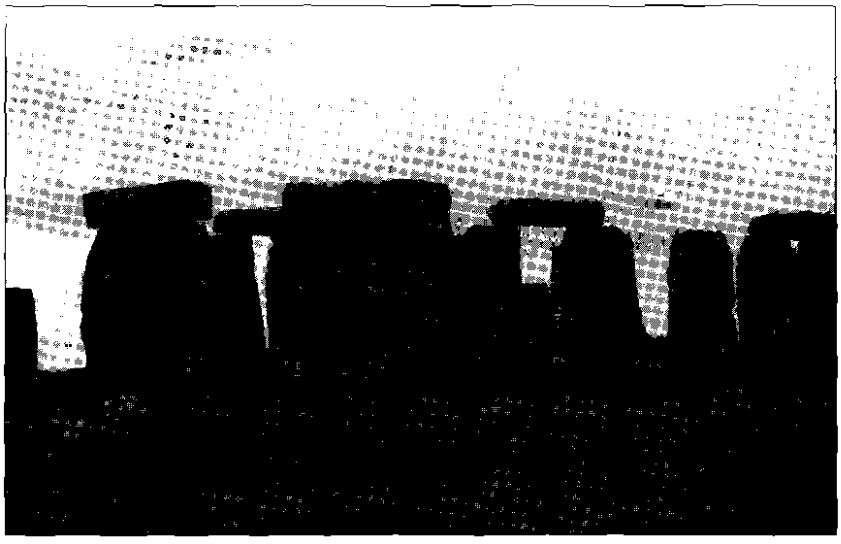
EESC USP
PROJETO REENGE

INTRODUÇÃO À ISOSTÁTICA

ELOY FERRAZ MACHADO JUNIOR



Introdução
à
Isostática



Eloy Ferraz Machado Junior

Introdução à Isostática

EESC-USP - Projeto Reenge
Agosto - 1999

Copyright © 1999 do autor/EESC-USP, São Carlos, SP

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema "retrieval" ou transmitida de qualquer **modo ou por qualquer outro meio,** seja este eletrônico, mecânico, de fotocópia, de gravação ou outros sem prévia autorização, por escrito, da EESC.

1ª edição; tiragem: 1.000 exemplares.

Projeto gráfico: Gerson Luiz Carbonero, Luciana Lopez Martini, Reginaldo Peronti

Capa: Luciana Lopez Martini; foto: João Batista de Paiva

Serviços de revisão, produção e coordenação de produção gráfica: A. Mello/Piscis Editora

Suporte técnico: Claudinei Fabrício/Serviço de apoio a publicações

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP

Machado Junior, Eloy Ferraz

M149i Introdução à isostática / Eloy Ferraz Machado Junior. -- São Carlos : EESC-USP, 1999.

[260] p. : il.

Inclui referências bibliográficas e índice.

Projeto REENGE.

ISBN 85-85205-28-8

1. Teoria das estruturas. 2. Estática das estruturas. 3. Estática. 4. Isostática.

I. Título.

A Lilia Maria, Eloy Neto,
Carlos Gustavo, João Guilherme
e Maria Augusta

APRESENTAÇÃO

O REENGE, Reengenharia do Ensino de Engenharia, é uma linha de atuação do programa de Desenvolvimento das Engenharias que tem por objetivo apoiar a reformulação dos programas de ensino de engenharia como parte do processo de capacitação tecnológica e de modernização da sociedade brasileira, bem como da preparação para enfrentar os desafios futuros gerados pelo progresso técnico e científico alcançados em nível internacional.

Visando a consecução de seu objetivo, o REENGE tem oferecido apoio e incentivo para o desenvolvimento de importantes projetos, dentre os quais se destaca o de publicação de livros didáticos para os cursos de graduação e educação continuada.

A presente publicação, *Introdução à Isostática*, patrocinada pelo REENGE, é um texto destinado ao apoio às disciplinas Isostática e Estática dos cursos de Engenharia Civil, com caráter eminentemente didático e cobrindo os principais tópicos necessários à formação técnica do aluno nessa área.

O autor, Eloy Ferraz Machado Junior, engenheiro civil formado pela Escola de Engenharia de São Carlos e professor doutor do Departamento de Engenharia de Estruturas desta mesma escola, possui vários trabalhos publicados, tanto de cunho técnico-científico quanto didático.

A obra incorpora o resultado de um trabalho sério, dedicado e competente realizado pelo professor Eloy, fruto de sua experiência na docência, constituindo-se numa valiosa contribuição ao aperfeiçoamento e melhoria das condições de oferecimento das disciplinas básicas, na área de estruturas, nos cursos de Engenharia Civil no país.

*Prof. Dr. Jurandyr Povinelli**

*Diretor da Escola de Engenharia de São Carlos da USP, Coordenador do Projeto REENGE/EESC, foi presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC-USP e secretário executivo da Comissão de Especialistas do Ensino de Engenharia do Ministério da Educação e dos Desportos.

SUMÁRIO

1 Princípios Elementares da Estática

1.1 INTRODUÇÃO 1
1.2 CONCEITO DE FORÇA 1
1.3 CLASSES DE FORÇA 2
1.4 PONTO MATERIAL E CORPO RÍGIDO 3
1.5 FORÇAS DE DIREÇÕES QUAISQUER APLICADAS NO MESMO PONTO MATERIAL 4
1.6 COMPONENTES CARTESIANAS DA RESULTANTE 6
1.7 FORÇAS COPLANARES APLICADAS NO MESMO PONTO MATERIAL 8
1.8 FORÇAS APLICADAS NO MESMO CORPO RÍGIDO 10
1.9 MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM PONTO 13
1.10 MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO 16
1.11 BINÁRIO 17
1.12 REDUÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS APLICADAS EM UM CORPO RÍGIDO A UMA FORÇA MAIS UM BINÁRIO 18
1.13 FORÇAS COPLANARES APLICADAS NA MESMA "CHAPA" RÍGIDA 21

2 Elementos e Formas Fundamentais das Estruturas

2.1 CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS 27
2.2 ESTRUTURAS LINEARES PLANAS 28

3 Vinculação dos Sistemas Planos

3.1 GENERALIDADES 31
3.2 REPRESENTAÇÃO DOS DIFERENTES TIPOS DE VÍNCULOS PLANOS 32
3.3 DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA DAS ESTRUTURAS PLANAS 33
3.4 CASOS EXCEPCIONAIS 38

3.5 CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS QUANTO À SUA DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA 41

4 Equilíbrio dos Sistemas Planos

4.1 INTRODUÇÃO 43
4.2 ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS PLANAS 44
4.3 TIPOS DE CARGAS APLICADAS 45
4.4 CÁLCULO DE REAÇÕES 47
4.5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO 48
4.6 VIGAS 49
4.6.1 Viga simplesmente apoiada 49
4.6.2 Viga engastada ou em balanço 54
4.6.3 Viga simplesmente apoiada, com balanço 56
4.6.4 Viga Gerber 60
4.7 PÓRTICOS 64
4.7.1 Pórtico simples 64
4.7.2 Pórtico em balanço 65
4.7.3 Pórtico tri-articulado 65
4.7.4 Pórtico atirantado 67
4.8 ARCOS 69
4.8.1 Arco tri-articulado 70
4.9 ESTRUTURAS PLANAS SUJEITAS A CARGAS PERPENDICULARES AO SEU PLANO 71
4.9.1 Grelha engastada e livre 73
4.9.2 Grelha tri-apoiada 76

5 Esforços Solicitantes em Estruturas Planas Estaticamente Determinadas

5.1 GENERALIDADES 79
5.2 DEFINIÇÃO DOS ESFORÇOS INTERNOS OU ESFORÇOS SOLICITANTES 80
5.3 SIMPLIFICAÇÃO PARA OS SISTEMAS PLANOS 84

5.4 CONVENÇÃO DE SINAIS 87
5.5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO 90

6 Representação Gráfica dos Esforços Internos – Diagramas de Estado

6.1 GENERALIDADES 103
6.2 TRAÇADO DOS DIAGRAMAS ATRAVÉS DE EXPRESSÕES ANALÍTICAS DAS FUNÇÕES DOS ESFORÇOS SOLICITANTES 103
6.3 RELAÇÕES ENTRE CARGA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR – EQUAÇÃO DIFERENCIAL DOS MOMENTOS 108
6.4 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO UTILIZANDO A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOMENTO FLETOR 112

7 Exemplos de Aplicação – Traçado Direto

7.1 GENERALIDADES 123
7.2 VIGAS 124
7.3 PÓRTICOS 158
7.4 ARCOS TRI-ARTICULADOS COM APOIOS NO MESMO NÍVEL, SUJEITOS A CARREGAMENTO VERTICAL 173
7.5 ESTRUTURAS PLANAS, CONSTITUÍDAS POR BARRAS RETAS, SUJEITAS A CARGAS PERPENDICULARES AO SEU PLANO 180
7.6 GRELHA CURVA OU VIGA BALCÃO 188

8 Treliças Planas

8.1 GENERALIDADES 197
8.2 DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DOS ESFORÇOS INTERNOS NAS BARRAS DAS TRELIÇAS SIMPLES 199
8.3 TRELIÇAS ISOSTÁTICAS COMPLEXAS 225
8.4 DETERMINAÇÃO GRÁFICA DOS ESFORÇOS INTERNOS NAS BARRAS DAS TRELIÇAS SIMPLES 234
8.4.1 Método dos nós 234
8.4.2 Plano Cremona ou diagrama de Maxwell 238

PREFÁCIO

Esta publicação foi baseada em notas de aula, preparadas para as disciplinas de Resistência dos Materiais e Isostática, ministradas, pelo autor, na Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, e na revisão bibliográfica efetuada durante a elaboração do texto.

As matérias abordadas em cada capítulo são apresentadas em linguagem simples e didática e pretendem representar, para os estudantes de engenharia e arquitetura, o papel de guia durante os primeiros caminhos trilhados na área de engenharia de estruturas.

Os assuntos abordados nesta publicação estão reunidos em oito capítulos. No capítulo 1 são tratados os princípios gerais, elementares, da Estática Clássica, quando são introduzidos os conceitos de força, ponto material e corpo rígido. As forças aplicadas, tanto no ponto material quanto no corpo rígido, são analisadas, vetorialmente, inicialmente no espaço e particularizadas para o plano. Para o estudo do corpo rígido são introduzidos os conceitos de momento, binário e redução de forças, em relação a um ponto.

No capítulo 2, o leitor tem seu primeiro contato com os elementos e formas estruturais e sua classificação a partir da geometria de seus componentes. O foco é dirigido, em particular, para as estruturas lineares planas, quando então os elementos lineares são diferenciados pelo papel que desempenham no conjunto da estrutura.

No capítulo 3 são apresentados os vínculos entre os elementos componentes das estruturas planas e destas com a terra. São indicados os graus de determinação das estruturas planas convencionais em função das restrições ao deslocamento impostas pelos vínculos. Uma breve abordagem cinemática é feita com o intuito de apresentar ao leitor os casos excepcionais, cuja exclusão dos arranjos estruturais lineares confere a condição "suficiente" para a determinacão geométrica das estruturas planas.

O capítulo 4 trata do equilíbrio dos sistemas planos, onde são relacionados os diversos tipos de cargas aplicadas e sua classificação. As equações de equilíbrio, tratadas no capítulo 1, são utilizadas no cálculo das reações externas e internas, despertadas pelas cargas e impostas pelos vínculos. Os exemplos resolvidos foram selecionados para proporcionar ao leitor uma visão bastante abrangente das diversas formas estruturais planas submetidas às mais variadas combinações de carregamentos estáticos.

No capítulo 5 são definidos os esforços solicitantes no caso geral e a particularização para os sistemas planos, bem como o significado das convenções de sinais. Através de exemplos simples, os esforços solicitantes são calculados por equilíbrio, pelo método das seções ou diretamente.

No capítulo 6 são tratados os diagramas de estado, representação gráfica dos esforços internos, mostrando o traçado dos diagramas obtidos analiticamente e através de relações diferenciais entre cargas, força cortante e momento fletor.

O capítulo 7 é inteiramente dedicado a exemplos de aplicação resolvidos pelo método direto. Inicialmente, por motivos puramente didáticos, são abordadas as vigas simples, inclusive as inclinadas e as curvas, passando pelas vigas Gerber, pelos pórticos, arcos e grelhas, de barras retas e barras curvas, mais conhecidas como vigas balcão.

Finalmente, no capítulo 8 são tratados os esforços internos nas estruturas em treliça, simples e complexas, calculadas analiticamente pelo método dos nós e método das seções. O cálculo gráfico, pelo método de Cremona, é objeto de uma seção exclusiva, motivada pela sua genialidade e importância histórica.

Encerrando a publicação, vêm as referências utilizadas na revisão bibliográfica, que de modo algum esgotam a bibliografia referente ao tema.

Por fim, quero expressar meus agradecimentos ao professor João Carlos Antunes de Oliveira e Souza, pelas sugestões. Ao Rui Roberto Casale, pela digitação; ao Francisco Carlos Guete de Brito e à Sylvia Helena Morette Villani, pela elaboração dos desenhos do texto embrião desta publicação.

E.F.M.J.

PRINCÍPIOS ELEMENTARES DA ESTÁTICA

1.1 - INTRODUÇÃO

A estática, parte da Mecânica Clássica, é a teoria do equilíbrio das forças. Tem como finalidade o estudo das condições ou relações entre as forças que, atuando num corpo ou sistema de corpos, implicam em equilíbrio.

A estática, aplicada à engenharia, é utilizada para a análise e dimensionamento de estruturas e também para cálculo de suas deformações.

1.2 - CONCEITO DE FORÇA

O conceito de força é introduzido na Mecânica Clássica como sendo a ação de um corpo sobre outro, causando deformação ou movimento. Esta ação se manifesta por contato ou a distância, como é o caso das forças gravitacionais — os pesos — que têm sempre sentido vertical para baixo.

As forças encontradas na natureza, na verdade, são distribuídas sobre os elementos de seu volume, como o peso de um corpo, ou sobre os elementos de superfície, como a pressão da água sobre as paredes de um recipiente que a contém. Na Mecânica Vetorial, a força é tratada como concentrada, idealização

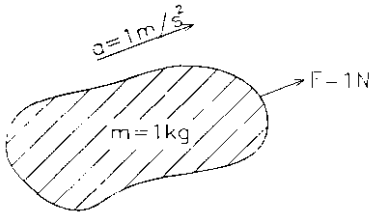


Figura 1.1

que tem precisão suficiente na grande maioria dos casos. A força é portanto representada por um vetor e necessita, para sua definição, da sua intensidade, direção, sentido e do seu ponto de aplicação. A unidade de força no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o newton (N), definido como a força que imprime à massa de 1kg uma aceleração de 1m/s², Fig. 1.1.

$$1N = (1kg) \times (1m/s^2) = 1kg.m/s^2 \qquad (1.1)$$

1.3 - CLASSES DE FORÇAS

As forças que atuam num corpo ou sistema de corpos podem ser classificadas como forças externas e internas. As externas são aquelas devidas a ações externas ao conjunto que se analisa. As internas são as originadas pela interação entre os pontos ou corpos que constituem o conjunto analisado.

As forças externas podem ainda ser classificadas em ativas e reativas. As ativas são geralmente dadas ou facilmente determináveis e atuam diretamente sobre o corpo ou sistema de corpos. As reativas são forças localizadas e surgem devido aos vínculos ou ligações que impedem movimentos. Só aparecem quando atuam forças ativas.

