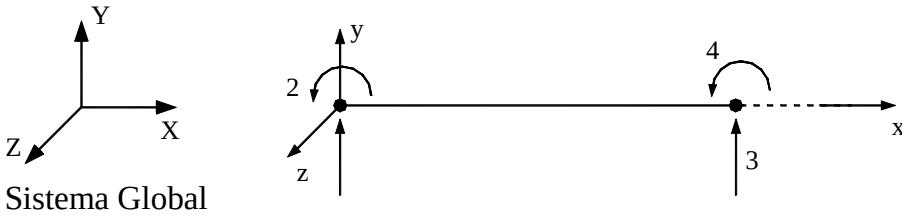


Figura 3-40: Elemento de viga

No caso da viga estar submetida a esforço axial significativo, esta deve ser modelada como pórtico plano.

3.9.4.2. Treliça Plana

2 GL/ nó → translação paralela a x e a y

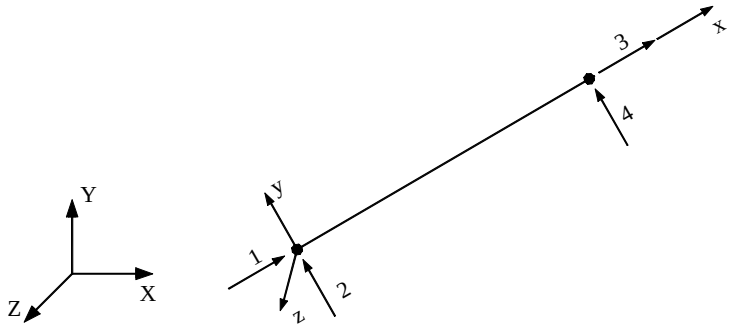
Geometria: estrutura plana em que o eixo longitudinal das barras (x) está contido no plano XY e pode ter uma orientação arbitrária em relação ao eixo X.

Ligações: as barras são articuladas, ou seja, ligadas entre si por rótulas.

Cargas: as forças aplicadas podem ser concentradas ou distribuídas e situam-se no plano XY. Os binários aplicados devem ter seus vetores -momento (seta dupla) normais ao plano XY (paralelos ao eixo Z). Pode haver forças aplicadas diretamente nos nós ou nas barras, mas não pode haver binários aplicados diretamente nos nós (apenas nas barras).

Deformações: as deformações axiais predominam; pode haver também deformação por flexão, mas a de cisalhamento será sempre desprezada.

Esforços: se só houver forças aplicadas diretamente nos nós e forças axiais ao longo das barras, as barras estarão submetidas apenas a esforço axial. Se houver forças transversais e binários ao longo das barras haverá esforço cortante e momento fletor também (podendo ser obtidos separadamente, considerando-se as barras como vigas bi-apoiadas).



Sistema Global

Figura 3-41: Elemento de treliça plana

3.9.4.3. Treliça Espacial

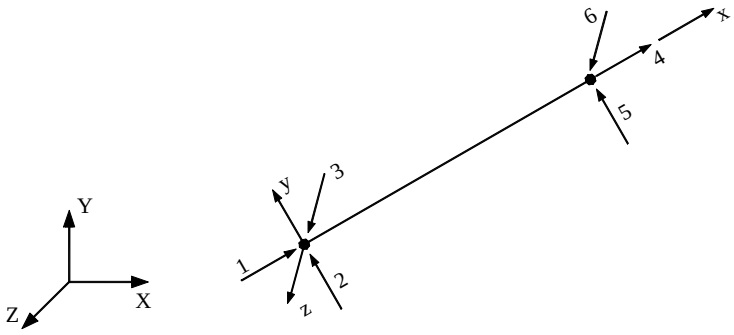
(3 GL/ nó → translação paralela a x, y, z)

Geometria: idêntica à treliça plana, exceto que as barras podem ter qualquer direção no espaço.

Ligações: as barras são ligadas entre si por rótulas.

Deformações: as deformações axiais predominam; pode haver também deformação por flexão, mas a de cisalhamento será sempre desprezada.

Esforços: se só houver forças aplicadas diretamente nos nós e forças axiais ao longo das barras, as barras estarão submetidas apenas a esforço axial. Se houver forças transversais e binários ao longo das barras haverá esforço cortante e momento fletor também (podendo ser obtidos separadamente, considerando-se as barras como vigas bi-apoiadas).



Sistema Global

Figura 3-42: Elemento de treliça espacial

3.9.4.4. Pórtico Plano

(3 GL/ nó → translação paralela a x e a y e rotação em torno de z)

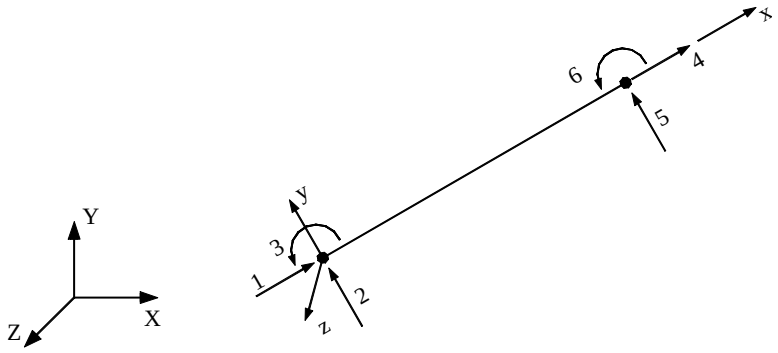
Geometria: estrutura plana constituída de barras prismáticas, situadas no plano XY, com orientação arbitrária em relação ao eixo X. Assim como nas vigas, considera-se que o eixo vertical (y) da seção transversal das barras é um eixo de simetria e, portanto, y e z são eixos principais de inércia.

Ligações: as barras são em geral rigidamente ligadas entre si.

Cargas: como nas vigas, as forças atuam no plano XY e binários atuam perpendicularmente ao plano XY (direção Z).

Esforços internos: de flexão, axial e corante.

Deformação: as deformações por flexão predominam e ocorrem no plano XY. Consideram-se as barras longas; desprezam-se, portanto, as deformações por cisalhamento. As deformações por flexão e axial são consideradas independentemente uma da outra (nas estruturas lineares não haverá interação entre esforço axial e flexão).



Sistema Global

Figura 3-43: Elemento de pórtico plano

3.9.4.5. Grelha

(3 GL/nó → translação paralela a z e rotação em torno de x e de y)

Geometria: estrutura plana (plano XY) composta de barras contínuas que se interceptam mutuamente.

Cargas: ao contrário do pórtico plano, todas as forças atuam normalmente ao plano XY e todos os binários têm seus vetores (seta dupla) no plano da grelha (XY).

Esforços internos: de flexão, torção e cortante.

Deformação: predominante por flexão (deformações por torção e por cisalhamento são secundárias). Considera-se que cada barra tem dois eixos de simetria na seção transversal, um está no plano XY e o outro paralelo a direção Z. Isto implica

em que os esforços de momento torçor e fletor ajam independentemente e também implica que as barras se deformem por flexão na direção Z.

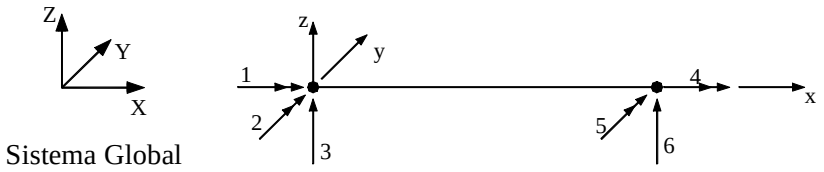


Figura 3-44: Elemento de grelha

3.9.4.6. Pórtico Espacial

(6 GL/ nó → translação paralela a x, y, e z e rotação em torno de x, y, z)

Geometria: tipo de estrutura mais geral, não há restrição na posição dos nós, barras ou direções das cargas. No entanto considera-se que a seção transversal tem dois eixos de simetria (eixos principais) de forma a não ocorrer interação entre flexão e torção.

Ligações: as barras são em geral rigidamente ligadas entre si.

Esforços internos: axial, de torção, esforço cortante nas duas direções principais e também de flexão nas duas direções principais.

Deformação: por flexão, axial e por torção; no caso de barras longas pode-se desprezar a deformação por cisalhamento.

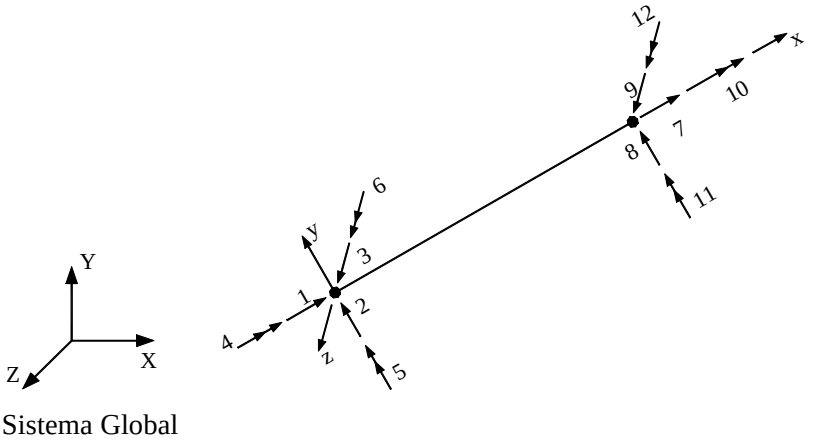


Figura 3-45: Elemento de pórtico espacial

3.10. Resumo do Método dos Deslocamentos para estruturas reticuladas divididas em elementos

Cada elemento será considerado isoladamente. Será calculada a matriz de rigidez do elemento não-restringido, em relação a todos os graus de liberdade do elemento, inicialmente no sistema local de coordenadas $[S_L]$.

Quando houver cargas aplicadas ao longo dos elementos ou barras, será calculado o vetor de esforços de engastamento perfeito (para o elemento fixo), inicialmente no sistema local. $\{F_{LEP}\}$.

Em seguida, por meio de uma transformação de coordenadas, encontra-se a matriz de rigidez do elemento no sistema global $[S_G]$ e o vetor de esforços de engastamento perfeito no sistema global $\{F_{GEP}\}$.

Levando-se em conta a contribuição de todos os elementos será formado o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida, em relação a todos os GL possíveis (inclusive os restringidos por apoios).

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^*.\{D\}^* = \{A\}^* \qquad (3.28)$$

sendo

$$[S]^* = \sum_{\text{Elementos}} [S_G],$$

$$\{F_{EP}\}^* = \sum_{\text{Elementos}} \{F_{GEP}\}$$

e $\sum_{\text{Elementos}}$ a soma dos coeficientes (que correspondem ao mesmo GL da estrutura) dos elementos que concorrem no mesmo nó. Se uma estrutura tem N nós, e cada nó tem M GL, o sistema (3.28) resultante terá N×M equações.

Em seguida serão impostas as condições de contorno, encontrando-se o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida:

$$\{F_{EP}\} + [S].\{D\} = \{A\} \qquad (3.29)$$

Resolve-se o sistema de equações (3.29) e obtém-se o vetor de deslocamentos:

$$[S].\{D\} = \{A\} - \{F_{EP}\}$$
$$\{D\} = [S]^{-1}.\{A - F_{EP}\}$$

A partir de $\{D\}$ obtêm-se as reações de apoio utilizando-se o sistema (3.28), encontra-se o vetor de deslocamentos nas extremidades de cada elemento, no sistema local, $\{u_L\}$, e os esforços no elemento no sistema local:

$$\{A_L\} = \{F_{LEP}\} + [S_L].\{u_L\} \tag{3.30}$$

3.11. Matriz de rigidez de um elemento no sistema local (estruturas reticuladas planas)

3.11.1. Elemento de viga

Seja o elemento de viga com dois graus de liberdade por nó mostrado na Figura 3-46, cujo sistema local coincide com o sistema global.

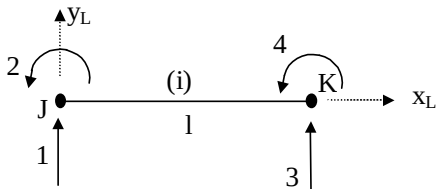


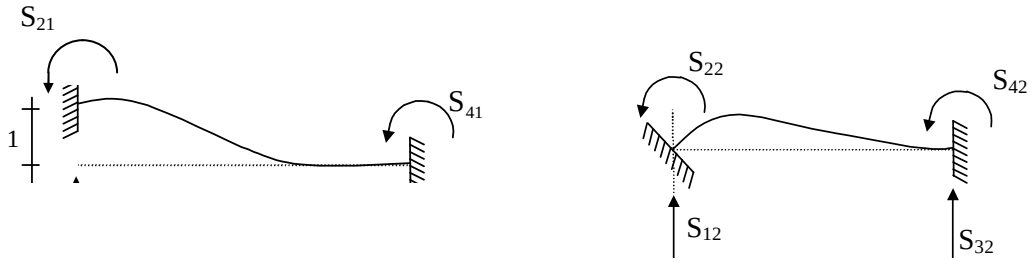
Figura 3-46: Elemento de viga com dois graus de liberdade por nó

O elemento (i) (Figura 3-46), tem nó inicial J e nó final K, comprimento *l* e o momento de inércia da seção transversal é *I*. O vetor de deslocamentos nodais do elemento é dado pela equação (3.31) e a matriz de rigidez do elemento no sistema local é expressa pela equação (3.32):

$$\{u_L\}_{4x1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{3.31}$$

$$[S_L]_{4x4} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

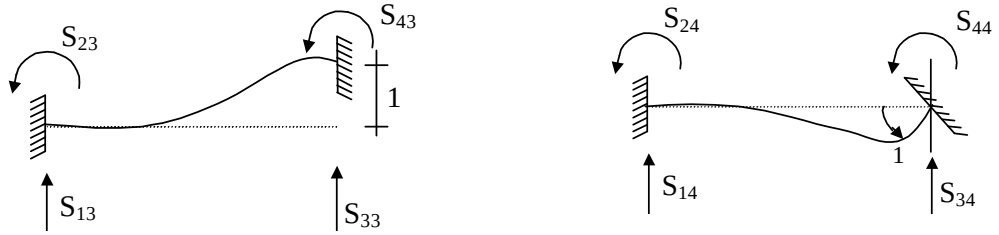
Para se obter os coeficientes da matriz de rigidez, S_{Lij}, inicialmente fixam-se as extremidades do elemento e impõe-se $u_1 = 1$ (Figura 3-47a); impõe-se em seguida $u_2 = 1$ (Figura 3-47b).



(a) **(b)**

Figura 3-47: Imposição dos deslocamentos unitários u_1 e u_2

Impõe-se após o deslocamento unitário $u_3 = 1$ e por fim impõe-se $u_4 = 1$ (Figura 3-48a e b respectivamente) com o elemento fixo nas extremidades.



(a) **(b)**

Figura 3-48: Imposição dos deslocamentos unitários u_3 e u_4

Todos os coeficientes de rigidez, S_{Lij} podem ser calculados pelo Método das Forças. Os coeficientes S_{44}, S_{24}, ou S_{22}, S_{42} já foram encontrados anteriormente no item 3.4. Os demais coeficientes podem ser encontrados por equilíbrio e sabendo-se que $S_{ij} = S_{ji}$ (matriz de rigidez é simétrica).

Impõe-se inicialmente u_2 =1 e, conforme visto anteriormente, tem-se que $S_{22} = \frac{4EI}{l}$ e

$$S_{42} = \frac{2EI}{l}$$

Por equilíbrio tem-se que $(\sum M_J = 0 \; e \; \sum F_y = 0)$

$$S_{32} = -\left(\frac{4EI}{l} - \frac{2EI}{l}\right) \div l = -\frac{6EI}{l^2} \qquad \text{e} \qquad S_{12} = +\frac{6EI}{l^2}$$

Analogamente, ao impor-se u_4 = 1 tem-se que $S_{44} = \frac{4EI}{l}$ e $S_{24} = \frac{2EI}{l}$ e por equilíbrio obtêm-se os coeficientes:

$$S_{34} = \frac{-6EI}{l^2} \quad \text{e} \qquad S_{14} = \frac{+6EI}{l^2} \tag{3.33}$$

Por simetria obtêm-se os coeficientes:

$$S_{23} = S_{32} = \frac{-6EI}{l^2} \quad \text{e} \qquad S_{21} = S_{12} = \frac{+6EI}{l^2} \tag{3.34}$$

$$S_{43} = S_{34} = -\frac{6EI}{l^2} \quad \text{e} \quad S_{41} = S_{14} = \frac{6EI}{l^2} \tag{3.35}$$

Os demais coeficientes de rigidez podem ser obtidos por equilíbrio conforme descrito abaixo.

Da Figura 3-49, obtêm-se por equilíbrio os coeficientes:

$$\sum M_J = 0\,, \quad S_{31} = -\left(\frac{6EI}{l^2} + \frac{6EI}{l^2}\right) \div l = \frac{-12EI}{l^3} \tag{3.36}$$

$$\sum F_y = 0\,, \quad S_{11} = -S_{31} = \frac{+12EI}{l^3} \tag{3.37}$$

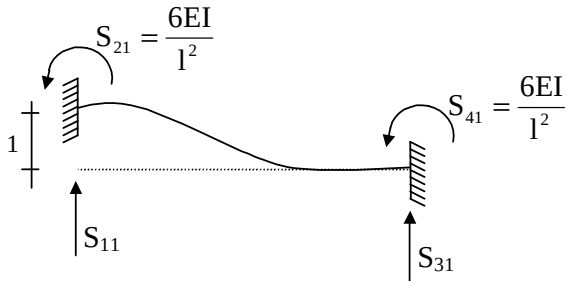


Figura 3-49 Coeficientes de rigidez para deslocamento unitário imposto no GL1

Da Figura 3-50 obtêm-se por equilíbrio os coeficientes:

$$\sum M_K = 0 \quad S_{13} = -\left(\frac{6EI}{l^2} + \frac{6EI}{l^2}\right) \div l = \frac{-12EI}{l^3} \tag{3.38}$$

$$\sum F_y = 0 \quad S_{33} = -S_{13} = +\frac{12EI}{l^3} \tag{3.39}$$

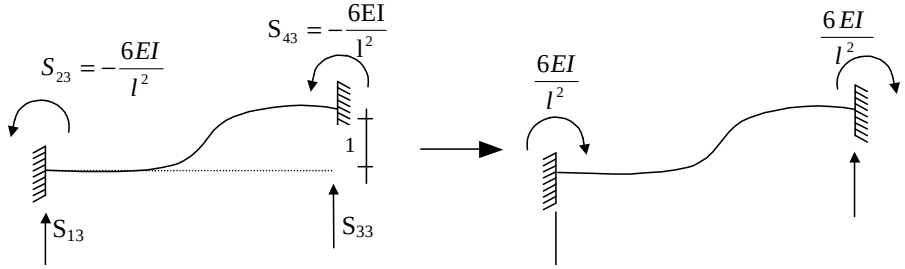


Figura 3-50 Coeficientes de rigidez para deslocamento unitário imposto no GL3

Portanto a matriz de rigidez do elemento de viga (não-restringido) no sistema local é

$$[S_L]_{4\times4} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

Esta matriz de rigidez é singular, seu determinante é nulo, logo ela não é inversível. É necessário restringir o elemento para resolver o sistema de equações de equilíbrio. Não existe, portanto, uma matriz de flexibilidade(que é a inversa da matriz de rigidez) para elemento não-restringido.

Os coeficientes da diagonal de $[S_L]$ são sempre positivos. Para este elemento a matriz de rigidez no sistema local coincide com o global.

3.11.2. Elemento de treliça

Seja o elemento de barra de 2 graus de liberdade por nó formado pelos nós J e K (Figura 3-51). O sistema de referência local não coincide necessariamente com o sistema global; o vetor de deslocamentos nodais é $\{u_L\}_{4x1}$ e a matriz de rigidez é $[S_L]_{4x4}$.

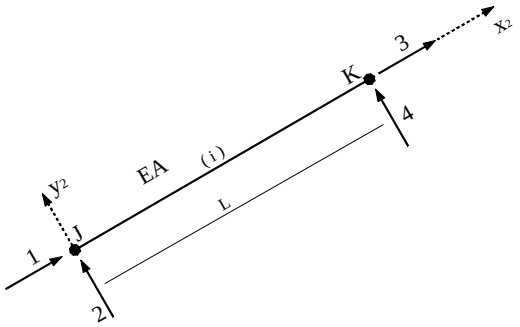


Figura 3-51 Graus de liberdade no sistema local para elemento de treliça plana

O elemento tem comprimento *l* e a área da seção transversal é *A*. Inicialmente, fixa-se o elemento a movimentos de translação (sistema principal), lembrando que as ligações são articuladas (rotações não produzem esforços nos elementos).

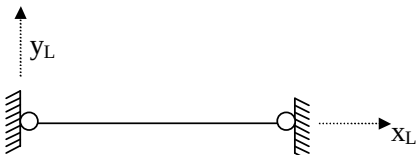


Figura 3-52 Sistema principal para elemento de treliça

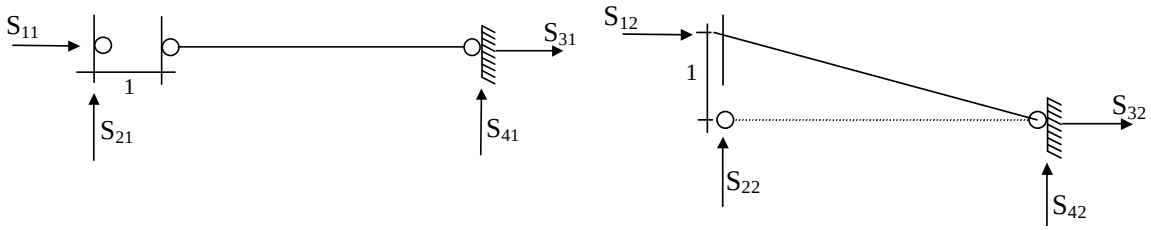
Impõe-se em seguida um deslocamento unitário no GL1, u_1= 1 (Figura 3-53a) e obtêm-se os coeficientes de rigidez por equilíbrio, lembrando que:

$$S_{11} = \frac{EA}{l} \tag{3.41}$$

$$\sum F_x = 0: \quad S_{31} = -S_{11} = -\frac{EA}{l} \tag{3.42}$$

$$\text{e } S_{21} = S_{41} = 0 \tag{3.43}$$

Impõe-se após u_2 = 1, causando um movimento de corpo rígido (o elemento não se deforma, logo não há esforços) (Figura 3-53b), obtêm-se então $S_{12} = S_{22} = S_{32} = S_{42} = 0$.



(a) **(b)**

Figura 3-53: Imposição dos deslocamentos unitários u_1 e u_2

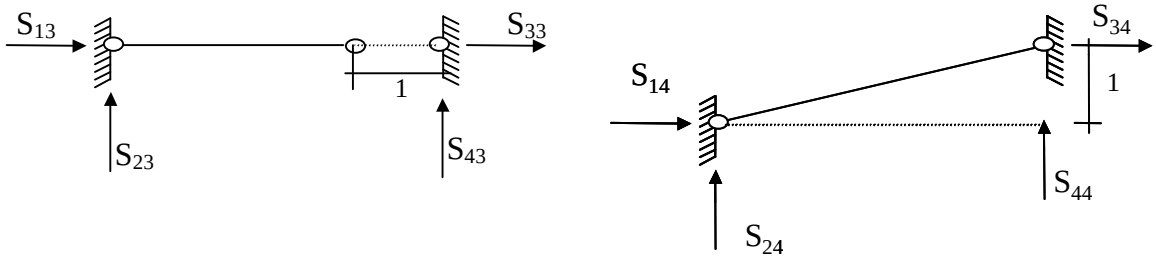
Impõe-se em seguida u_3 = 1 (Figura 3-54a), calculam-se os coeficientes de rigidez por equilíbrio, lembrando que:

$$S_{33} = \frac{EA}{l} \tag{3.44}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_{13} = -\frac{EA}{l} \tag{3.45}$$

$$S_{23} = S_{43} = 0 \tag{3.46}$$

Finalmente impõe-se u_4 = 1 (Figura 3-54b), causando um movimento de corpo rígido (o elemento não se deforma, logo não há esforços), obtendo-se $S_{14} = S_{24} = S_{34} = S_{44} = 0$.



(a) **(b)**

Figura 3-54: Imposição dos deslocamentos unitários u_3 e u_4

A matriz de rigidez do elemento de treliça plana no sistema local pode então ser escrita:

$$[S_L]_{4x4} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

3.11.3. Elemento de pórtico plano

Seja o elemento de pórtico plano com 3 graus de liberdade por nó, formado pelos nós J e K (Figura 3-55). O vetor de deslocamentos nodais é $\{u_L\}_{6x1}$ e a matriz de rigidez é $[S_L]_{6x6}$. Em geral o sistema local não coincide com o sistema global do elemento.

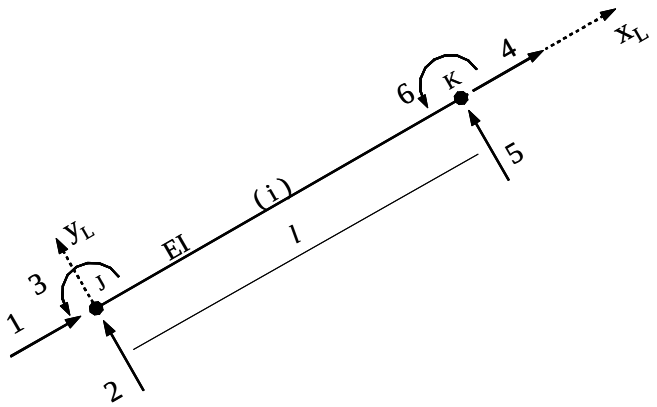


Figura 3-55: Elemento de pórtico plano

A matriz de rigidez do elemento de pórtico plano pode ser encontrada superpondo-se a matriz de rigidez do elemento de viga com a matriz de rigidez do elemento de treliça plana, uma vez que não há interação entre esforço axial e de flexão (pequenos

deslocamentos, estrutura linear). Escreve-se a correspondência entre a numeração dos graus de liberdade do elemento:

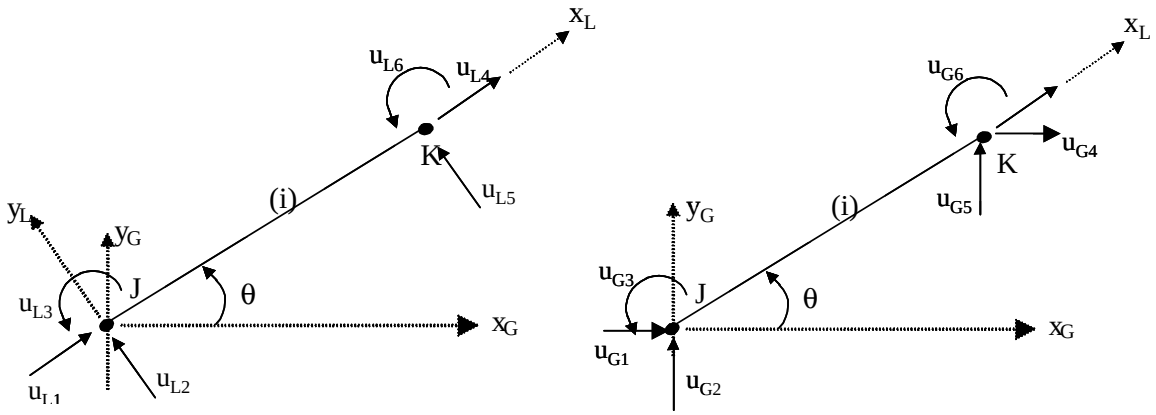
GL 1 do elemento de viga → GL 2 do elemento pórtico plano
GL 2 do elemento de viga → GL 3 do elemento pórtico plano
GL 3 do elemento de viga → GL 5 do elemento pórtico plano
GL 4 do elemento de viga → GL 6 do elemento pórtico plano
GL 1 do elemento de treliça → GL 1 do elemento pórtico plano
GL 3 do elemento de treliça → GL 4 do elemento pórtico plano

Obtêm-se a seguir os coeficientes de rigidez do elemento de pórtico plano a partir dos coeficientes de rigidez dos elementos de viga e de treliça plana obtidos anteriormente. Assim, no sistema local, a matriz de rigidez do elemento de pórtico plano, fica sendo:

$$[S_L]_{6x6} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

3.12. Matriz de rotação – transformação do sistema de coordenadas

Seja por exemplo um elemento de pórtico plano, cujo eixo local x_L faz um ângulo θ (considerado positivo no sentido anti-horário) com o eixo global x_G da estrutura:



Vetor de deslocamentos $\{u_L\}_{6x1}$ **Vetor de deslocamentos $\{u_G\}_{6x1}$**

(a) Sistema local **(b) Sistema global**

Figura 3-56: Vetor de deslocamentos nodais do elemento no sistema local e global

Decompondo-se os deslocamentos u_{G1} e u_{G2} nos eixos x_L e y_L, tem-se:

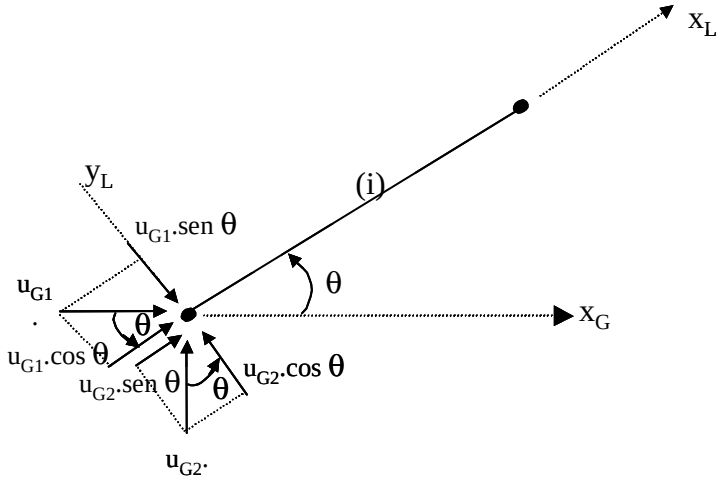


Figura 3-57 Decomposição das componentes do vetor $\{u_G\}$ nos eixos locais

Comparando-se a Figura 3-56a com a Figura 3-57, observa-se que:

$$u_{L1} = u_{G1} \cdot \cos\theta + u_{G2} \cdot sen\,\theta \qquad \text{e}$$

$$u_{L2} = -u_{G1} \cdot sen\,\theta + u_{G2} \cdot \cos\theta \qquad (3.49)$$

tendo em vista que a resultante das componentes u_{L1} e u_{L2} ou u_{G1} e u_{G2} é a translação do nó J no plano, que é um valor único. Observa-se também da Figura 3-56a e Figura

3-56b que $u_{L3} = u_{G3}$ e $u_{L6} = u_{G6}$, pois a rotação do nó J assim como do nó K é a mesma no plano (x_L, y_L ou x_G, x_G).

Matricialmente pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \\ u_{L3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{G1} \\ u_{G2} \\ u_{G3} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \qquad \{u_L^J\}_{3\times1} = [R]_{3\times3}\{u_G^J\} \tag{3.50}$$

.