Como exemplo observemos o bloco A apoiado sobre os blocos B e C, Fig. 1.2.a, todos submetidos à ação dos seus pesos próprios. Considerando, para análise, somente o bloco A, Fig. 1.2.b, seu peso próprio $\vec{P}_A$ é a força ativa a ser considerada.

As pressões $\vec{p}_B$ e $\vec{p}_C$, que os blocos B e C exercem sobre A, são as forças reativas. $\vec{P}_A$, $\vec{p}_B$ e $\vec{p}_C$ são forças externas. As mesmas pressões $\vec{p}_B$ e $\vec{p}_C$, com sentido contrário, são forças ativas atuando sobre B e C, Fig. 1.2.b.

Analisando o conjunto formado pelo sistema de blocos ABC, Fig. 1.2.c, as

forças $\vec{P}_A$, $\vec{P}_B$ e $\vec{P}_C$ são as ativas e as pressões $\vec{p}'_B$ e $\vec{p}'_C$ serão as reativas. $\vec{P}_A$, $\vec{P}_B$, $\vec{P}_C$, $\vec{p}'_B$ e $\vec{p}'_C$ são forças externas.

As pressões $\vec{p}_B$ e $\vec{p}_C$, entre os blocos B, C e o bloco A, não são consideradas na análise do sistema ABC, pois são agora forças internas. No estudo das partes estas forças aparecem sempre aos pares, com o mesmo valor mas com sentido contrário.

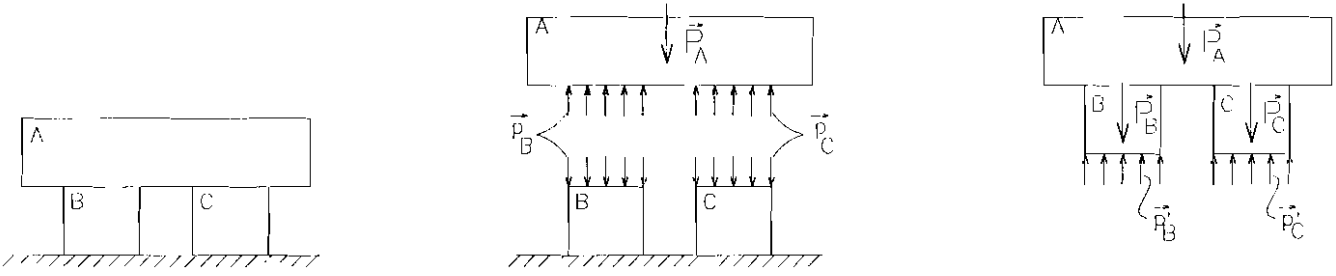


Figura 1.2

1.4 - PONTO MATERIAL E CORPO RÍGIDO

A força é a ação de um corpo sobre outro. Em uma grande quantidade de casos esta ação pode ser tratada, com boa precisão, como concentrada em um único ponto. Quando o tamanho e a forma do corpo submetido à ação de forças não afetam significativamente a análise do problema físico, podemos considerar estas forças aplicadas em uma única partícula ou ponto material.

O ponto material, portanto, só pode ser submetido a forças concorrentes e tendo-se em vista que todas elas têm o mesmo ponto de aplicação, para a definição de cada força basta sua intensidade, direção e sentido.

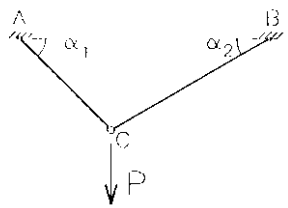
Quando a ação de várias forças se dá em pontos distintos de um corpo, há que considerar sua forma e tamanho. O corpo, neste caso, pode ser tratado como

um conjunto de pontos materiais. As forças nele aplicadas necessitam, para sua inteira caracterização, também da definição de seus pontos de aplicação.

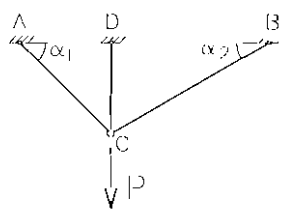
Todos os elementos componentes das estruturas — as máquinas incluídas — sofrem pequenas deformações quando submetidos à ação de forças. Quando estas deformações não alteram substancialmente a natureza do problema físico analisado, os corpos podem ser considerados rígidos, isto é, suportar forças sem se deformar.

Se o problema estudado fosse a resistência dos elementos ou o deslocamento de um determinado ponto, então as deformações teriam que ser consideradas.

Para exemplificar a concepção de corpos reais como rígidos, podemos observar os sistemas da Fig. 1.3, onde pretendemos determinar as forças nos cabos de sustentação.



a) Peso sustentado por dois cabos de aço



b) Peso sustentado por três cabos de aço

Figura 1.3

No caso da Fig. 1.3.a a decomposição da força $\vec{P}$ em componentes, nas direções AC e BC, determina as intensidades das forças nos cabos, sem a necessidade de se considerar as suas deformações. No caso da Fig. 1.3.b, para se determinar as forças nos cabos a deformação dos mesmos deverá, necessariamente, ser considerada. No caso (a) os fios podem ser considerados rígidos para a solução do problema físico em questão, o que não acontece no caso (b).

Nesta publicação serão tratados apenas os casos em que os sólidos podem ser considerados rígidos, isto é, capazes de suportar forças sem se deformarem.

1.5 - FORÇAS DE DIREÇÕES QUAISQUER APLICADAS NO MESMO PONTO MATERIAL

Comprova-se experimentalmente que duas forças, $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ aplicadas num ponto material ou no mesmo ponto de um corpo rígido podem ser substituídas por uma única força $\vec{R}$ que proporcione o mesmo efeito sobre o ponto ou corpo rígido.

A força única é chamada resultante das duas forças e pode ser determinada pela construção de um paralelogramo que tenha as duas forças como lados, Fig. 1.4.

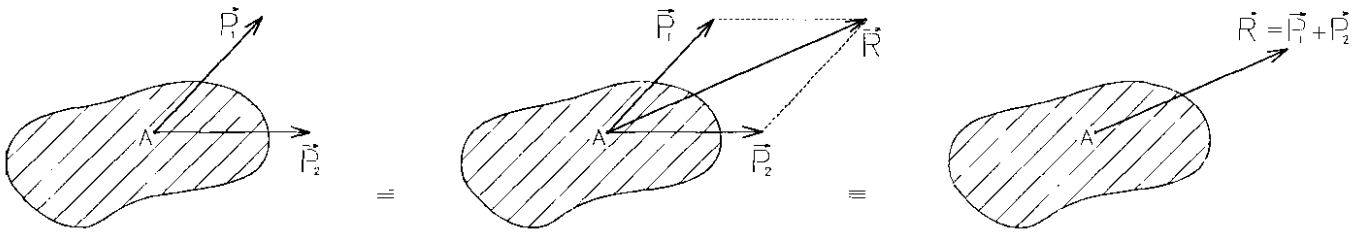


Figura 1.4

Esta regra para a obtenção da resultante é conhecida como lei do paralelogramo para adição de duas forças.

Usando o mesmo raciocínio, podemos utilizar a lei do paralelogramo, sucessivamente, para encontrar a resultante de várias forças aplicadas no mesmo ponto, Fig. 1.5. A resultante $\vec{R}$ pode ser expressa, portanto, como a soma vetorial das forças $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ e $\vec{P}_4$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{4} \vec{P}_i \qquad (1.2)$$

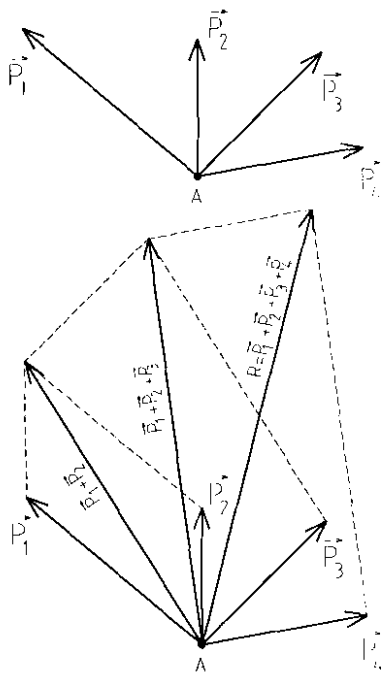


Figura 1.5

Uma derivação desta lei é a regra do triângulo. Como o lado do paralelogramo oposto à força $\vec{P}_2$ representa $\vec{P}_2$ em intensidade e direção, pode-se desenhar metade do paralelogramo.

A regra consiste, portanto, em posicionar a origem de uma força à extremidade da outra, ligando a origem da primeira à extremidade da segunda, Fig. 1.6.

Se as forças aplicadas em A, Fig. 1.7.a, estiverem contidas no mesmo plano

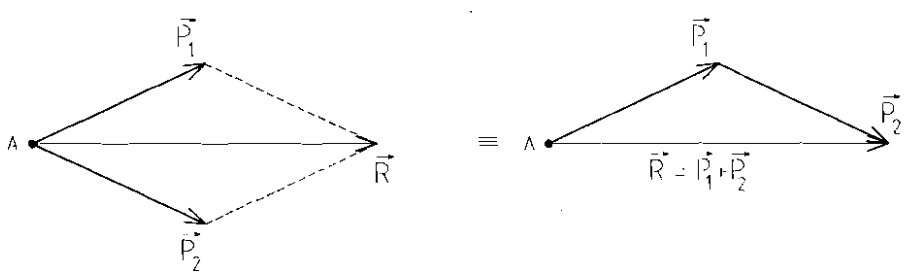


Figura 1.6

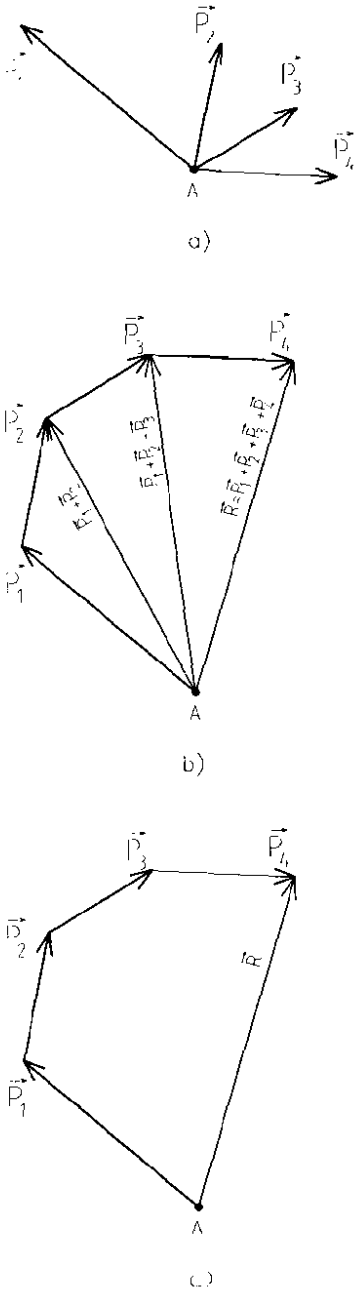


Figura 1.7

— forças coplanares — é mais prático a aplicação sucessiva da regra do triângulo, Fig. 1.7.b. Omitindo-se as passagens intermediárias, temos a construção conhecida como polígono das forças para a determinação da resultante, Fig. 1.7.c.

Analogamente, a resultante pode ser expressa como a soma vetorial das forças $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ e $\vec{P}_4$, conforme a equação (1.2).

Complementando, podemos enunciar o princípio da transmissibilidade ou teorema da transposição de uma força ou, ainda, teorema da deslocabilidade do ponto de aplicação da força:

"A ação de uma força, sobre um corpo rígido, não se altera se se deslocar o ponto de aplicação desta força sobre sua linha de ação", Fig. 1.8. Um resultado imediato deste enunciado é que uma força aplicada em um corpo rígido pode ser representada por um vetor deslizante.

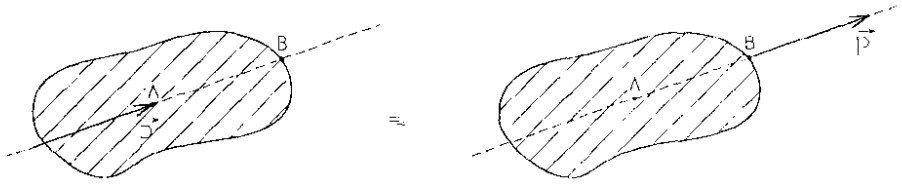


Figura 1.8

1.6 - COMPONENTES CARTESIANAS DA RESULTANTE

Seja o sistema de forças $\vec{P}_1$, ..., $\vec{P}_i$, ..., $\vec{P}_n$ aplicadas no mesmo ponto. Supondo o ponto de aplicação das forças, a origem O de um sistema de eixos coordenados, triortogonais, x, y e z, uma força genérica $\vec{P}_i$ terá, segundo os eixos coordenados, três componentes, conforme a Fig. 1.9.a. As componentes escalares são as projeções de P_i sobre os eixos e valem

$$Xi = P_i \cos(\theta_x)_i \quad ; \quad Yi = P_i \cos(\theta_y)_i \quad ; \quad Zi = P_i \cos(\theta_z)_i \qquad (1.3)$$

onde $(\theta_x)_i$, $(\theta_y)_i$ e $(\theta_z)_i$ são os ângulos que $\vec{P}_i$ forma com os eixos x, y e z. Os co-senos de $(\theta_x)_i$, $(\theta_y)_i$ e $(\theta_z)_i$ são chamados co-senos diretores de $\vec{P}_i$.

É facilmente demonstrável a relação entre a intensidade da força $\vec{P}_i$ e suas componentes escalares

$$P_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2} \tag{1.4}$$

Com os vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ orientados segundo x, y e z, Fig. 1.9.b, podemos definir a força genérica $\vec{P}_i$ como sendo

$$\vec{P}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k} \tag{1.5}$$

onde as componentes escalares são as expressas em (1.3).

Exprimindo a resultante do sistema de forças como soma vetorial temos

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \tag{1.6}$$

Da (1.5) na (1.6) tem-se

$$\vec{R} = \left(\sum_{1}^{n} X_i\right)\vec{i} + \left(\sum_{1}^{n} Y_i\right)\vec{j} + \left(\sum_{1}^{n} Z_i\right)\vec{k} \tag{1.7}$$

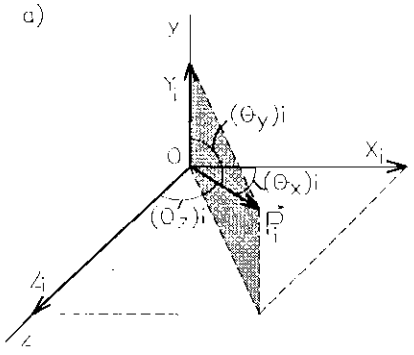
As componentes de $\vec{R}$ são, nas direções x, y e z, respectivamente,

$$R_X = \sum_{1}^{n} X_i \; ; \; R_y = \sum_{1}^{n} Y_i \; ; \; R_z = \sum_{1}^{n} Z_i \tag{1.8}$$

A intensidade da resultante será, à semelhança de (1.4),

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{1.9}$$

A direção de $\vec{R}$ poderá ser obtida através de relações análogas à equação (1.3).



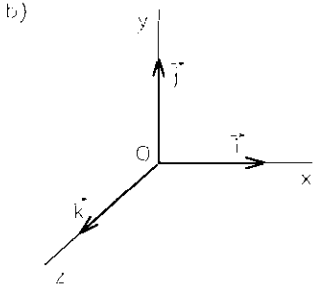


Figura 1.9

Graficamente, a resultante também poderia ser obtida pela construção do polígono das forças. No caso espacial, no entanto, sua construção não é prática, tornando-se mais cômodo o cálculo algébrico.

Finalmente, podemos estabelecer as condições de equilíbrio de um ponto material submetido à ação de forças quaisquer.

De acordo com a primeira lei de Newton, um ponto material encontra-se em equilíbrio — repouso ou movimento retilíneo e uniforme — se a resultante das forças que agem sobre ele for nula. Então podemos escrever, vetorialmente,

$$\vec{R} = \sum_{1}^{n} \vec{P}_i = 0 \tag{1.10}$$

algebricamente, através da nulidade das componentes,

$$R_x = \sum_{1}^{n} X_i = 0 \;\; ; \;\; R_y = \sum_{1}^{n} Y_i = 0 \;\; ; \;\; R_z = \sum_{1}^{n} Z_i = 0 \tag{1.11}$$

graficamente, o equilíbrio do ponto material pode ser expresso pelo fechamento do polígono das forças.

1.7 - FORÇAS COPLANARES APLICADAS NO MESMO PONTO MATERIAL

Supondo o ponto material na origem o de um sistema de coordenadas cartesianas O, x, y, coplanares com as forças aplicadas no ponto, Fig. 1.10, e tendo em vista a Seção anterior podemos escrever:

Componentes cartesianas da força genérica $\vec{P}_i$

$$X_i = P_i \cos\theta_i \;\; ; \;\; Y_i = P_i \operatorname{sen}\theta_i \tag{1.12}$$

θ_i é o ângulo que a força $\vec{P}_i$ forma com o eixo x.

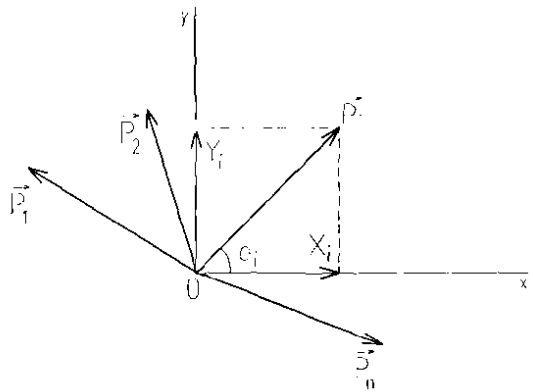


Figura 1.10

Módulo ou intensidade de $\vec{P}_i$

$$P_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \tag{1.13}$$

Introduzindo os vetores unitários $\vec{i}$ e $\vec{j}$, segundo os eixos x e y, podemos expressar $\vec{P}_i$ como

$$\vec{P}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} \tag{1.14}$$

As componentes da resultante do sistema de forças são

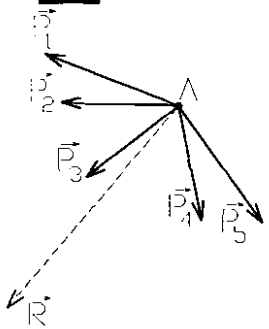
$$R_x = \sum_1^n X_i \; ; \; R_y = \sum_1^n Y_i \tag{1.15}$$

e sua intensidade será

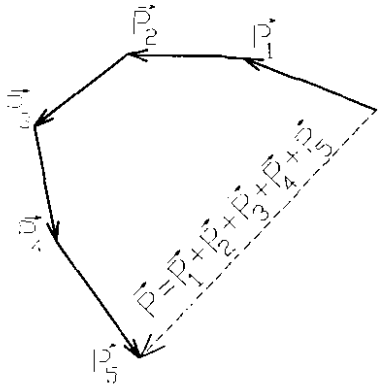
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{1.16}$$

A direção da resultante poderá ser obtida através de relações à semelhança da equação (1.12).

Graficamente, a determinação da resultante, no caso de forças coplanares,



a) Sistema de cinco forças coplanares concorrentes



b) Polígono das forças

Figura 1.11

torna-se um procedimento prático através da construção do polígono das forças, como mostra a Fig. 1.11.b.

A linha de fecho que vai da origem da primeira força à extremidade da última representa a resultante em intensidade, direção e sentido. O ponto de aplicação é o ponto comum de concorrência entre as forças, Fig. 1.11.a.

As condições de equilíbrio, tratadas na Seção 1.6, serão:

vetorialmente,

$$\sum \vec{P}_i = 0 \tag{1.17}$$

algebricamente,

$$\sum X_i = 0 \; ; \; \sum Y_i = 0 \tag{1.18}$$

graficamente,

fechamento do polígono das forças.

O tratamento teórico, apresentado nas Seções 1.6 e 1.7, é também aplicável aos sistemas de forças que atuam no mesmo corpo rígido, com linhas de ação concorrentes no mesmo ponto próprio.

1.8 - FORÇAS APLICADAS NO MESMO CORPO RÍGIDO

Neste caso, como as forças em ação no corpo têm pontos de aplicação distintos, temos que considerar a forma e o tamanho do corpo.

Para simplificar o estudo das forças aplicadas no mesmo corpo rígido, é necessária a introdução do conceito de momento de uma força em relação a um ponto. Este conceito ficará mais claro após uma breve recordação da definição do produto vetorial de dois vetores:

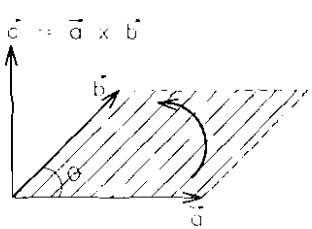


Figura 1.12

O produto vetorial de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é o vetor $\vec{c}$ que tem linha de ação perpendicular ao plano formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e módulo igual à área do paralelogramo de lados $\vec{a}$ e $\vec{b}$, Fig. 1.12.

O módulo de $\vec{c}$ é, portanto,

$$c = ab\,\text{sen}\theta \tag{1.19}$$

O sentido do vetor $\vec{c}$ é tal que, observando-se da extremidade de $\vec{c}$, a rotação no sentido de $\vec{a}$ alinhar-se com $\vec{b}$ é anti-horária.

Os três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, nesta ordem, formam um triedro positivo. A regra da mão direita também pode ser utilizada para a determinação do sentido de $\vec{c}$, Fig. 1.13.

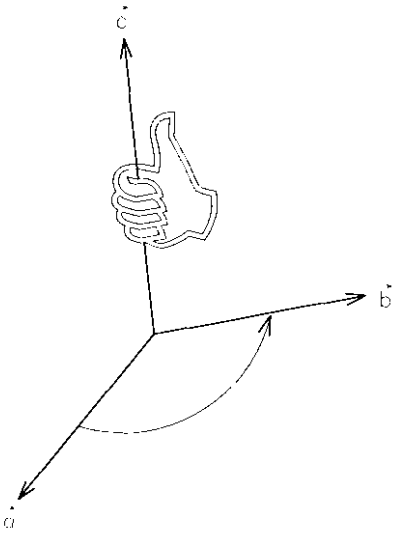


Figura 1.13

O produto vetorial não é comutativo e, portanto, $\vec{a} \times \vec{b}$ não é igual a $\vec{b} \times \vec{a}$, mas a um vetor $-\vec{c}$ de mesma intensidade e sentido contrário, podendo-se escrever a expressão

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \tag{1.20}$$

A propriedade distributiva se aplica ao produto vetorial, assim

$$\vec{a} \times \left(\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right) = \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{b}_2 \tag{1.21}$$

Se dois vetores têm mesma direção e sentidos iguais ou contrários, o seu produto vetorial é nulo, pois a área do paralelogramo é nula, de acordo com a expressão (1.19).

É interessante expressar o produto vetorial através das suas componentes cartesianas. Os vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, orientados segundo as direções x, y e z de um sistema de eixos cartesianos, são ortogonais entre si e formam um triedro positivo.

Assim, o produto vetorial $\vec{c}$ de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, expresso segundo as componentes cartesianas destes vetores, pode ser escrito

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(A_x.\vec{i} + A_y.\vec{j} + A_z.\vec{k}\right) \times \left(B_x.\vec{i} + B_y.\vec{j} + B_z.\vec{k}\right) \tag{1.22}$$

Usando a propriedade distributiva do produto vetorial, este pode ser expresso como uma soma de parcelas, onde cada qual representa o produto de dois escalares multiplicados pelo produto vetorial de dois vetores unitários e ortogonais entre si.

Lembrando a definição de produto vetorial temos, de imediato, os produtos dos pares de vetores formados com $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\begin{aligned}
&\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{j} \times \vec{k} = i \quad ; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\
&\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad ; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \quad ; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\
&\vec{i} \times \vec{i} = 0 \quad ; \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \quad ; \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Desenvolvendo a equação (1.22) e com as equações (1.23), obtemos

$$\vec{c} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k} \tag{1.24}$$

As componentes, segundo os eixos cartesianos, do produto vetorial $\vec{c}$ são, portanto,

$$\begin{aligned}
C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\
C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\
C_z &= A_x B_y - A_y B_x
\end{aligned} \tag{1.25}$$

O produto vetorial pode, então, ser escrito na forma

$$\vec{c} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k} \tag{1.26}$$

Os termos do segundo membro da equação (1.24) podem ser representados por um determinante, assim o produto vetorial pode ser expresso sob a forma

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.27}$$

1.9 - MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM PONTO

Podemos, agora, definir o momento de uma força em relação a um ponto fixo.

Consideremos a força $\vec{P}$ aplicada em um ponto A e um pólo fixo O. A posição de $\vec{P}$ pode ser definida, em relação ao pólo, pelo vetor $\vec{r}$ que liga o pólo fixo ao ponto de aplicação de $\vec{P}$, Fig. 1.14.

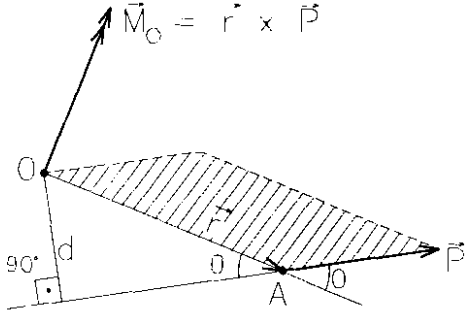


Figura 1.14

Definimos como momento de $\vec{P}$ em relação a O o produto vetorial de $\vec{r}$ e $\vec{P}$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P} \qquad (1.28)$$

A linha de ação do momento $\vec{M}_O$ é perpendicular ao plano formado pela força $\vec{P}$ e o pólo O, de acordo com a definição de produto vetorial. O sentido do momento é o sentido da rotação que faz $\vec{r}$ alinhar-se com $\vec{P}$. A regra da mão direita, vista na Seção 1.7, é usada para definir o sentido de $\vec{M}_O$.

No caso da Fig. 1.14, o sentido da rotação é anti-horário.

Ainda conforme a definição de produto vetorial, o módulo do momento é

$$M_O = rP\text{sen}\theta = Pr\text{sen}\theta = Pd \qquad (1.29)$$

sendo r o módulo do vetor posição $\vec{r}$ e d a distância do pólo fixo O à linha de ação da força $\vec{P}$.

Observamos, através da equação (1.29), que o momento de uma força em relação a um ponto não depende do ponto de aplicação da força sobre sua linha de ação.

Podemos, agora, determinar o momento da resultante de um sistema de forças concorrentes no mesmo ponto. Seja o sistema de forças $\vec{P}_1, ..., \vec{P}_i, ..., \vec{P}_n$, com ponto de aplicação comum em A. A posição de A, em relação a um pólo fixo O, é definida pelo vetor $\vec{r}$, Fig. 1.15.

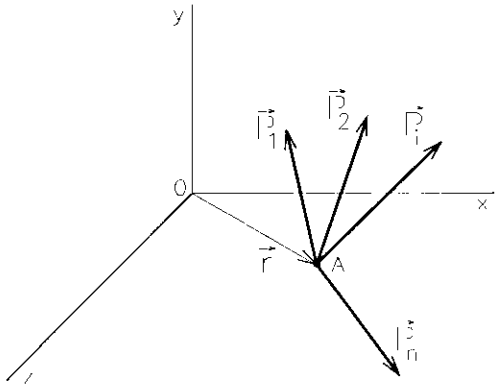


Figura 1.15

Sendo $\vec{R}$ a resultante do sistema de forças, definimos o momento de $\vec{R}$ em relação a O como

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ ... \ + \vec{P}_n) \tag{1.30}$$

Usando a propriedade distributiva do produto vetorial segue-se

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ ... \ + \vec{P}_n) = \vec{r} \times \vec{P}_1 + \vec{r} \times \vec{P}_2 + \ ... \ + \vec{r} \times \vec{P}_n \tag{1.31}$$

A relação (1.31) expressa o teorema originalmente enunciado por Varignon e conhecido como Teorema de Varignon: "O momento da resultante de um sistema de forças concorrentes, em relação a um ponto O, é igual à soma dos momentos das forças em relação ao mesmo ponto O".

De acordo com o Teorema de Varignon, o momento $\vec{M}_O$, de uma força $\vec{P}$ em relação a um ponto O, pode, ainda, ser expresso como a soma dos momentos das componentes de $\vec{P}$ em relação a O. Como se pode observar pela Fig. 1.16, as componentes do vetor $\vec{r}$ são iguais às coordenadas x, y e z do ponto A, respectivamente.

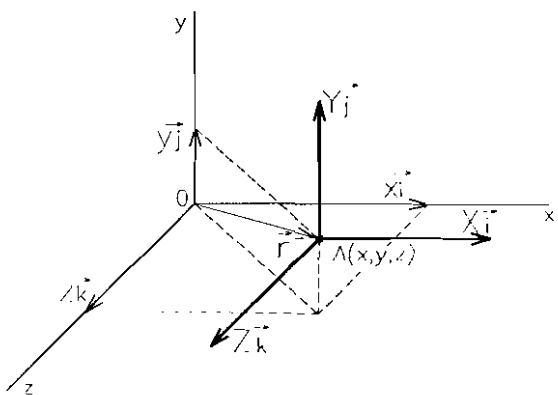


Figura 1.16

Sendo X, Y e Z as componentes da força $\vec{P}$ segundo os eixos cartesianos, podemos escrever

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.32}$$

$$\vec{P} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \tag{1.33}$$

O momento $\vec{M}_O$ da força $\vec{P}$ em relação ao pólo O é

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{P} \tag{1.34}$$

com as formulações (1.32) e (1.33) na (1.34) e à semelhança dos resultados obtidos na Seção 1.8, temos

$$\vec{M}_O = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k} \tag{1.35}$$

As componentes do momento, segundo os eixos cartesianos, são, portanto,

$$\begin{aligned} M_x &= yZ - zY \\ M_y &= zX - xZ \\ M_z &= xY - yX \end{aligned} \tag{1.36}$$

O momento $\vec{M}_O$ da força $\vec{P}$ em relação ao ponto O, pode, então, ser escrito na forma

$$\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \tag{1.37}$$

O momento $\vec{M}_O$ pode também ser expresso na forma de um determinante, tendo-se em vista os termos do segundo membro da equação (1.35)

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \tag{1.38}$$

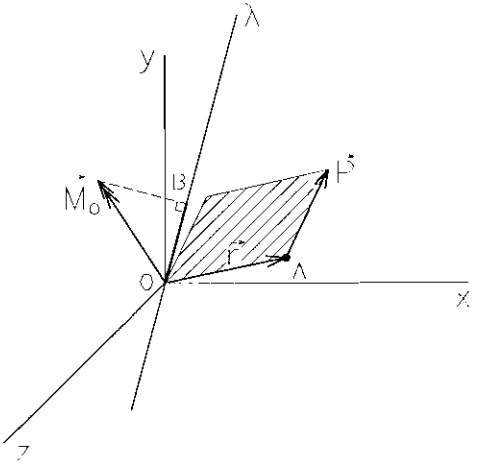


Figura 1.17

1.10 - MOMENTO DE UMA FORÇA EM RELAÇÃO A UM EIXO

Seja uma força $\vec{P}$ aplicada em um ponto A e um pólo fixo O. Define-se o momento da força $\vec{P}$ em relação a um eixo fixo λ, passando por O, como sendo a projeção do momento $\vec{M}_O$, de $\vec{P}$ em relação a O, sobre o eixo fixo, Fig. 1.17.