Analogamente para o nó *K* tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} u_{L4} \\ u_{L5} \\ u_{L6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{G4} \\ u_{G5} \\ u_{G6} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \qquad \{u_L^K\}_{3\times1} = [R]_{3\times3}\{u_G^K\} \tag{3.51}$$

Escrevendo-se agora a relação entre o vetor de deslocamentos nodais do elemento no sistema local, $\{u_L\}$, e o vetor de deslocamentos nodais do elemento no sistema global, $\{u_G\}$, vem:

$$\begin{Bmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \\ u_{L3} \\ u_{L4} \\ u_{L5} \\ u_{L6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{G1} \\ u_{G2} \\ u_{G3} \\ u_{G4} \\ u_{G5} \\ u_{G6} \end{Bmatrix} \text{ ou} \qquad \{u_L\}_{6\times1} = [\Re]_{6\times6}\{u_G\}_{6\times1}$$

ou ainda:

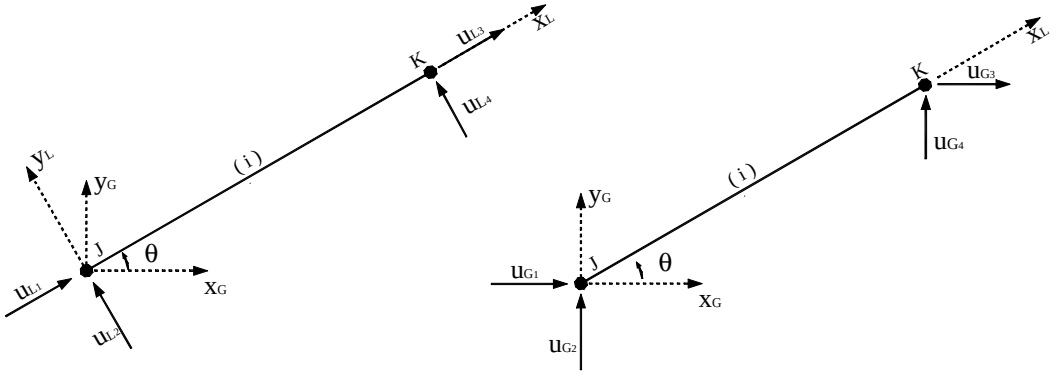
$$\begin{Bmatrix} \{u_L^J\}_{3\times1} \\ \{u_l^K\}_{3\times1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R]_{3\times3} & 0 \\ 0 & [R]_{3\times3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_G^J\}_{3\times1} \\ \{u_G^K\}_{3\times1} \end{Bmatrix} \tag{3.52}$$

A matriz $[\Re]_{6\times6}$ é chamada de matriz de transformação de coordenadas do sistema global para o sistema local ou matiz de rotação (θ positivo do eixo global para o local no sentido anti-horário). Observa-se que a matriz inversa $[\Re]^{-1}$ pode ser obtida substituindo-se θ por -θ (rotação inversa no sentido horário, do local para o global):

$$[\Re]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

Uma vez que cos(-θ) = cosθ e sen(-θ) = -senθ, observa-se que $[\Re]^{-1} = [\Re]^{T}$, ou seja, a matriz [ℜ] é uma matriz ortogonal. Portanto$\{u_G\} = [\Re]^{-1}\{u_L\} = [\Re]^{T}\{u_L\}$.

Para o elemento de treliça plana, têm-se dois graus de liberdade por nó. Não se considera o grau de liberdade de rotação do nó pois este não resulta em esforço na barra.



(a) Sistema local **(b) Sistema global**

Figura 3-58 Vetor de deslocamentos nodais do elemento no sistema local e global

Analogamente ao que foi feito para o elemento de pórtico plano, chega-se à seguinte matriz de transformação de coordenadas (do sistema global para o local) para o elemento de treliça plana:

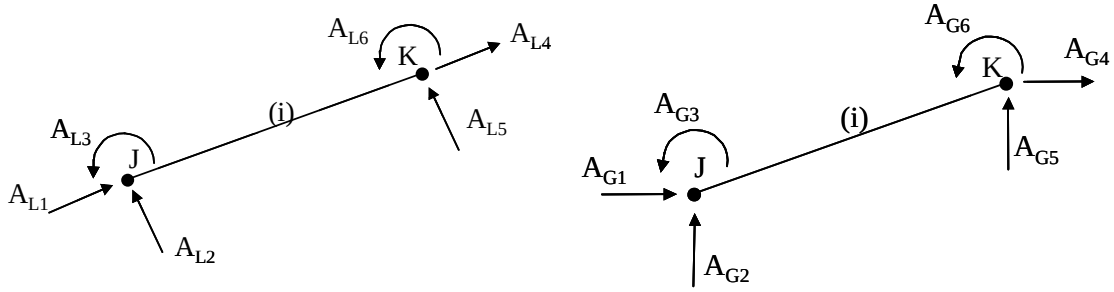
$$[\Re]_{4\times4} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

3.13. Matriz de rigidez de um elemento no sistema global

Seja por exemplo um elemento de pórtico plano. Supondo que não haja cargas atuando ao longo do elemento, os esforços nas extremidades do elemento dependem apenas dos deslocamentos nodais. As equações de equilíbrio no sistema local e global se escrevem:

$$\{A_L\} = [S_L].\{u_L\} \tag{3.55}$$

$$\{A_G\} = [S_G].\{u_G\} \tag{3.56}$$



(a) **(b)**

Figura 3-59 Vetor de esforços na extremidade do elemento no sistema local e global

sendo $\{A_L\}$ e $\{A_G\}$ os vetores de esforços do elemento no sistema local e global, respectivamente, mostrados na Figura 3-59a e Figura 3-59b, $[S_L]$ e $[S_G]$ as matrizes de rigidez do elemento no sistema local e global, respectivamente, e $\{u_L\}$ e $\{u_G\}$ os vetores de deslocamentos nodais do elemento no sistema local e global, respectivamente.

Já foi visto no item anterior que

$$\{u_L\} = [\Re].\{u_G\} \tag{3.57}$$

e analogamente pode-se escrever:

$$\{A_L\} = [\Re].\{A_G\} \quad \therefore$$

$$\{A_G\} = [\Re]^{-1}\{A_L\} = [\Re]^{T}\{A_L\} \tag{3.58}$$

Substituindo-se (3.57) em (3.55) tem-se:

$$\{A_L\} = [S_L].[\Re].\{u_G\} \tag{3.59}$$

Pré multiplicando (3.59) por $[\Re]^T$, vem:

$$[\Re]^T.\{A_L\} = [\Re]^T.[S_L].[\Re].\{u_G\} \tag{3.60}$$

Substituindo-se (3.58) em (3.60):

$$\{A_G\} = [\Re]^T.[S_L].[\Re].\{u_G\} \quad (3.61)$$

Comparando agora as equações (3.61) e (3.56), obtém-se a matriz de rigidez do elemento no sistema global:

$$\{S_G\} = [\Re]^T.[S_L].[\Re] \quad (3.62)$$

Apesar de esta expressão ter sido desenvolvida para o elemento de pórtico plano, ela é genérica e, portanto, válida para todos os tipos de elemento de estrutura reticulada (sendo que para cada tipo de elemento tem-se uma matriz de rotação e uma matriz de rigidez no sistema local diferente).

3.14. Vetor de esforços de engastamento perfeito no sistema global

Para formar o vetor de esforços de engastamento perfeito da estrutura, deve-se transformar os esforços de engastamento perfeito de todos os elementos do sistema local para o global. Analogamente à equação (3.58), tem-se que:

$$\{F_{GEP}\} = [\Re]^T .\{F_{LEP}\} \quad (3.63)$$

3.15. Sistema de equações de equilírio para a estrutura não-restringida

As equações de equilíbrio de forças generalizadas (ou ações) em torno dos nós, para a estrutura com apoios podem ser escritas sob a forma:

$$\{F_{EP}\} + [S].\{D\} = \{A\} \quad (3.64)$$

sendo $\{A\}$ as ações aplicadas nos nós; $\{F_{EP}\}$ os esforços nas extremidades dos elementos devidos às cargas atuando nos elementos para a estrutura fixa (esforços de engastamento perfeito); $[S].\{D\}$ os esforços devido aos deslocamentos nodais.

Estas equações podem ser reescritas para a estrutura não-restringida (sem apoios):

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^*.[D]^* = \{A\}^* \quad (3.65)$$

Ambos os sistemas de equações acima são considerados no sistema global da estrutura, sendo formados a partir das matrizes de rigidez e dos vetores de esforços de engastamento perfeito (formulados em relação aos graus de liberdade dos elementos), conforme explicado a seguir.

3.15.1. Formulação da matriz de rigidez da estrutura

A matriz de rigidez da estrutura não-restringida (sem consideração dos apoios), [*S*]*, é formada a partir das matrizes de rigidez dos elementos no sistema global:

$$[S]^* = \sum_{i=1}^{nelms} \Re^{(i)^T} [S_L]^{(i)} \Re^{(i)} = \sum_{i=1}^{nelms} [S_G]^{(i)} \quad (3.66)$$

sendo *nelms* correspondente ao número de elementos da estrutura.

A matriz de rigidez [*S*]* é então formada "somando-se" a contribuição de todos os elementos, isto é, os coeficientes S^*_{ij} , cujos índices "*i*" e "*j*" correspondem aos graus de liberdade da estrutura (numerados sequencialmente de acordo com a numeração dos nós da estrutura e os eixos do sistema global). Esses coeficientes de rigidez são encontrados somando-se os coeficientes das matrizes de rigidez [S_G] dos elementos que concorrem em um nó da estrutura, e correspondem aos mesmos graus de liberdade *i*" e "*j*" da estrutura. Deve-se então identificar primeiramente a correspondência entre a numeração dos graus de liberdade do elemento e a dos graus de liberdade da estrutura (*Regra da Correspondência*), a ser explicado nos próximos itens.

3.15.2. Numeração dos GL do elemento e da estrutura

Seja, por exemplo, o pórtico plano da Figura 3-60a, que tem oito elementos, sete nós e um total de vinte e um graus de liberdade. A numeração dos graus de liberdade da estrutura (cujos nós tem 3 GL cada) é feita sequencialmente de acordo com a numeração dos nós, e de acordo com o sistema global da estrutura, conforme ilustrado na Figura 3-60b. As matrizes de rigidez dos elementos, no sistema global, têm dimensão 6 x 6 e a matriz de rigidez da estrutura [*S*]* tem dimensão 21 x 21, para este exemplo mostrado na Figura 3-60a.

Para se obter um certo coeficiente de rigidez, por exemplo, $S^*_{14,15}$, que representa o esforço que surge no grau de liberdade 14 da estrutura causado por um deslocamento

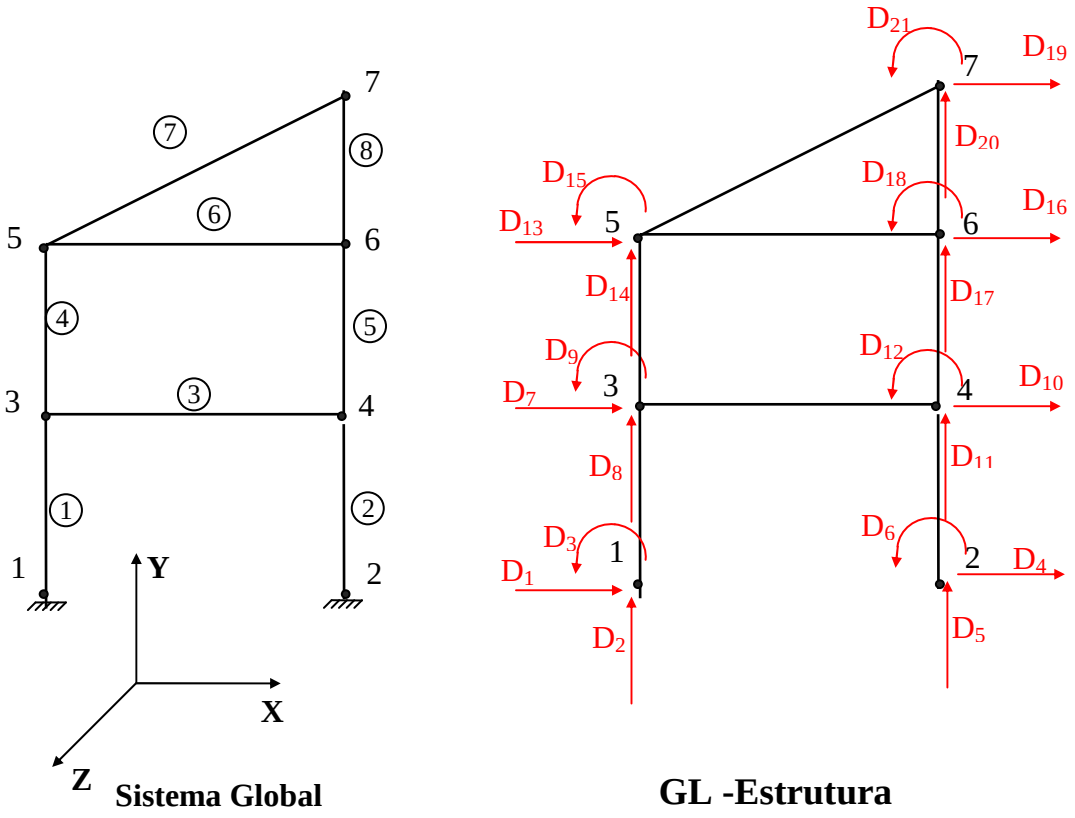


Figura 3-60 Discretização de um pórtico plano: a) Numeração dos nós e dos elementos; b) Numeração dos GL da estrutura

unitário imposto no grau de liberdade 15, mantendo-se os demais deslocamentos nulos, deve-se somar a contribuição dos três elementos (4), (6), e (7), que concorrem no nó 5, ligados a estes graus de liberdade 14 e 15.Os graus de liberdade nas extremidades destes elementos no sistema global (vetor $\{u_G\}$), estão apresentados na Figura 3-61 a seguir:

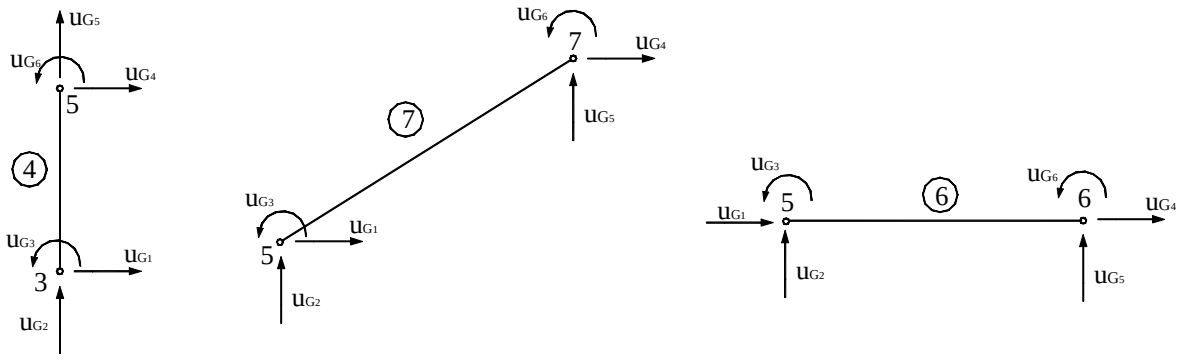


Figura 3-61 Graus de liberdade dos elementos (4), (6) e (7)

Considerou-se nesta numeração que no elemento (4) o nó inicial (J) é o 3 e o final (K) é o 5; no elemento (6) o nó inicial é o 5 e o final é o 6; e, no elemento (7), J=5 e K=7.

Para o elemento (6) o sistema local coincide com o global, logo a matriz de rigidez do elemento será igual nos dois sistemas. Já para os elementos (4) e (6), a matriz de rigidez no sistema global deve ser obtida pela equação (3.62), a partir da matriz de rigidez no sistema local do elemento e da matriz de rotação. Seja, por exemplo, o elemento (4) (ver Figura 3-62). Com o eixo local x_L definido pela incidência dos nós no elemento, J=3 e K=5, tem-se que o ângulo entre este eixo e o eixo global x_G, θ, é 90^o, logo a matriz de rotação que relaciona o vetor de deslocamentos do sistema local com o do sistema global é (ver equação (3.52)):

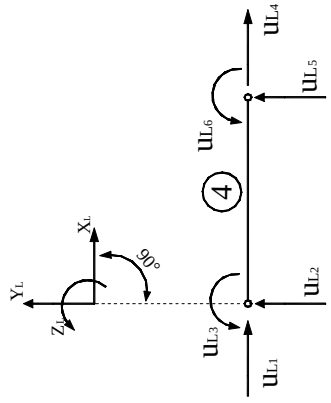


Figura 3-62 Graus de liberdade do elemento (4) no sistema local

$$[\Re] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \{u_L\} = [\Re]\{u_G\} \tag{3.66}$$

Da mesma forma, pode-se obter a matriz de rotação do elemento (7) pela equação (3.52), a partir do ângulo θ deste elemento, e a matriz de rigidez no sistema global pela equação (3.62).

Para somar os coeficientes de rigidez dos elementos (4), (6) e (7) que contribuem para o coeficiente $S^*_{14,15}$ deve-se conhecer a relação entre os graus de liberdade (GL) da estrutura e os do elemento. À direção generalizada, ou GL 14 da estrutura (D_{14}, que é o segundo GL do nó 5), correspondem as direções (ver Figura 3-61):

5 do elemento (4); 2 do elemento (7); e 2 do elemento (6).

À direção 15 (D_{15}) da estrutura correspondem as direções (ver Figura 3-61):

6 do elemento (4); 3 do elemento (7); e 3 do elemento (6).

O coeficiente $S^*_{14,15}$, que exprime a influência de um deslocamento na direção 15 sobre o esforço na direção 14 (força vertical no nó 5), será a soma dos coeficientes de influência das matrizes $[S_G]$ dos elementos (4), (7), e (6) correspondentes:

$$S^*_{14,15} = S^{(4)}_{G_{56}} + S^{(7)}_{G_{23}} + S^{(6)}_{G_{23}} \tag{3.67}$$

Para compreender fisicamente o significado desta expressão, multiplicam-se ambos os lados da equação (3.67) acima por $D_{15}\left(= u^{(4)}_{G_6} = u^{(7)}_{G_3} = u^{(6)}_{G_3}\right)$:

$$S^*_{14,15}\ D_{15} = S^{(4)}_{G_{56}}\ u^{(4)}_{G_6} + S^{(7)}_{G_{23}}\ u^{(7)}_{G_3} + S^{(6)}_{G_{23}}\ u^{(6)}_{G_3}, \tag{3.68}$$

sendo que $S^*_{14,15}\ D_{15}$ (que é uma parcela da força total A_{14}) representa a força na direção 14 devido a uma rotação no nó 5 (= D_{15}), cuja magnitude é igual à soma das forças nos elementos (4), (7), e (6) na direção correspondente ao GL 14 da estrutura (direções 5, 2 e 2 dos elementos, (4), (7), e (6), respectivamente), devido à esta rotação do nó $\underline{5}$, D_{15} .

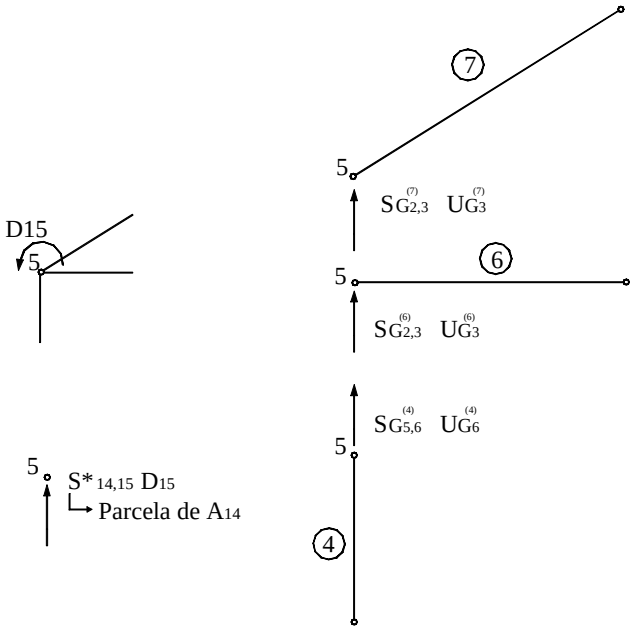


Figura 3-63 Forças nas extremidades dos elementos que contribuem para A_{14}

Para $S^*_{14,15}$ contribuem três elementos que concorrem no nó 5, já para o coeficiente $S^*_{14,21}$ contribui apenas o elemento (7), pois $S^*_{14,21}$ exprime a força na direção 14,

causada por uma rotação unitária no GL 21 (existe um único elemento que liga o GL 14 ao GL 21).

Verifica-se que $S^*_{14,10}$ é nulo, pois não há nenhum elemento ligando o grau de liberdade 14 ao 10. Isto ocorrerá com vários outros coeficientes, o que explica o fato dos coeficientes da matriz $[S]^*$ se agruparem em uma "banda" (ou faixa) em torno da diagonal principal, sendo nulos os demais coeficientes fora desta banda.

Este procedimento de se identificar para cada coeficiente da matriz de rigidez da estrutura não-restringida $[S]^*$ quais são os elementos que irão contribuir para o mesmo, e quais os coeficientes que devem ser somados, não é prático e portanto não costuma ser utilizado, tendo sido mostrado apenas por fins didáticos para se explicar o conceito de coeficiente de rigidez da estrutura. Utiliza-se, em geral, um outro procedimento, mais expedito, em que inicialmente se estabelece a correspondência entre a numeração dos graus de liberdade dos elementos e os da estrutura, conforme descrito no que se segue.

3.15.3. Regra da Correspondência

Os deslocamentos nodais da estrutura são expressos no sistema global ($\{D\}$) e, conforme já foi visto anteriormente, pode-se também representar os deslocamentos nodais na extremidade do elemento no sistema global ($\{u_G\}$). Os valores das componentes destes vetores de deslocamentos nodais são iguais para o elemento e para a estrutura, porém os seus índices são diferentes, pois a numeração dos graus de liberdade do elemento e da estrutura é diferente. Será utilizada então uma regra, denominada *Regra da Correspondência*, para relacionar a numeração dos graus de liberdade de cada elemento com a numeração dos graus de liberdade da estrutura. Em cada elemento (i), denominando-se J o número do nó inicial e K o número do nó final, os deslocamentos ou graus de liberdade são sempre numerados de 1 a 2 × NGL (onde NGL = número de graus de liberdade por nó), iniciando-se pelo nó J e seguindo-se a ordem dos eixos no sistema global. A Figura 3-64a mostra um exemplo para um elemento de pórtico plano, em que NGL=3, logo apresenta um total de seis graus de liberdade. Já na estrutura a numeração dos graus de liberdade depende do número do nó, e como NGL=3, o último grau de liberdade de um nó J (no caso deste exemplo é o GL de rotação) é igual a 3 × J, o penúltimo é (3 × J -1) e o anterior, no caso o primeiro GL do nó, é igual a (3 × J -2). Procede-se analogamente para o nó K (ver Figura 3-64b).

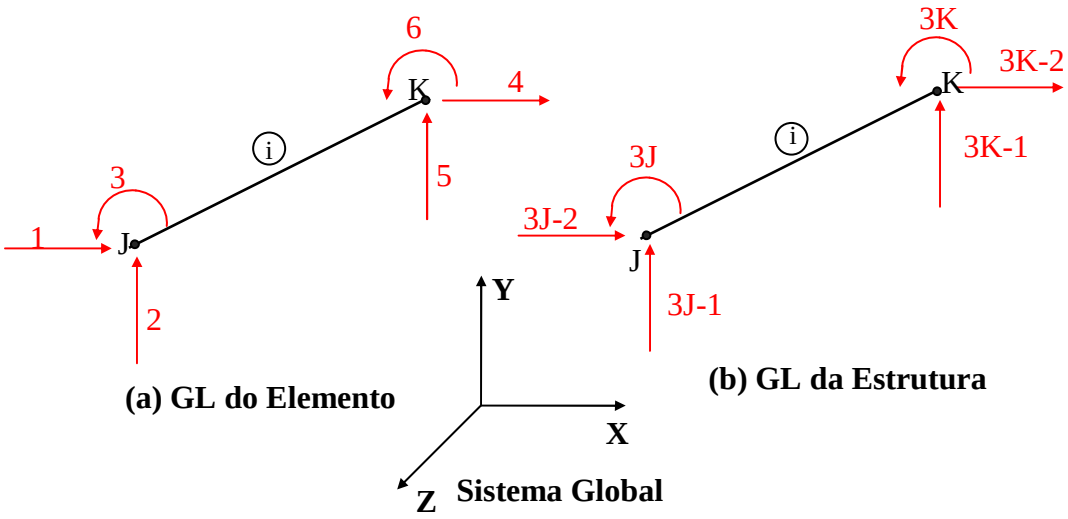


Figura 3-64 Graus de liberdade: a) do Elemento; b) da Estrutura

3.15.4. Regra da Correspondência: Elementos de pórtico plano

Seja novamente o pórtico plano mostrado na Figura 3-60. Tomando-se como exemplo o elemento (7), que liga o nó 5 ao nó 7 (J=5; K=7), tem-se que para o elemento a numeração dos graus de liberdade é de 1 a 6, como mostra a Figura 3-65a e, para a estrutura, a numeração dos graus de liberdade é feita de acordo com o número dos nós inicial e final, pela *Regra da Correspondência*, como mostra a Figura 3-65b.

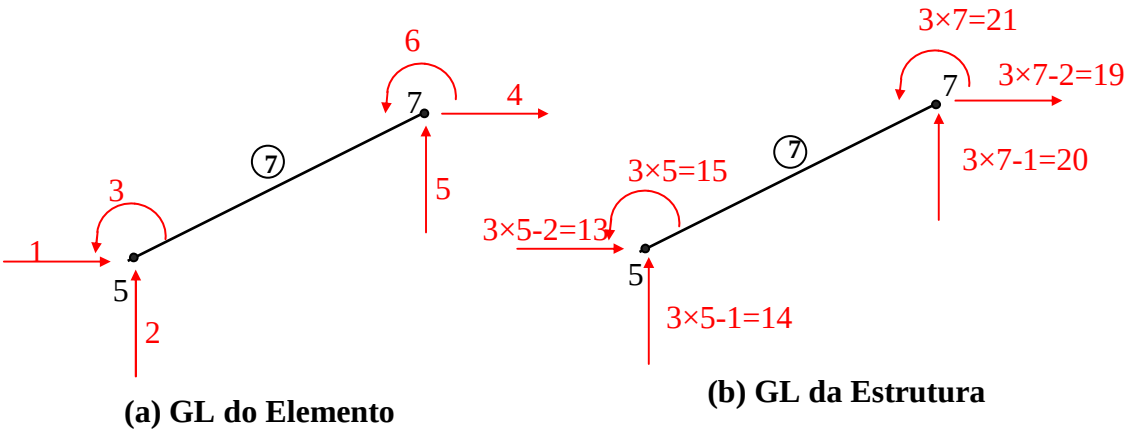


Figura 3-65 Regra da Correspondência entre: a) GL do elemento (pórtico plano) e b) GL da estrutura

Levando em conta todos os elementos do pórtico, a *Regra da Correspondência* pode ser organizada em uma tabela, como a Tabela 3-2 mostrada a seguir.

Tabela 3-2: *Regra da Correspondência* entre numeração dos graus de liberdade da estrutura e dos elementos

Elemento (i) J→K	GL da Estrutura								GL do elem. $\{u_G\}$
	(1) 1 → 3	(2) 2 → 4	(3) 3 → 4	(4) 3 → 5	(5) 4 → 6	(6) 5 → 6	(7) 5 → 7	(8) 6 → 7	
3J-2	**1**	**4**	**7**	**7**	**10**	**13**	**13**	**16**	**1**
3J-1	**2**	**5**	**8**	**8**	**11**	**14**	**14**	**17**	**2**
3J	**3**	**6**	**9**	**9**	**12**	**15**	**15**	**18**	**3**
3K-2	**7**	**10**	**10**	**13**	**16**	**16**	**19**	**19**	**4**
3K-1	**8**	**11**	**11**	**14**	**17**	**17**	**20**	**20**	**5**
3K	**9**	**12**	**12**	**15**	**18**	**18**	**21**	**21**	**6**

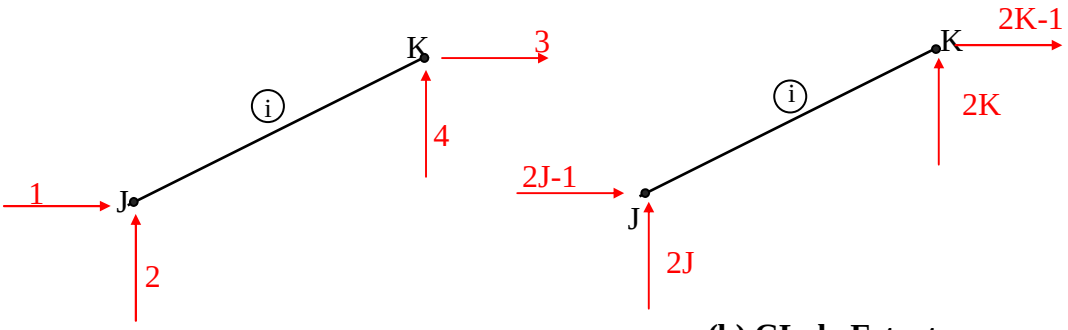
Para formar a matriz de rigidez $[S]^*$ da estrutura deve-se levar em conta a contribuição de todos os elementos, o que é feito por acumulação. Inicialmente, para cada elemento efetuam-se as etapas:

1. Calcula-se a matriz de rigidez do elemento no sistema global, $[S_G]$
2. Calcula-se a *Regra da Correspondência* do elemento
3. Armazena-se cada coeficiente da matriz $[S_G]$ do elemento na posição correspondente na matriz $[S]^*$, isto é os coeficientes são posicionados nas linhas e colunas correspondentes aos GL da estrutura, obtidos pela *Regra da Correspondência* (por exemplo, os coeficientes da matriz $[S_G]$ do elemento (7) serão colocados nas linhas 13,14,15,19,20,21 e colunas 13,14,15,19,20,21 da matriz $[S]^*$; os coeficientes da matriz $[S_G]$ do elemento (4) serão colocados nas linhas 7,8,9, 13,14,15 e colunas 7,8,9, 13,14,15; e assim por diante...)

Passa-se para o elemento seguinte e seguem-se as etapas 1 a 3 descritas acima. Se, ao se armazenar um determinado coeficiente da matriz $[S_G]$ do elemento na matriz $[S]^*$, já houver algum coeficiente ocupando esta posição (proveniente de outro elemento), soma-se o novo coeficiente a este (por exemplo ao se posicionar o coeficiente S_{G23} do elemnto (6) na posição 14,15 de $[S]^*$ este deverá ser somado ao coeficiente S_{G56} do elemento (4) que já se encontra armazenado na mesma posição). Assim os coeficientes dos elementos que concorrem em um mesmo nó da estrutura serão somados automáticamente. Ao terminar este procedimento (etapas 1 a 3) para todos os elementos está pronta a matriz $[S]^*$, devendo-se apenas preencher com zero as posições que não foram preenchidas por nenhum elemento. Este mesmo procedimento é utilizado para formar o vetor de engastamento perfeito da estrutura, $\{F_{EP}\}^*$, a partir dos vetores de engastamento perfeito dos elementos no sistema global, $\{F_{GEP}\}$.

3.15.5. Regra da Correspondência: Elementos de treliça e de viga

Seja agora um elemento de treliça, (i), em que J é o número do nó inicial e K o do nó final. Conforme visto anteriormente, para este tipo de elemento consideram-se apenas dois graus de liberdade (de translação) por nó (NGL=2), tendo em vista que as ligações são admitidas articuladas e as rotações não provocam assim esforços no elemento. Os graus de liberdade no elemento são sempre numerados de 1 a 2 × NGL, no caso de 1 a 4, iniciando-se pelo nó J e seguindo-se a ordem dos eixos no sistema global, como mostra a Figura 3-66a. Já na estrutura a numeração dos graus de liberdade depende do número do nó, e como NGL=2, o último (segundo) grau de liberdade de um nó J é igual a 2 × J e o primeiro é (2 × J -1). Procede-se analogamente para o nó K (ver Figura 3-66b).



(a) GL do Elemento **(b) GL da Estrutura**

Figura 3-66 Regra da Correspondência entre: a) GL do elemento (treliça plana) e b) GL da estrutura

Para o caso particular de elementos unidimensionais, ou seja, elementos de treliça em que os eixos de todas as barras situam-se em uma mesma reta, paralela ao eixo Global X, e só há forças axiais atuantes, haverá apenas um grau de liberdade axial em cada nó, logo NGL=1. Para este caso particular a *Regra da Correspondência* está ilustrada na Figura 3-67.