O momento $M_{O\lambda}$ de $\vec{P}$ em relação ao eixo λ é, portanto, o escalar OB e mede a tendência da força $\vec{P}$ de provocar rotação em torno de λ.

É facilmente demonstrável que as componentes M_x, M_y e M_z do momento $\vec{M}_O$, vistas na Seção 1.9, são os momentos da força $\vec{P}$ em relação aos eixos cartesianos x, y e z, respectivamente, e representam a tendência de $\vec{P}$ de provocar rotação em torno dos eixos coordenados.

Para se determinar o momento da força $\vec{P}$ aplicada em A, em relação a um eixo que não passa pela origem, basta escolher um ponto qualquer O', sobre o eixo, e determinar a projeção do momento $\vec{M}_O'$, de $\vec{P}$ em relação a O', sobre o eixo.

1.11 - BINÁRIO

Consideremos duas forças, $\vec{P}$ aplicada em A e $-\vec{P}$ aplicada em B, com linhas de ação paralelas, mesma intensidade e sentidos opostos. Tais forças formam um binário ou conjugado, Fig. 1.18.

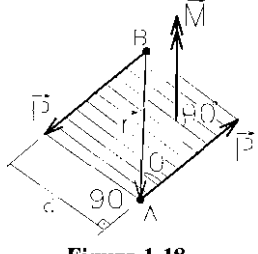


Figura 1.18

É trivial a demonstração que o momento $\vec{M}$ das forças, em relação a um ponto, independe da posição do ponto.

A linha de ação de $\vec{M}$ é perpendicular ao plano formado pelas forças $\vec{P}$ e $-\vec{P}$ e seu módulo é

$$M = Pr \text{ sen } \theta = Pd \qquad (1.39)$$

onde r é o módulo do vetor posição entre as origens A e B das forças e d é a distância entre as suas linhas de ação. O sentido deve ser determinado pela regra da mão direita.

Os binários podem ser representados por vetores perpendiculares aos seus planos e, portanto, podem ser somados vetorialmente, resultando também um binário.

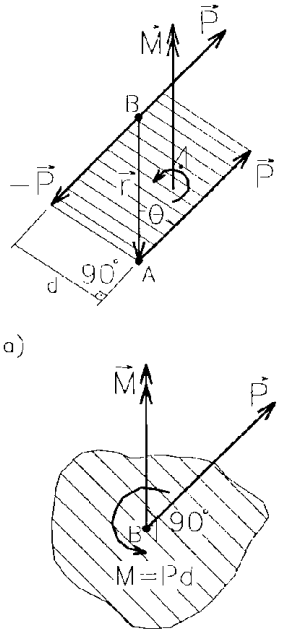


Figura 1.19

Podemos, agora, introduzir uma operação bastante utilizada na estática clássica, que é a decomposição de uma força $\vec{P}$ em uma força e um binário.

Uma força $\vec{P}$ aplicada em um ponto A pode sempre ser decomposta em uma outra força, de mesma direção, módulo e sentido de $\vec{P}$, aplicada em um ponto B mais um conjugado, equivalentes estaticamente à solicitação inicial.

Seja a força $\vec{P}$ aplicada no ponto A, com seu módulo, direção e sentido conhecidos, Fig. 1.19.a. Em um ponto B aplicamos duas forças colineares, $\vec{P}$ e $-\vec{P}$, paralelas à direção da força $\vec{P}$ aplicada em A.

Desta forma não alteramos a solicitação inicial por ser nula a resultante das forças introduzidas.

O sistema de forças resultante é equivalente, estaticamente, a uma força $\vec{P}$ aplicada em B mais o binário de módulo Pd, sendo d a distância entre as linhas de ação das forças aplicadas em A e B.

A direção do vetor, que representa o momento do binário, é perpendicular ao plano que contém o sistema de forças. Seu sentido é estabelecido pela regra da mão direita, Fig. 1.19.a.

Na prática fixamos o vetor $\vec{M}$, do binário, no ponto B e desta forma o conjunto $\vec{P}$, $\vec{M}$ representa a decomposição da força $\vec{P}$ aplicada em A em uma força aplicada em B mais um binário, Fig. 1.19.b. A referência "redução" de $\vec{P}$ ao ponto B é usualmente utilizada.

1.12 - REDUÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS APLICADAS EM UM CORPO RÍGIDO A UMA FORÇA MAIS UM BINÁRIO

Através de operações semelhantes às vistas na seção anterior, aplicadas sucessivamente, podemos, agora, "reduzir" um sistema de forças $\vec{P}_1$, ..., $\vec{P}_i$, ..., $\vec{P}_n$, a uma resultante $\vec{R}$, mais um binário $\vec{M}_R$, Fig. 1.20.

A translação de cada força $\vec{P}_i$ do seu ponto de aplicação A_i para um ponto O genérico é acompanhada do binário correspondente $\vec{M}_i$, aplicado em O e com linha de ação perpendicular ao plano que contém $\vec{P}_i$ e o ponto O, Fig. 1.20.b.

Como todas as forças e todos os binários estão, agora, aplicados em O e são, portanto, concorrentes, podemos somá-los vetorialmente

$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{P}_i \quad ; \quad \vec{M}_R = \sum_1^n \vec{M}_i = \sum_1^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i \tag{1.40}$$

Dizemos que o sistema de forças foi decomposto ou reduzido a uma força $\vec{R}$ aplicada em O, mais um binário $\vec{M}_R$, Fig. 1.20.c. Geralmente, a resultante $\vec{R}$ e o momento $\vec{M}_R$ não são perpendiculares entre si.

Se o ponto O for a origem de um sistema de eixos cartesianos, $\vec{R}$ e $\vec{M}_R$ podem ser expressos em termos das componentes. O vetor posição do ponto A_i e a força genérica $\vec{P}_i$, expressos pelas suas componentes segundo x, y e z, são

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k} \\ \vec{P}_i &= X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k} \end{aligned} \tag{1.41}$$

Com a substituição das (1.41) nas (1.40) e evidenciando $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ obtemos através de operações análogas às equações (1.7), (1.23) e (1.24)

$$\begin{aligned} \vec{R} &= R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} \\ \vec{M}_R &= M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \end{aligned} \tag{1.42}$$

com as componentes de $\vec{R}$ e $\vec{M}_R$ iguais a

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_1^n X_i \\ R_y &= \sum_1^n Y_i \\ R_z &= \sum_1^n Z_i \end{aligned} \tag{1.43}$$

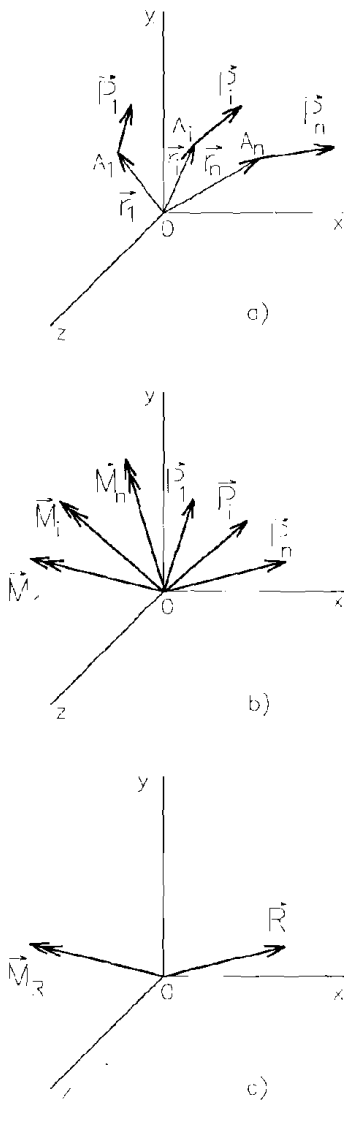


Figura 1.20

$$M_x = \sum_1^n M_{xi} = \sum_1^n (y_i Z_i - z_i Y_i)$$
$$M_y = \sum_1^n M_{yi} = \sum_1^n (z_i X_i - x_i Z_i)$$
$$M_z = \sum_1^n M_{zi} = \sum_1^n (x_i Y_i - y_i X_i) \qquad (1.44)$$

As componentes R_x, R_y e R_z representam as somas das componentes das forças aplicadas no corpo rígido e M_x, M_y e M_z, respectivamente, as somas dos momentos das forças em relação aos eixos x, y e z.

Finalmente, podemos expressar as condições em que um corpo submetido a forças quaisquer encontra-se em equilíbrio.

Vetorialmente, estas condições são

$$R = \sum_1^n \vec{P}_i = 0 \;\; ; \;\; \vec{M}_R = \sum_1^n \vec{M}_i = \sum_1^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i = 0 \qquad (1.45)$$

Em termos das componentes, o equilíbrio do corpo é expresso por

$$\sum_1^n X_i = 0$$
$$\sum_1^n Y_i = 0$$
$$\sum_1^n Z_i = 0$$
$$\sum_1^n M_{xi} = 0$$
$$\sum_1^n M_{yi} = 0$$
$$\sum_1^n M_{zi} = 0 \qquad (1.46)$$

1.13 - FORÇAS COPLANARES APLICADAS NA MESMA "CHAPA" RÍGIDA

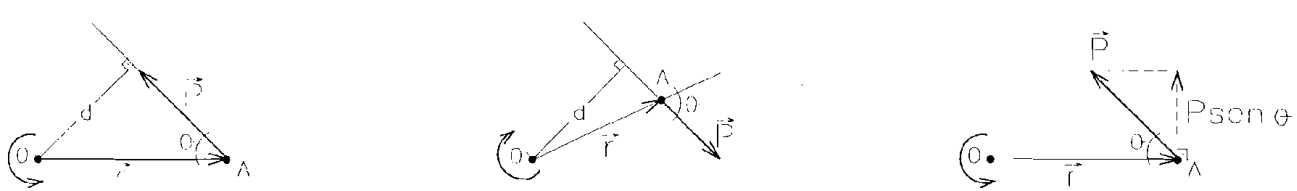
Quando todas as forças, ativas e reativas, que atuam num corpo rígido são coplanares, podemos considerar, numa idealização bem próxima da realidade, o corpo rígido como também sendo plano. Introduzimos aqui o termo "chapa" rígida, que substitui o corpo rígido nos problemas planos.

Nos problemas planos, as forças atuantes estão contidas no plano da chapa e o momento de uma força $\vec{P}$ em relação a um ponto O do plano é representado pelo vetor $\vec{M}_O$, cuja linha de ação é perpendicular à chapa.

Como os vetores que representam os momentos das forças que atuam na chapa são sempre perpendiculares ao seu plano, não há necessidade de especificar a direção do vetor momento. Basta o módulo Pd e o sentido.

Neste caso, o módulo do momento recebe um sinal de acordo com o sentido da rotação da força em relação ao ponto O, Fig. 1.21. É usual a representação do momento por uma flecha curva. A Fig. 1.21.c mostra que o módulo M_O pode ser calculado como sendo o produto do comprimento r, do vetor posição, pela projeção de $\vec{P}$ sobre a direção perpendicular a $\vec{r}$.

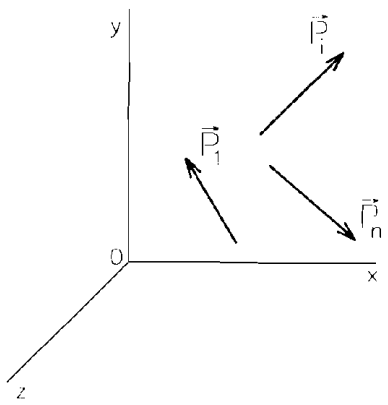
$$M_O = rP \operatorname{sen}\theta \qquad (1.47)$$



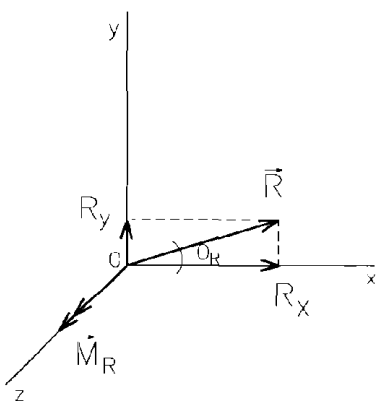
a) b) c)

Figura 1.21

Para se obter $\vec{M}_O$ nas componentes cartesianas, supondo $\vec{P}$ no plano xy,



c)



b)

Figura 1.22

basta fazer na expressão (1.35), da Seção 1.8, a componente Z de $\vec{P}$ e a coordenada z de A, segundo a direção z, iguais a zero

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = (xY - yX)\vec{k} = M_z\vec{k} \tag{1.48}$$

O momento de $\vec{P}$ em relação a O é perpendicular ao plano xy e seu módulo fica totalmente definido por

$$M_O = xY - yX \tag{1.49}$$

Num sistema de forças coplanares com os eixos x e y, a resultante $\vec{R}$ também pertence ao plano e o momento resultante $\vec{M}_R$ é perpendicular a ela, Fig. 1.22.

Para se determinar o módulo e a linha de ação da resultante, usamos as componentes das forças nas direções x e y. As componentes da resultante são

$$R_x = \sum_1^n X_i \;\; ; \;\; R_y = \sum_1^n Y_i \tag{1.50}$$

O momento resultante das forças, em relação à origem do sistema de eixos, só tem componente na direção z

$$M_R = M_z = \sum_1^n M_{zi} = \sum_1^n (x_i Y_i - y_i X_i) \tag{1.51}$$

A Fig. 1.22.b mostra o sistema de forças decomposto em uma resultante $\vec{R}$, aplicada na origem O, mais um binário $\vec{M}_R$.

O módulo e a direção da resultante são, portanto,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \;\; ; \;\; tg\theta_R = \frac{R_y}{R_x} \tag{1.52}$$

O sistema de forças pode também ser reduzido a uma única força $\vec{R}$. Neste caso, a linha de ação da resultante é obtida impondo-se a condição que o momento da resultante, em relação à origem, seja igual a $\vec{M}_R$. Sendo x e y as coordenadas do ponto de aplicação de $\vec{R}$, Fig. 1.23, escrevemos, à semelhança da equação (1.49),

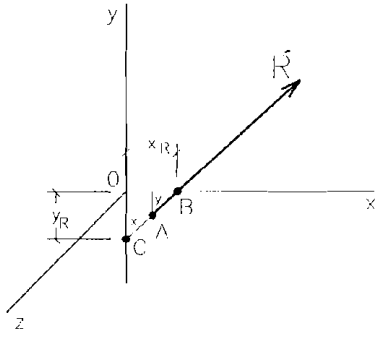


Figura 1.23

$$xR_y - yR_x = M_z \tag{1.53}$$

que é a equação da reta que representa a linha de ação de $\vec{R}$.

Os pontos $B(x_R, O)$ e $C(O, y_R)$ pertencem à linha de ação da resultante e portanto satisfazem a equação da reta, então

$$\begin{aligned} x_R R_y - OR_x &= M_z \\ OR_y - y_R R_x &= M_z \end{aligned} \tag{1.54}$$

As interseções da linha de ação com os eixos x e y são, portanto,

$$x_R = \frac{M_z}{R_y} \;\; ; \;\; y_R = \frac{M_z}{R_x} \tag{1.55}$$

Uma aplicação imediata é a determinação da posição da linha de ação da resultante de um sistema de forças paralelas coplanares, Fig. 1.24.

Sendo as forças paralelas ao eixo y segue-se que

$$R_x = 0 \;\; ; \;\; R_y = \sum P_i \;\; ; \;\; M_z = \sum x_i P_i$$

usando as equações (1.55) obtemos

$$x_R = \frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i}$$

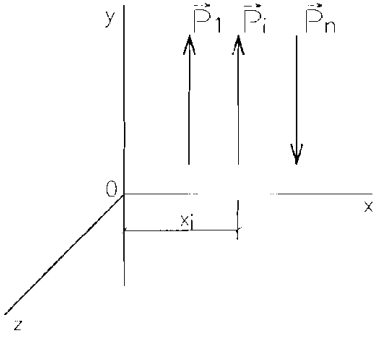


Figura 1.24

A determinação gráfica da linha de ação da resultante de um sistema de

forças coplanares aplicadas na mesma chapa é feita através da construção do polígono funicular.

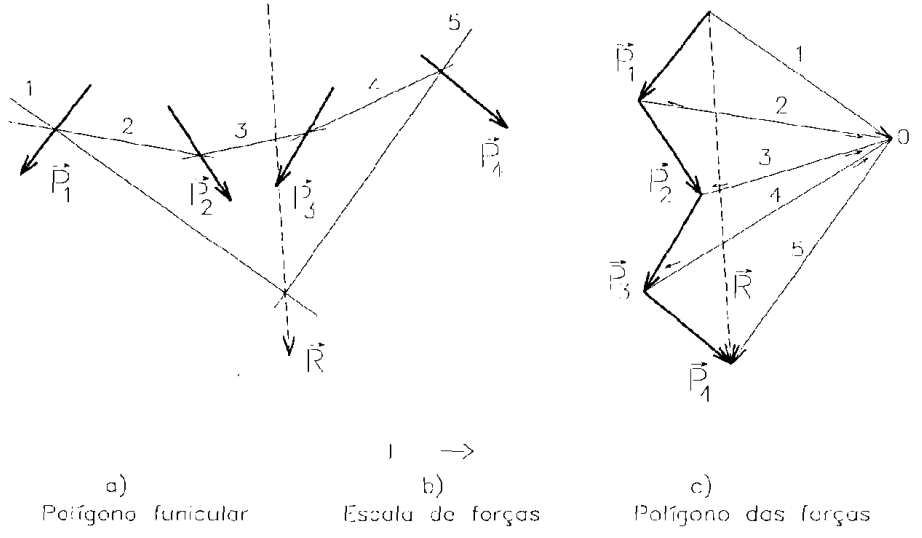


Figura 1.25

A Fig. 1.25.a representa quatro forças coplanares aplicadas na mesma chapa. Procuramos a resultante do sistema de forças.

Inicialmente construímos o polígono das forças, conforme foi visto na Seção 1.5. A linha de fecho que une a origem da primeira força à extremidade da última representa a resultante em intensidade, direção e sentido, Fig. 1.25.c.

Para a determinação da linha de ação da resultante, decompomos cada força em duas componentes, com auxílio de um pólo comum O, escolhido arbitrariamente, Fig.1.25.c. As componentes de cada força são os raios polares que unem o pólo à origem e à extremidade de cada força.

As componentes da resultante são, portanto, os raios polares que unem a origem da primeira força ao pólo O e este à extremidade da última, pois as componentes internas se anulam.

Deslocando-se os raios polares, paralelamente, de tal forma que interceptem as forças, obtém-se no ponto de interseção dos raios externos, que são as componentes da resultante, a linha de ação de $\vec{R}$, Fig. 1.25.a.

Estabeleceremos agora as condições de equilíbrio de um sistema de forças coplanares aplicadas na mesma chapa. O plano que contém a chapa é o do sistema bidimensional de eixos cartesianos, O, x e y.

O momento de uma força genérica $\vec{P}_i$ em relação a um ponto O pertencente ao plano da chapa é sempre perpendicular ao plano das forças e fica perfeitamente definido pelo escalar M_{zi}, como visto anteriormente.

Nos problemas planos, para maior simplicidade, suprimiremos o índice z. O momento de $\vec{P}_i$ em relação a O é então M_i.

As componentes X_i e Y_i medem a tendência da força genérica $\vec{P}_i$ de provocar translação na chapa, nas direções x e y, respectivamente, e o momento M_i mede a tendência da força de provocar rotação em torno de O.

As condições de equilíbrio estão portanto estabelecidas

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{1}^{n} X_i = 0 \\ R_y &= \sum_{1}^{n} Y_i = 0 \\ M &= \sum_{1}^{n} M_i = 0 \end{aligned} \qquad (1.56)$$

Nos problemas práticos, também poderão ser usadas como condições de equilíbrio três equações de momentos, desde que relativas a pontos não pertencentes à mesma reta.

Também poderão ser utilizadas uma equação de projeção de forças e duas de momentos, desde que relativas a dois pontos cuja reta que os contém não seja perpendicular ao eixo utilizado para estabelecer a equação de projeção.

ELEMENTOS E FORMAS FUNDAMENTAIS DAS ESTRUTURAS

2.1 - CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS

As estruturas são constituídas de um elemento ou conjunto de elementos ligados entre si e externamente ao solo, de tal forma que o sistema assim formado seja estável. A estrutura é, portanto, um sistema adequado para receber solicitações externas e encaminhá-las internamente até seus vínculos exteriores.

As estruturas podem ser classificadas em função das dimensões principais de seus componentes, também chamados de elementos estruturais.

Quando duas das três dimensões do componente estrutural são pequenas em relação à terceira, este é chamado de barra e a estrutura formada por

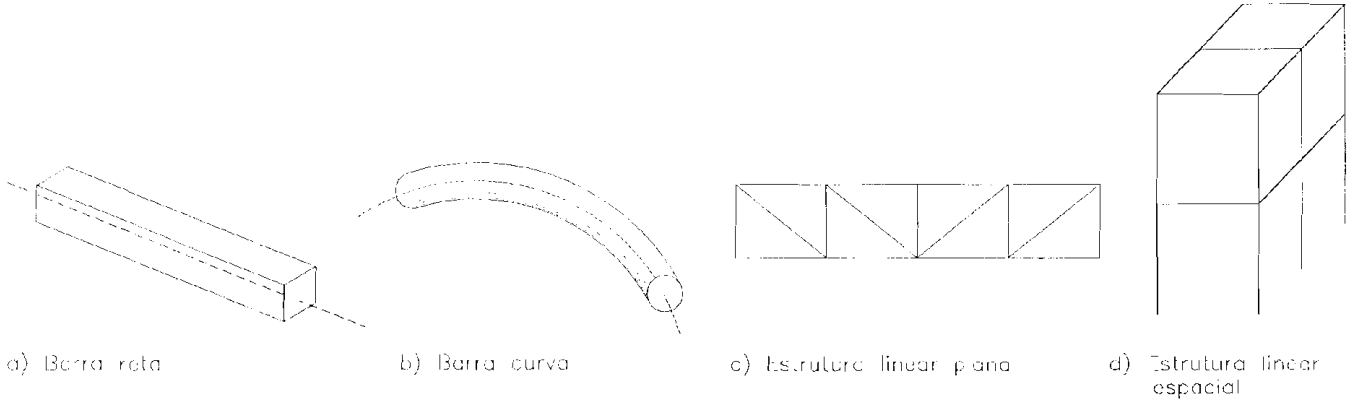


Figura 2.1

um ou mais destes elementos é dita linear, Fig. 2.1. As estruturas lineares ainda podem ser planas ou espaciais, conforme os eixos das barras estejam ou não no mesmo plano.

Quando uma das dimensões é muito menor que as outras duas, temos um componente estrutural de superfície e as estruturas assim constituídas são chamadas de estruturas de superfície, Fig. 2.2. São os casos das chapas, placas e cascas, conforme a superfície seja plana ou curva.

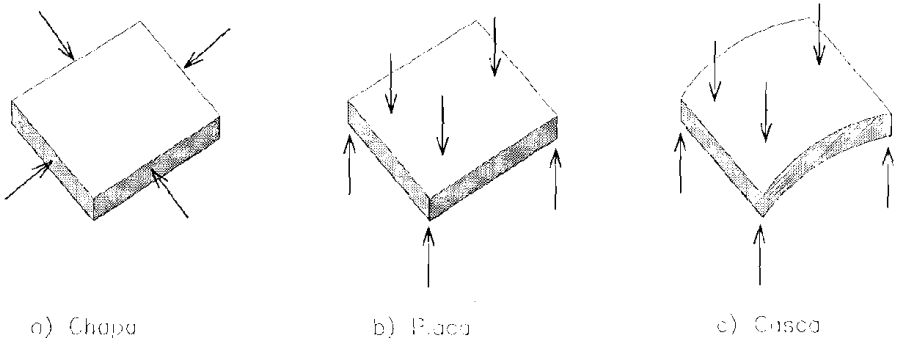


Figura 2.2

Quando não há dimensão preponderante sobre as outras, temos o elemento chamado bloco e as estruturas são de volume, caso dos muros de contenção e das barragens de gravidade, Fig. 2.3.

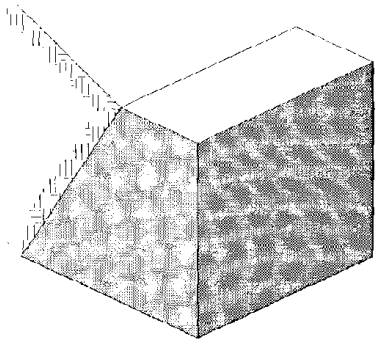


Figura 2.3

2.2 - ESTRUTURAS LINEARES PLANAS

Estruturas lineares geometricamente planas são aquelas formadas por barras cujos eixos estão situados no mesmo plano. A estrutura linear mais simples é a viga formada por uma única barra. Geralmente horizontal, é uma estrutura apropriada para suportar cargas externas transversais ao seu eixo. Conforme o eixo seja reto ou curvo, temos a viga reta ou viga curva.

VINCULAÇÃO DOS SISTEMAS PLANOS

3.1 - GENERALIDADES

Vimos na Seção 2.1 que as estruturas podem ser formadas por vários elementos ligados entre si e exteriormente ao solo. Estas ligações são chamadas vínculos, podendo-se distinguir três tipos:

a) articulação entre chapas, que são as ligações internas que unem as chapas;

b) articulações entre barras, geralmente chamadas de nó, que são as ligações através das quais são unidas as barras;

c) apoios, que são os vínculos externos das estruturas; geralmente são ligações entre as estruturas e o solo.

Os elementos estruturais mais os vínculos devem formar um conjunto estável, sendo os vínculos responsáveis por restringir os graus de liberdade de movimento da estrutura. As estruturas lineares planas são supostas rigidamente vinculadas ao plano que contém os eixos dos elementos, podendo ter somente graus de mobilidade neste plano. Qualquer movimento de um corpo rígido, ou chapa rígida, no plano pode ser obtido pela superposição de três movimentos independentes. São três, portanto, os graus de liberdade de movimento no plano: uma rotação e duas translações.

3.2 - REPRESENTAÇÃO DOS DIFERENTES TIPOS DE VÍNCULOS PLANOS

Os vínculos podem ser caracterizados pelo número de graus de liberdade retirados da estrutura. Para melhor visualização desta restrição, podemos imaginá-los substituídos por barras vinculares nas direções dos movimentos impedidos.

Apresentamos a seguir os diferentes tipos de vínculos planos, os símbolos que os representam e sua equivalência em barras vinculares nas direções dos movimentos restringidos.

Apoio móvel

Este vínculo tem liberdade de giro e é uma vez deslocável, restringindo apenas o movimento na direção normal ao deslocamento, Fig. 3.1. Retira um grau de liberdade de movimento da estrutura.

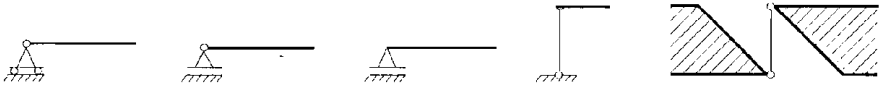


Figura 3.1

Apoio fixo

Este vínculo tem liberdade de giro e é indeslocável. Quando interno à estrutura é chamado articulação entre duas chapas e restringe deslocamentos relativos, permitindo giro entre as chapas, Fig. 3.2. Retira dois graus de mobilidade da estrutura.

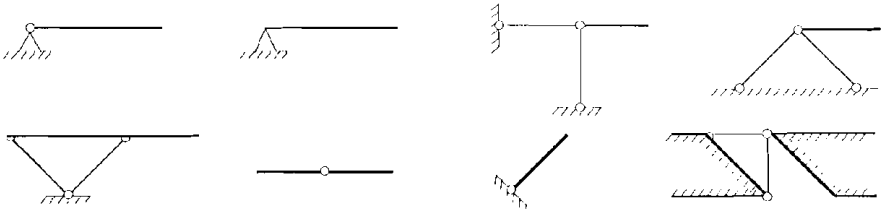


Figura 3.2

Articulação entre chapas

Este vínculo restringe deslocamentos entre as chapas, permitindo, no entanto, giros relativos entre elas. Supondo-se uma delas fixa, a articulação retira dois graus de liberdade de movimento de cada uma das $(c-1)$ chapas, em relação àquela suposta fixa, Fig. 3.3. O número total de graus de liberdade retirados da estrutura pelo vínculo é igual a $2(c-1)$.

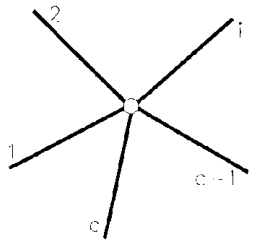


Figura 3.3

Engastamento fixo

É o vínculo que impede todos os movimentos no plano — retira, portanto, três graus de liberdade da estrutura, Fig. 3.4.

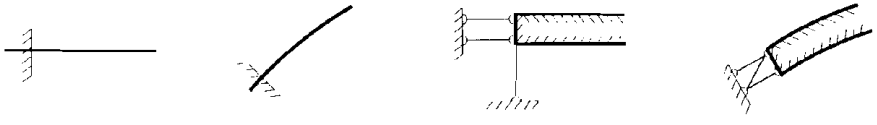


Figura 3.4

Engastamento móvel

Este vínculo é uma vez deslocável, impede o giro e o movimento na direção normal ao deslocamento, Fig. 3.5. Retira dois graus de liberdade de movimento da estrutura.