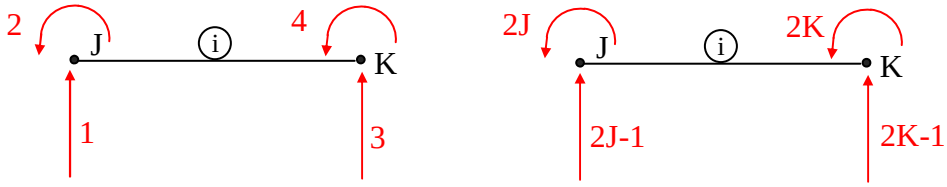


(a) GL do Elemento **(b) GL da Estrutura**

Figura 3-67 Regra da Correspondência entre: a) GL do elemento (unidimensional) e b) GL da estrutura

Para o elemento de viga a *Regra da Correspondência* é a mesma do que para o elemento de treliça plana, uma vez que também se consideram dois graus de liberdade

por nó (NGL=2), sendo que para viga desconsidera-se o grau de liberdade de translação axial, logo os dois GL do nó são translação paralela a y e rotação em torno de z. A ilustra a *Regra da Correspondência* para o elemento de viga.



(a) GL do Elemento **(b) GL da Estrutura**

Figura 3-68 Regra da Correspondência entre: a) GL do elemento (viga) e b) GL da estrutura

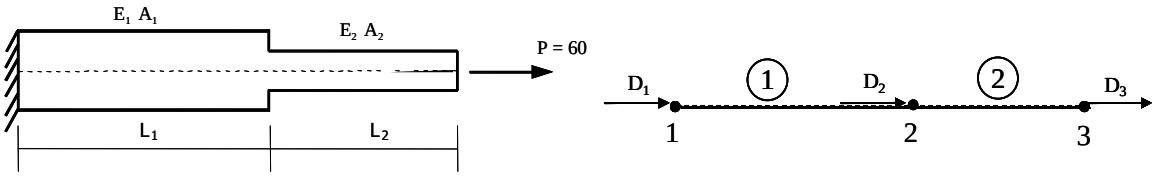
Apresentam-se a seguir alguns exemplos de formulação da matriz de rigidez da estrutura não-restringida por meio da técnica da *Regra da Correspondência*.

3.15.6. Exemplo 1 – haste composta de elementos unidimensionais

Seja o exemplo de uma haste composta de duas barras de comprimentos, áreas e materiais diferentes, mostrada na Figura 3-69. São dadas as rigidezes axiais das barras:

$E_1.A_1/L_1 = 10$ $E_2.A_2/L_2 = 30$

A haste é modelada por dois elementos e três nós, estando fixa na extremidade esquerda e submetida apenas a uma força axial na extremidade direita. As incógnitas do problema são então os deslocamentos nodais dos nós 2 e 3: $D_2 = ?$; $D_3 = ?$

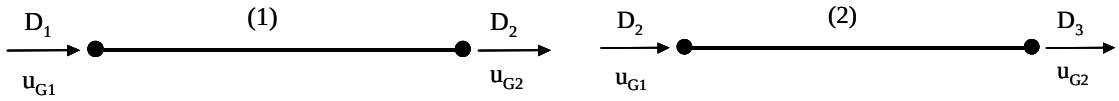


(a) **(b)**

Figura 3-69: a) Haste composta de dois elementos unidimensionais; b) GL da estrutura

Para facilitar a visualização da formação da matriz de rigidez da estrutura não foram mostradas as unidades para este exemplo Os elementos de barra utilizados na modelagem da barra estão mostrados na Figura 3-70, sendo que cada nó apresenta

apenas um grau de liberdade (translação horizontal). A Regra da Correspondência está mostada na Tabela 3-3.



(a) Elemento 1 **(b) Elemento 2**

Figura 3-70: GL dos elementos (1) e (2) e GL correspondentes da Estrutura

Tabela 3-3: Regra da correspondência: GL da estrutura correspondente ao GL dos elementos

Elemento J → K	**GL da Estrutura**		GL do elemento
	1 1 → 2	2 2 → 3	{u_G}
J	**1**	**2**	1
K	**2**	**3**	2

A matriz de rigidez da estrutura não-restringida (sem apoios) é formada levando-se em conta a contribuição dos dois elementos, somando-se os coeficientes das matrizes de rigidez no sistema global, que correspondem ao mesmo grau de liberdade da estrutura:

$$[S_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \frac{-EA}{l} \\ \frac{-EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$\left[S_G^{(1)}\right] = \left[S_L^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\left[S_G^{(2)}\right] = \left[S_L^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 30 & -30 \\ -30 & 30 \end{bmatrix}$$

$$[S]^* = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 10+30 & -30 \\ 0 & -30 & 30 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad [S]^* = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 40 & -30 \\ 0 & -30 & 30 \end{bmatrix}$$

Será visto mais adiante como se impor as condições de contorno para se obter a matriz de rigidez da estrutura restringida, [*S*]. A partir da inversa desta matriz [*S*] e do vetor de ações serão obtidos os deslocamentos nodais da estrutura.

3.15.7. Exemplo 2 – Viga contínua

Seja a viga contínua mostrada, esquematicamente, na Figura 3-71, cujo número de graus de liberdade por nó é igual a dois. A viga foi modelada por cinco nós e quatro elementos, como mostra a Figura 3-72, que inclui também a numeração dos graus de liberdade da estrutura. A numeração dos GL dos elementos está mostrada na Figura 3-73.

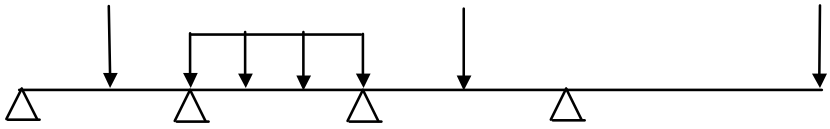


Figura 3-71: Viga contínua

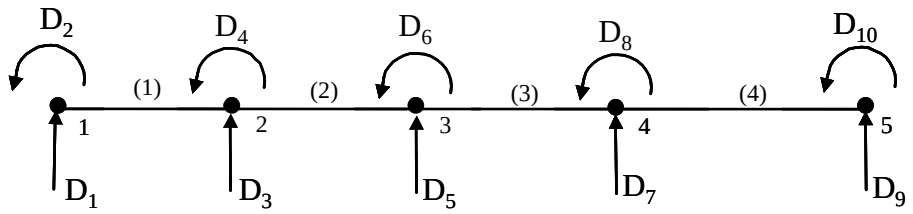


Figura 3-72: Numeração dos nós, elementos e graus de liberdade da estrutura

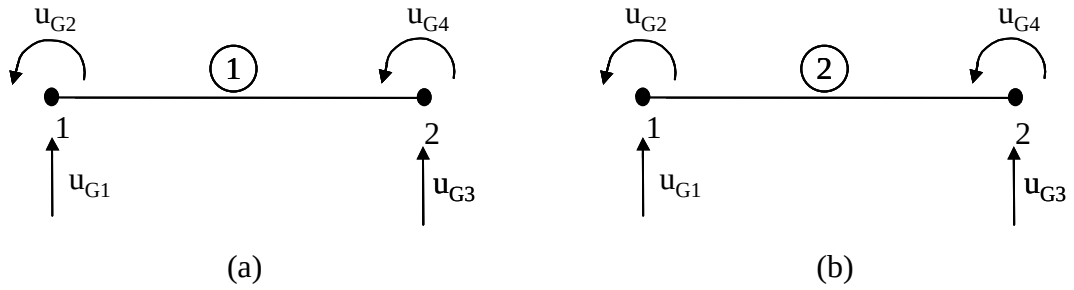


Figura 3-73: Elementos de viga utilizados na modelagem – graus de liberdade dos elementos (1) e (2)

Pela *Regra da Correspondência*, os graus de liberdade na estrutura de um nó Nó J são numerados da seguinte forma: o primeiro é 2J-1 e o segundo é 2J, conforme foi visto no item 3.15.5. Assim forma-se a Tabela 3-4 para este exemplo de viga contínua, com a *Regra da Correspondência* entre os graus de liberdade dos elementos e os da estrutura.

Tabela 3-4: *Regra da Correspondência* entre os GL dos elementos e os da estrutura

Elemento J → K	Grau de Liberdade da Estrutura				GL do elemento
	(1) 1 → 2	(2) 2 → 3	(3) 3 → 4	(4) 4 → 5	{u_G}
2J - 1	1	3	5	7	1
2J	2	4	6	8	2
2K - 1	3	5	7	9	3
2K	4	6	8	10	4

As matrizes de rigidez dos elementos de viga são idênticas para o sistema global e o local. Este é um exemplo didático em que não serão calculados os valores numéricos dos coeficientes destas matrizes, sendo usados símbolos para representá-los, conforme mostrado abaixo, visando apenas ilustrar a posição que estes irão ocupar na matriz de rigidez da estrutura, $[S]^*$. Mostram-se nas matrizes de rigidez dos elementos as linhas e colunas correspondentes às linhas e colunas da matriz de rigidez da estrutura.

$[S_G]^1 =$

1	2	3	4	
□	□	□	□	1
□	□	□	□	2
□	□	□	□	3
□	□	□	□	4

$[S_G]^2 =$

3	4	5	6	
X	X	X	X	3
X	X	X	X	4
X	X	X	X	5
X	X	X	X	6

$[S_G]^3 =$

5	6	7	8	
●	●	●	●	5
●	●	●	●	6
●	●	●	●	7
●	●	●	●	8

$[S_G]^4 =$

7	8	9	10	
Δ	Δ	Δ	Δ	7
Δ	Δ	Δ	Δ	8
Δ	Δ	Δ	Δ	9
Δ	Δ	Δ	Δ	10

Os coeficientes da matriz de rigidez da estrutura não restringida, $[S]^*$, são formados a partir dos coeficientes das matrizes de rigidez no sistema global de cada elemento, usando-se a *Regra da Correspondência* e somando-se os coeficientes que correspondem ao mesmo grau de liberdade da estrutura, nos nós onde concorrem elementos.

$S^*_{33} = S^1_{G_{33}} + S^2_{G_{11}}$

$S^*_{34} = S^1_{G_{34}} + S^2_{G_{12}}$

$S^*_{44} = S^1_{G_{44}} + S^2_{G_{22}}$

$S^*_{55} = S^2_{G_{33}} + S^3_{G_{11}}$

$S^*_{66} = S^2_{G_{44}} + S^3_{G_{22}}$

$S^*_{56} = S^2_{G_{34}} + S^3_{G_{12}}$, etc…

A matriz de rigidez da estrutura, $[S]^*$, resultante está mostrada abaixo.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
	□	□	□	□	0	0	0	0	0	0	**1**
	□	□	□	□	0	0	0	0	0	0	**2**
	□	□	□+	X □ X	X	X	0	0	0	0	**3**
	□	□	□+	X □ X	X	X	0	0	0	0	**4**
[S*]=	0	0	X	X	X+ ●	X+ ●	●	●	0	0	**5**
	0	0	X	X	X+ ●	X+ ●	●	●	0	0	**6**
	0	0	0	0	●	●	●+ Δ	●+ Δ	Δ	Δ	**7**
	0	0	0	0	●	●	●+ Δ	●+ Δ	Δ	Δ	**8**
	0	0	0	0	0	0	Δ	Δ	Δ	Δ	**9**
	0	0	0	0	0	0	Δ	Δ	Δ	Δ	**10**

Observa-se que há vários coeficientes nulos nesta matriz (o que ocorre sempre que não houver um elemento ligando os graus de liberdade correspondentes ao coeficiente) e que os coeficientes não-nulos tendem a se agrupar em torno da diagonal, característica conhecida como de “banda” ou de “faixa” da matriz. Esta característica irá depender da numeração dos nós da estrutura, conforme será visto no exemplo a seguir, em que se utiliza a mesma viga do exemplo deste item, mas com numeração diferente.

3.15.8. Exemplo 3 - Viga contínua com numeração dos nós não sequencial

Seja a mesma viga contínua do exemplo anterior, mudando-se agora a numeração dos nós, conforme mostrado na Figura 3-74.

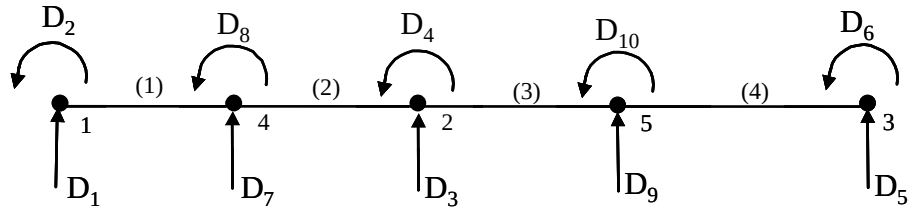


Figura 3-74: Graus de liberdade da estrutura

A *Regra da Correspondência* da viga para esta numeração é a mostrada na Tabela 3-5.

Tabela 3-5: *Regra da Correspondência* entre os GL dos elementos e os da estrutura

Elemento J → K	Grau de Liberdade da Estrutura				GL do elemento
	(1) 1 → 4	(2) 4 → 2	(3) 2 → 5	(4) 5 → 3	{u_G}
2J - 1	1	7	3	9	1
2J	2	8	4	10	2
2K - 1	7	3	9	5	3
2K	8	4	10	6	4

Os coeficientes das matrizes de rigidez dos elementos no sistema global ocuparaão agora posições diferentes na matriz de rigidez da estrutura, $[S]^*$. Mostram-se abaixo, nas matrizes de rigidez dos elementos, as linhas e colunas correspondentes às linhas e colunas da matriz de rigidez da estrutura.

$$[S_G]^1 = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 7 & 8 & \\ \hline & \square & \square & \square & \square & 1 \\ & \square & \square & \square & \square & 2 \\ & \square & \square & \square & \square & 7 \\ & \square & \square & \square & \square & 8 \end{array}$$

$$[S_G]^2 = \begin{array}{c|cccc|c} & 7 & 8 & 3 & 4 & \\ \hline & X & X & X & X & 7 \\ & X & X & X & X & 8 \\ & X & X & X & X & 3 \\ & X & X & X & X & 4 \end{array}$$

$$[S_G]^3 = \begin{array}{c|cccc|c} & 3 & 4 & 9 & 10 & \\ \hline & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 3 \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 4 \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 9 \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 10 \end{array}$$

$$[S_G]^4 = \begin{array}{c|cccc|c} & 9 & 10 & 5 & 6 & \\ \hline & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & 9 \\ & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & 10 \\ & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & 5 \\ & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & 6 \end{array}$$

Os coeficientes da matriz de rigidez da estrutura não-restringida, $[S]^*$, são formados assim por acumulação:

$$S^*_{33} = S^2_{G33} + S^3_{G11} \qquad S^*_{55} = S^4_{G33}$$

$$S^*_{44} = S^2_{G44} + S^3_{G22} \qquad S^*_{66} = S^4_{G44}, \text{ etc…}$$

$$S^*_{77} = S^1_{G33} + S^2_{G11} \qquad S^*_{99} = S^3_{G33} + S^4_{G11}$$

$$S^*_{78} = S^1_{G34} + S^2_{G12}$$

e ao final do processo preenchem-se com zeros os coeficientes nulos, resultando na matriz de rigidez da estrutura, $[S]^*$, mostrada abaixo. Observa-se que com esta nova numeração dos nós a matriz tornou-se mais *esparsa*, perdendo sua característica de "banda".

[S*]=	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	1	□	0	0	0	0	□	□	0	0
	2	□	□	0	0	0	0	□	□	0	0
	3	□	0	X+ ●	X+ ●	0	0	X	X	●	●
	4	0	0	X+ ●	X+ ●	0	0	X	X	●	●
	5	0	0	0	0	Δ	Δ	0	0	Δ	Δ
	6	0	0	0	0	Δ	Δ	0	0	Δ	Δ
	7	□	□	X	X	0	0	□ + X	□ + X	0	0
	8	□	□	X	X	0	0	□ + X	□ + X	0	0
	9	0	0	●	●	0	0	0	0	● + Δ	● + Δ
	10	0	0	●	●	0	0	0	0	● + Δ	● + Δ

3.15.9. Exemplo Numérico- Viga contínua

Seja a viga contínua ilustrada na Figura 3-75, que é o mesmo exemplo calculado anteriormente no item 3.5.2 (tratando a estrutura globalmente, sem dividi-la em elementos). A viga tem seção transversal constante com rigidez à flexão $EI = 72 \times 10^3$ kNm^2. As incógnitas do problema são os deslocamentos nodais D_4 e D_6.

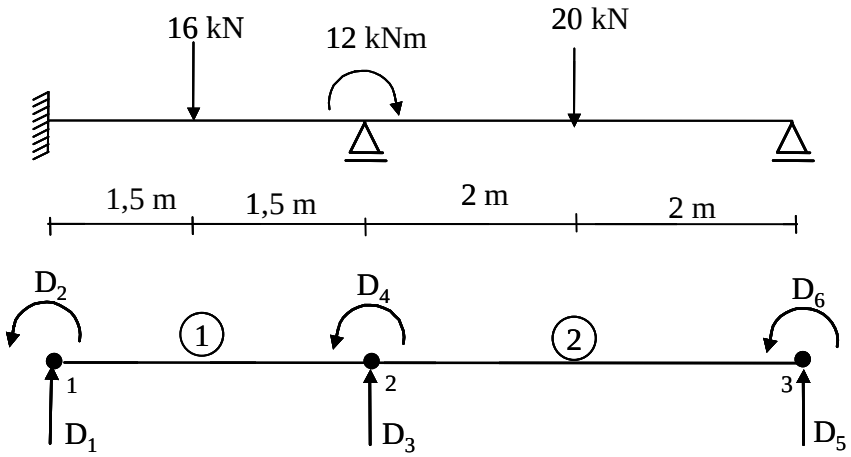


Figura 3-75: Viga contínua – geometria, carregamento; modelagem- numeração de nós, elementos e graus de liberdade da estrutura

Divide-se a estrutura em dois elementos como mostra a Figura 3-76:

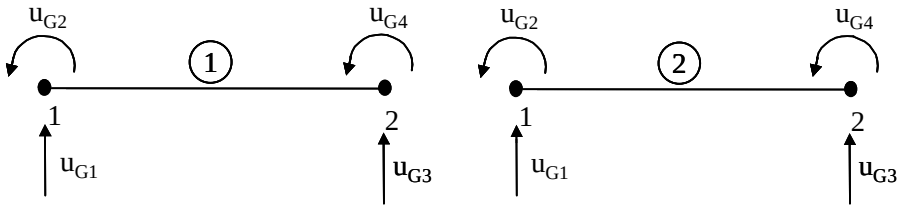


Figura 3-76: Graus de liberdade dos elementos

A metodologia de cálculo do Método dos Deslocamentos com formulação matricial segue a indicada no resumo do item 3.10.

A *Regra da Correspondência* que relaciona a numeração dos graus de liberdade do elemento e da estrutura (ver item 3.15.5), para esta viga contínua, está mostrada na Tabela 3-6.

Tabela 3-6: Regra da correspondência: GL da estrutura correspondente aos GL dos elementos

	GL da Estrutura		GL do elemento $\{u_G\}$
Elemento J → K	(1) 1→2	(2) 2→3	
2J - 1	**1**	**3**	1
2J	**2**	**4**	2
2K - 1	**3**	**5**	3
2K	**4**	**6**	4

Matrizes de rigidez dos elementos e da estrutura

Para cada elemento calcula-se sua matriz de rigidez (que para elemento de viga é igual no sistema local e global), cujos coeficientes dependem do comprimento do elemento *l* e de sua rigidez à flexão *EI* (ver item 3.11.1).

Mostram-se as matrizes resultantes abaixo (apenas os valores, sem unidades), inserindo-se ao redor dos coeficientes as linhas e colunas correspondentes da matriz de rigidez da estrutura não-restringida, usando-se a *Regra da Correspondência*:

Elemento 1: $l_1 = 3\text{m}$

$$\left[S_G^1\right] = 10^3 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 32 & 48 & -32 & 48 \\ 48 & 96 & -48 & 48 \\ -32 & -48 & 32 & -48 \\ 48 & 48 & -48 & 96 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Elemento 2: $l_2 = 4\text{m}$

$$\left[S_G^2\right] = 10^3 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 13{,}5 & 27 & -13{,}5 & 27 \\ 27 & 72 & -27 & 36 \\ -13{,}5 & -27 & 13{,}5 & -27 \\ 27 & 36 & -27 & 72 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Posicionando-se os coeficientes das matrizes dos elementos nas linhas e colunas da matriz de rigidez da estrutura não-restringida, e somando-se os coeficientes que ocupam a mesma posição (que correspondem aos mesmos graus de liberdade da estrutura), obtém-se a matriz da estrutura $[S]^*$ (preenche-se com zeros as posições não ocupadas):

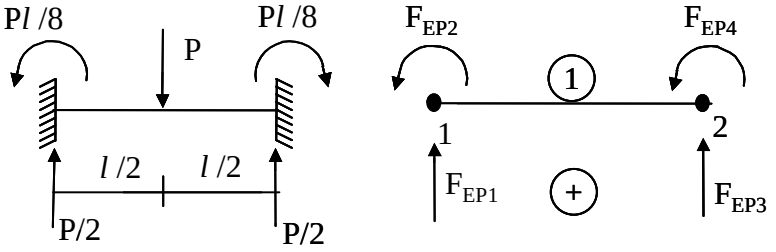
$$\left[\text{S}^*\right] = 10^3 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 32 & 48 & -32 & 48 & 0 & 0 \\ 48 & 96 & -48 & 48 & 0 & 0 \\ -32 & -48 & 32+13{,}5 & -48+27 & -13{,}5 & 27 \\ 48 & 48 & -48+27 & 96+72 & -27 & 36 \\ 0 & 0 & -13{,}5 & -27 & 13{,}5 & -27 \\ 0 & 0 & 27 & 36 & -27 & 72 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\left[\text{S}^*\right] = 10^3 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 32 & 48 & -32 & 48 & 0 & 0 \\ 48 & 96 & -48 & 48 & 0 & 0 \\ -32 & -48 & 45{,}5 & -21 & -13{,}5 & 27 \\ 48 & 48 & -21 & 168 & -27 & 36 \\ 0 & 0 & -13{,}5 & -27 & 13{,}5 & -27 \\ 0 & 0 & 27 & 36 & -27 & 72 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

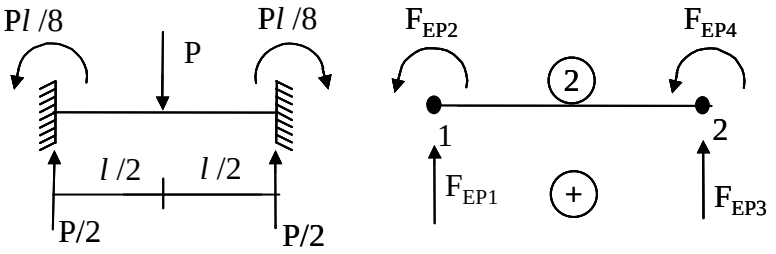
Vetores de esforços de engastamento perfeito dos elementos e da estrutura

Os esforços de engastamento perfeito podem ser encontrados pelo Método das Forças, conforme visto anteriormente, sendo que podem ser encontrados em tabelas disponíveis na literatura para diversos tipos de cargas aplicadas. Para uma força vertical concentrada no meio do vão têm-se os seguintes esforços:

Elemento 1 $l_1 = 3$ m



Elemento 2 $l_2 = 4$ m



Substituindo-se os valores das forças aplicadas e dos comprimentos das barras nas expressões acima obtêm-se os vetores de esforços de engastamento perfeito dos elementos no sistema local, que coincide com o sistema global para elemento de viga (mostrando-se apenas os valores, sem unidades):

$$\left\{F^{1}_{EP_G}\right\} = \left\{F^{1}_{EP_L}\right\} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \\ -6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 2 \\ \rightarrow 3 \\ \rightarrow 4 \end{matrix} \text{ GL da estrutura}$$

$$\left\{F^{2}_{EP_G}\right\} = \left\{F^{2}_{EP_L}\right\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ -10 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 3 \\ \rightarrow 4 \\ \rightarrow 5 \\ \rightarrow 6 \end{matrix} \text{ GL da estrutura}$$

Analogamente ao que foi feito com as matrizes de rigidez, forma-se o vetor de esforços de engastamento perfeito da estrutura (não-restringida) usando-se a *Regra da Correspondência*:

$$\{F_{EP}\}^* = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix}\begin{Bmatrix}8\\6\\8+10\\-6+10\\10\\-10\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}8\\6\\18\\4\\10\\-10\end{Bmatrix}$$

Sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida:

O sistema de equações para esta viga contínua, sem considerar os apoios, tem um total de seis equações e seis incógnitas:

$\{F_{EP}\}^* + [S]^*.\{D\}^* = \{A\}^*$

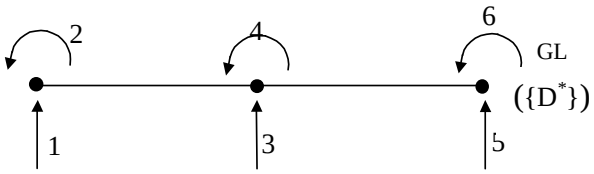


Figura 3-77 Vetor de deslocamentos nodais da estrutura não-restringida

O vetor $\{D\}^*$ está mostrado na Figura 3-77, sendo que este inclui tanto os deslocamentos nodais D_4 e D_6, que são incógnitas, como os deslocamentos nodais restringidos por vínculos, que são conhecidos $D_1 = D_2 = D_3 = D_5 = 0$.

O vetor $\{A\}^*$ inclui as ações aplicadas nos nós, que são conhecidas, nas direções livres: A_4 = -12 kN.m e A_6 = 0; e também as reações de apoio: R_1, R_2, R_3, R_5, que são incógnitas. Assim sendo o sistema de equações para este exemplo fica:

$$\begin{Bmatrix}8\\6\\18\\4\\10\\-10\end{Bmatrix} + 10^3 \cdot \begin{bmatrix}32 & 48 & -32 & 48 & 0 & 0\\ 48 & 96 & -48 & 48 & 0 & 0\\ -32 & -48 & 45{,}5 & -21 & -13{,}5 & 27\\ 48 & 48 & -21 & 168 & -27 & 36\\ 0 & 0 & -13{,}5 & -27 & 13{,}5 & -27\\ 0 & 0 & 27 & 36 & -27 & 72\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}D_1 = 0\\D_1 = 0\\D_3 = 0\\D_4\\D_5 = 0\\D_6\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}R_1\\R_2\\R_3\\A_4 = -12\\R_5\\A_6 = 0\end{Bmatrix}$$

Este sistema de equações não tem solução, pois a estrutura está sem apoios, hipostática, logo o determinante da matriz $[S]^*$ é nulo. Além disto, há incógnitas em ambos os lados das equações. Para resolver o problema deve-se antes restringir a estrutura e obter o

sistema de equações de equilíbrio de forças para a estrutura restringida, com apoios, conforme explicado a seguir.

3.16. Sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida

Para considerar a estrutura restringida, deve-se impor as condições de contorno, ou seja, deslocamentos nulos nas direções restringidas por apoios. Para isto, parte-se do sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida,

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^*.\{D\}^* = \{A\}^* \tag{3.69}$$

e eliminam-se as colunas de $[S]^*$ correspondentes aos GL restringidos por apoios (tendo em vista que todos os coeficientes destas colunas seriam multiplicados por zeros, os deslocamentos nulos dos apoios). Como no sistema de equações (3.69) há incógnitas em ambos os lados das equações, eliminam-se também as linhas deste sistema correspondentes aos GL restringidos por apoios. O sistema de equações resultante é o sistema de equações de equilíbrio de forças para a estrutura com apoios (restringida), em relação apenas aos GL livres da estrutura, ficando com incógnitas apenas no lado esquerdo das equações (vetor $\{D\}$):

$$\{F_{EP}\} + [S].\{D\} = \{A\} \tag{3.70}$$

Este sistema de equações terá solução caso a estrutura seja isostática ou hiperestática, ou seja, uma estrutura com vínculos suficientes para impedir os movimentos de corpo rígido, em que a matriz $[S]^*$ é positivo-definida (seu determinante será sempre positivo).

Por exemplo, seja a viga da Figura 3-78 formada por um único elemento, que tem um total de 4 graus de liberdade. As direções ou graus de liberdade 1 e 2 são restringidas. Neste caso, os esforços de engastamento perfeito do elemento ou da estrutura são:

$$\left\{F_{EP_G}\right\} = \left\{F_{EP_L}\right\} = \begin{Bmatrix} P/2 \\ Pl/8 \\ P/2 \\ -Pl/8 \end{Bmatrix} \tag{3.71}$$

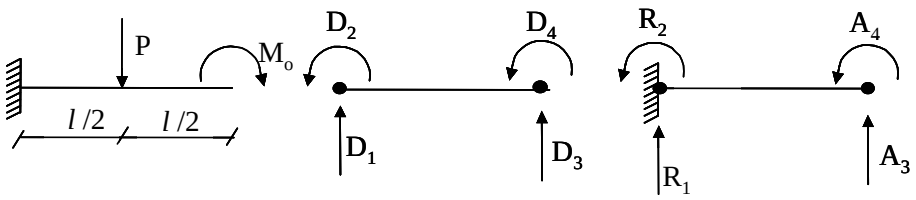


Figura 3-78 Viga engastada e livre; vetor de deslocamentos e vetor de ações nodais para a estrutura não-restringida

Para a estrutura não-restringida tem-se o sistema de equações de equilíbrio:

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^*.\{D\}^* = \{A\}^* \tag{3.72}$$

$$\begin{Bmatrix} P/2 \\ Pl/8 \\ P/2 \\ -Pl/8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}^* . \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ -Mo \end{Bmatrix}$$

.

Fazendo-se $D_1 = 0$ e $D_2 = 0$ no sistema (3.72), obtém-se

$$\begin{cases} P/2 + (S_{11}^* \times 0) + (S_{12}^* \times 0) + S_{13}^* D_3 + S_{14}^* D_4 = A_1^* = R_1 \quad (i) \\ Pl/8 + (S_{21}^* \times 0) + (S_{22}^* \times 0) + S_{23}^* D_3 + S_{24}^* D_4 = A_2^* = R_2 \quad (ii) \\ P/2 + (S_{31}^* \times 0) + (S_{32}^* \times 0) + S_{33}^* D_3 + S_{34}^* D_4 = A_3^* = 0 \quad (iii) \\ -Pl/8 + (S_{41}^* \times 0) + (S_{42}^* \times 0) + S_{43}^* D_3 + S_{44}^* D_4 = A_4^* = -Mo \quad (iv) \end{cases} \tag{3.73}$$

Observa-se que os coeficientes da coluna 1 e da coluna 2 de $[S]^*$ são multiplicados por zero, portanto estas colunas podem ser eliminadas.

Eliminando-se também as linhas *i* e *ii* do ssitema de equações (3.73) obtém-se o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida, em relação apenas às direções ou GL livres (*iii* e *iv*):

$$\begin{Bmatrix} P/2 \\ -Pl/8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{33}^* & S_{34}^* \\ S_{43}^* & S_{44}^* \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Mo \end{Bmatrix} \begin{matrix} (iii) \\ (iv) \end{matrix} \quad \text{ou}$$

$$\{F_{EP}\} + [S].\{D\} = \{A\} \tag{3.74}$$

Este sistema de equações (3.74) tem solução, resolvendo-o vem:

$\{D\} = [S]^{-1}.[\{A\} - \{F_{EP}\}]$

obtendo-se $\{D\} = \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix}$

Inserindo-se em seguida os deslocamentos D_3 e D_4 nas equações (*i*) e (*ii*) obtêm-se as reações de apoio R_1 e R_2.

O sistema de equações (3.72) pode ser escrito em forma particionada, com sub-matrizes e sub-vetores (usando-se para os índices a seguinte convenção D → deslocável; R → restringida).

$$\begin{Bmatrix} \{F_{EP}\}_R \\ \{F_{EP}\}_D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RD} \\ S_{DR} & S_{DD} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{D\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R\} \\ \{A\} \end{Bmatrix} \tag{3.75}$$

Da segunda linha do sistema de equações (3.75) acima, tem-se que:

$\{F_{EP}\}_D + [S_{DD}].\{D\} = \{A\}$

onde $[S_{DD}]$ é a matriz de rigidez da estrutura restringida, $[S]$, e $\{F_{EP}\}_D$ é o vetor de esforços de engastamentos perfeito da estrutura restringida, $\{F_{EP}\}$. Resolvendo-se este sub-sistema de equações obtém-se o vetor de deslocamentos nodais$\{D\}$.