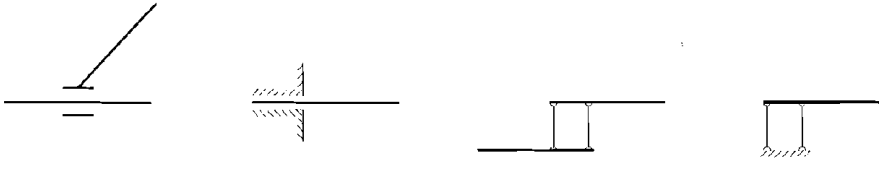


Figura 3.5

3.3 - DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA DAS ESTRUTURAS PLANAS

Vimos na seção anterior que os vínculos entre os elementos estruturais e entre a estrutura e a terra restringem os movimentos da estrutura no plano. As

relações entre o número de vínculos e o número de elementos que comparecem em um arranjo estrutural devem satisfazer certas condições para que a estrutura tenha sua posição determinada no plano. O estudo destas relações, baseado nas funções geométricas dos componentes da estrutura, denomina-se determinação geométrica.

A estrutura formada unicamente por barras, nós e apoios é chamada treliça. Substituindo os apoios por barras vinculares equivalentes, a estrutura fica constituída apenas de barras e nós.

Geometricamente, os nós são os pontos por onde são juntadas as barras da treliça. As barras, por sua vez, têm a função geométrica de determinar as distâncias entre os seus pontos extremos. Uma barra que não tenha chapas ligadas às suas extremidades tem um nó em cada extremo.

Na treliça plana, a relação entre a quantidade de barras e nós decorre diretamente do número de graus de liberdade de movimento do ponto no plano. Duas barras vinculares, portanto, são suficientes para fixar o nó, Fig. 3.6.a. Acrescentando sucessivamente um nó e duas barras, obtemos uma estrutura cuja posição é perfeitamente determinada, Fig. 3.6.b.

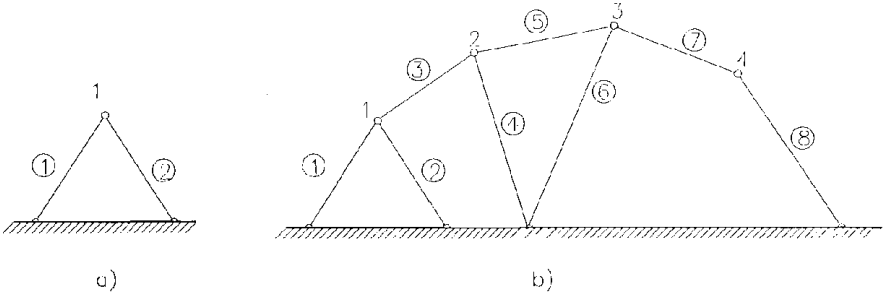


Figura 3.6

Sendo b o número de barras, incluindo as barras vinculares equivalentes, e n o número de nós de uma treliça plana, a condição necessária para que a estrutura tenha sua posição determinada é

$$b = 2n \qquad (3.1)$$

Uma treliça que tem a posição relativa dos nós determinada, sem considerar sua vinculação externa, é chamada "chapa" de treliça. A "chapa" de treliça mais simples é aquela formada por três nós e três barras, Fig. 3.7.a. Acrescentando sucessivamente um nó e duas barras, a posição relativa dos nós continua determinada, Fig. 3.7.b. A estrutura resultante da operação continua, portanto, sendo uma "chapa" e, como tal, tem três graus de mobilidade no plano. Necessita para sua determinação de três vínculos externos. A condição necessária para que uma treliça, excluindo-se suas ligações externas, seja uma "chapa" é, então,

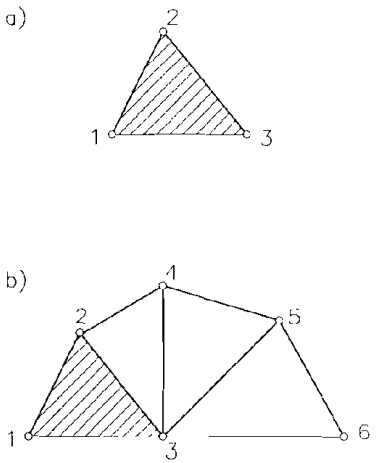


Figura 3.7

$$b = 2n - 3 \qquad (3.2)$$

Na Fig. 3.8 são apresentados alguns exemplos de treliças geometricamente determinadas. As Figs. 3.8.a, 3.8.c e 3.8.e mostram as treliças com os apoios representados de acordo com os símbolos. As Fig. 3.8.b, 3.8.d e 3.8.f mostram os apoios transformados em barras vinculares equivalentes e a verificação numérica da condição de determinação geométrica.

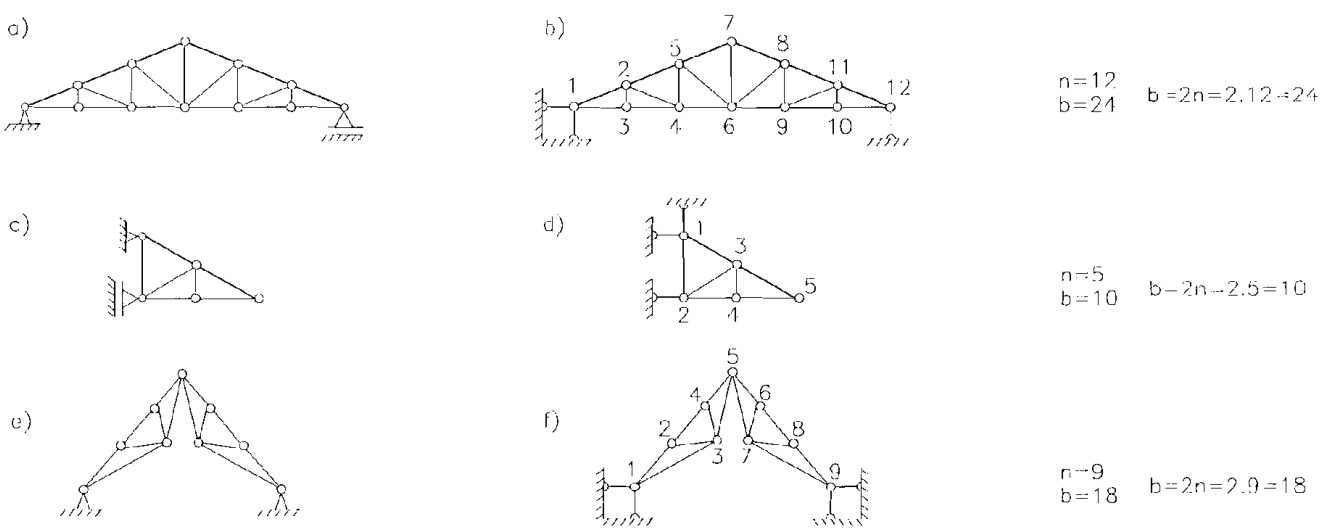


Figura 3.8

Nas estruturas constituídas por chapas e vínculos, a relação entre os componentes estruturais decorre do número de graus de mobilidade de uma chapa no plano. A chapa tem função geométrica de determinar a posição de três ou mais de seus pontos. Necessita de um ou mais vínculos equivalentes a três barras vinculares, que não sejam concorrentes no mesmo ponto, para que sua posição seja fixa.

Sendo c o número de chapas abertas da estrutura e b o número de barras vinculares equivalentes, a condição necessária para que a estrutura seja geometricamente determinada é

$$b = 3c \tag{3.3}$$

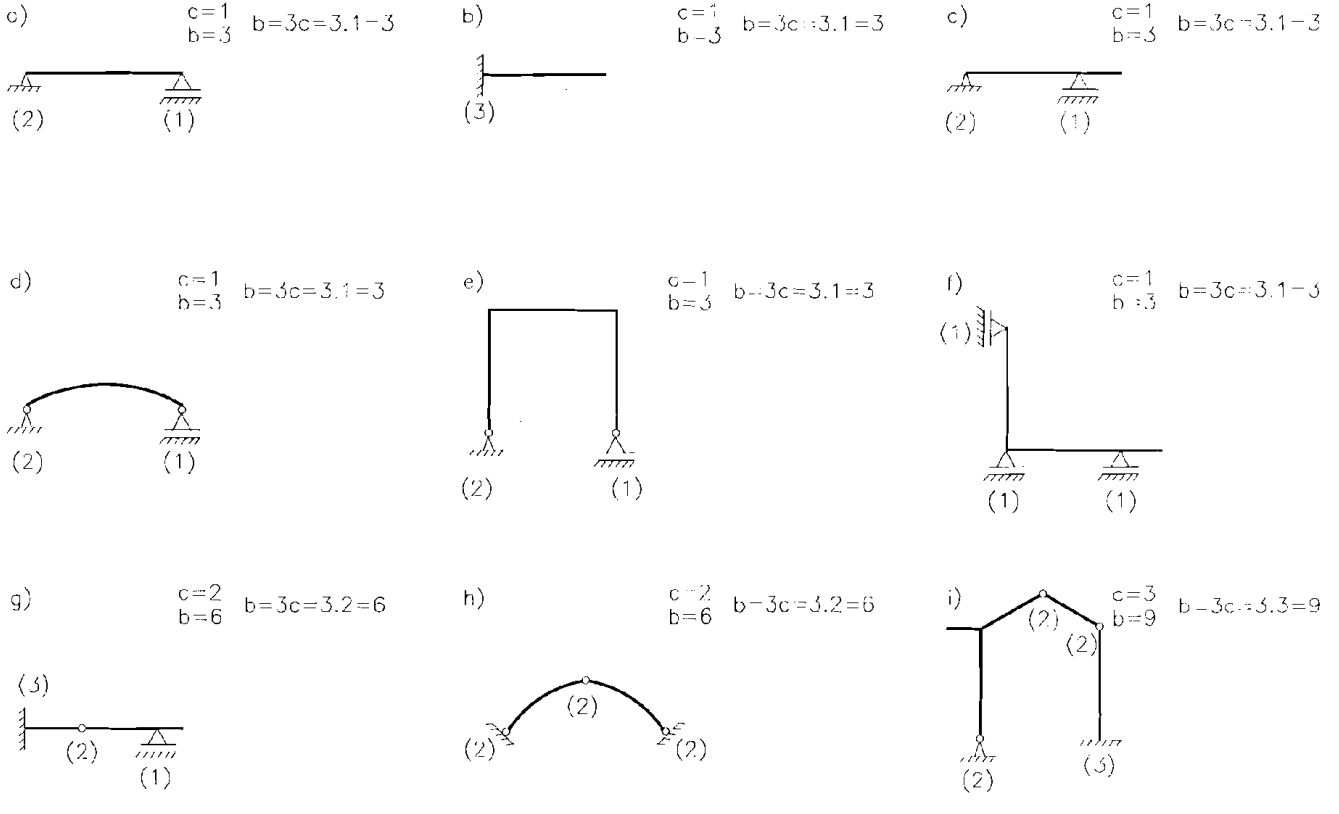


Figura 3.9

A verificação numérica da determinação geométrica das treliças da Fig. 3.8 pode ser analisada através da equação (3.3). Para tanto, basta substituir as treliças por chapas de treliça. As treliças das Figs. 3.8.a e 3.8.c equivalem cada uma a uma chapa e a da Fig. 3.8.e a duas chapas articuladas entre si.

A Fig. 3.9 mostra vários exemplos de estruturas em chapa, geometricamente determinadas, e a verificação numérica das condições de determinação geométrica. Os algarismos entre parênteses indicam o número de barras vinculares equivalentes.

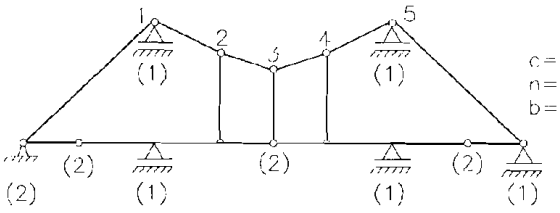
Os arranjos estruturais que incluem chapas, vínculos, barras e nós são chamados estruturas mistas. A relação entre as quantidades de seus componentes para que a estrutura seja determinada decorre das condições expressas nas equações (3.1) e (3.3).

Sendo c o número de chapas da estrutura, b o número total de barras, incluídas as barras vinculares equivalentes, e n o número de nós, a condição necessária para que a estrutura seja determinada é portanto

$$b = 3c + 2n \tag{3.4}$$

A Fig. 3.10 mostra alguns exemplos de estruturas mistas, determinadas geometricamente, e a correspondente verificação numérica.

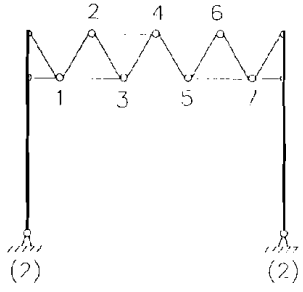
a) Ponte suspensa



c=4
n=5
b=22

b=3c+2n=3.4+2.5=22

b) Pórtico treliçado tri-articulado



c=2
n=7
b=20

b=3c+2n=3.2+2.7=20

Figura 3.10

3.4 - CASOS EXCEPCIONAIS

Vimos na Seção 3.3 que uma estrutura tem sua posição geometricamente determinada se a relação entre as quantidades de seus componentes satisfizer as condições expressas nas equações (3.1), (3.3) e (3.4).

Estas condições, porém, são necessárias, mas não suficientes, para que a estrutura seja estável. As estruturas cuja relação entre seus componentes satisfaz as equações (3.1), (3.3) e (3.4), mas tem um grau de mobilidade, são chamadas casos excepcionais.

Para melhor entendermos os casos excepcionais, veremos inicialmente algumas propriedades do deslocamento infinitesimal de cadeias cinemáticas com um grau de liberdade. Este assunto será visto detalhadamente no estudo das cargas móveis em estruturas lineares, não fazendo parte da teoria aqui desenvolvida.

Podemos definir cadeia cinemática, com um grau de liberdade, como um conjunto de chapas rígidas ligadas entre si por articulações ou barras vinculares. Cada chapa, tendo um grau de liberdade de movimento infinitesimal, absoluto ou em relação a outra chapa.

A chapa, com um grau de liberdade de movimento absoluto, deverá estar vinculada à terra através de um apoio fixo ou duas barras vinculares. O apoio fixo ou o ponto comum, próprio ou impróprio entre as barras vinculares, será chamado pólo instantâneo de rotação ou pólo absoluto, Fig. 3.11.

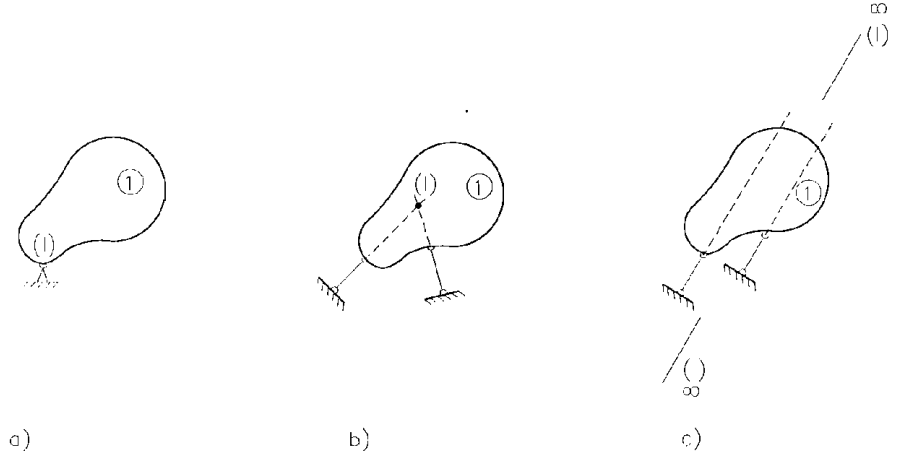


Figura 3.11

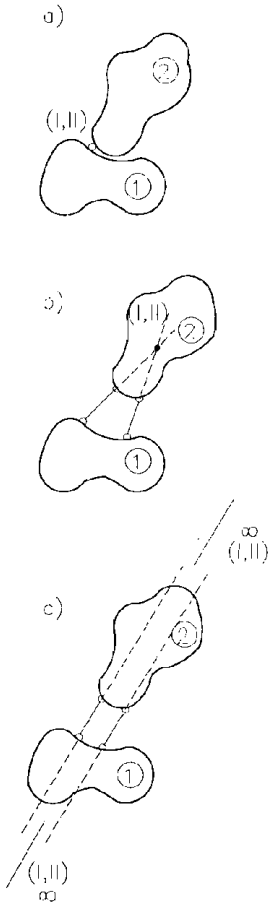


Figura 3.12

O deslocamento infinitesimal dos pontos da chapa é, então, uma rotação em torno do pólo absoluto, ou, como no caso da Fig. 3.11.c, uma translação. O deslocamento relativo dos pontos de uma chapa em relação à outra pode também ser pensado como uma rotação, em torno de um pólo relativo próprio, ou uma translação, no caso do pólo relativo ser um ponto impróprio, Fig. 3.12.

Os casos excepcionais acontecem, em geral, quando é observada a seguinte propriedade das cadeias cinemáticas:

Entre duas chapas (1) e (2), os pólos absolutos (I) e (II) de cada chapa, respectivamente, e o pólo relativo (I, II), entre elas, pertencem à mesma reta, Fig. 3.13.

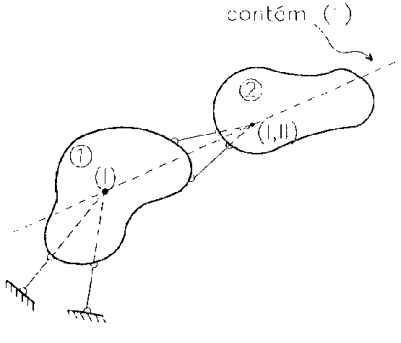


Figura 3.13

A Fig. 3.14 apresenta alguns casos excepcionais, identificados através da determinação dos pólos e aplicação, quando necessário, da propriedade das cadeias cinemáticas vista anteriormente.

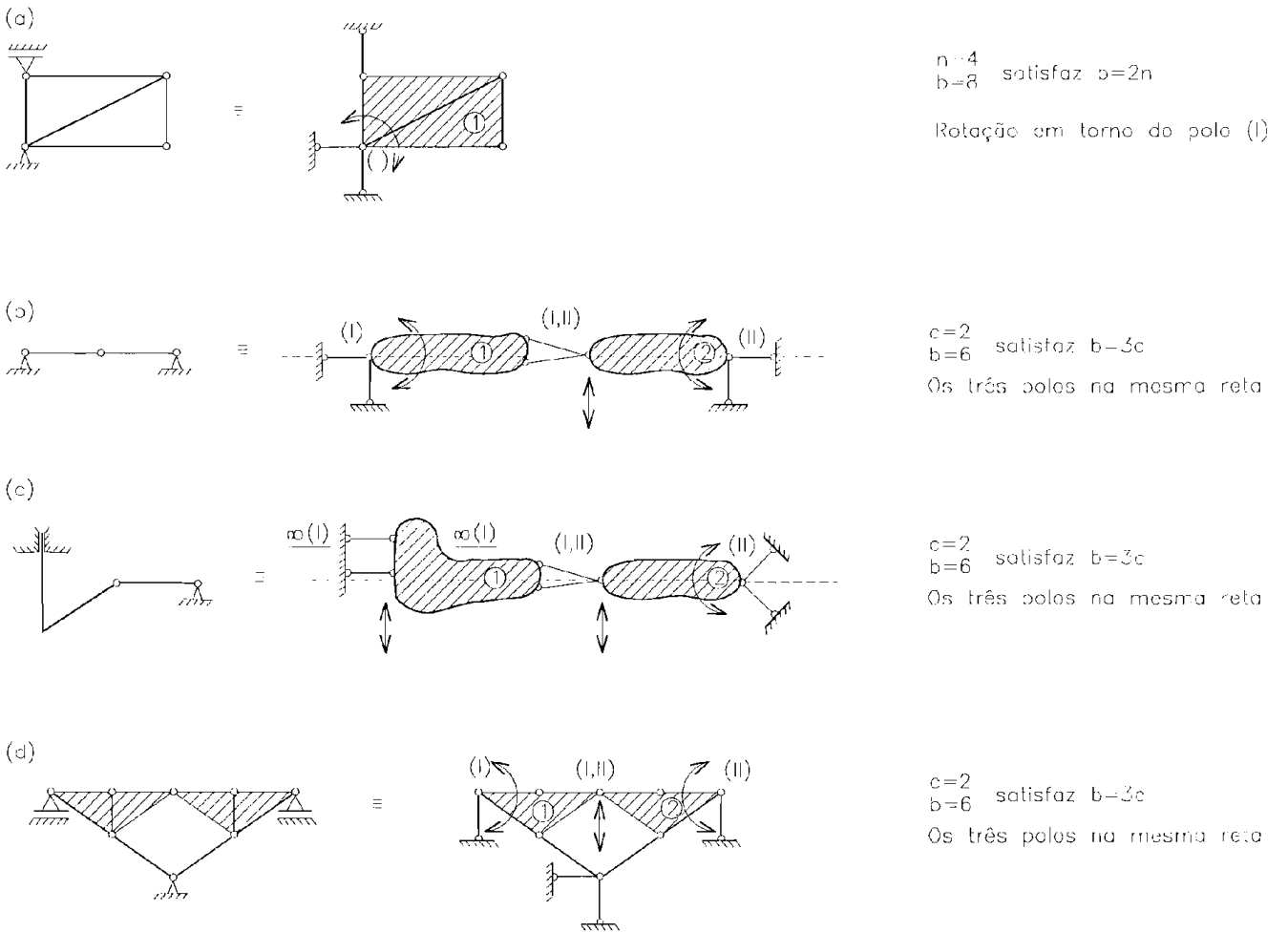


Figura 3.14

3.5 - CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS QUANTO À SUA DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA

As estruturas, relativamente à função geométrica de seus componentes e desde que não sejam casos excepcionais, podem ser classificadas utilizando-se as equações (3.1), (3.3) e (3.4), quais sejam:

Estruturas em treliças

$b < 2n$, treliça indeterminada ou móvel (3.5)

$b = 2n$, treliça determinada (3.6)

$b > 2n$, treliça superdeterminada (3.7)

Estruturas em chapas

$b < 3c$, estrutura indeterminada ou móvel (3.8)

$b = 3c$, estrutura determinada (3.9)

$b > 3c$, estrutura superdeterminada (3.10)

Estruturas mistas

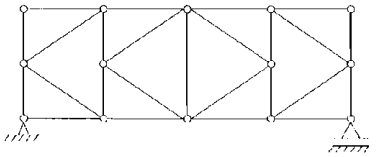
$b < 3c + 2n$, estrutura indeterminada ou móvel (3.11)

$b = 3c + 2n$, estrutura determinada (3.12)

$b > 3c + 2n$, estrutura superdeterminada (3.13)

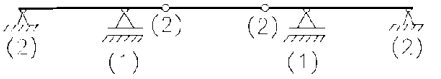
A Fig. 3.15, na página seguinte, apresenta alguns exemplos de verificação numérica e classificação de estruturas quanto à sua determinação geométrica.

a)



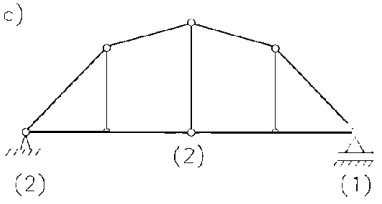
n=14
b=28 Determinada

b)



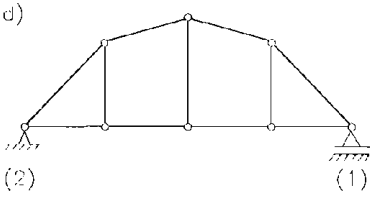
c=3
b=10 Superdeterminada, grau=1

c)



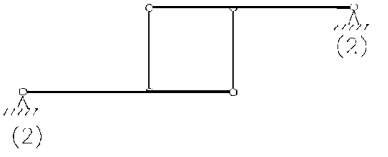
c=2
n=3 Determinada

d)



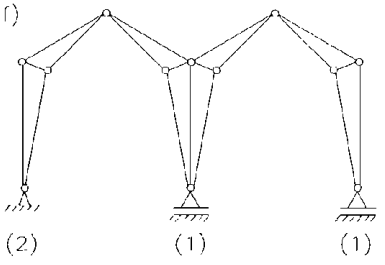
n=8
b=14 Móvel, 2 graus de mobilidade

e)



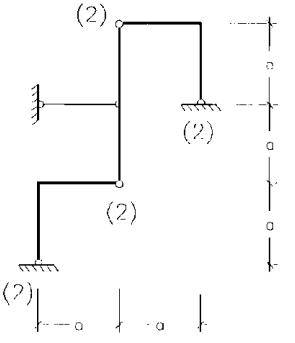
c=2
b=6 Determinada

f)



n=12
b=23 Móvel, 1 grau de mobilidade

g)



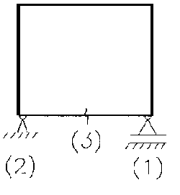
c=3
b=9 Caso excepcional

h)



c=1
b=6 Superdeterminada, grau=3

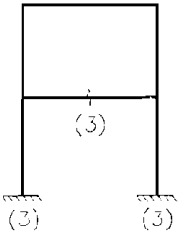
i)



c=1
b=6 Superdeterminada, grau=3

Continuidade
= 3 barras

j)



c=1
b=9 Superdeterminada, grau=6

Figura 3.15

EQUILÍBRIO DOS SISTEMAS PLANOS

4.1 - INTRODUÇÃO

No Capítulo I as forças foram classificadas em forças externas e internas. As externas foram ainda subdivididas em forças ativas e reativas. Estas últimas são forças localizadas na estrutura e surgem devido aos vínculos que impedem movimento, tornando o conjunto um sistema estável.

Quando as forças ativas e reativas são coplanares com os eixos da estrutura temos uma estrutura linear estaticamente plana ou, mais simplesmente, um sistema plano. À semelhança da classificação das estruturas quanto a sua determinação geométrica, podemos, agora, classificá-las quanto a sua determinação estática, relativamente à função estática dos seus componentes.

Estruturas em treliças

$b < 2n$, treliça hipostática (4.1)

$b = 2n$, treliça isostática (4.2)

$b > 2n$, treliça hiperestática (4.3)

Estruturas em chapas

$b < 3c$, estrutura hipostática (4.4)

$b = 3c$, estrutura isostática (4.5)

$b > 3c$, estrutura hiperestática (4.6)

Estruturas mistas

$b < 3c + 2n$, estrutura hipostática (4.7)

$b = 3c + 2n$, estrutura isostática (4.8)

$b > 3c + 2n$, estrutura hiperestática (4.9)

4.2 - ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS PLANAS

Como já se disse, os vínculos restringem os graus de liberdade de movimento da estrutura, provocando forças reativas conhecidas como reações de apoio. Nas estruturas isostáticas as reações de apoio só aparecem quando existem forças ativas, em geral conhecidas como cargas aplicadas.

As cargas aplicadas são geralmente dadas ou facilmente determináveis e as reações de apoio são as forças procuradas ou forças incógnitas. Nas estruturas isostáticas, o número de vínculos é o essencialmente necessário para impedir a mobilidade da estrutura, e as reações de apoio, despertadas pelas cargas aplicadas, são em número igual aos movimentos restringidos. São, portanto, forças com ponto de aplicação e direção conhecidos.

O conjunto, cargas aplicadas mais reações de apoio, forma um sistema de forças em equilíbrio — diz-se que a estrutura se encontra em estado de equilíbrio estável.

A teoria que estuda as relações de equilíbrio entre as forças nas estruturas isostáticas é chamada de Isostática, constituindo-se o objeto desta publicação. Neste estudo, a deformação dos elementos estruturais não precisa ser considerada, podendo ser supostos na sua posição indeformada.

As condições de equilíbrio, expressas pelas equações introduzidas no primeiro capítulo, serão empregadas no desenvolvimento desta teoria.

4.3 - TIPOS DE CARGAS APLICADAS

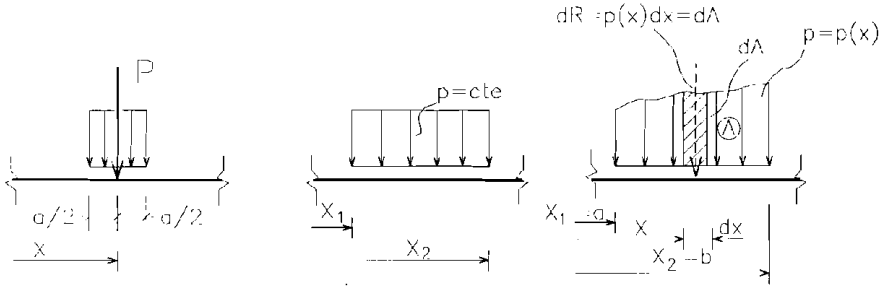
A ação das cargas aplicadas manifesta-se por contato ou a distância, como no caso do peso próprio das estruturas. As cargas, distribuídas ou concentradas, podem ser classificadas em permanentes e acidentais.

As cargas permanentes são aquelas que atuam constantemente por toda a vida útil da estrutura, como por exemplo o peso próprio dos elementos estruturais, os revestimentos e os materiais de enchimento da estrutura.

As cargas acidentais são aquelas que podem ou não atuar na estrutura, podendo ser estáticas, como a ação do vento, empuxos de terra ou água, sobrecargas, ou dinâmicas, como os impactos laterais, as frenagens ou acelerações de veículos nas pontes e os efeitos dos tremores de terra.

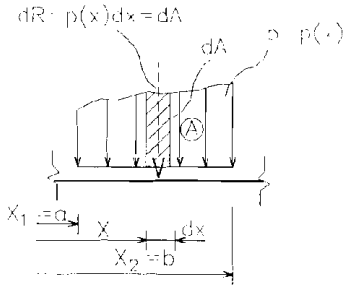
As cargas acidentais podem ainda ser móveis, como as cargas de veículos que transitam nas pontes rodoviárias e ferroviárias.

As cargas permanentes e as acidentais estáticas são tratadas de modo semelhante na análise das estruturas. Em estruturas lineares, estas cargas aparecem sempre como cargas concentradas ou distribuídas ao longo dos eixos dos elementos, Fig. 4.1.



a) Carga concentrada b) Carga distribuída uniforme c) Carga distribuída variável

Figura 4.1



c) Carga distribuída variável

Figura 4.1.c

As cargas concentradas — na realidade distribuídas em um comprimento muito pequeno em relação à dimensão do eixo do elemento estrutural — podem ser consideradas aplicadas no ponto médio da distribuição.

Já as cargas distribuídas necessitam da determinação da resultante do carregamento, ou seja, sua intensidade e linha de aplicação. Tomemos por exemplo o carregamento da Fig. 4.1.c.