Em seguida insere-se $\{D\}$ na primeira linha do sistema (3.75):

$\{R\} = \{F_{EP}\}_R + [S_{RD}].\{D\}$

obtendo-se assim as reações de apoio da estrutura.

Nem sempre o sistema de equações está assim "arrumado", com as direções restringidas no início ou no final. Seja por exemplo uma viga similar à do exemplo anterior, de comprimento *l*, submetida ao mesmo carregamento anterior, mas sendo agora bi-apoiada, como mostrado na Figura 3-79. A viga é formada por um único elemento e tem um total de quatro graus de liberdade, incluindo-se as direções restringidas por apoios.

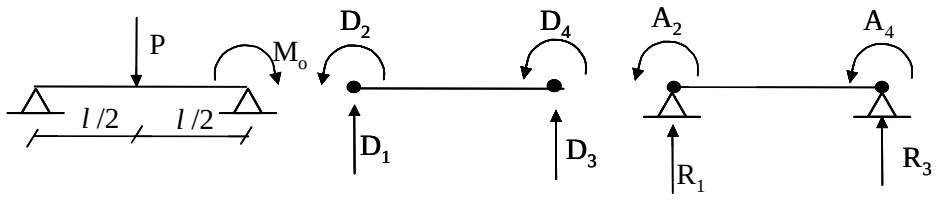


Figura 3-79 Viga bi-apoiada; vetor de deslocamentos e vetor de ações nodais para a estrutura não-restringida

Para este exemplo o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida é idêntico ao do exemplo anterior (viga engastada e livre):

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^*.\{D\}^* = \{A\}^* \tag{3.76}$$

No entanto as direções restringidas neste exemplo são a 1 e a 3, diferentes em relação ao exemplo anterior:

$$\begin{Bmatrix} P/2 \\ Pl/8 \\ P/2 \\ -Pl/8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}^* . \begin{Bmatrix} D_1 = 0 \\ D_2 \\ D_3 = 0 \\ D_4 \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_3 \\ -Mo \end{Bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (ii) \\ (iii) \\ (iv) \end{matrix} \tag{3.77}$$

Impõem-se as condições de contorno na estrutura, eliminando-se as colunas 1 e 3 de $[S]^*$, e eliminam-se tambéms as linhas 1 e 3 (*i* e *iii*) no sistema de equações (3.77); o que "sobra" é o sistema de equações da estrutura restringida:

$$\begin{Bmatrix} Pl/8 \\ -Pl/8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{22} & S_{24} \\ S_{42} & S_{44} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -M_0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \tag{3.78}$$

$$\{F_{EP}\} + [S].\{D\} = \{A\} \tag{3.79}$$

cuja solução fornece o vetor de deslocamentos nodais da estrutura:

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = [S]^{-1}[\{A\} - \{F_{EP}\}] \tag{3.80}$$

Inserindo-se em seguida D_2 e D_4 nas linhas (*i*) e (*iii*) do sistema de equações (3.77), obtêm-se as reações de apoio R_1 e R_3. No próximo item apresenta-se a continuação do exemplo numérico de viga continua, visto no item 3.15.9, obtendo-se agora as reações de apoio da estrutura.

3.17. Reações de apoio da estrutura

3.17.1. Exemplo numérico

Seja a viga contínua analisada anteriormente no item 3.15.9 (ver Figura 3-80). O vetor de deslocamentos nodais e o de ações e reações estão mostrados na Figura 3-81.

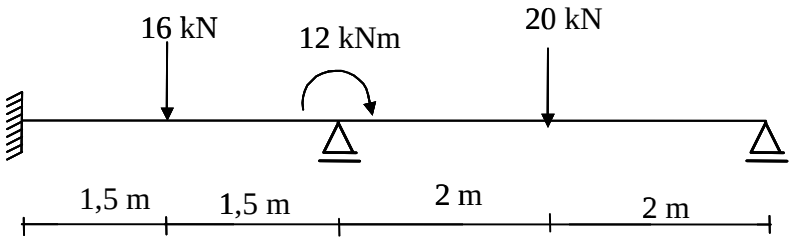
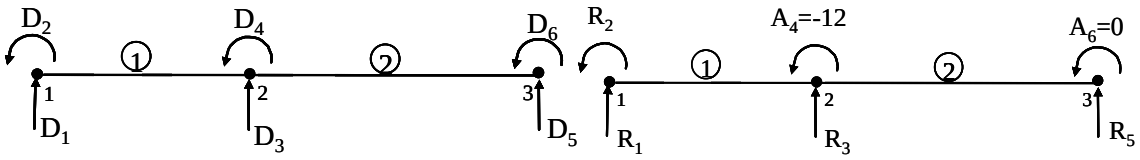


Figura 3-80 Exemplo numérico de viga contínua



(a) Vetor de delocamentos nodais **(b) Vetor de ações e reações**

Figura 3-81: Vetor de deslocamentos nodais e de ações e reações da estrutura

Partindo-se do sistema de equações de equilíbrio da estrutura não-restringida, formado anteriormente no item 3.15.9:

$$\begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \\ 4 \\ 10 \\ -10 \end{Bmatrix} + 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 32 & 48 & -32 & 48 & 0 & 0 \\ 48 & 96 & -48 & 48 & 0 & 0 \\ -32 & -48 & 45{,}5 & -21 & -13{,}5 & 27 \\ 48 & 48 & -21 & 168 & -27 & 36 \\ 0 & 0 & -13{,}5 & -27 & 13{,}5 & -27 \\ 0 & 0 & 27 & 36 & -27 & 72 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 = 0 \\ D_1 = 0 \\ D_3 = 0 \\ D_4 \\ D_5 = 0 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ A_4 = -12 \\ R_5 \\ A_6 = 0 \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

Impõem-se agora as condições de contorno, o que equivale a eliminar as colunas 1, 2, 3 e 5 de $[S]^*$ e as linhas 1, 2, 3 e 5 do sistema (3.80), obtendo-se assim o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida:

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ -10 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12-4 \\ 0 \quad +10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad \therefore$$

$$\begin{Bmatrix} D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -16 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{168 \cdot 72 - 36^2} \cdot \begin{bmatrix} 72 & -36 \\ -36 & 168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}67 & -3{,}33 \\ -3{,}33 & 15{,}56 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 6{,}67 & -3{,}33 \\ -3{,}33 & 15{,}56 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -16 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -140 \\ 208{,}9 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\begin{Bmatrix} D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} -0{,}14 \\ 0{,}21 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ rad} \qquad (3.81)$$

A solução de deslocamentos confere com os valores encontrados anteriormente, ao se analisar a estrutura globalmente, sem dividir em elementos, no item 3.5.2.

Para se obter as reações de apoio, inserem-se os deslocamentos D_4 e D_6 no sistema de equações (3.80), para a estrutura não-restringida:

$R_1 = 8 + 10^3 \text{ x } 48 \text{ x } D_4 + 0 \text{ x } D_6 = 8 - 48 \text{ x } 0{,}14 = 1{,}28 \text{ kN}$
$R_2 = 6 + 10^3 \text{ x } 48 \text{ x } D_4 + 0 \text{ x } D_6 = - 0{,}72 \text{ kN.m}$
$R_3 = 18 + 10^3 \text{ x } [(-21) \text{ x } D_4 + 27 \text{ x } D_6] = 18 + 8{,}58 = 26{,}58 \text{ kN}$ (3.82)
$R_5 = 10 + 10^3 \text{ x } [-27 \text{ x } D_4 - 27 \text{ x } D_6] = 10 - 1{,}86 = 8{,}14 \text{ kN}$

Verificação do equilíbrio:

$\sum F_y = 0$	1,28 + 26,61 + 8,11 = 36 ∴ 36 = 36	OK
$\sum M_{z,nó1} = 0$	8,14 x 7 + 26,58 x 3 – 12 – 20 x 5 – 16 x 1,5 – 0,72 = 0	OK

3.18. Esforços nos elementos no sistema local

Os esforços totais atuantes nas extremidades dos elementos são encontrados aplicando-se o princípio de superposição de efeitos (lembrando que está se admitindo estruturas com comportamento linear), superpondo-se os esforços de engastamento perfeito (causados pelas cargas que atuam ao longo dos elementos com as extremidades fixas) aos esforços causados pelos deslocamentos nodais:

$$\{A_L\} = \{F_{LEP}\} + [S_L] \{u_L\} \qquad (3.83)$$

Depois de resolvido o sistema de equações de equilíbrio da estrutura restringida:

$$\{F_{EP}\} + [S]\ \{D\} = \{A\} \rightarrow \{D\} = [S]^{-1}\ [\{A\} - \{F_{EP}\}] \qquad (3.84)$$

obtém-se o vetor de deslocamentos nodais $\{D\}$, em relação aos GL da estrutura, e, inserindo-se os deslocamentos nulos dos apoios, forma-se o vetor $\{D\}^*$. Para se obter os esforços totais em cada elemento, utiliza-se primeiro a *Regra da Correspondência* para se obter os vetores de deslocamentos nodais dos elementos no sistema global,$\{u_G\}$, a partir de $\{D\}^*$ e, em seguida, a equação (3.57), vista anteriormente, para se encontrar o vetor de deslocamentos nodais no sistema local, em cada elemento:

$$\{u_L\} = [\Re].\{u_G\}$$

Inserindo-se essa equação acima na equação (3.83), obtém-se o vetor de esforços totais em cada elemento:.

$$\{A_L\} = \{F_{LEP}\} + [S_L]\ [\Re]\ \{u_G\}. \qquad (3.85)$$

Essa equação (3.85) é genérica, sendo válida para qualquer tipo de elemento. Para o caso de elemento de pórtico plano os esforços totais nas extremidades do elementos estão ilustrados na Figura 3-82.

Os diagramas de esforços nos elementos podem ser obtidos a partir do vetor de esforços totais, $\{A_L\}$, e das cargas aplicadas ao longo do elementos .

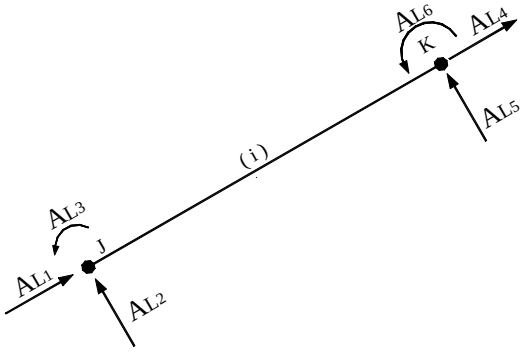


Figura 3-82: Esforços nas extremidades do elemento no sistema local – exemplo: elemento de pórtico plano

3.18.1. Exemplo numérico- viga contínua

Seja obter o vetor de esforços totais do exemplo numérico de viga contínua que foi analisado anteriormente nos ítens 3.15.9 e 3.17.1 (ver Figura 3-80). Inicialmente deve-se obter o vetor $\{D\}^*$ a partir do vetor de deslocamentos $\{D\}$, encontrado no item 3.17.1 (ver equação 3.81):

$$\{D\}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}14\times10^{-3}\,\text{rad} \\ 0 \\ 0{,}21\times10-3\ \text{rad} \end{Bmatrix} \tag{3.86}$$

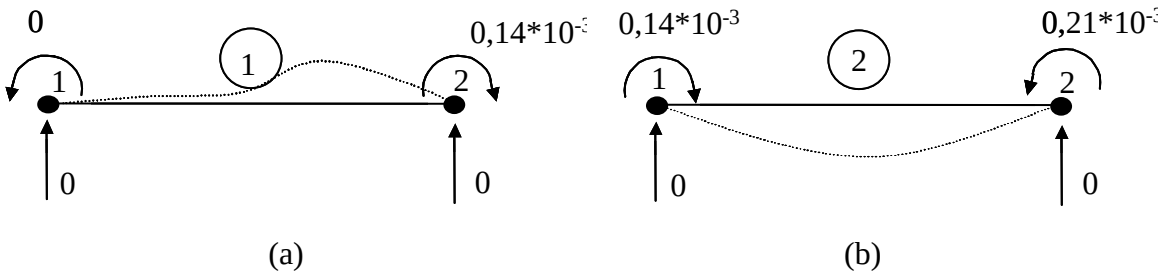
Por meio da *Regra da Correspondência* sabe-se que, para o elemento 1:

$$\{u_G\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} u_{G1} \\ u_{G2} \\ u_{G3} \\ u_{G4} \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} D_1^* \\ D_2^* \\ D_3^* \\ D_4^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}14\cdot10^{-3} \end{Bmatrix} \tag{3.87}$$

e para o elemento 2:

$$\{u_G\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} u_{G1} \\ u_{G2} \\ u_{G3} \\ u_{G4} \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} D_3^* \\ D_4^* \\ D_5^* \\ D_6^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}14\cdot10^{-3} \\ 0 \\ 0{,}21\cdot10^{-3} \end{Bmatrix} \tag{3.88}$$

A Figura 3-83 mostra graficamente o vetor de deslocamentos nodais $\{u_G\}$ na extremidade dos elementos 1 e 2 e a deformada aproximada.



(a) (b)

Figura 3-83 Deslocamentos nodais e deformada aproximada: a) elemento 1 e b) elemento 2.

Como para o elemento de viga [ℜ] = [I], a equação (3.85) fica:

$$\{A_L\} = \{F_{LEP}\} + [S_L]\,\{u_G\} \tag{3.89}$$

Utilizando-se a equação acima para cada elemento, obtêm-se então o vetor de esforços totais, estando as forças em kN e os momentos em kN.m:

Elemento 1: $\{A_L\}^{(1)} = \{F_{LEP}\}^{(1)} + [S_L]^{(1)}\,\{u_G\}^{(1)}$ (3.90)

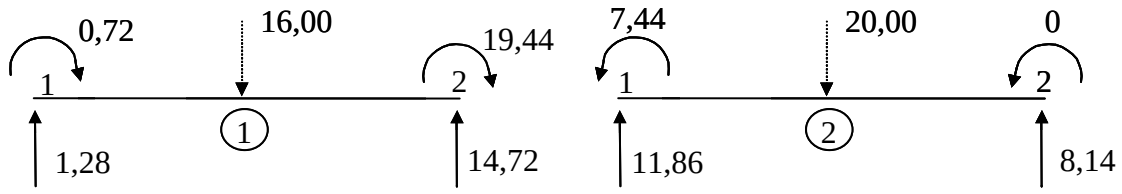
$$\{A_L\} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \\ -6 \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{bmatrix} 32 & 48 & -32 & 48 \\ 48 & 96 & -48 & 48 \\ -32 & -48 & 32 & -48 \\ 48 & 48 & -48 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}14\times10^{-3} \end{Bmatrix} \therefore \{A_L\} = \begin{Bmatrix} 1{,}28 \\ -0{,}72 \\ 14{,}72 \\ -19{,}44 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2: $\{A_L\}^{(2)} = \{F_{LEP}\}^{(2)} + [S_L]^{(2)}\,\{u_G\}^{(2)}$ (3.91)

$$\{A_L\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ -10 \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{bmatrix} 13{,}5 & 27 & -13{,}5 & 27 \\ 27 & 72 & -27 & 36 \\ -13{,}5 & -27 & 13{,}5 & -27 \\ 27 & 36 & -27 & 72 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}14\times10^{-3} \\ 0 \\ 0.21\times10^{-3} \end{Bmatrix} \therefore$$

$$\{A_L\} = \begin{Bmatrix} 11{,}86 \\ 7{,}44 \\ 8{,}14 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Os esforços nas extremidades dos elementos 1 e 2 estão ilustrados na Figura 3-84 abaixo:



(a) Elemento 1 **(b) Elemento 2**

Figura 3-84: Esforços totais nas extremidades do a) elemento 1; b) elemento 2.

A partir dos esforços nas extremidades e das cargas aplicadas nos elementos, podem-se traçar os diagramas de esforços internos para toda a viga contínua, conforme mostrado

abaixo na Figura 3-85 (diagrama de esforço cortante) e na Figura 3-86 (diagrama de momento fletor).

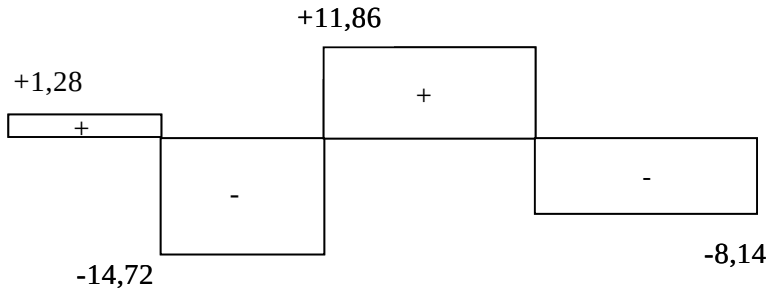


Figura 3-85: Diagrama de Esforço Cortante (kN)

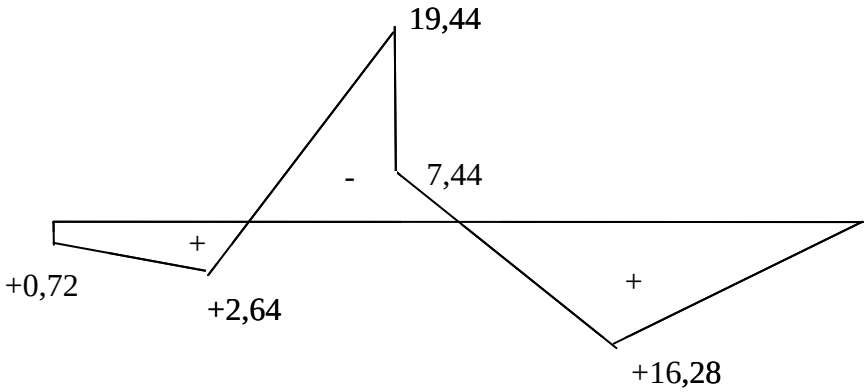


Figura 3-86: Diagrama de Momento Fletor (kN.m)

Apresentam-se a seguir alguns exemplos de aplicação do Método dos Deslocamentos com formulação matricial.

3.19. Exemplos de aplicação

3.19.1. Exemplo 1 – treliça plana

Seja a treliça plana mostrada na Figura 3-87, discretizada em três elementos e três nós As dimensões e força aplicada estão mostradas na figura e as rigidezes axiais das barras são: $(EA)_1 = 4$, $(EA)_2 = 3$ e $(EA)_3 = 5$. Para facilitar o cálculo não foram indicadas as unidades. Considere a incidência dos nós nos elementos como sendo (nó inicial e final):

(1) : 2 → 1 (2) : 3 → 2 (3) : 3 → 1

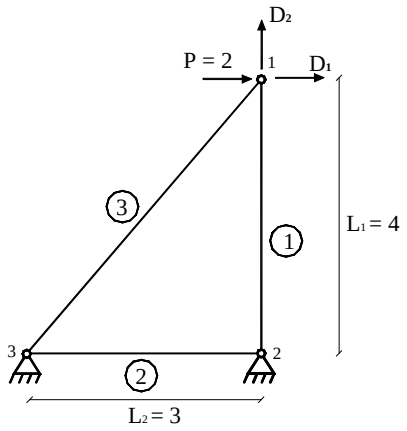


Figura 3-87: Exemplo 1 -treliça plana

1) Calcule as matrizes de rigidez no sistema local $[S_L]$, as matrizes de rotação $[\Re]$ e as matrizes no sistema global $[S_G]$ dos elementos da treliça;
2) Forme a matriz de rigidez da estrutura $[S]^*$ e o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não restringida, usando a *Regra da Correspondência*;
3) Obtenha o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida, com apoios: $[S]\{D\} = \{A\}$;
4) Resolva esse sistema de equações, obtendo o vetor de deslocamentos nodais da estrutura,$\{D\}$;
5) Obtenha as reações de apoio da estrutura.

Resolução:

Matrizes de Rigidez no Sistema Local

Para todos os elementos, tem-se que:

$$\frac{(EA)_{\mathrm{i}}}{l_{\mathrm{i}}} = 1$$

Portanto todas as matrizes no sistema local são iguais a

$$[S_L]^{(1)} = [S_L]^{(2)} = [S_L]^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes de Rotação

Elemento 1: $\theta = 90°$ $\cos\theta = 0$ $\mathrm{sen}\theta = 1$

$$[\Re]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 2: $\theta = 0°$ $\cos\theta = 1$ $\mathrm{sen}\theta = 0$

$$[\Re]^{(2)} = [\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 3: $\theta = 53°$ $\cos\theta = 0{,}6$ $\mathrm{sen}\theta = 0{,}8$

$$[\Re]^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ -0{,}8 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & -0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Matrizes de Rigidez no Sistema Global

Elemento 1: $[S_G]^{(1)} = [\Re]^{(1),T}.[S_L]^{(1)}.[\Re]^{(1)} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2: $[S_G]^{(2)} = [\Re]^{(2),T}.[S_L]^{(2)}.[\Re]^{(2)} = [S_L]^{(2)}$

$$[S_G]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 3: $[S_G]^{(3)} = [\Re]^{(3),T}.[S_L]^{(3)}.[\Re]^{(3)} =$

$$\begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & -0,6 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & -0,8 & 0,6 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -,048 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez da Estrutura

Regra da Correspondência

Elemento J → K	**Graus de Liberdade da Estrutura**			GL do elemento $\{u_G\}$
	(1) 2 → 1	(2) 3→2	(3) 3→1	
2J - 1	**3**	**5**	**5**	1
2J	**4**	**6**	**6**	2
2K - 1	**1**	**3**	**1**	3
2K	**2**	**4**	**2**	4

$$[S]^* = \begin{bmatrix} S_{G_{33}}^{(1)} + S_{G_{33}}^{(3)} & S_{G_{34}}^{(1)} + S_{G_{34}}^{(3)} & S_{G_{31}}^{(1)} & S_{G_{32}}^{(1)} & S_{G_{31}}^{(3)} & S_{G_{32}}^{(3)} \\ & S_{G_{44}}^{(1)} + S_{G_{44}}^{(3)} & S_{G_{41}}^{(1)} & S_{G_{42}}^{(1)} & S_{G_{41}}^{(3)} & S_{G_{42}}^{(3)} \\ & & S_{G_{11}}^{(1)} + S_{G_{33}}^{(2)} & S_{G_{12}}^{(1)} + S_{G_{34}}^{(2)} & S_{G_{31}}^{(2)} & S_{G_{32}}^{(2)} \\ & & & S_{G_{22}}^{(1)} + S_{G_{44}}^{(2)} & S_{G_{41}}^{(2)} & S_{G_{42}}^{(2)} \\ & & \textit{simétrica} & & S_{G_{11}}^{(2)} + S_{G_{11}}^{(3)} & S_{G_{12}}^{(2)} + S_{G_{12}}^{(3)} \\ & & & & & S_{G_{22}}^{(2)} + S_{G_{22}}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Portanto, tem-se que:

$$[S]^* = \begin{bmatrix} 0{,}36 & 0{,}48 & 0 & 0 & -0{,}36 & -0{,}48 \\ 0{,}48 & 1{,}64 & 0 & -1 & -0{,}48 & -0{,}64 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}36 & -0{,}48 & -1 & 0 & 1{,}36 & 1{,}48 \\ -0{,}48 & -0{,}64 & 0 & 0 & 1{,}48 & 0{,}64 \end{bmatrix}$$

Sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não restringida

$\{F_{EP}\}^* + [S]^*.\{D\}^* = \{A\}^*$

Neste exemplo não há cargas atuando nas barras, logo o vetor $\{F_{EP}\}^*$ é nulo e o sistema de equações fica:

$$\begin{bmatrix} 0{,}36 & 0{,}48 & 0 & 0 & -0{,}36 & -0{,}48 \\ 0{,}48 & 1{,}64 & 0 & -1 & -0{,}48 & -0{,}64 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}36 & -0{,}48 & -1 & 0 & 1{,}36 & 1{,}48 \\ -0{,}48 & -0{,}64 & 0 & 0 & 1{,}48 & 0{,}64 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 = 0 \\ D_4 = 0 \\ D_5 = 0 \\ D_6 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 = 2 \\ A_2 = 0 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

Sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida

Para se obter o sistema de equações de equilíbrio de forças para a estrutura restringida, deve-se inicialmente eliminar, na matriz $[S]^*$acima, as colunas correspondentes às direções restringidas (3, 4, 5 e 6 neste exemplo), e em seguida se eliminam as linhas do sistema de equações acima correspondentes a estas direções restringidas. O sistema de equações resultante é:

$$[S].\{D\} = \{A\} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0{,}36 & 0{,}48 \\ 0{,}48 & 1{,}64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vetor de deslocamentos nodais da estrutura

Resolvendo-se este sistema de equações, obtém-se o vetor:

$$\{D\} = [S]^{-1}.\{A\} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}36 & 0{,}48 \\ 0{,}48 & 1{,}64 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 82/9 = 9{,}111 \\ -8/3 = -2{,}667 \end{Bmatrix}$$

Reações de apoio da estrutura

Inserindo-se o vetor de deslocamentos nodais $\{D\}$ no sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não restringida, obtêm-se as reações de apoio da estrutura a partir das linhas 3,4,5 e 6:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0{,}36 & 0{,}48 & 0 & 0 & -0{,}36 & -0{,}48 \\ 0{,}48 & 1{,}64 & 0 & -1 & -0{,}48 & -0{,}64 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}36 & -0{,}48 & -1 & 0 & 1{,}36 & 1{,}48 \\ -0{,}48 & -0{,}64 & 0 & 0 & 1{,}48 & 0{,}64 \end{array}\right] \cdot \left\{\begin{array}{c} D_1 = 9{,}111 \\ D_2 = -2{,}667 \\ D_3 = 0 \\ D_4 = 0 \\ D_5 = 0 \\ D_6 = 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} A_1 = 2 \\ A_2 = 0 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -0{,}36 & -0{,}48 \\ -0{,}48 & -0{,}64 \end{array}\right] \cdot \left\{\begin{array}{c} D_1 = 9{,}111 \\ D_2 = -2{,}667 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 2{,}667\,\text{kN} \\ -2{,}000\,\text{kN} \\ -2{,}667\,\text{kN} \end{array}\right\}$$

Verificação do equilíbrio:

$\sum F_x = 0$	-2,000 + 2 = 0	OK
$\sum F_y = 0$	2,667 – 2,667 = 0	OK
$\sum M_{z,nó3} = 0$	2,667 x 3 – 2 x 4 = 8 – 8 = 0	OK

Fica como exercício proposto para o leitor o cálculo do vetor de esforços totais nas extremidades dos elementos desta treliça plana, no sistema local, $\{A_L\}$.

3.19.2. Exemplo 2 – Pórtico plano

Seja o pórtico da Figura 3-88 cujas barras têm seção transversal constante de 12 × 40 cm, sendo compostas de material homogêneo com módulo de elasticidade E = 5x10^6 kN/m^2. Calcule os deslocamentos nodais e as reações de apoio do pórtico pelo Método dos Deslocamentos com formulação matricial.

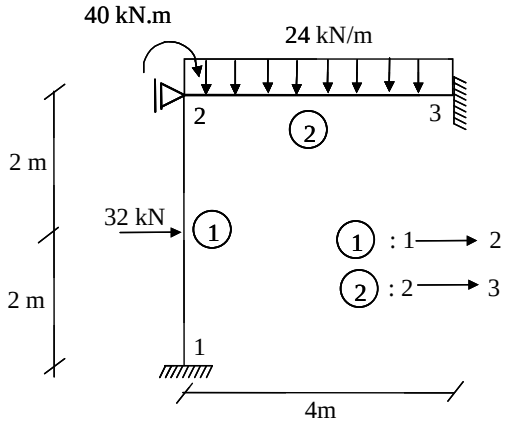


Figura 3-88: Pórtico plano

A estrutura é dividida em dois elementos e três nós. Cada nó tem três graus de liberdade, como mostra a Figura 3-89, logo o sistema de equações para a estrutura não-restringida tem um total de nove equações. Considerando os apoios restam apenas duas direções livres, logo para o pórtico restringido o sistema de equações de equilíbrio terá duas equações e duas incógnitas, que são os deslocamentos de translação do nó 2, nos graus de liberdade 5 e 6, mostrados na Figura 3-90.

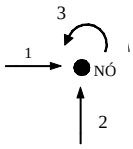


Figura 3-89: Graus de liberdade por nó para pórtico plano

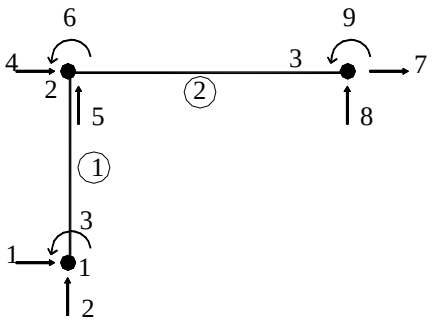


Figura 3-90 Graus de liberdade da estrutura

No vetor de ações aplicadas nos nós, $\{A\}^*$, conhece-se A5 = 0, A6 = -40 kN.m

E no vetor de deslocamentos nodais, $\{D\}^*$, são incógnitas D5 = ?, D6 = ?

Matriz de rigidez dos elementos no sistema local

$$[S_L]^1 = [S_L]^2 = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 12 & 32 & 0 & -12 & 16 \\ -600 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 12 & 16 & 0 & -12 & 32 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotação dos elementos

Elemento1 $\theta = 90° \quad \cos\theta = 0 \quad \text{sen}\theta = 1 \quad [\Re]^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Elemento 2 $\theta = 0° \qquad [\Re]^2 = [\text{I}]$

Matriz de rigidez dos elementos no sistema global

$$[S_G]^1 = [\Re]^{1T}[S_L]^1[\Re]^1 = 10^2 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 & -6 & 0 & -12 \\ 0 & 600 & 0 & 0 & -600 & 0 \\ -12 & 0 & 32 & 12 & 0 & 16 \\ -6 & 0 & 12 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & -600 & 0 & 0 & 600 & 0 \\ -12 & 0 & 16 & 12 & 0 & 32 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$[S_G]^2 = [S_L]^2 = 10^2 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 12 & 32 & 0 & -12 & 16 \\ -600 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 12 & 16 & 0 & -12 & 32 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Regra da Correspondência

	GL da Estrutura		GL do elemento $\{u_G\}$
Elemento J → K	(1) 1→2	(2) 2→3	
3J-2	**1**	**4**	1
3J-1	**2**	**5**	2
3J	**3**	**6**	3
3K-2	**4**	**7**	4
3K-1	**5**	**8**	5
3K	**6**	**9**	6

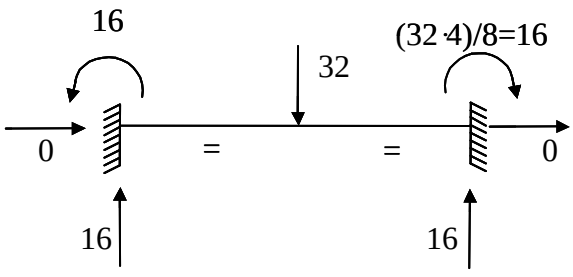
Indicados nas matrizes $[S_G]$ e nos vetores $\{F_{GEP}\}$

Matriz de rigidez da estrutura [*S*]*

$$[S^*] = 10^2 \cdot \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 & -6 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 32 & 12 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 12 & 6+600 & 0+0 & 12+0 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 0 & 0+0 & 600+6 & 0+12 & 0 & -6 & 12 \\ -12 & 0 & 16 & 12+0 & 0+12 & 32+32 & 0 & -12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -12 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 16 & 0 & -12 & 32 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

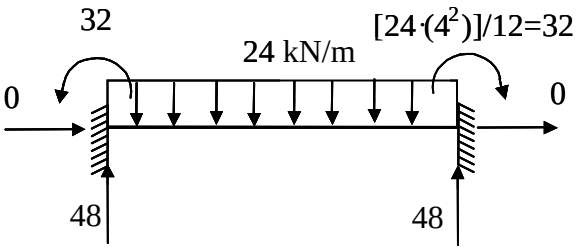
Vetor de esforços de engastamento perfeito no sistema local

Elemento 1:



$$\{F_{LEP}\}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 16 \\ 16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2:



$$\{F_{LEP}\}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 48 \\ 32 \\ 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix}$$

Vetor de Esforços de Engastamento Perfeito no Sistema Global

Elemento 1: $\{F_{GEP}\}^1 = [\Re]^{1T} \{F_{LEP}\}^1 =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 16 \\ 16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \\ 0 \\ -16 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elemento 2: $\{F_{GEP}\}^2 = \{F_{LEP}\}^2 =$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 48 \\ 32 \\ 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Vetor de Esforços de Engastamento Perfeito da Estrutura

$$\{F_{EP}\}^* = \begin{Bmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ -16+0 \\ 0+48 \\ -16+32 \\ 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \\ 48 \\ 16 \\ 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida

$$\begin{Bmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \\ 48 \\ 16 \\ 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix} + 10^2 \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 & -6 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 32 & 12 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 12 & 606 & 0 & 12 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 0 & 0 & 606 & 12 & 0 & -6 & 12 \\ -12 & 0 & 16 & 12 & 12 & 64 & 0 & -12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -12 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 16 & 0 & -12 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ 0 \\ -40 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{Bmatrix}$$

Sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida

Restringe-se a estrutura impondo-se as condições de contorno: $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_7 = D_8 = D_9 = 0$, o que corresponde a eliminar as colunas e linhas de $[S]^*$ e as linhas no sistema de equações acima, correspondentes às direções restringidas por apoios. Obtém-se assim o sistema de equações equilíbrio de forças para a estrutura restringida:

$$\begin{Bmatrix} 48 \\ 16 \end{Bmatrix} + 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 606 & 12 \\ 12 & 64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -40 \end{Bmatrix} \quad \therefore$$

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 606 & 12 \\ 12 & 64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -48 \\ -56 \end{Bmatrix}$$

Vetor de deslocamentos nodais da estrutura

Resolve-se o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida, obtendo-se os deslocamentos nodais:

$$\begin{Bmatrix} D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{38640} \begin{bmatrix} 64 & -12 \\ -12 & 606 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -48 \\ -56 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}0621 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}8634 \cdot 10^{-2} \end{Bmatrix}$$

$$D_5 \cong -0{,}06 \cdot 10^{-2}\,\text{m} = -0{,}62\,\text{mm}$$

$$D_6 \cong -0{,}86 \cdot 10^{-2}\,\text{rad} = 0{,}5°$$

Reações de apoio da estrutura

Para se obter as reações de apoio da estrutura, inserem-se os deslocamentos nodais D_5 e D_6 no sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \end{Bmatrix} + 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -600 & 0 \\ 0 & 16 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}062 \\ -0{,}863 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-2} = \begin{Bmatrix} -5{,}64 \\ 37{,}26 \\ 2{,}19 \\ -26{,}36 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{kN} \\ \text{kN} \\ \text{kN} \cdot \text{m} \\ \text{kN} \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix} + 10^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}062 \\ -0{,}863 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 58{,}73 \\ -46{,}56 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{kN} \\ \text{kN} \\ \text{kN} \cdot \text{m} \end{matrix}$$

As reações de apoio estão ilustradas na Figura 3-91. Recomenda-se verificar o equilíbrio da estrutura, aplicando-se as três equações de equilíbrio da estática.

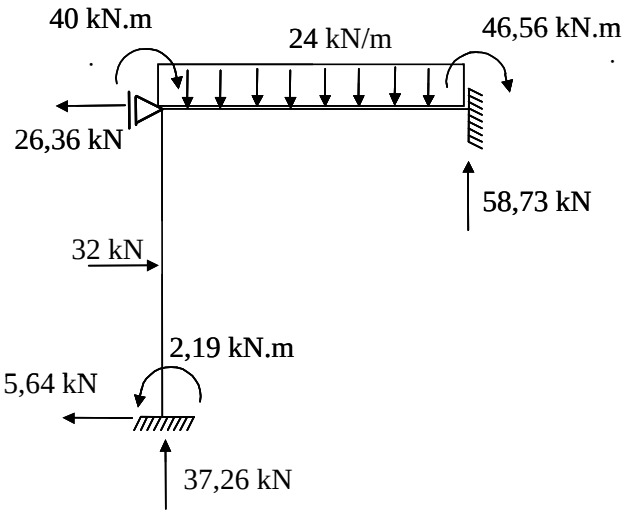


Figura 3-91 Reações de apoio no pórtico plano.

Fica como exercício proposto para o leitor o cálculo do vetor de esforços totais nas extremidades dos elementos deste pórtico plano, no sistema local, $\{A_L\}$, e o traçado dos diagramas de esforços internos (normal, cortante e de flexão).

4. PROCESSO DE CROSS

4.1. Introdução

O Processo de Cross é um processo baseado no Método dos Deslocamentos, assim o objetivo é de se obter o equilíbrio de forças em torno dos nós de uma estrutura. Este processo foi proposto por Hardy Cross, em 1932, no artigo intitulado *Analysis of Continuous Frames by Distribuing Fixed End Moment*, publicado no Proceedings of Americal Society of Civil Engineers (Transactions). No processo classificam-se as estruturas em indeslocáveis (ou nós fixos), quando os seus nós estão impedidos de sofrer deslocamentos de translação, ou seja, submetidos apenas a rotações, e deslocáveis (ou nós móveis), quando os nós podem sofrer deslocamentos de translação. O Processo de Cross é mais utilizado no caso de estruturas indeslocáveis, e costuma-se desprezar a deformação axial das barras, assim os resultados serão aproximados. O processo consiste em se obter diretamente os esforços nas barras por equilíbrio de nó (não sendo necessário calcular os deslocamentos nodais), distribuindo o momento total no nó (o aplicado mais os de engastamento perfeito provenientes das barras que concorrem no nó) para as barras adjacentes, de acordo com a rigidez das mesmas. Para o caso de mais de um nó a se equilibrar será aplicado um processo iterativo, até se atingir a convergência, ou seja, atinge-se o equilíbrio de forças nos nós, em que a soma dos momentos totais em cada nó é menor do que uma certa tolerância, um valor bem pequeno (por exemplo 0,01), portanto é um processo aproximado. Posteriormente o processo foi estendido para resolução de estruturas deslocáveis.

Apresentam-se abaixo alguns exemplos de estruturas indeslocáveis e deslocáveis.

EXEMPLOS DE ESTRUTURAS INDESLOCAVÉIS

a)

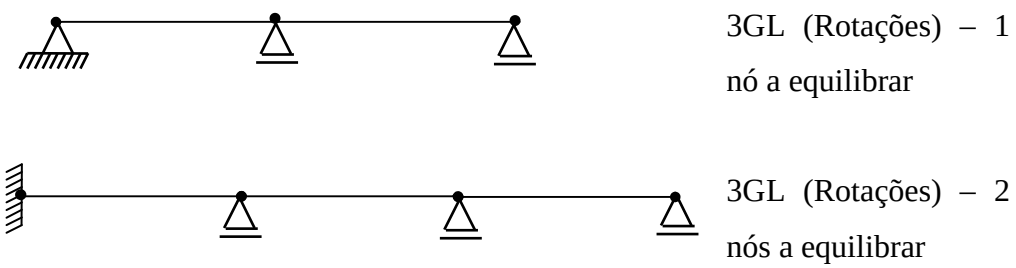
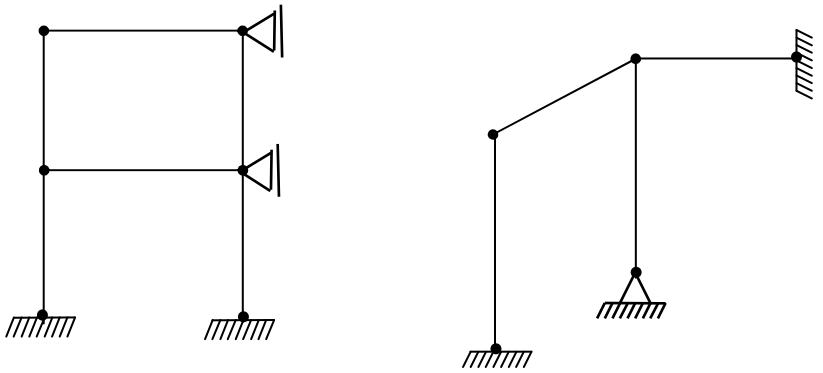


Figura 4-1: Exemplos de Estruturas indeslocáveis : a) Vigas Contínuas

b)

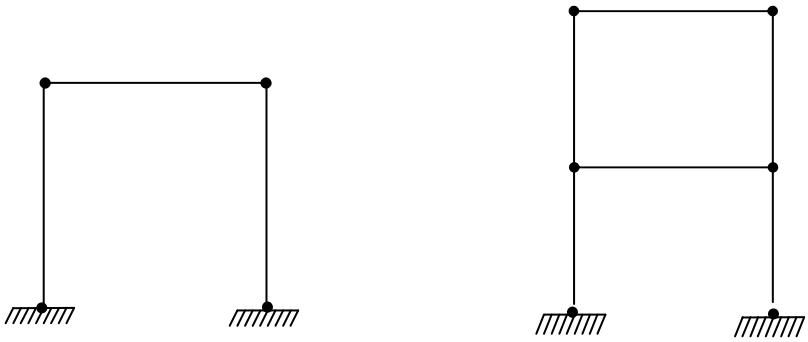


4GL (Rotações) e 4 nós a equilibrar 3GL (Rotações) e 2 nós a equilibrar

Figura 4-2: Exemplos de Estruturas indeslocáveis : b) Pórticos Planos

Como não está se considerando deformação axial das barras, partindo-se de dois nós fixos a movimentos de translação e adicionando-se a estes duas barras e ligando-as a um terceiro nó, este ficará automaticamente fixo também.

EXEMPLOS DE ESTRUTURAS DESLOCAVÉIS



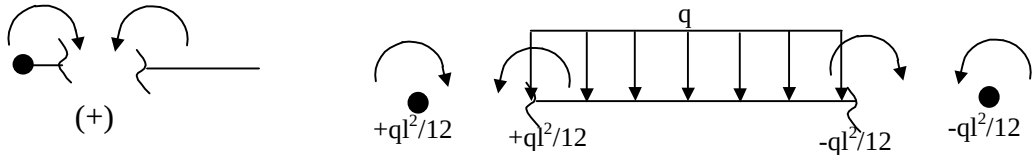
2GL (Rotações) e 1 deslocabilidade horizontal

4GL (Rotações) e 2 deslocabilidades horizontais

Figura 4-3: Exemplos de Estruturas deslocáveis : Pórticos Planos

4.2. Convenção de sinais

Para o Processo de Cross será utilizada a convenção de Grinter. No cálculo de equilíbrio dos nós será considerado positivo o momento que atua no nó no sentido horário (mantendo a convenção de esforço positivo na extremidade da barra no sentido anti-horário), conforme mostra a Figura 4-4.



(a) No nó e na barra **(b) Momentos de engastamento perfeito**

Figura 4-4: Convenção de sinais para momentos positivos

4.3. Coeficientes de distribuição

Seja o pórtico plano indeslocável mostrado na Figura 4-5. O único grau de liberdade da estrutura é a rotação (φ) do nó A.

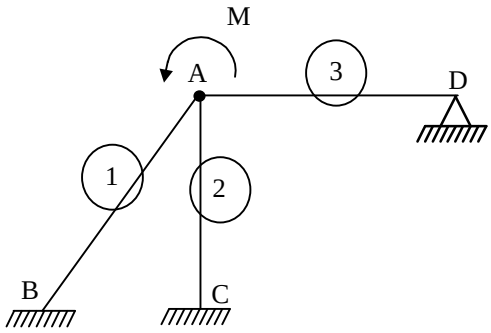
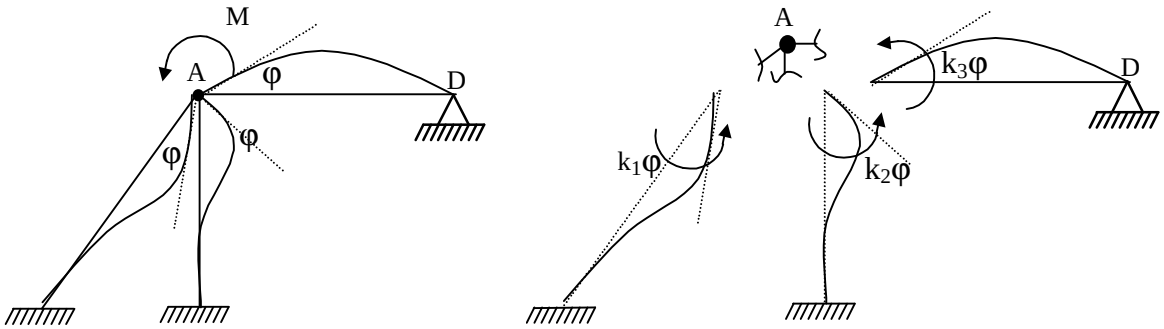


Figura 4-5: Pórtico plano indeslocável

Devido à atuação do binário M (Figura 4-6a), as barras irão se deformar e os esforços internos em suas extremidades serão proporcionais à sua rigidez e à rotação sofrida pelo nó A (Figura 4-6b).



(a) **(b)**

Figura 4-6: Pórtico sujeito a um binário M

No nó, estes momentos atuam com o sentido inverso, pois representam os esforços das barras sobre o nó (Figura 4-7). Para que haja equilíbrio deve-se ter que :

$$\sum M_A = 0 \tag{4.1}$$

$$k_1\varphi + k_2\varphi + k_3\varphi - M = 0 \ \therefore \tag{4.2}$$

$$(k_1 + k_2 + k_3)\cdot \varphi = M \tag{4.3}$$

ou então:

$$\sum k_i \varphi = M \tag{4.4}$$

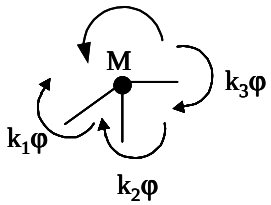


Figura 4-7: Momentos atuando no nó A da Figura 4-6b.

Como M e k_i são conhecidos, obtém-se assim o valor da rotação φ em A.

$$\varphi = \frac{M}{\sum k_i} \tag{4.5}$$

Os momentos nas extremidades dos elementos são determinados por

$$M_1 = k_1\varphi = k_1 \frac{M}{\sum k_i} \tag{4.6}$$

$$M_2 = k_2\varphi = k_2 \frac{M}{\sum k_i} \tag{4.7}$$

$$M_3 = k_3\varphi = k_3 \frac{M}{\sum k_i}. \tag{4.8}$$

Donde se pode concluir que um binário aplicado no nó irá se distribuir pelas barras que concorrem neste nó proporcionalmente à rigidez de cada uma das barras ligadas ao nó.

Chama-se de coeficiente de distribuição (β_i), da barra *i*, a relação:

$$\beta_i = \frac{k_i}{\sum k_i} \tag{4.9}$$

Portanto

$$M_i = \beta_i M \tag{4.10}$$

No caso de existirem cargas atuando ao longo das barras, deve-se inicialmente fixar os GL de rotação dos nós e aplicar as cargas nas barras, calculando-se os momentos de

engastamento perfeito em suas extremidades. Estes momentos devem ser levados em conta no equilíbrio dos nós, utilizando-se a convenção de sinais de Grinter, descrita no item 4.2. Já foram introduzidos todos os conceitos necessários à utilização do processo de Cross, podendo-se passar à sua explanação com maiores detalhes, no item a seguir.

4.4. Processo de Cross para estruturas indeslocáveis

4.4.1. Processo de Cross para um nó apenas (um grau de liberdade-rotação)

O Processo de Cross é baseado no Método dos Deslocamentos e consiste em se obter os esforços nas barras fazendo-se equilíbrio de esforços (momentos) em torno dos nós: o momento atuante no nó (momento aplicado diretamente no nó + momento de engastamento perfeito, devido a cargas nas barras) é distribuído pelas barras que concorrem no nó de acordo com a rigidez das mesmas.

Fixando-se os nós (impedindo as rotações), calculam-se inicialmente os momentos de engastamento perfeito devidos às cargas nos elementos (transferidos para os nós utilizando-se a convenção de sinal de Grinter) e somam-se aos momentos aplicados nos nós. Depois calculam-se a rigidez das barras (k_i), os coeficientes de distribuição (β_i) e os coeficientes de transmissão (t_i). Em seguida distribui-se o momento total no nó pelas barras usando-se os coeficientes de distribuição de forma a se obter equilíbrio no nó ($\sum M=0$). Os momentos obtidos nas barras ligadas ao nó devem ser transmitidos para a outra extremidade de acordo com seu coeficiente de transmissão. Finalmente, traça-se o diagrama de momentos fletores.

4.4.1.1. Exemplo 1- Pórtico

Seja o pórtico indeslocável mostrado na Figura 4-8, cuja rigidez à flexão (EI) é constante.

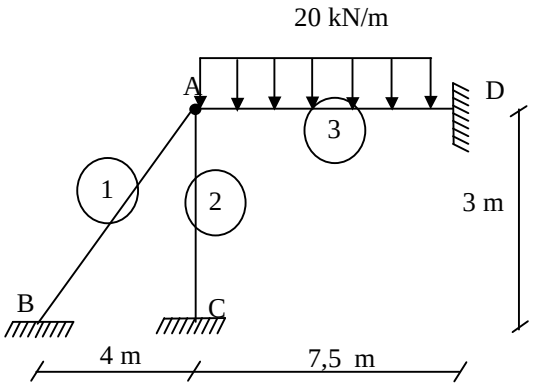


Figura 4-8: Pórtico indeslocável

Para resolver a estrutura da Figura 4-8 utilizando o Processo de Cross, primeiramente fixa-se o nó A e calculam-se os momentos de engastamento perfeito da estrutura.

$$\begin{cases} M_A = \dfrac{+20\cdot(7{,}5)^2}{12} = +93{,}75\ kN.m \\ M_D = -93{,}75\ kN.m \end{cases}. \tag{4.11}$$

Após determinam-se as rigidezes das barras (Adotar EI=30):

$$k_1 = \frac{4EI}{5} = 24 \tag{4.12}$$

$$k_2 = \frac{4EI}{3} = 40 \tag{4.13}$$

$$k_3 = \frac{4EI}{7{,}5} = 16 \tag{4.14}$$

O coeficiente de distribuição β_i é dado por

$$\beta_i = \frac{k_i}{\sum k_i}, \tag{4.15}$$

Logo,

$$\beta_1 = \frac{24}{80} = 0{,}30$$

$$\beta_2 = \frac{40}{80} = 0{,}50$$

$$\beta_3 = \frac{16}{80} = 0{,}20$$

O somatório de todos os β_i deve ser 1:

$$\sum \beta_i = 1 \tag{4.16}$$

Em seguida efetua-se o equilíbrio do nó, obtendo-se assim o momento nas barras (Figura 4-9).

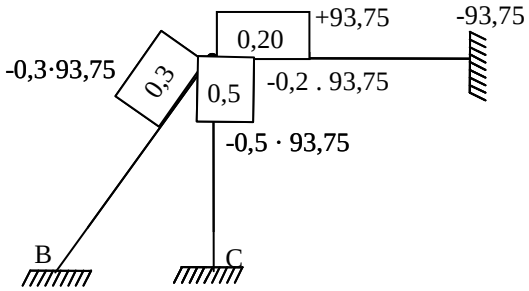


Figura 4-9: Equilíbrio do nó A

Após os momentos nas barras terem sido determinados, efetua-se a transmissão dos momentos para as outras extremidades (Figura 4-10), obtendo-se os momentos finais. Nas barras, os momentos finais são positivos no sentido anti-horário e são negativos no sentido horário.

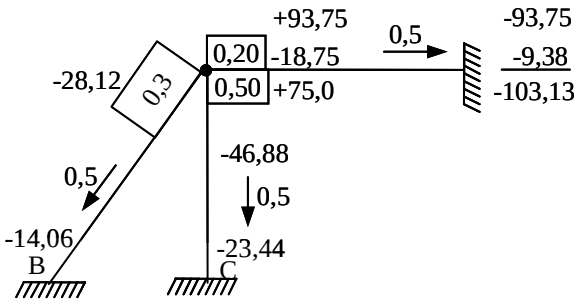


Figura 4-10: Distribuição dos momentos e momentos finais nas barras

O diagrama de momento fletor do pórtico da Figura 4-8 é mostrado na Figura 4-11.

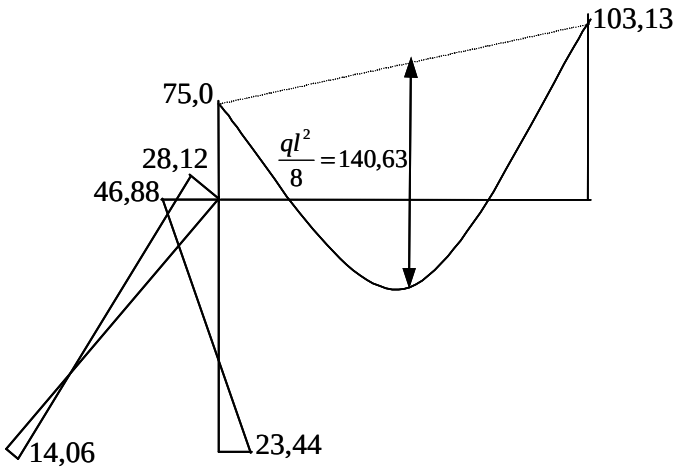


Figura 4-11: Diagrama de momentos fletores

O *site* http://isabtp.univ-pau.fr/~clb/rdm/isa2/Codes/HTML/cross/cross.html apresenta uma animação referente ao Processo de Cross para vigas contínuas. Ela permite ao aluno compreender a distribuição de momentos ente os nós quando utilizado o Processo de Cross. Aconselha-se descobrir o Processo de Cross utilizando deste *site*, acompanhando os exercícios nele resolvidos e resolvendo aqueles que são propostos no estudo dirigido.

4.4.1.2. Exemplo 2 - Viga contínua

Seja a viga contínua mostrada na Figura 4-12, cuja rigidez à flexão (EI) é constante.

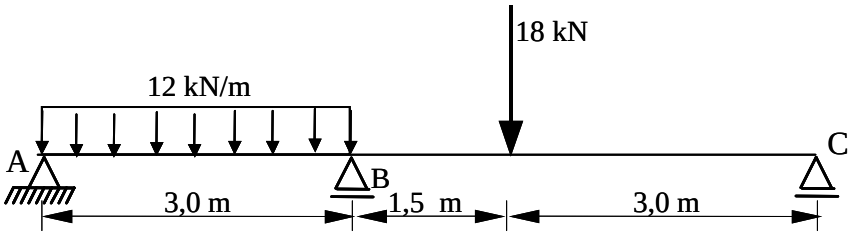
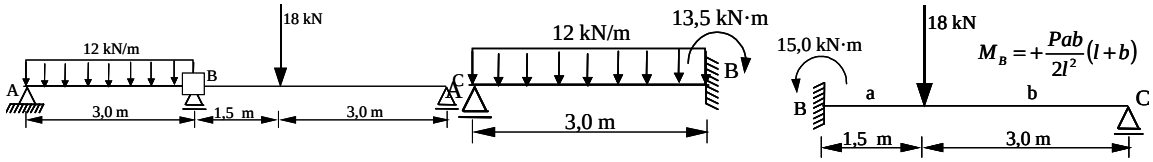


Figura 4-12: Viga contínua

Para resolver a viga contínua da Figura 4-12, primeiramente, fixa-se o giro do nó B (Figura 4-13a) e calculam-se os momentos de engastamento perfeito devidos às cargas nas barras (Figura 4-13b e c). Ver Tabela I de SUSSEKIND,1994, v.3, página 17.



(a) Viga com o giro em B impedido **(b) Mom. de eng. perfeito em B** **(b) Mom. de eng. perfeito em B**

Figura 4-13: Viga contínua e os seus momentos de engastamento perfeito

Verifica-se que o nó B da viga está desequilibrado de uma parcela ΔM_B, como ilustrado na Figura 4-14. Esta parcela de desiquilíbrio de momento deve ser repartida entre as barras que concorrem neste nó na proporção dos coeficientes de distribuição.

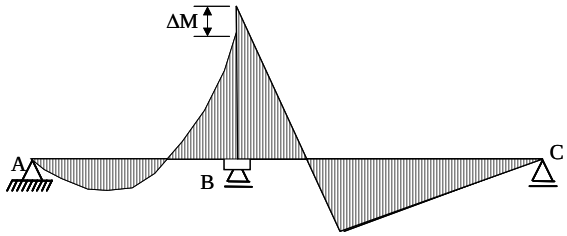


Figura 4-14: Viga contínua com os momentos de engastamento perfeito em cada tramo

Calculam-se em seguida os coeficientes de distribuição a partir das rigidezes das barras (usar EI=9) a fim de se efetuar o equilíbrio do nó (Figura 4-15).

$$k_1 = \frac{3EI}{l_1} = \frac{3 \cdot 9}{3} = 9 \rightarrow \beta_1 = \frac{9}{15} = 0{,}6 \rightarrow t_1 = 0$$

$$k_2 = \frac{3EI}{l_2} = \frac{3 \cdot 9}{4{,}5} = 6 \rightarrow \beta_2 = \frac{6}{15} = 0{,}4 \rightarrow t_2 = 0$$

$$\sum k_i = 15$$

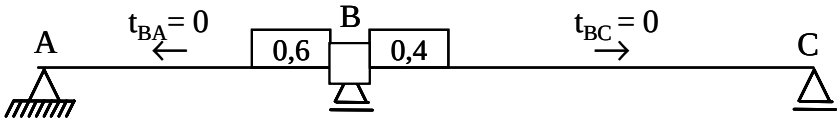


Figura 4-15: Coeficientes de distribuição e de transmissão

Após, calcula-se a parcela de desequilíbrio do momento no nó e distribui-se esta parcela entre as barras concorrentes a este nó, na proporção dos coeficientes de distribuição:

$$\Delta M_B = 15 - 13{,}5 = 1{,}5$$
$$M_1 \rightarrow (-0{,}6) \cdot (1{,}5) = -0{,}9$$
$$M_2 \rightarrow (-0{,}4) \cdot (1{,}5) = -0{,}6$$

Efetuando-se o equilíbrio dos momentos, encontra-se o momento no apoio interno igual a 14,4 kN.m (Figura 4-16):

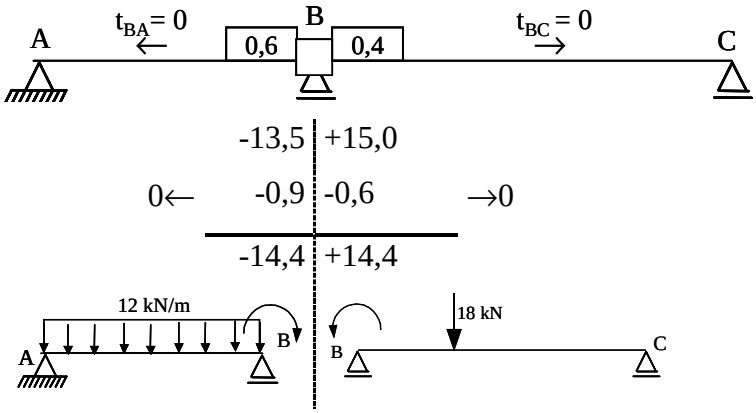


Figura 4-16: Equilíbrio e transmissão dos momentos

As reações podem ser obtidas a partir da equações de equilíbrio da Estática, como mostrado na Figura 4-17. A partir dos valores das reações é possível determinar o ponto de momento máximo e traçar o diagrama de esforço cortante e momento fletor da viga.

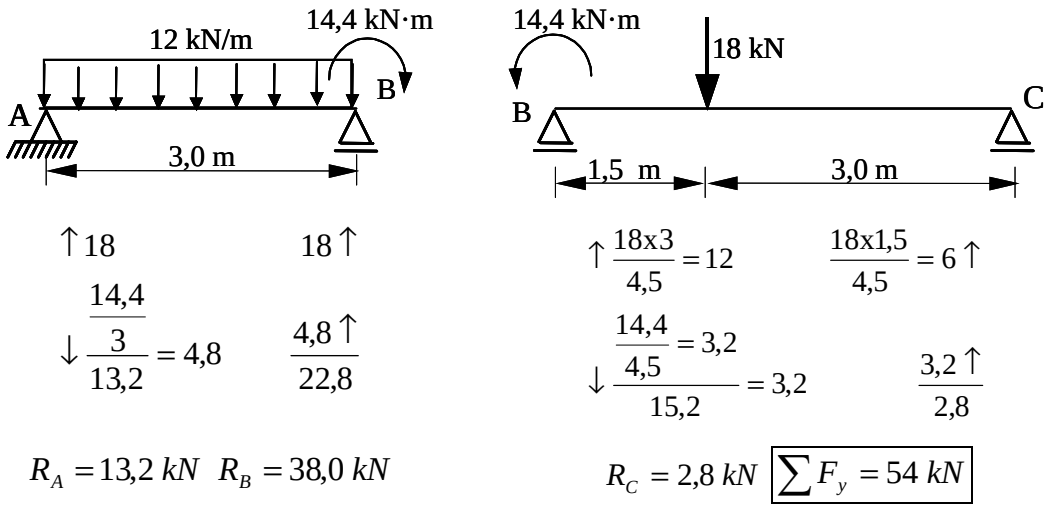


Figura 4-17: Reações da viga contínua

O diagrama de momentos fletores da viga contínua é ilustrado na Figura 4-18. Fica como exercício para o leitor o traçado do diagrama de esforços cortantes no espaço indicado desta mesma figura, especificando a posição dos esforços cortantes nulos e calculando os valores dos momentos positivos máximos.

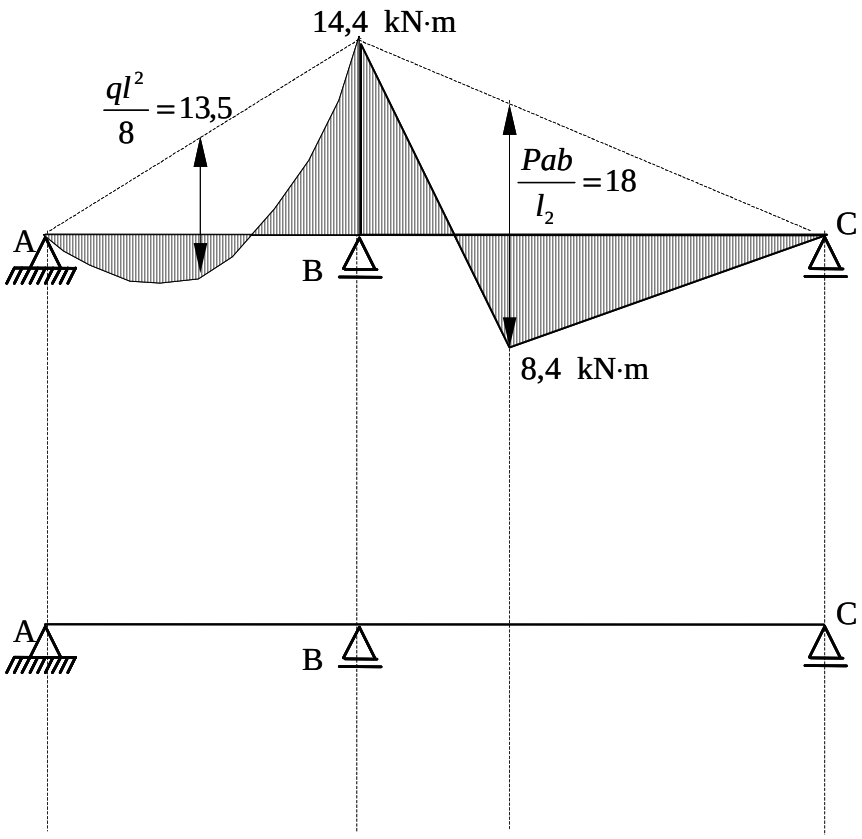


Figura 4-18: Diagramas finais de momentos fletores e esforços cortantes

4.4.1.3. Exemplo 3 – Viga contínua com engaste

Seja a viga mostrada na Figura 4-19, cuja rigidez à flexão (EI) é constante.

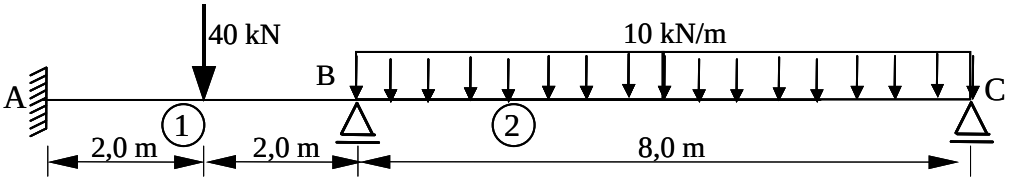


Figura 4-19: Viga contínua com engaste

Para resolver esta estrutura pelo Processo de Cross, inicialmente, fixa-se o nó B, impedindo sua rotação (Figura 4-20) e determinam-se os momentos de engastamento perfeito em cada barra (Figura 4-21).

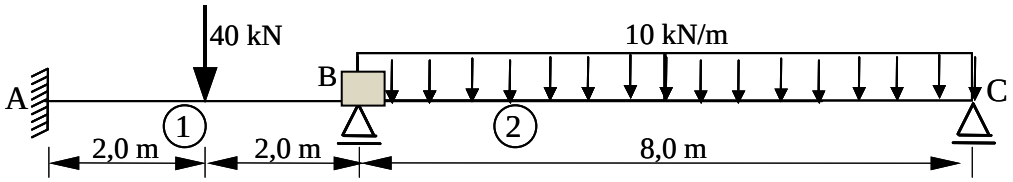


Figura 4-20: Viga com o giro do nó B restringido

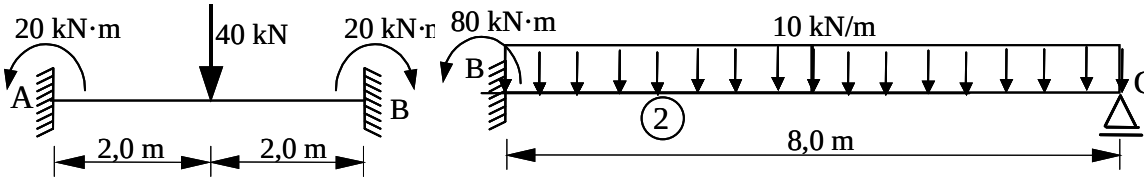


Figura 4-21: Momentos de engastamento perfeito

Após os momentos engastamento perfeito terem sido calculados, passa-se a determinação das rigidezes das barras. A partir delas calculam-se os coeficientes de distribuição (β_i) e de transmissão (usar EI=8).

$$k_1 = \frac{4EI}{l_1} = \frac{4 \cdot 8}{4} = 8$$

$$k_2 = \frac{3EI}{l_2} = \frac{3 \cdot 8}{8} = 3$$

$$\sum_{i=1}^{2} k_i = 11$$

$$\beta_1 = \frac{8}{11} = 0{,}727$$

$$\beta_2 = \frac{3}{11} = 0{,}273$$

$t_1 = 0{,}5$ e $t_2 = 0$

De posse dos momentos de engastamento perfeito, do coeficiente de transmissão e de distribuição, passa-se ao equilíbrio do nó B e a transmissão dos momentos para as outras extremidades da barra.

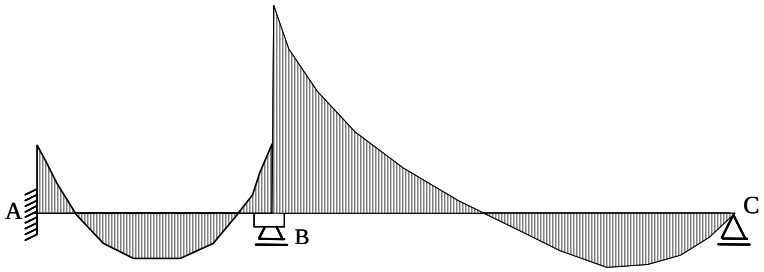


Figura 4-22: Momentos de engastamento perfeito

A diferença dos momentos aplicados no nó é $\Delta M_B = +60$, portanto a parcela que cabe a cada barra é $M_1 = -0{,}727 \cdot 60 = -43{,}62$ e $M_2 = -0{,}273 \cdot 60 = -16{,}38$ (Figura 4-23).

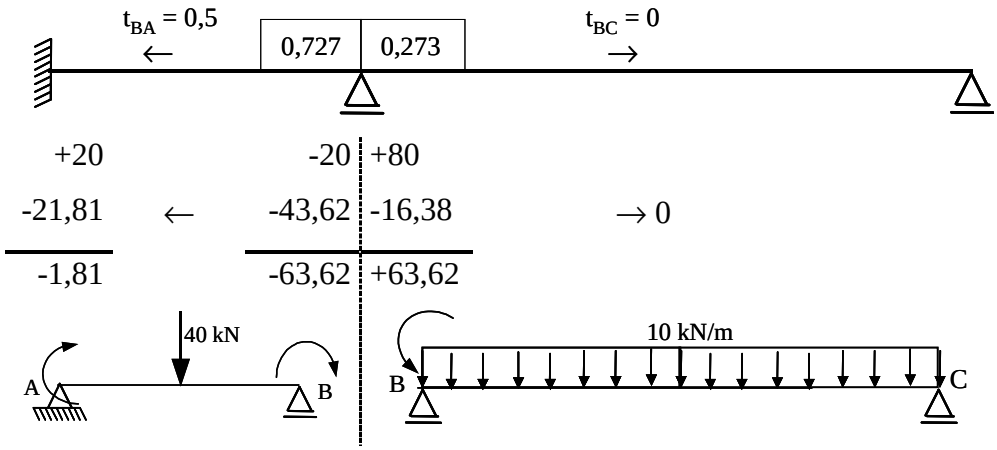


Figura 4-23: Equilíbrio do nó B e transmissão dos momentos

Efetuado o equilíbrio do nó B, obtêm-se os momentos no engaste A e no apoio B. Dessa forma, as reações nos apoios podem ser determinadas utilizando as equações de equilíbrio da Estática e o diagrama de momentos pode ser traçado colocando-se, a partir das linhas de fechamento, os diagramas correspondentes aos momentos devido às cargas atuantes nos tramos (Figura 4-24), considerando estes tramos como vigas isostática. O leitor deve completar a Figura 4-24, indicando o valor dos momentos positivos nos tramos e traçando o diagrama de esforços cortantes no espaço indicado.

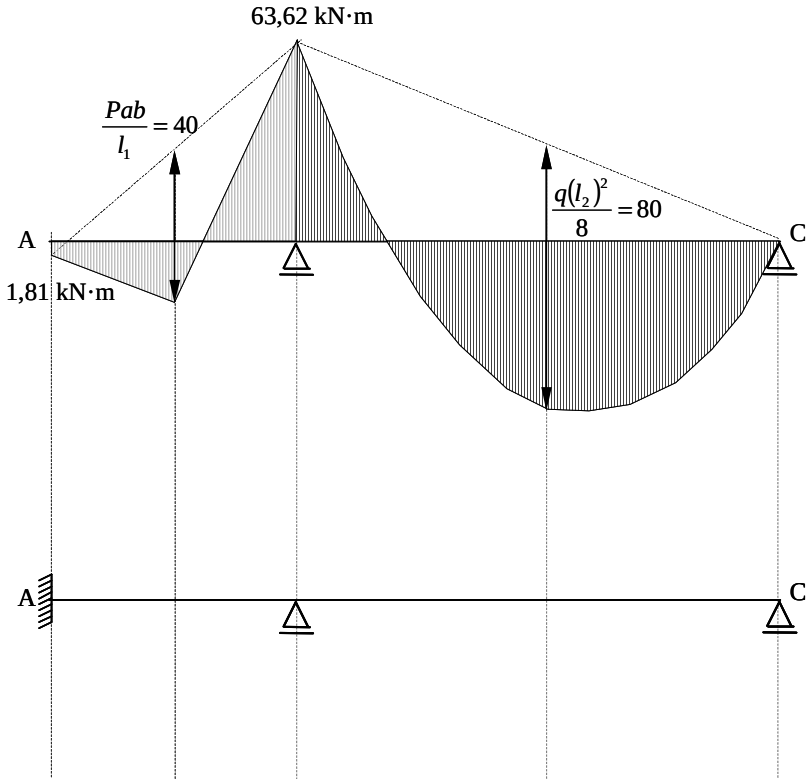


Figura 4-24: Diagramas finais de momentos fletores e de esforços cortantes

4.4.1.4. Viga contínua com balanço e momento aplicado no nó

Seja a viga mostrada na Figura 4-25, cuja rigidez à flexão (EI) é constante.

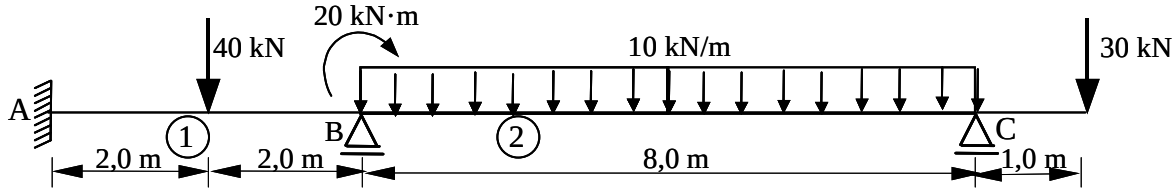


Figura 4-25: Viga contínua em balanço

Para resolver esta estrutura pelo Processo de Cross, fixa-se a rotação do nó a equilibrar (Figura 4-26). Neste caso, fixa-se o nó B e determinam-se os momentos de engastamento perfeito em cada barra (Figura 4-27). O balanço pode ser substituído por um sistema equivalente composto por uma força e um momento aplicado no apoio C (Figura 4-26).

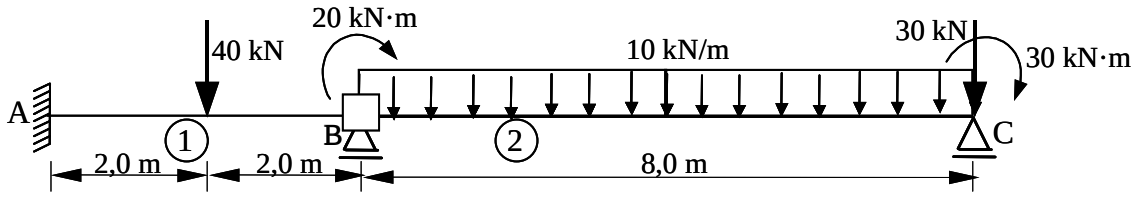
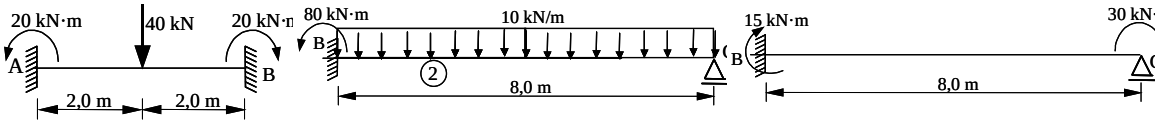


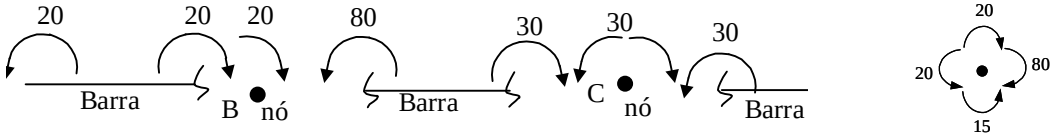
Figura 4-26: Viga contínua equivalente



(a) Barra 1 **(b) Barra 2** **(c) Barra 2**

Figura 4-27: Momentos de engastamento perfeito nas barras

O momento do balanço (em C) de 30 kN.m deve ser transmitido para a outra extremidade da barra BC ($0{,}5 \cdot 30\ kN \cdot m = 15\ kN \cdot m$) (Figura 4-28b).



(a) Momentos nas extremidades das barras e nos nós **(b) Momentos totais no nó B**

Figura 4-28: Momentos nas extremidades das barras e nos nós

O nó B não está equilibrado (Figura 4-28b), sendo o momento de desequilíbrio dado por

$$\Delta M_B = +20 + 80 - 20 - 15 = +65$$

Para que haja equilíbrio, deve-se somar os momentos devido ao fato do nó ser deslocável e girar, causando esforços nas barras 1 e 2. O equilíbrio do nó é efetuado pela distribuição da parcela de desequilíbrio (ΔM_B) (Figura 4-29).

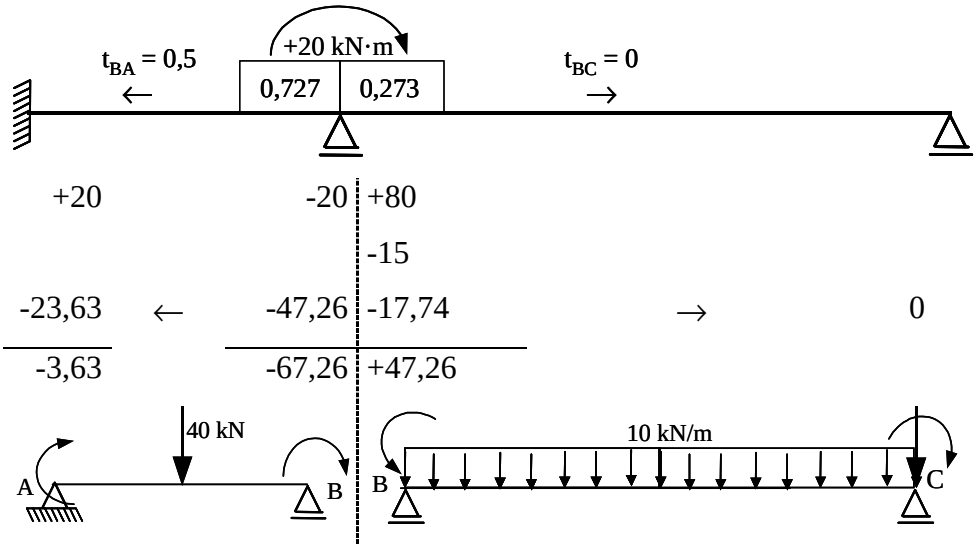


Figura 4-29: Equilíbrio do nó B e transmissão dos momentos

$M_1 = -\beta_1 \cdot \Delta M_B = -0{,}727 \cdot 65 = -47{,}26$ e

$M_2 = -\beta_2 \cdot \Delta M_B = -0{,}273 \cdot 65 = -17{,}74$.

O momento total na extremidade da barra (1) é

$-20 - 47{,}28 = -67{,}26$

e na barra (2) é

$-15 + 80 - 17{,}74 = +47{,}26$.

A descontinuidade entre os esforços nas barras é devida ao momento aplicado (Figura 4-25).

O nó C não deve ser equilibrado, pois, a priori, ele já está equilibrado. Não há momento externo aplicado no nó (M=0) e os esforços na barra à direita é à esquerda são conhecidos, iguais em módulo e de sentidos opostos. O apoio C está livre para girar, não surge nenhum esforço nas barras devido à rotação do apoio (é diferente do apoio B, que é um apoio interno e não está livre para girar). No entanto o esforço na barra (2) na extremidade direita devido ao balanço deve ser transmitido para a extremidade esquerda, uma vez que esta fica engastada ao se fixar o nó B durante o Processo de Cross.

Os momentos finais na estrutura são ilustrados na Figura 4-30. Fica como exercício para o leitor completar o gráfico de momentos, calculando os valores dos momentos positivos máximos. Deve também calcular as reações e os esforços cortantes atuantes na estrutura e traçar o gráfico correspondente aos esforços cortantes no espaço reservado na Figura 4-30.

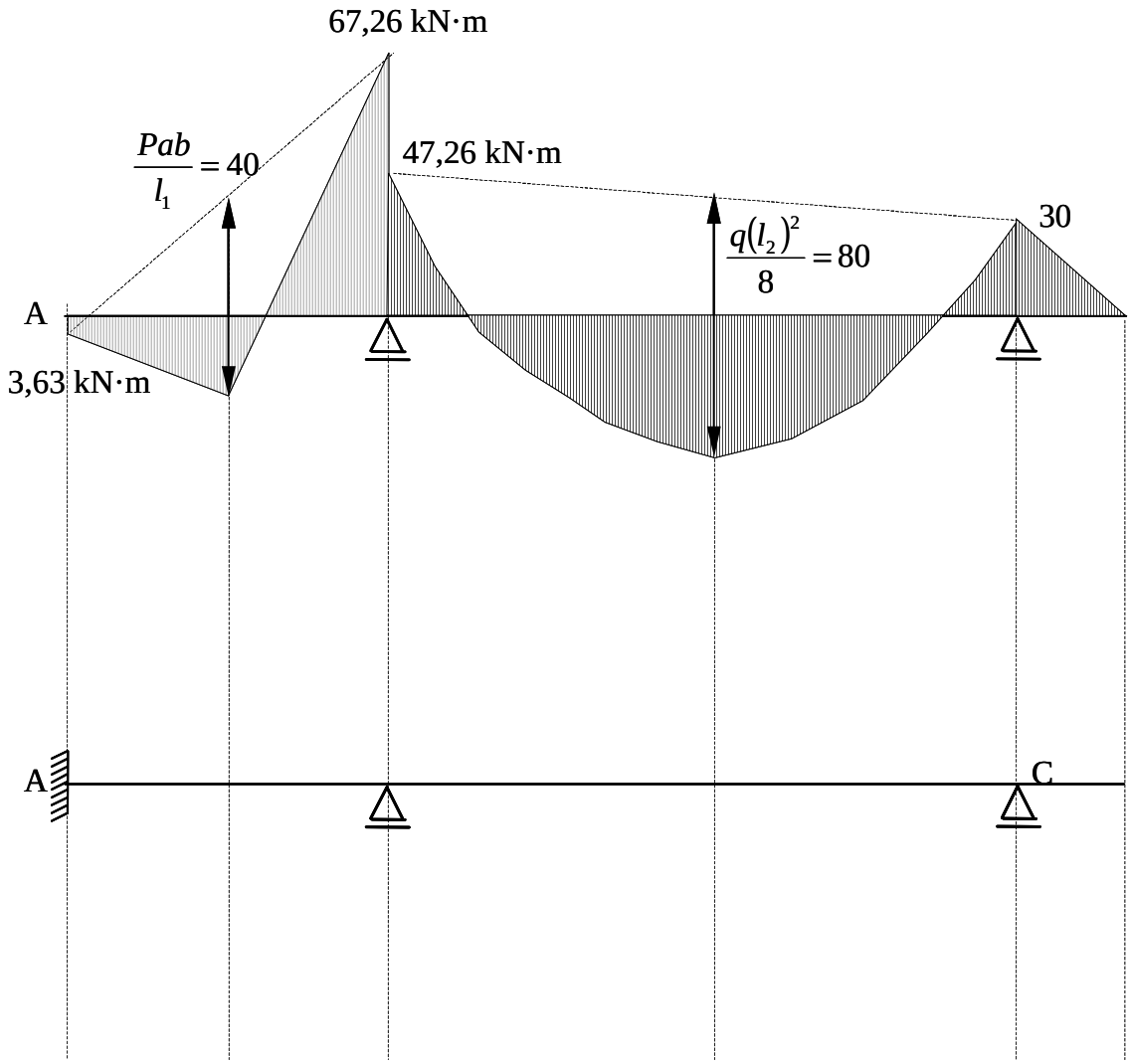


Figura 4-30: Diagrama final de momentos fletores da viga contínua

4.4.2. Processo de Cross para dois ou mais nós

Passa-se agora ao estudo de Processo de Cross para dois ou mais nós. O processo é iniciado pelo nó mais desequilibrado e os momentos que surgem devido à rotação do nó são somados para equilibrar este nó. Estes momentos são transmitidos aos nós adjacentes pelos coeficientes de transmissão. Passa-se para o próximo nó desequilibrado e assim sucessivamente até se chegar a um valor desprezível de momento a ser transmitido (~0,1 ou 0,01). Trata-se assim de um processo iterativo.

4.4.2.1. Exemplo 1 – Viga contínua

Seja a viga contínua mostrada na Figura 4-31, cuja inércia é constante. Para resolver esta estrutura pelo Processo de Cross, fixam-se os nós internos a equilibrar. Neste caso, fixam-se os nós B e C e determinam-se os momentos de engastamento perfeito em cada barra (Figura 4-32).

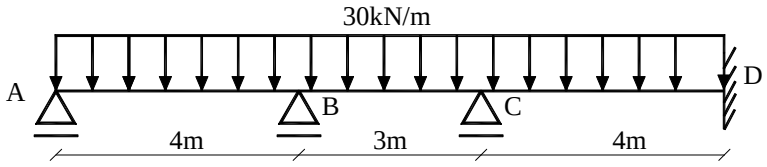


Figura 4-31: Viga contínua

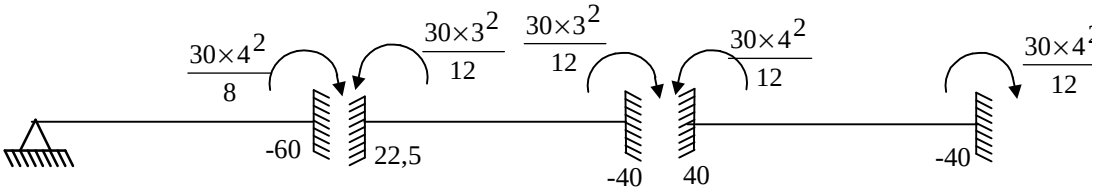


Figura 4-32: Momentos de engastamento perfeito das barras

Deve-se calcular a rigidez das barras, em seguida os coeficientes de distribuição e de transmissão (EI=12).

$$k_1 = \frac{3EI}{4\,m} = 9$$

$$k_2 = \frac{4EI}{3\,m} = 16$$

$$k_3 = \frac{4EI}{4\,m} = 12$$

$t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}5$ e $t_3 = 0{,}5$

Deve-se calcular a rigidez relativa das barras que concorrem em cada nó a fim de se determinar o coeficiente de distribuição. No nó B, esses parâmetros são dados por:

$k_1 = 9$, $k_2 = 16$ $\qquad\qquad$ $\sum_{i=1}^{n^\circ no} k_i = 25$

$\beta_1 = 0{,}36$ e $\beta_2 = 0{,}64$

No nó C, esses parâmetros são dados por:

$k_2 = 16$, $k_3 = 12$ $\qquad\qquad$ $\sum_{i=1}^{n^\circ no} k_i = 28$

$\beta_1 = 0{,}57$ e $\beta_2 = 0{,}43$

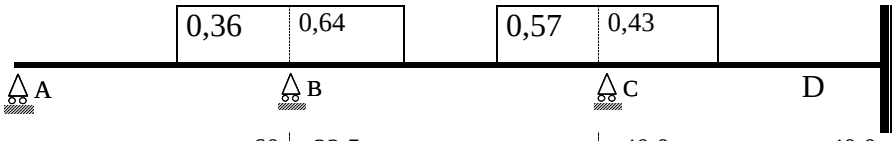
Determinam-se as parcelas de desequilíbrio nos nós B e C, respectivamente:

$\Delta M_B = -60 + 22{,}5 = -37{,}5$ e

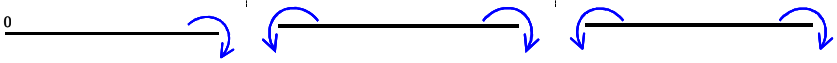
$\Delta M_C = +40 - 22{,}5 = +17{,}5$.

Inicia-se o processo pelo nó mais desequilibrado (nó B). Como agora o equilíbrio do nó B depende não apenas da rotação em B, mas também da rotação em C, ao se equilibrar o nó B, como anteriormente, não se obtêm os esforços finais. No entanto, transmitindo-se o momento da barra (2) para o nó C, fazendo-se o equilíbrio deste, transmitindo o momento da barra (2) para B e assim sucessivamente, chega-se aos esforços finais nas barras, convergindo-se para o equilíbrio final dos nós. Cada vez que se procede a um equilíbrio de nó passa-se um traço abaixo dos momentos equilibrantes (Tabela 4-1).

Tabela 4-1: Processo de Cross para uma viga contínua



		-60	+22,5		-22,5	+40,0		-40,0	
ΔM_B=-37,5		+13,5	+24,0	→	+12,0				
			-8,41	←	-16,82	-12,68	→	-6,34	ΔM_C=+29,5
ΔM_B=-8,41		+3,03	+5,38	→	+2,69				
			-0,77	←	-1,53	-1,16	→	-0,58	ΔM_C=+2,69
ΔM_B=-0,77		+0,28	+0,49	→	+0,25				
			-0,07	←	-0,14	-0,11	→	-0,06	ΔM_C=+0,25
ΔM_B=-0,07		+0,03	+0,04	→	+0,02				
				0←	-0,01	-0,01	→0		
		-43,16	+43,16		-26,04	+26,04		-46,98	**Momentos finais**



A partir dos momentos finais obtidos da Tabela 4-1, traça-se a linha de fechamento do gráfico de momento fletor e sobre essa linha sobrepõem-se os diagramas de momentos devidos aos carregamentos nas barras.

4.4.2.2. Exemplo 2 – Pórtico indeslocável

Seja o pórtico indeslocável mostrado na Figura 4-33, cujo módulo de elasticidade é constante.

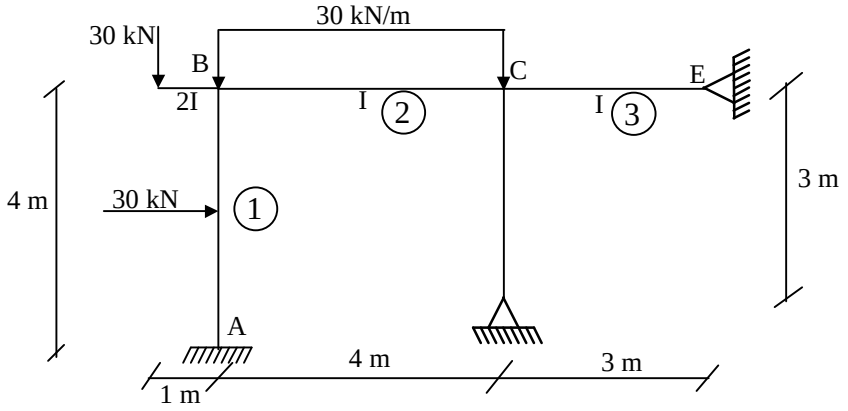


Figura 4-33: Pórtico indeslocável

Para resolver o pórtico da Figura 4-33, primeiramente fixam-se os nós B e C e determinam-se os momentos de engastamentos perfeito nas barras e o momento do balanço é transferido para o nó B (Figura 4-34).

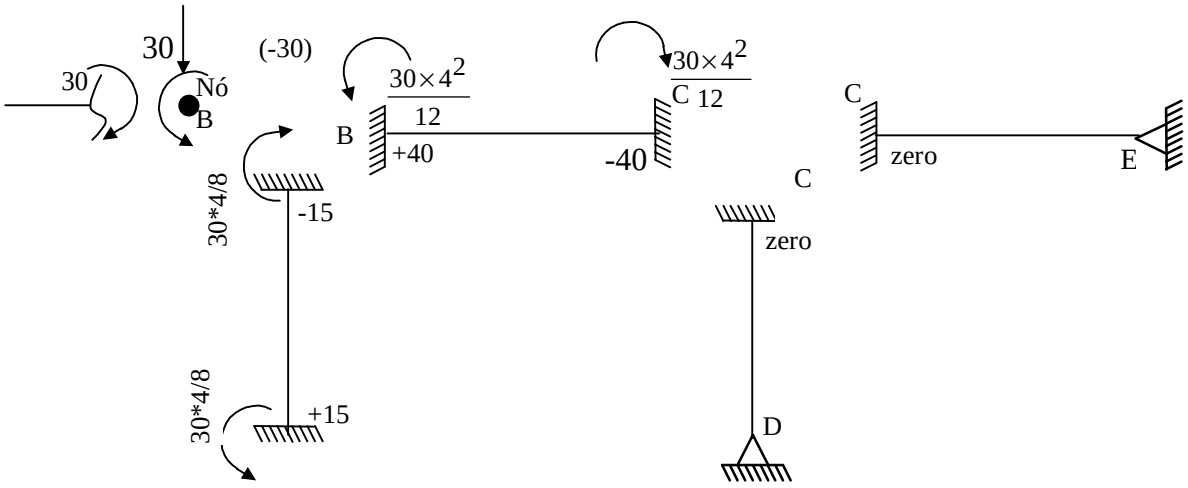


Figura 4-34: Momentos de engastamento perfeito das barras e do balanço

Determinam-se as rigidezes das barras para calcular os coeficientes de distribuição nos nós (EI = 1).

$$k_1 = \frac{4EI}{4\,m} = 1$$

$$k_2 = \frac{4EI}{4\,m} = 1$$

$$k_3 = \frac{3EI}{3\,m} = 1$$

$$k_4 = \frac{3EI}{3\,m} = 1$$

No nó B

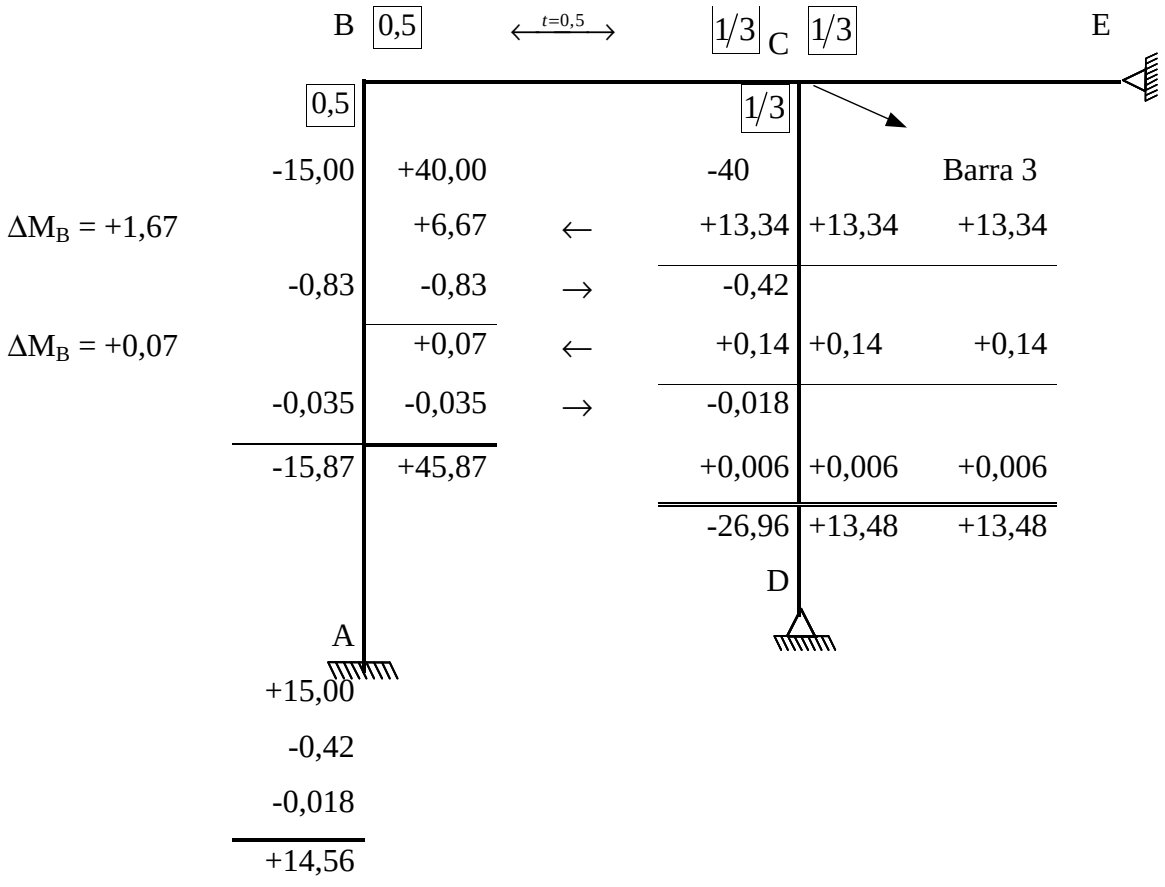
$$\beta_1 = \beta_2 = 0{,}5$$
$$t_1 = t_2 = 0{,}5$$

e no nó C

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1/3$$
$$t_2 = 0{,}5 \qquad t_3 = t_4 = 0$$

Deve-se iniciar o Processo de Cross pelo nó mais desequilibrado, que no caso é o C.

Tabela 4-2: Processo de Cross para o pórtico indeslocável



A Figura 4-35 ilustra os momentos que atuam nos nós equilibrados, B e C. Observa-se que o somatório dos momentos em cada nó é igual a zero.



(a) Nó B **(b) Nó C**

Figura 4-35: Momentos nos nós do pórtico indeslocável

Uma alternativa para a realização do Processo de Cross em pórticos é a realização da Tabela 4-3. Esta tabela deve conter os nós ou apoios, as barras ou as suas extremidades, o coeficiente de distribuição, o coeficiente de transmissão e os momentos de engastamento perfeito.

Tabela 4-3: Tabela de execução do Processo de Cross

	t = 0,5		t = 0,5				
	Nó A	Nó B (-30 kN·m)		Nó C			Nó D	Nó E
	Barra 1	Barra 1	Barra 2	Barra 2	Barra 3	Barra 4	Barra 4	Barra 3
Coef. distr.		0,5	0,5	(1/3)	(1/3)	(1/3)		
Mom. gng.	+15	-15	+40	-40				
ΔM_B=+1,67			+6,67	←+13,34	+13,33	+13,33		
	-0,42	←-0,83	-0,83→	-0,42				
ΔM_B=+0,07			+0,07	←+0,14	+0,14	+0,14		
	-0,018	←-0,035	-0,035→	-0,018				
				+0,006	+0,006	+0,006		
	+14,56	-15,87	+45,87	-26,96	+13,48	+13,48		

Atingido o equilíbrio dos nós do pórtico, determinam-se os momentos nas extremidades das barras. Estes momentos formam a linha de fechamento do diagrama de momentos. Sobre as linhas de fechamento sobrepõem-se os diagramas de momentos originários do carregamento aplicado nas barras (Figura 4-36).

Como exercício, o aluno deverá traçar os gráficos de esforços normais e esforços cortantes (Figura 4-37 e Figura 4-38), localizando, com as distâncias, os pontos de esforços nulos e conseqüentemente os pontos de momentos fletores máximos. Os valores dos momentos máximos devem ser calculados e especifícados na Figura 4-36.

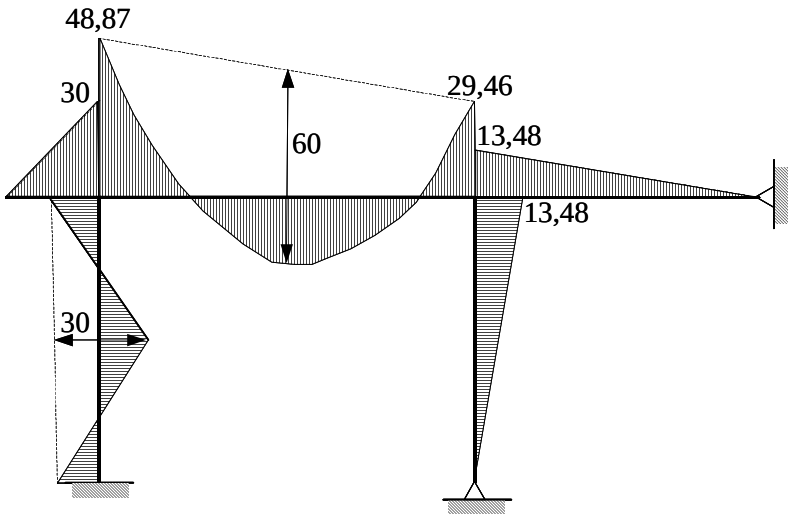


Figura 4-36: Diagrama final dos momentos fletores do pórtico indeslocável

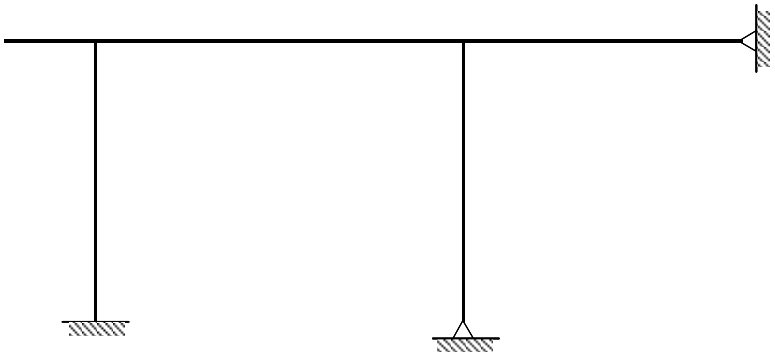


Figura 4-37: Diagrama de esforços normais

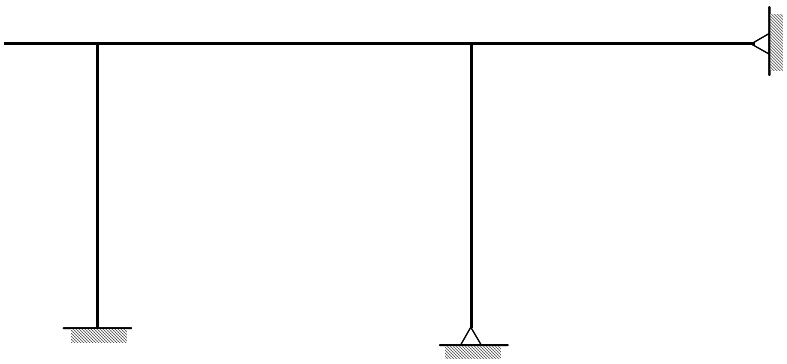


Figura 4-38: Diagramas de esforços cortantes

Para estruturas com mais de 2 nós, aplica-se o mesmo procedimento. Inicia-se pelo nó mais desequilibrado e passa-se para os demais, sempre na mesma sequência como ilustrado na Figura 4-39 Ver SUSSEKIND (1994), Vol. 3 – 4 Ex II.1, página 198.

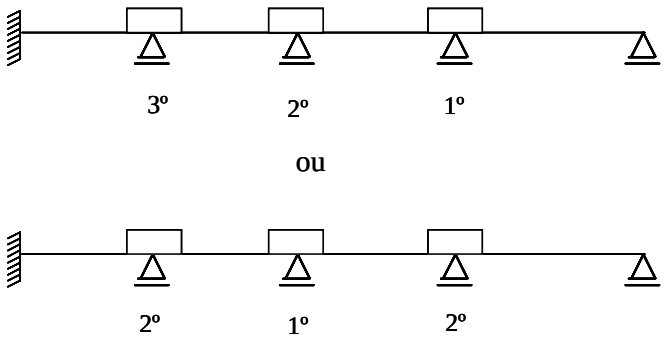


Figura 4-39: Seqüência de distribuição de momentos

4.4.3. Exercícios propostos

4.4.3.1. Exercício 1

Determine as reações e os diagramas de esforços normais e cisalhantes e de momentos fletores do pórtico plano indicado na Figura 4-40 (os gráficos devem ser feitos em escala). A tabela para efetuar o Processo de Cross necessita ser completada com os coeficientes de distribuição e os momentos de engastamento perfeito. As barras do pórtico têm rigidez à flexão constante.

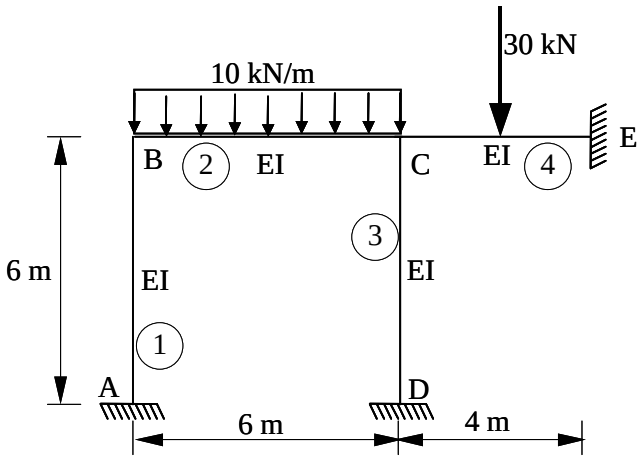


Figura 4-40 Exercício 1- Pórtico plano com rigidez constante

t = 0,5 t = 0,5 t = 0,5 t = 0,5

	Nó A	Nó B		Nó C			Nó E	Nó D
	Barra 1	Barra 1	Barra 2	Barra 2	Barra 3	Barra 4	Barra 4	Barra 3
Coef. distr.								
Mom. eng.								

4.4.3.2. Exercício 2

Determine as reações e os diagramas de esforços normais e cisalhantes e de momentos fletores do pórtico plano indicado na Figura 4-41 (os gráficos devem ser feitos em escala). A tabela para efetuar o Processo de Cross necessita ser completada com os coeficientes de distribuição e os momentos de engastamento perfeito. A rigidez flexão dos pilares é o dobro das vigas.

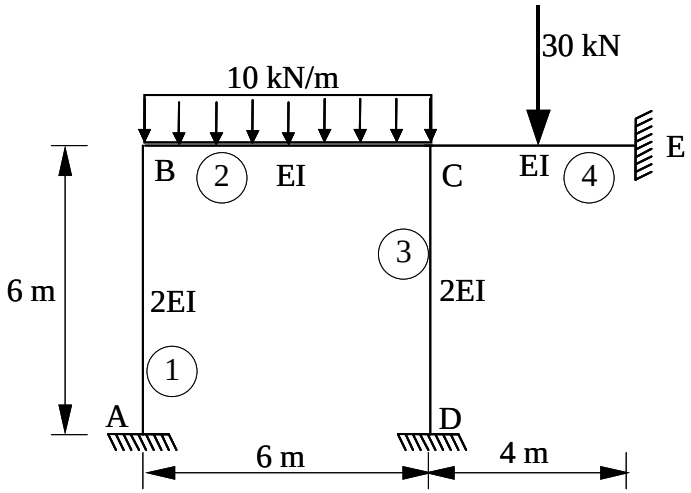


Figura 4-41 Exercício 2 - Pórtico plano com rigidezes diferentes

t = 0,5 t = 0,5 t = 0,5 t = 0,5

	Nó A	Nó B		Nó C			Nó E	Nó D
	Barra 1	Barra 1	Barra 2	Barra 2	Barra 3	Barra 4	**Barra 4**	Barra 3
Coef. distr.								
Mom. eng.								

4.4.3.3. Exercício 3

Seja a viga contínua de três vãos iguais (Figura 4-42), dos quais um é submetido a uma carga concentrada e outro a uma carga distribuída. As barras têm seção transversal constante, com módulo de elasticidade E e momento de inércia I. Pede-se resolver a estrutura pelo Processo de Cross, traçar em escala os diagramas de momento fletor e cortante e determinar o valor das reações de apoio.

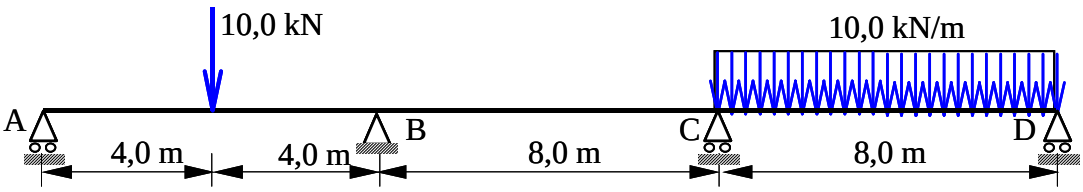


Figura 4-42: Viga contínua com 3 vãos iguais

Resposta parcial :

Nó A	Nó B		Nó C		Nó D	Nós
AB	BA	BC	CB	CD	DC	Barras
	3/7	4/7	**4/7**	3/7		Coef. Dist
	-15			+80		MEP
	+6,43	+8,57→	+4,29			
		-24,09	←-48,17	-36,12		
	+10,32	+13,77→	+6,89			
		-1,97	←-3,94	-2,95		
	+0,84	+1,13→	+0,57			
			←-0,33	-0,24		
0	+2,59	-2,59	-40,69	+40,69	0	

4.4.3.4. Exercício 4

Seja a viga contínua de três vãos iguais (Figura 4-43) submetida a carga uniformemente distribuída, cujas barras têm seção transversal constante, com módulo de elasticidade E e momento de inércia I. Pede-se resolver a estrutura pelo Processo de Cross, traçar em escala os diagramas de momento fletor e cortante e determinar o valor das reações de apoio.

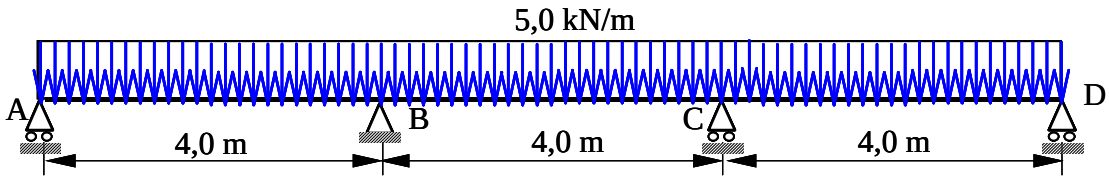


Figura 4-43: Viga contínua com 3 vãos e carregamento uniforme

Resposta parcial: Observar que o carregamento e a estrutura podem ser considerados simétricos, portanto os momentos fletores nos nós B e C devem ser iguais. A precisão dos resultados vai depender do número de iterações efetuadas.

Nó A	**Nó B**		**Nó C**		**Nó D**	**Nós**
AB	**BA**	**BC**	**CB**	**CD**	**DC**	**Barras**
	3/7	**4/7**	**4/7**	**3/7**		**Coef. Dist**
	-10	**+6,66**	**-6,66**	**+10**		**MEP**
	+1,43	**+1,91→**	**+0,95**			
		-1,23	**←-2,45**	**-1,84**		
	+0,53	**+0,70**				
0	**-8,04**	**+8,04**	**-8,16**	**+8,16**	**0**	

4.4.3.5. Exercício 5

Seja a viga contínua mostrada na Figura 4-44, cujas barras têm seção transversal constante com módulo de elasticidade E e momento de inércia I. Pede-se resolver a estrutura pelo Processo de Cross, traçar em escala os diagramas de momento fletor e cortante e determinar o valor das reações de apoio.

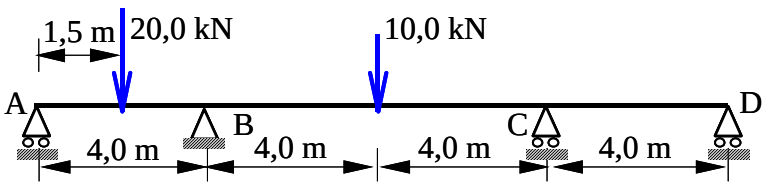


Figura 4-44 Viga contínua com três vãos diferentes

Resposta parcial:

Nó A	Nó B		Nó C		Nó D	Nós
AB	BA	BC	CB	CD	DC	Barras
	3/5	2/5	2/5	3/5		Coef. Dist
	-15 +3,0	+10 +2,0→	-10 +1,0			MEP
	-1,08	+1,84 +-0,72→	←+3,6	+5,4		
	-13,08	+13,08	-5,4	+5,4		

4.4.3.6. Exercício 6

As vigas contínuas a seguir (Figura 4-45, Figura 4-46 e Figura 4-47) têm seção transversal constante com módulo de elasticidade E e momento de inércia I. Pede-se para resolver as estruturas pelo Processo de Cross, traçar em escala os seus respectivos diagramas de momento fletor e cortante e determinar o valor de suas reações de apoio.

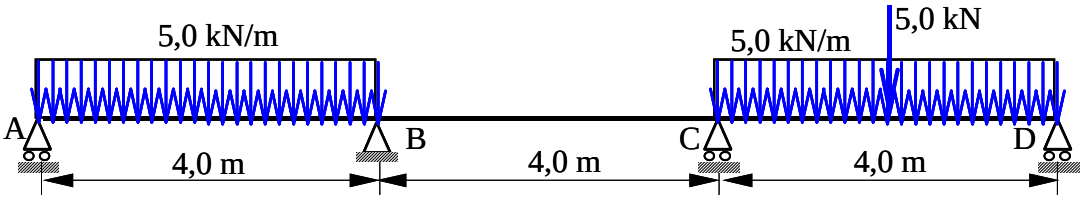


Figura 4-45 Viga Contínua com três vãos iguais

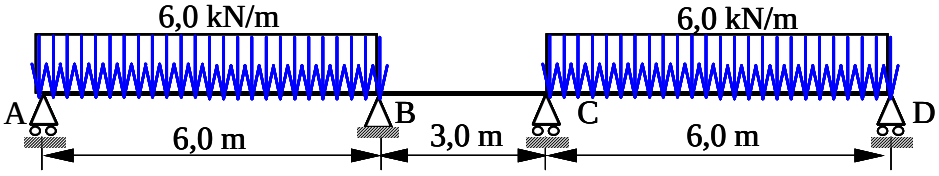


Figura 4-46 Viga contínua com três vãos diferentes

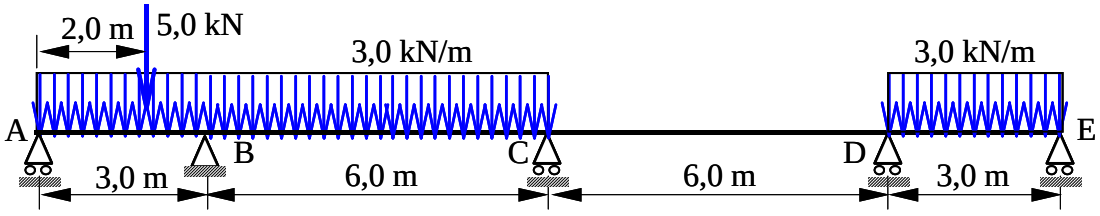


Figura 4-47 Viga contínua com quatro vãos

4.5. Estruturas indeslocáveis – explorando a simetria

4.5.1. Vigas simétricas

a) Eixo de simetria passando por um apoio – Carregamento simétrico

Seja a viga contínua com carregamento simétrico mostrada na Figura 4-48. Como o esforço axial não está sendo considerado, a estrutura pode ser considerada simétrica. Lembrando que os diagramas de esforços M e N são simétricos e V é antissimétrico, para carregamento simétrico pode-se considerar metade da estrutura e substituir o apoio C por um engaste.

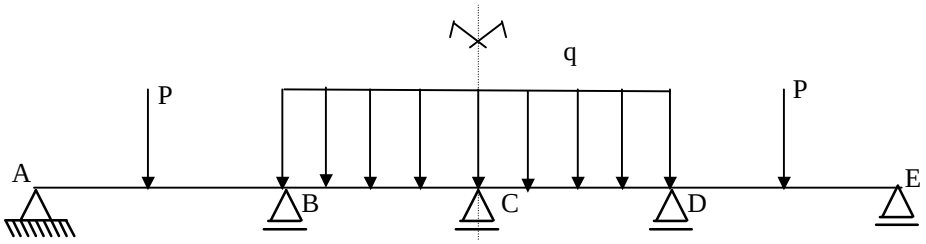


Figura 4-48: Viga com carregamento simétrico

Resolve-se esta metade, fazendo equilíbrio do nó B (1 nó, lembrando que o diagrama M da estrutura toda será simétrico e o diagrama V será anti-simétrico)

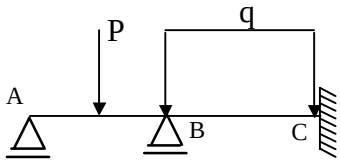


Figura 4-49: Sistema equivalente da viga mostrada pela Figura 4-48

É bom lembrar que sobre o eixo de simetria de uma viga a rotação é nula (Figura 4-50)

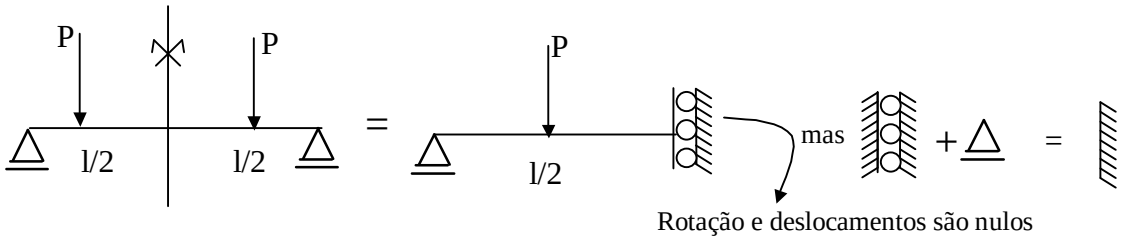
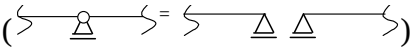


Figura 4-50: Viga simétrica e seu sistema equivalente

b) Eixo de simetria passando por um apoio – Carregamento antissimétrico

Seja a viga contínua com carregamento simétrico mostrada na Figura 4-51. Considerando a estrutura simétrica e lembrando que para carregamento antissimétrico, os diagramas de esforços M e N são antissimétricos e V, simétrico, pode-se considerar metade da estrutura deixando C como apoio simples. É como se rotulássemos o apoio C () uma vez que C o momento fletor deve ser nulo. Resolve-se apenas esta metade (Figura 4-53), lembrando que, para a estrutura toda, o diagrama M será antissimétrico e o diagrama V, simétrico.

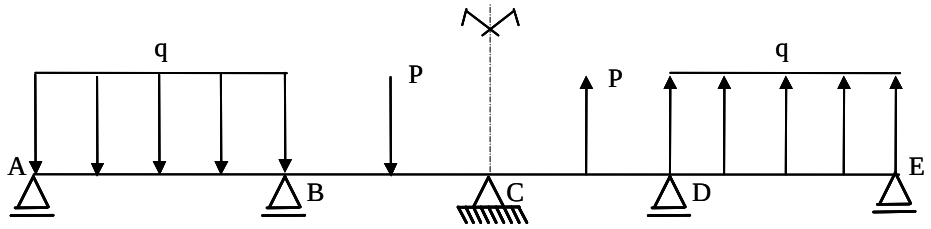


Figura 4-51: Viga contínua com carregamento antissimétrico

Lembrando que, em uma viga simétrica com carregamento antissimétrico, o deslocamento vertical sobre o eixo de simetria é nulo (Figura 4-52).

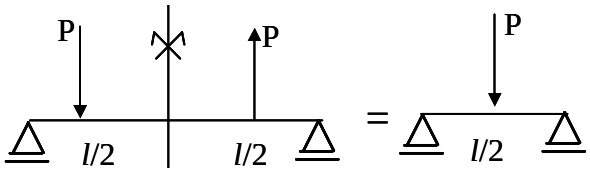


Figura 4-52: Viga simétrica com carregamento anti-simétrico e sistema equivalente

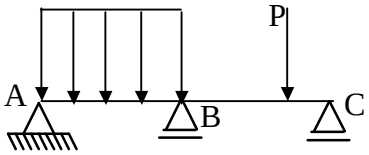


Figura 4-53: Estrutura equivalente da viga mostrada na Figura 4-51.

Na viga da Figura 4-51, se houver um momento (M_0) aplicado em C, resultará em um momento $\frac{M_0}{2}$ com o mesmo sentido na metade da estrutura. Devido à simetria da estrutura, cada metade resiste à metade do momento aplicado, como ilustrado na Figura 4-54.

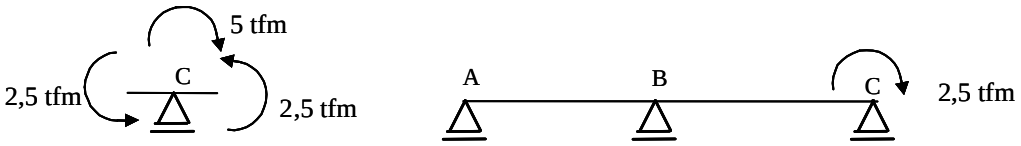


Figura 4-54: Momento fletor aplicado em um nó

Exemplo

Seja a viga da Figura 4-55, cuja rigidez à flexão (EI) é constante. (Ver SUSSEKIND. Vol. 3 Exemplo II.2 pág. 201). Determine seu o diagrama de momentos.

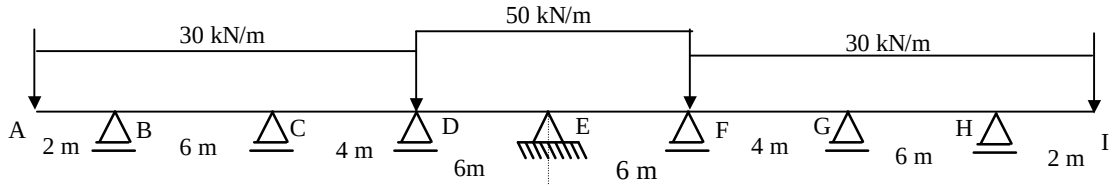


Figura 4-55: Viga contínua simétrica com carregamento simétrico

A viga da Figura 4-55 pode ser resolvida utilizando a estrutura simplificada apresentada na Figura 4-56. (Resposta: $M_C = -69\ kN \cdot m$, $M_D = -92\ kN \cdot m$ e $M_D = -178\ kN \cdot m$)

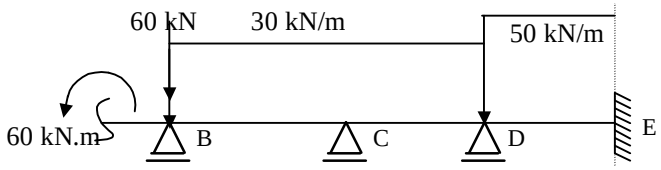


Figura 4-56: Estrutura equivalente da viga mostrada na Figura 4-55

c) Eixo de simetria não passa por um apoio – Carregamento simétrico

Para resolver uma estrutura simétrica quando o eixo de simetria não passa por um apoio (Figura 4-57), pode-se considerar metade da estrutura modificando-se a rigidez da barra seccionada em função do carregamento (se simétrico ou anti-simétrico).

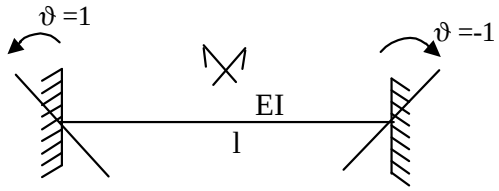


Figura 4-57: Viga bi-engastada

Quando a estrutura tiver carregamento simétrico, é bom lembrar que as rotações nos apoios da viga (Figura 4-58) têm sentidos contrários. Para determinar a rigidez da estrutura simplificada, pode-se empregar o princípio da superposição dos efeitos como

mostrado na Figura 4-59, resultando nos esforços mostrados na Figura 4-59c, ou seja, a rigidez da barra para o carregamento simétrico fica sendo $k = \frac{2EI}{l}$.

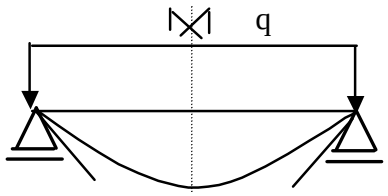
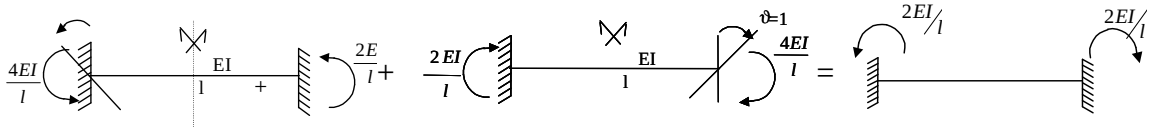


Figura 4-58: Rotações nos apoios



(a) **(b)** **(c)**

Figura 4-59: Superposição das rotações da viga mostrada na Figura 4-57

Exemplo

Seja a viga contínua ilustrada na Figura 4-60, cuja rigidez à flexão (EI) é constante. Pode-se calcular esta viga utilizando-se a estrutura simplificada ilustrada na Figura 4-61. Sabe-se que o diagrama de momento M é simétrico e o de cortante, V, é antissimétrico.

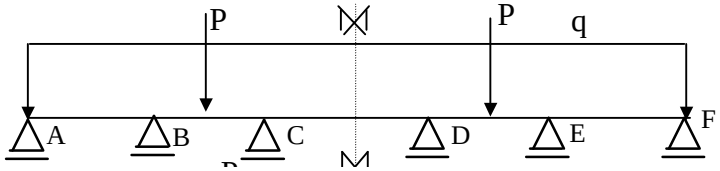


Figura 4-60 Viga contínua em que eixo de simetria não passa por apoio

No sistema da Figura 4-61, efetua-se somente o equilíbrio de dois nós: o nó B e o nó C. Considera-se o comprimento total da barra CD para o cálculo do momento de engastamento perfeito em C. As rigidezes das barras são $k_1 = \frac{3EI}{1,5}$, $k_2 = \frac{4EI}{2,5}$ e $k_3 = \frac{2EI}{4}$.

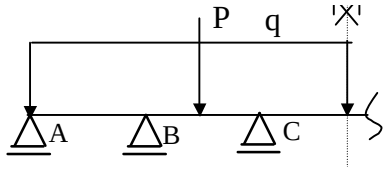


Figura 4-61 Consideração de metade da estrutura com rigidez da barra central modificada

d) Eixo de simetria não passa por um apoio – Carregamento antissimétrico

No caso de viga com eixo de simetria que não passa por um apoio e o carregamento é antissimétrico, também se pode considerar metade da estrutura para a resolução, modificando-se a rigidez da barra seccionada em função do carregamento.

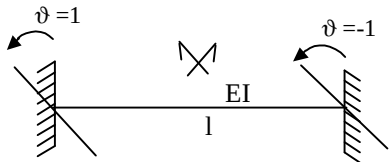


Figura 4-62: Viga bi-engastada

Pode-se empregar o princípio da superposição dos efeitos como mostrado na Figura 4-63, resultando nos esforços mostrados na Figura 4-63c, ou seja, a rigidez da barra para o carregamento antissimétrico fica sendo $k = \frac{6EI}{l}$.

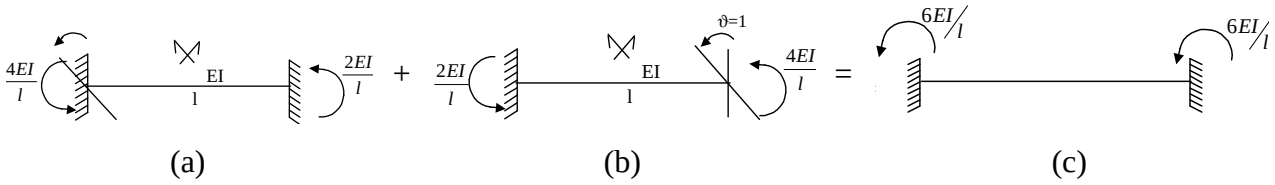


Figura 4-63: Superposição de efeitos da viga da Figura 4-62

Exemplo

Seja a viga contínua ilustrada na Figura 4-64, cuja rigidez à flexão (EI) é constante. Pode-se calcular esta viga utilizando-se a estrutura equivalente ilustrada na Figura 4-65. O diagrama de momento M é antissimétrico e o de cortante, V, é simétrico.

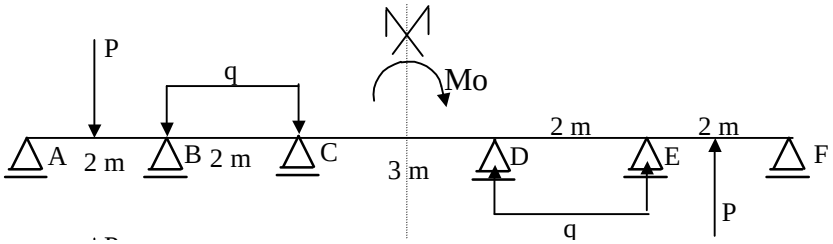


Figura 4-64: Viga simétrica com carregamento antissimétrico

No sistema da Figura 4-65, efetua-se somente o equilíbrio de dois nós: o nó B e o nó C. Considera-se toda a barra CD para o cálculo do momento de engastamento perfeito em C. As rigidezes das barras são $k_1 = \frac{3EI}{2}$, $k_2 = \frac{4EI}{2}$ e $k_3 = \frac{6EI}{3}$. No caso do binário aplicado $M_c = M_c = -\frac{M_0}{4}$

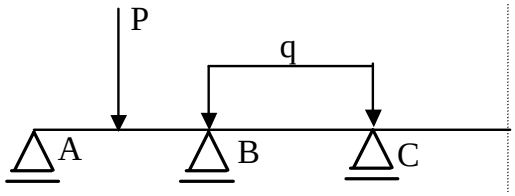


Figura 4-65: Viga equivalente

4.5.2. Pórticos planos simétricos

a) Eixo de simetria passa por uma barra vertical

Seja o pórtico plano mostrado na Figura 4-66, cujo módulo de elasticidade (E) é constante. O momento de inércia das barras é $I_{AB} = I_{DE}$, $I_{BC} = I_{CD}$ e $I_{BF} = I_{DH}$.

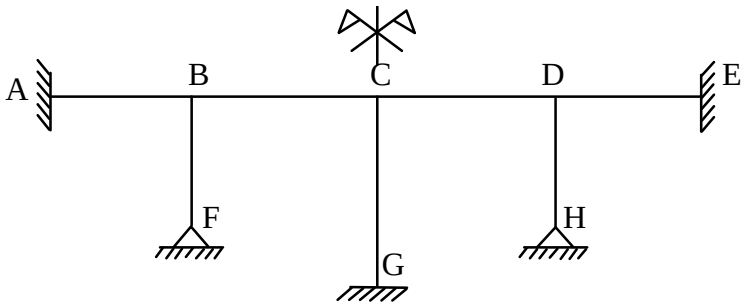


Figura 4-66: Pórtico plano simétrico

Se o carregamento for simétrico, considera–se metade da estrutura engastada em C (Figura 4-67). Neste caso, o diagrama de momento fletor da estrutura é simétrico e o diagrama de esforço cortante é antissimétrico.

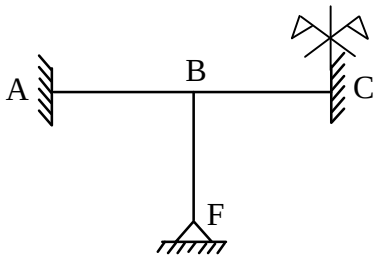


Figura 4-67: Estrutura equivalente do pórtico plano

Observa–se que, devido à simetria, deve–se ter $M_{BC} = M_{CD}$, portanto para que haja equilíbrio no nó C, deve–se ter $M_{CG} = 0$ (Figura 4-68)

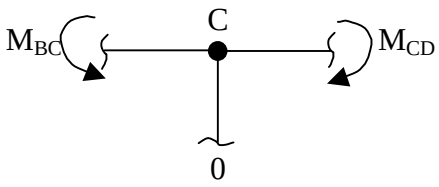


Figura 4-68: Momentos fletores no nó C

Se o carregamento for antissimétrico, considera-se metade da estrutura e a barra vertical CG com metade da inércia original. As demais barras não mudam (Figura 4-69). O diagrama de momento fletor da estrutura inteira é antissimétrico, enquanto que o diagrama de esforço cortante é simétrico. Observa–se, no entanto, que o momento fletor final na barra vertical CG será o dobro do valor encontrado no esquema acima.

Se houver um binário (M_0) aplicado em C, deve –se dividi-lo ao meio e aplicar $M_0/2$ em C no esquema simplificado da Figura 4-68.

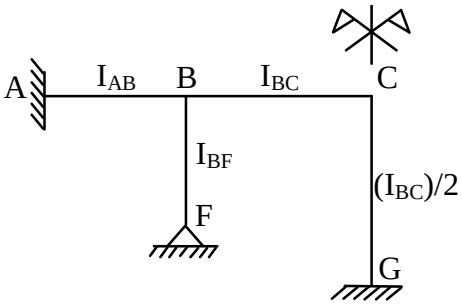


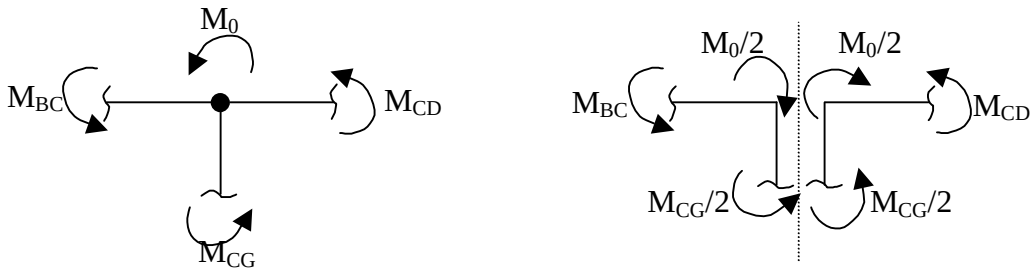
Figura 4-69: Estrutura equivalente do pórtico plano

Isto deve-se ao fato que $M_{BC} = M_{CD}$ (mesmo sentido) devido à anti–simetria, na estrutura real (ver Figura 4-70a).

$$2 \cdot M_{BC} + M_{CG} = M_0$$

enquanto que, na estrutura simplificada (Figura 4-70a), tem-se a metade da equação acima

$$M_{BC} + \frac{M_{CG}}{2} = \frac{M_0}{2}.$$



(a) Real **(b) Simplificado**

Figura 4-70: Momento aplicado em um nó situado no eixo de simetria

b) Eixo de simetria corta uma barra horizontal

É análogo ao caso da viga simétrica visto no item 4.5.1. Resolve-se a metade da estrutura. Para um carregamento simétrico a rigidez da barra BC é $k_{BC} = \frac{2EI_{BC}}{l_{BC}}$ e para um carregamento antissimétrico é $k_{BC} = \frac{6EI_{BC}}{l_{BC}}$.

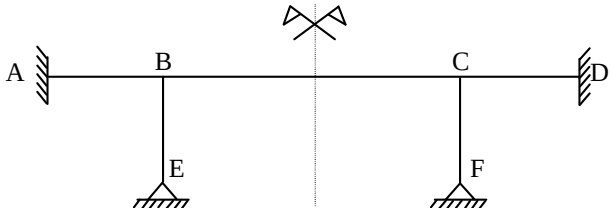


Figura 4-71: Pórtico plano com um eixo de simetria

4.6. Processo de Cross para estruturas deslocáveis

Para resolução de estruturas com deslocabilidades de translação, ou seja, estruturas de nós móveis, será necessário inicialmente o cálculo de momentos de engastamento perfeito causado por deslocamentos impostos (recalques), conforme descrito a seguir.

4.6.1. Momentos de engastamento perfeito em barras submetidas a recalques

Em vigas bi-engastadas (Figura 4-72), os momentos de engastamento perfeito para o caso de recalque em um dos apoios são $M_A = M_B = +\frac{6EI}{l^2}\Delta$

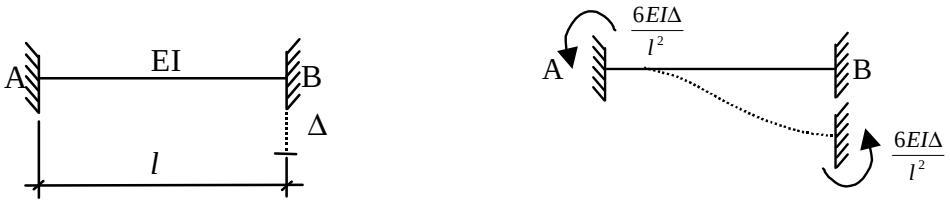


Figura 4-72: Viga bi-engastada- momentos de engastamento perfeito devido a recalque do apoio à direita

Em vigas engastadas-apoiadas, para o recalque do apoio B (Figura 4-73), o momento de engastamento perfeito é $M_A = +\frac{3EI}{l^2}\Delta$; e para o recalque do apoio A é $M_A = -\frac{3EI}{l^2}\Delta$ (Figura 4-74).



Figura 4-73: Viga engastada-apoiada com recalque no apoio B



Figura 4-74: Viga engastada-apoiada com recalque no apoio A

4.6.2. Pórticos planos deslocáveisou denós móveis

Nesta apostila serão considerados apenas pórticos planos como exemplos (Figura 4-75a). O esforço axial nas barras será desprezado. As deslocabilidades tratam–se apenas de translações no Processo de Cross. Estas deslocabilidades devem ser impedidas por meio de apoios do 1° gênero, surgindo reações de apoio (Figura 4-75b).

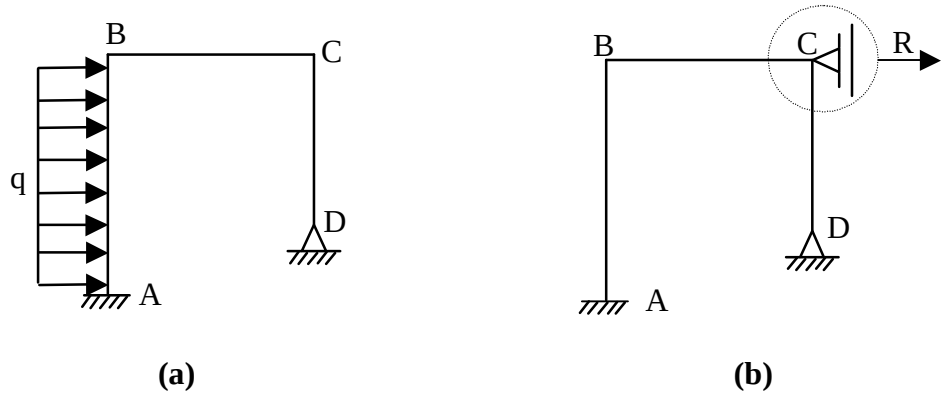


Figura 4-75: Pórtico plano

Aplica-se em seguida o método dos deslocamentos considerando superposição de efeitos. Fixa-se a estrutura e calcula–se a reação de apoio devido ao carregamento R_{10} e o diagrama de momento fletores M_{10} usando o processo de Cross (Figura 4-76).

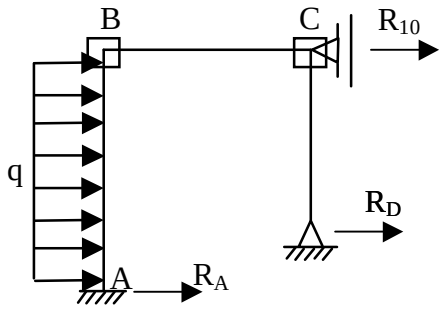


Figura 4-76: Pórtico plano com deslocamento restringido

Cross$\rightarrow M_{BA}$, M_{CD}

$$M_{BA} = R_A \cdot l_{AB} - \frac{q l_{AB}^2}{2} + M_{AB}$$

$$R_A = \frac{M_{BA} - M_{AB} + \frac{q l_{AB}^2}{2}}{l_{AB}}$$

$$M_{CD} = R_D \cdot l_{CD}$$

$$R_D = \frac{M_{CD}}{l_{CD}}$$

$$\sum F_X = 0 \rightarrow R_{10} = ...$$

Após impõe-se a deslocabilidade Δ_1 na direção restringida (Figura 4-77) e obtém-se, por Cross, M_1 e R_1. Pode-se utilizar tabelas para obtenção de momentos para engastamento perfeitos nas barras devido a recalques impostos.

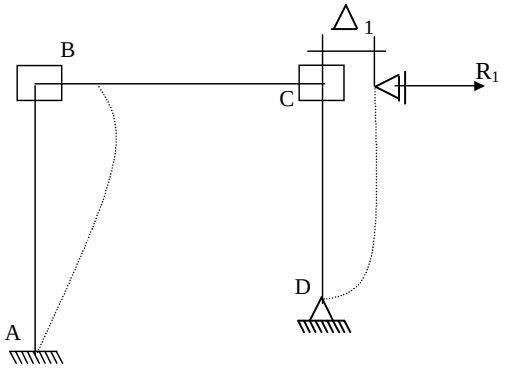


Figura 4-77: Pórtico plano com deslocmanto imposto

Como Δ_1 não é conhecido, impõe-se uma deslocabilidade unitária e calculam-se os momentos M_1 e R_{11} nas barras usando Cross. A reação final será $M_1 \cdot \Delta_1$ e $R_{11} \cdot \Delta_1$. Faz-se em seguida o equilíbrio de forças horizontais no nó C, usando superposição de efeitos.

$$R_{10} + R_{11} \cdot \Delta_1 = 0$$

$$\Delta_1 = -\frac{R_{10}}{R_{11}}$$

sendo R_{10} a parcela de reação devido ao carregamento externo e R_{11} a parcela de reação devido à deslocabilidade.

Os momentos finais no pórtico são encontrados por superposição de efeitos:

$$M = M_0 + M_1 \cdot \Delta_1 .$$

No caso de mais de uma deslocabilidade, procede-se analogamente (Figura 4-78):

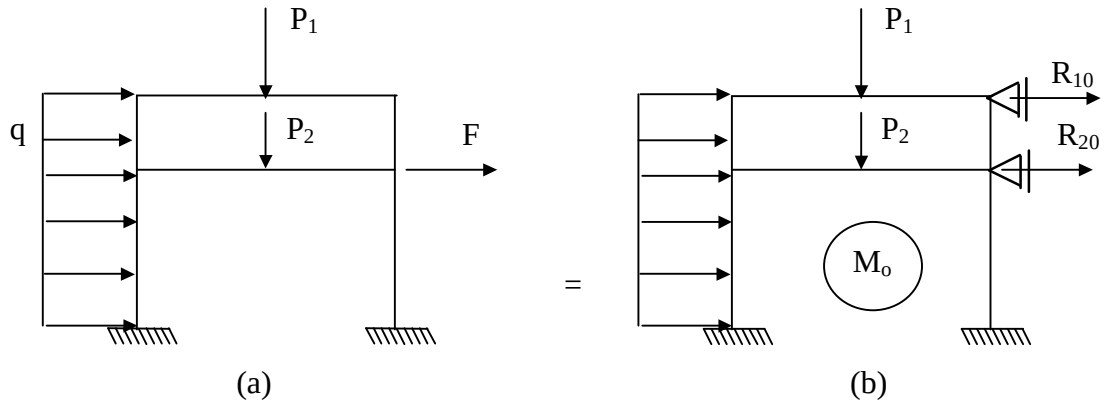


Figura 4-78: Pórtico plano com mais de uma deslocabilidade

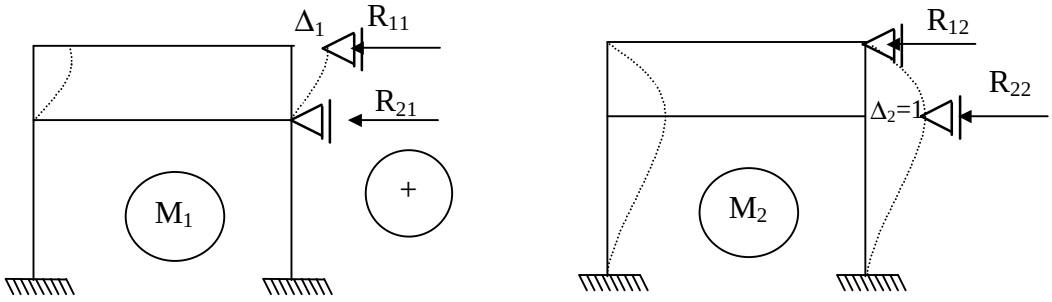


Figura 4-79: Deslocabilidades impostas no pórtico

As equações de equilíbrio são:

$$R_{10} + R_{11}\Delta_1 + R_{12}\Delta_2 = 0$$

$$R_{20} + R_{21}\Delta_1 + R_{22}\Delta_2 = F$$

ou, matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} R_{10} \\ R_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se o sistema de equações obtém-se Δ_1 e Δ_2.

Para a determinação dos momentos finais dos pórticos com mais de duas deslocabilidades, procede-se analogamente ao que já foi explicado, sendo os momentos finais do pórtico dados por:

$$M = M_0 + M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2$$

Exemplo

Seja o pórtico plano da Figura 4-80 cuja rigidez à flexão é constante.

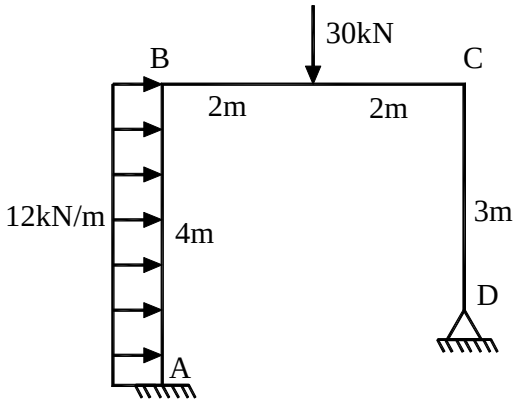


Figura 4-80: Pórtico plano com nós deslocáveis

Para se resolver o pórtico mostrado na Figura 4-80, primeiramente impedem-se os deslocamentos por meio de apoios do primeiro tipo (nos quais vão aparecer reações). Em seguida fixa-se a estrutura e calcula-se a reação de apoio (R_{10}) devido ao carregamento (situação 0) e o diagrama de momentos fletores (M_{10}), usando o Processo de Cross (Figura 4-81, Tabela 4-4).

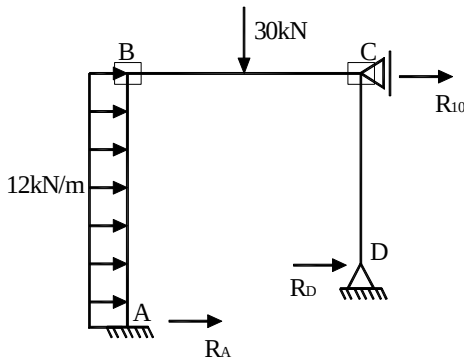
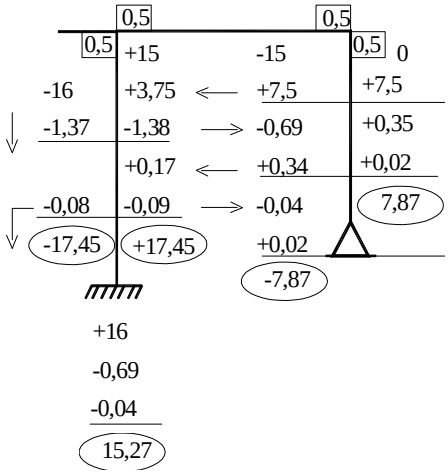


Figura 4-81: Pórtico com a deslocabilidade do nó C restringida (sistema 0)

Tabela 4-4: Processo de Cross para o pórtico plano (sistema 0)



O cálculo dos esforços nas barras e reações para o sistema (0) é feito separando-se as barras e aplicando-se os momentos encontrados pelo Processo de Cross (Tabela 4-4), como ilustrado pela Figura 4-82.

$$R_A(4\ m)+15{,}27+12\cdot(4\ m)\cdot 2=0$$

$$R_A=-\frac{93{,}82}{4}=-23{,}46\ kN$$

$$R_D(3\ m)+7{,}87=0$$

$$R_D=-2{,}62\ kN$$

Fazendo o somatório de forças na direção *x:*

$$-23{,}46-2{,}62+48+R_{10}=0$$

$$R_{10}=-21{,}92\ kN$$

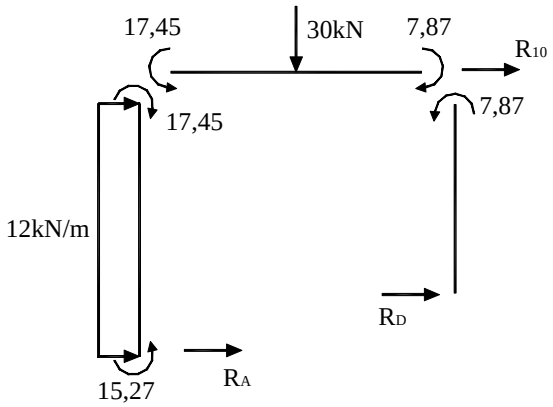


Figura 4-82: Carregamentos e momentos internos atuantes nas barras do pórtico

Em seguida, impõe-se a deslocabilidade $\Delta_1 = 1$ na direção restringida (Figura 4-83) e obtém-se M_{11} e R_{11} pelo Processo de Cross (sistema I) (Tabela 4-5). Os momentos devidos a recalques nas barras são:

$$M_{BA} = M_{AB} = \frac{6EI1}{L_{AB}^2} = 54\ (+)$$

$$M_{DC} = \frac{3EI}{L_{CD}^2} = 48\ (+)$$

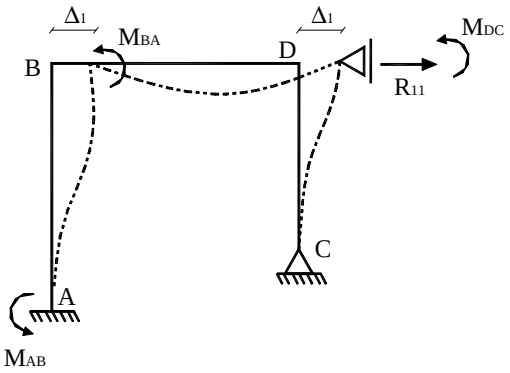
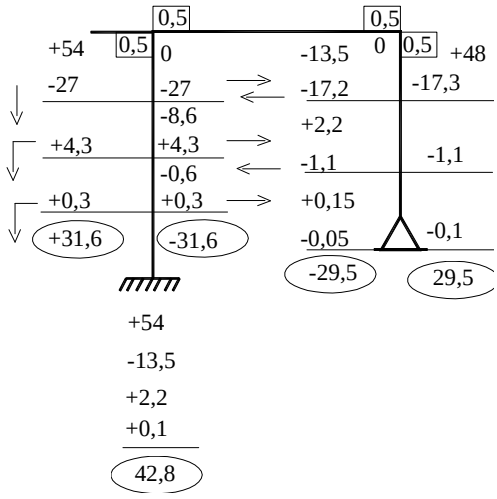


Figura 4-83: Deslocabilidade Δ_1 imposta ao pórtico

Tabela 4-5: Processo de Cross para o sistema I



O cálculo dos esforços nas barras e reações para a situação (I) é feito separando-se as barras e aplicando-se os momentos encontrados pelo Processo de Cross (Tabela 4-5), como ilustrado pela Figura 4-84.

$$R_A(4\ m) = 42{,}8 + 31{,}6 = 74{,}4$$

$$R_A = 18{,}6\ kN$$

$R_C(3\ m) - 29{,}5 = 0$

$R_C = 9{,}83\ kN$

Fazendo o somatório de forças na direção *x:*

$R_{11} - R_A - R_C = 0$

$R_{11} = 28{,}43\ kN$

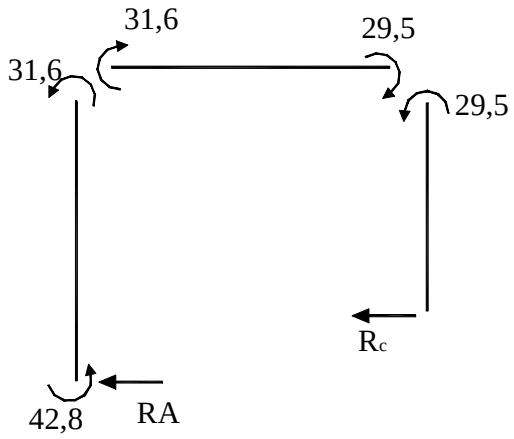


Figura 4-84: Esfoços nas barras devidos à situação I

O valor de Δ_1 é dado por

$R_{10} + R_{11} \cdot \Delta_1 = 0$

$-21{,}92 + 28{,}43 \cdot \Delta_1 = 0$

$\Delta_1 = 0{,}77$

Os momentos finais são dados por

$M = M_0 + 0{,}77 \cdot M_1$.

Para a barra AB, o momento em A é

$M_A^{AB} = M_{A0}^{AB} + 0{,}77 \cdot M_{A1}^{AB}$,

$M_A^{AB} = 15{,}27 + 0{,}77 \cdot 42{,}8 = 48{,}23$.

O momento em B é

$M_A^{AB} = -17{,}45 + 0{,}77 \cdot 31{,}6 = 6{,}88$

E o momento em C da barra CD é

$M_C^{CD} = 7{,}87 + 0{,}77 \cdot 29{,}5 = 30{,}59$.

De posse desses momentos pode-se traçar o diagrama de momentos fletores do pórtico

$$\text{FLECHAS} \begin{cases} \dfrac{30.4}{4} = 30 \\ \dfrac{12.4^2}{8} = 24 \end{cases}$$

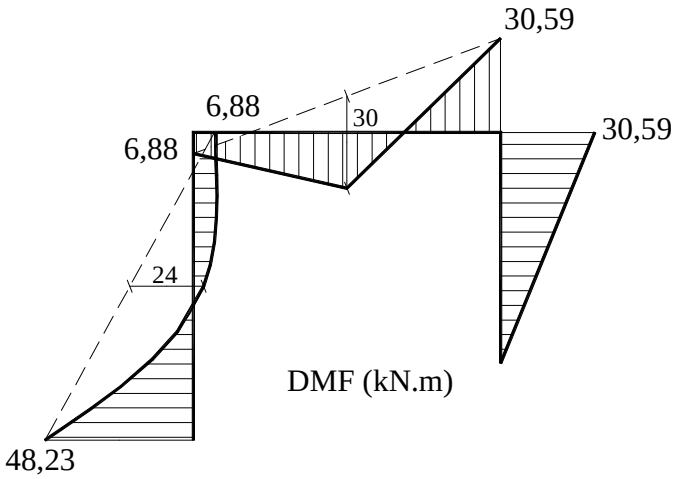


Figura 4-85: Diagrama final de momentos fletores do pórtico da Figura 4-80

5. BIBLIOGRAFIA

BEER, F.P. e JOHNSTON JR, E. R. (1989). **Resistência dos materiais**. 2a ed. São Paulo: McGraw-Hill.
CAMPANARI, Flávio Antônio.(1985). **Teoria das estruturas**. v.1, 2, 3 e 4. Ed. Guanabara Dois.
POPOV, Egor P. (1978). **Introdução à mecânica dos sólidos**. São Paulo: Edgard Blücher.
SILVA, Jaime Ferreira da. **Método de Cross**. Ed. McGraw-Hill do Brasil.
SUSSEKIND, José Carlos. (1983). **Curso de análise estrutural**. v.1. 6a ed. Porto Alegre: Ed.Globo.
SUSSEKIND, José Carlos. (1994a). **Curso de análise estrutural**. v.2. 11a ed.São Paulo: Ed.Globo.
SUSSEKIND, José Carlos. (1994b). **Curso de análise estrutural**. v.3. 9a ed.São Paulo: Ed.Globo.
TIMOSHENKO, Stephen P. (1967). **Resistência dos materiais**. v.1. 3a ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico.
MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de Estruturas: conceitos e métodos.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MÉTODO DESLOCAMENTOS - FORMULÁRIO

Matriz de Rigidez de um Elemento no Sistema Local

Treliça Plana

$$[S_L]_{4x4} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Viga

$$[S_L]_{4x4} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Pórtico Plano

$$[S_L]_{6x6} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

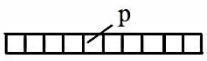
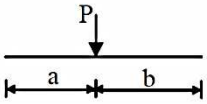
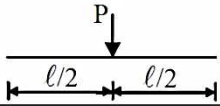
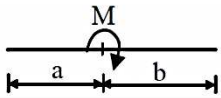
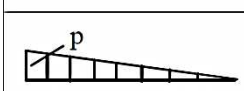
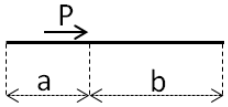
Matriz de Rotação de um Elemento no Plano

$$[R]_{4x4} = \begin{bmatrix} cos\,\theta & sen\,\theta & 0 & 0 \\ -sen\,\theta & cos\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\,\theta & sen\,\theta \\ 0 & 0 & -sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$$

$$[R]_{6x6} = \begin{bmatrix} cos\,\theta & sen\,\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\,\theta & cos\,\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\,\theta & sen\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de um elemento no sistema global	$[S_G] = [R]^T[S_L][R]$
Vetor de esforços de engastamento perfeito no sistema global	$\{F_{GEP}\} = [R]^T\{F_{LEP}\}$
Sistema de equações de equilíbrio de forças para estrutura não restringida	$\{F_{EP}\}^* + [S]^*\{D\}^* = \{A\}^*$
Sistema de equações de equilíbrio de forças para estrutura restringida	$\{F_{EP}\} + [S]\{D\} = \{A\}$
Deslocamentos no sistema local	$\{u_L\} = [R]\{u_G\}$
Ações nodais no sistema local e global	$\{A_L\} = [R]\{A_G\}$
Esforços no elemento no sistema local	$\{A_L\} = \{F_{LEP}\} + [S_L]^*\{u_L\}$

MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO

CARREGAMENTO	A ℓ B	C ℓ D		E ℓ F
	M_{BA}	M_{CD}	M_{DC}	M_{EF}
	$-\frac{p\ell^2}{8}$	$\frac{p\ell^2}{12}$	$-\frac{p\ell^2}{12}$	$\frac{p\ell^2}{8}$
	$-\frac{Pab}{2\ell^2}(\ell+a)$	$\frac{Pab^2}{\ell^2}$	$-\frac{Pa^2b}{\ell^2}$	$\frac{Pab}{2\ell^2}(\ell+b)$
	$-\frac{3P\ell}{16}$	$\frac{P\ell}{8}$	$-\frac{P\ell}{8}$	$\frac{3P\ell}{16}$
	$-\frac{M}{2\ell^2}(\ell^2-3a^2)$	$\frac{Mb}{\ell^2}(3b-2\ell)$	$-\frac{Ma}{\ell^2}(2\ell-3a)$	$\frac{M}{2\ell^2}(3b^2-\ell^2)$
	$-\frac{p\ell^2}{15}$	$\frac{p\ell^2}{30}$	$-\frac{p\ell^2}{20}$	$\frac{7p\ell^2}{120}$
	$-\frac{7p\ell^2}{120}$	$\frac{p\ell^2}{20}$	$-\frac{p\ell^2}{30}$	$\frac{p\ell^2}{15}$
	$H_A=-\frac{Pb}{L}$ $H_B=-\frac{Pa}{L}$	$H_C=-\frac{Pb}{L}$	$H_D=-\frac{Pa}{L}$	$H_E=-\frac{Pb}{L}$ $H_F=-\frac{Pa}{L}$

FORMULÁRIO PROCESSO DE CROSS

Coeficientes de Rigidez e de Transmissão

	Coeficientes de Rigidez	Coeficientes de Transmissão
Elemento bi-engastado	$k = \frac{4EI}{L}$	$t = 1/2$
Elemento engastado e apoiado	$k = \frac{3EI}{L}$	$t = 0$

Coeficiente de Distribuição:

$$\beta_i = \frac{k_i}{\sum k_i}$$

MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO

CARREGAMENTO	A ℓ B	C ℓ D		E ℓ F
	M_{BA}	M_{CD}	M_{DC}	M_{EF}
p	$-\frac{p\ell^2}{8}$	$\frac{p\ell^2}{12}$	$-\frac{p\ell^2}{12}$	$\frac{p\ell^2}{8}$
P, a, b	$-\frac{Pab}{2\ell^2}(\ell + a)$	$\frac{Pab^2}{\ell^2}$	$-\frac{Pa^2b}{\ell^2}$	$\frac{Pab}{2\ell^2}(\ell + b)$
P, ℓ/2, ℓ/2	$-\frac{3P\ell}{16}$	$\frac{P\ell}{8}$	$-\frac{P\ell}{8}$	$\frac{3P\ell}{16}$
M, a, b	$-\frac{M}{2\ell^2}(\ell^2 - 3a^2)$	$\frac{Mb}{\ell^2}(3b - 2\ell)$	$-\frac{Ma}{\ell^2}(2\ell - 3a)$	$\frac{M}{2\ell^2}(3b^2 - \ell^2)$
p	$-\frac{p\ell^2}{15}$	$\frac{p\ell^2}{30}$	$-\frac{p\ell^2}{20}$	$\frac{7p\ell^2}{120}$
p	$-\frac{7p\ell^2}{120}$	$\frac{p\ell^2}{20}$	$-\frac{p\ell^2}{30}$	$\frac{p\ell^2}{15}$
P, a, b	$H_A = -\frac{Pb}{L}$ $H_B = -\frac{Pa}{L}$	$H_C = -\frac{Pb}{L}$	$H_D = -\frac{Pa}{L}$	$H_E = -\frac{Pb}{L}$ $H_F = -\frac{Pa}{L}$