A resultante do carregamento aplicado no comprimento elementar dx tem módulo igual à área definida pelo carregamento no comprimento dx

$$dR = dA = p(x)dx \tag{4.10}$$

A resultante do carregamento total é, então, igual à área A, definida pelo carregamento e a linha ab

$$R = A = \int dA = \int_a^b p(x)dx \tag{4.11}$$

Para determinarmos a reta de aplicação da resultante, basta recorrermos às equações (1.55) do Capítulo I — determinação da posição da linha de ação da resultante de um sistema de forças coplanares paralelas —, ou seja

$$x_R = \frac{\int_a^b xp(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} \tag{4.12}$$

A coordenada x_R é algebricamente igual à razão entre o momento estático da área A, em relação a um eixo perpendicular ao eixo coordenado x, e a área A,

$$\frac{\int_A xdA}{\int_A dA} \tag{4.13}$$

que nada mais é que a coordenada do centro de gravidade da área A em relação a um eixo perpendicular ao eixo x.

Resumindo, podemos dizer que o módulo da resultante é igual à área

do carregamento e que sua linha de ação passa pelo centro de gravidade desta área.

4.4 - CÁLCULO DE REAÇÕES

Como já vimos, as reações se opõem à tendência de movimento devido às cargas aplicadas, resultando um estado de equilíbrio estável.

Nas estruturas isostáticas constituídas por uma única chapa, o número de equações de equilíbrio disponíveis é igual ao número de incógnitas, possibilitando o cálculo das reações de forma muito simples.

Supondo a estrutura sempre contida no plano xy, as condições de equilíbrio, em conformidade com as equações (1.56), são

$$\sum X = 0$$
$$\sum Y = 0$$
$$\sum M = 0 \qquad (4.14)$$

onde X e Y são as componentes das forças aplicadas em relação aos eixos x e y, respectivamente, e M o módulo do momento das forças em relação a um ponto qualquer do plano.

Poderão ser usadas, nos problemas práticos, também como condições de equilíbrio, três equações de momentos, desde que relativas a pontos não pertencentes à mesma reta.

$$\sum M_A = 0$$
$$\sum M_B = 0$$
$$\sum M_C = 0 \qquad \text{com A, B e C não colineares} \qquad (4.15)$$

Ainda poderão ser utilizadas uma equação de projeção e duas de momen-

tos, desde que relativas a dois pontos cuja reta, definida por eles, não seja perpendicular ao eixo usado para a equação de projeção

$$\begin{array}{lll} \sum X = 0 & & \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 & \text{ou} & \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 & & \sum M_B = 0 \end{array} \qquad (4.16)$$

4.5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

A técnica para o cálculo de reações consiste em "isolar", inicialmente, a estrutura da terra, mediante a retirada dos apoios, aplicando-se na direção dos movimentos restringidos os esforços incógnitos correspondentes.

Esta etapa é geralmente conhecida como diagrama de corpo livre da estrutura. Havendo vínculos internos, os esforços correspondentes a eles não serão considerados, pois correspondem a forças internas de interação entre os elementos estruturais.

Como as equações de equilíbrio disponíveis, geralmente, são suficientes, determinam-se as incógnitas. Para a determinação das reações nos vínculos internos, "isolam-se" os elementos estruturais, com todas as forças aplicadas, incluindo-se as incógnitas já calculadas. Nesta segunda etapa, os esforços correspondentes aos vínculos internos serão considerados. Não se deve esquecer que, na análise das partes, eles aparecem aos pares e com sentidos opostos.

Para cada elemento da estrutura, "isolado", é aplicável um dos três grupos de equações (4.14), (4.15) ou (4.16).

Calculadas todas as reações externas e internas, procede-se à terceira e última etapa, que consiste na representação do diagrama de corpo livre de cada parte da estrutura, com as cargas aplicadas e as respectivas reações de apoio, aplicadas nos pontos correspondentes aos vínculos e desenhadas com seu sentido correto.

4.6 - VIGAS

As vigas horizontais, carregadas transversalmente aos seus eixos, não necessitam de vínculos que impeçam deslocamentos na direção axial. Estaticamente pode-se dizer que os vínculos não introduzem esforços na direção do eixo da viga. Serão aplicáveis, portanto, apenas duas das três equações de equilíbrio.

Convencionaremos como positivas as reações verticais que atuam de baixo para cima e as reações horizontais que atuam da esquerda para a direita.

4.6.1 - Exemplo 1 - Viga simplesmente apoiada

Calcular as reações de apoio para a viga da Fig. 4.2, submetida aos seguintes carregamentos

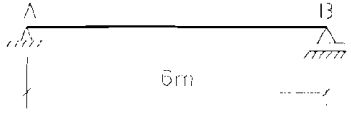


Figura 4.2

a) carga concentrada de 60kN aplicada a 4m da extremidade A;

b) carga uniformemente distribuída de 3kN/m por todo o vão;

c) carga parcialmente distribuída, de 6kN/m, a partir do primeiro terço do vão;

d) carga distribuída, triangular, sobre todo o vão, com 6kN/m na extremidade B;

e) momento externo, de 30kNm no sentido horário, aplicado a 2m da extremidade A.

Resolução

a) Carga concentrada

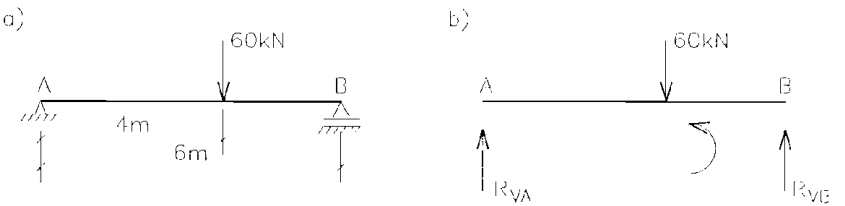


Figura 4.3

A Fig. 4.3.a mostra a viga, carregada, vinculada por um apoio fixo e um móvel. Estes vínculos impedem, apenas, a tendência da viga em deslocar-se verticalmente.

A Fig. 4.3.b mostra a viga "isolada" com as reações correspondentes aos vínculos, supostas no sentido positivo.

Utilizando o grupo de equações (4.15) e adotando como sentido positivo para os momentos a tendência das forças em provocar rotação anti-horária, obtemos, com

$$\sum M_A = 0$$

$$6 \text{ x } R_{VB} - 4 \text{ x } 60 + 0 \text{ x } R_{VA} = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 40\text{kN}$$

com

$$\sum M_B = 0$$

$$-6 \text{ x } R_{VA} + 2 \text{ x } 60 + 0 \text{ x } R_{VB} = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 20\text{kN}$$

Os sinais positivos encontrados para as reações R_{VA} e R_{VB} significam que os sentidos arbitrados para as forças foram corretos.

A Fig. 4.4 mostra o diagrama de corpo livre da estrutura sob a ação das forças ativas e reativas.

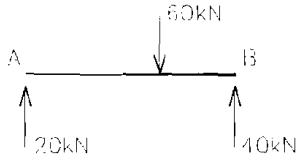


Figura 4.4

b) Carga uniformemente distribuída

A Fig. 4.5.b mostra a resultante do carregamento representada por uma seta interrompida, de módulo igual à área definida pelo carregamento e com a linha de ação passando pelo centro de gravidade da área. O sentido positivo para o cálculo dos momentos está indicado ao lado da figura.

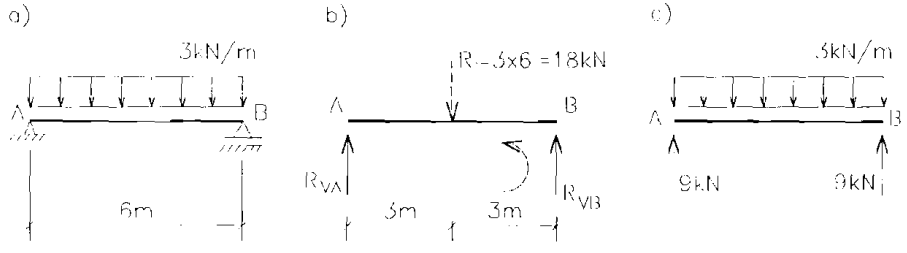


Figura 4.5

Com

$$\sum M_A = 0$$

$$6 \times R_{VB} - 3 \times 18 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 9kN$$

com

$$\sum M_B = 0$$

$$-6 \times R_{VA} + 3 \times 18 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 9kN$$

O resultado obtido, $R_{VA} = R_{VB} = 9kN$, é óbvio, tendo em vista a simetria do carregamento. A Fig. 4.5.c mostra a viga em equilíbrio sob a ação das cargas aplicadas e das reações de apoio.

c) Carga parcialmente distribuída

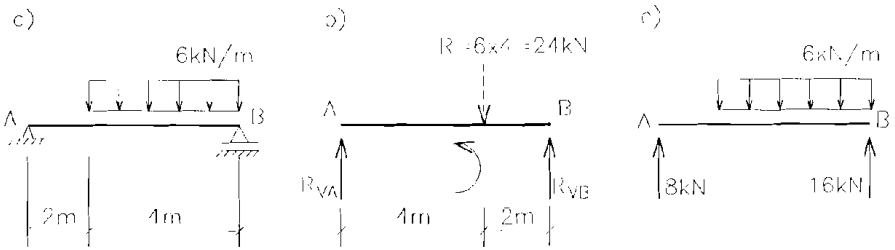


Figura 4.6

A Fig. 4.6.a mostra o carregamento aplicado na viga simplesmente apoiada. Módulo, direção, sentido e linha de ação da resultante do carregamento estão representados na viga "isolada" da Fig. 4.6.b.

Com

$$\sum M_A = 0$$

$$6 \times R_{VB} - 4 \times 24 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 16kN$$

com

$$\sum M_B = 0$$

$$-6 \times R_{VA} + 2 \times 24 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 8kN$$

A montagem dos resultados é mostrada na Fig. 4.6.c.

d) Carga distribuída triangular

Com

$$\sum M_A = 0$$

$6 \times R_{VB} - 4 \times 18 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 12kN$

com

$\sum M_B = 0$

$-6 \times R_{VA} + 2 \times 18 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 6kN$

Os resultados do cálculo das reações são apresentados na Fig. 4.7.c.

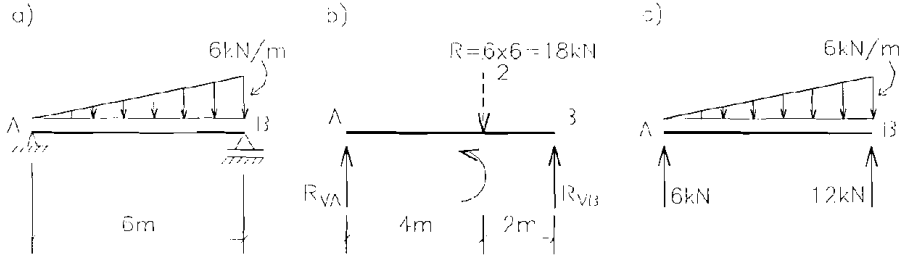


Figura 4.7

e) Carga momento

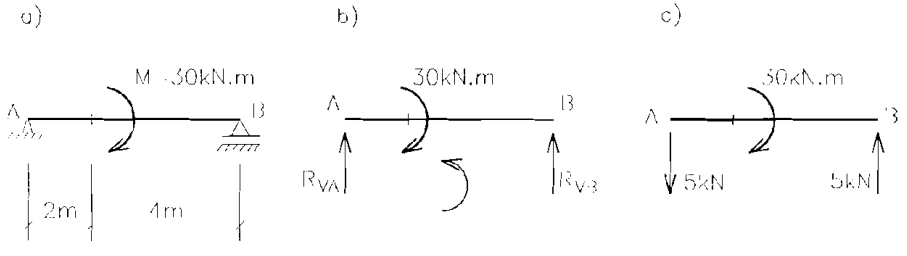


Figura 4.8

O momento aplicado é equivalente a um binário e como tal é um vetor livre, como visto no Capítulo I, podendo, portanto, ser transportado para qualquer ponto da viga.

Com

$$\sum M_A = 0$$

$$6 \times R_{VB} - 30 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 5kN$$

com

$$\sum M_B = 0$$

$$-6 \times R_{VA} - 30 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = -5kN$$

O sinal negativo de R_{VA} indica que o sentido correto da reação é oposto ao inicialmente arbitrado.

Uma solução mais refinada seria obtida observando-se que, para equilibrar o momento aplicado na viga, as reações verticais teriam que ser equivalentes a um binário, de mesma intensidade e sentido contrário, Fig. 4.8.c.

4.6.2 - Exemplo 2 - Viga engastada ou em balanço

Calcular as reações para os carregamentos aplicados na viga em balanço da Fig. 4.9.

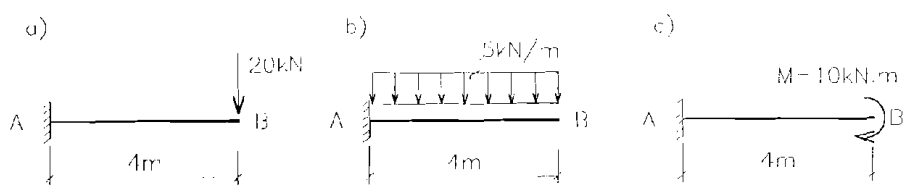


Figura 4.9

Resolução

a) Carga concentrada

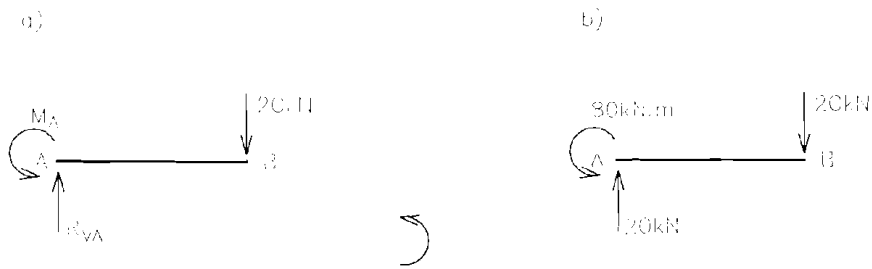


Figura 4.10

O engastamento retira a liberdade de haver rotação e translação em A. Lembrando que nas vigas carregadas transversalmente os vínculos não introduzem esforços na direção do eixo, podemos, então, desenhar o diagrama de corpo livre conforme a Fig. 4.10.a.

M_A é a reação que se opõe à rotação em A e R_{VA} é a reação que se opõe ao deslocamento.

Usaremos o grupo de equações de equilíbrio expressa em (4.14), assim, com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VA} - 20 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 20kN$$

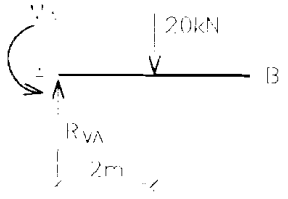
com

$$\sum M_A = 0$$

$$-4 \times 20 + M_A = 0 \quad \therefore \quad M_A = 80kNm$$

Os sinais positivos indicam que os sentidos arbitrados estão corretos. Note-se que o momento, M_A = 80kN.m, se opõe ao binário formado pela carga aplicada e a reação vertical. As reações estão mostradas na Fig. 4.10.b.

b) Carga distribuída



A Fig. 4.11.a mostra a viga "isolada" com a carga aplicada substituída pela resultante. A Fig. 4.11.b mostra as reações, obtidas à semelhança de 4.6.2.a.

c) Carga momento

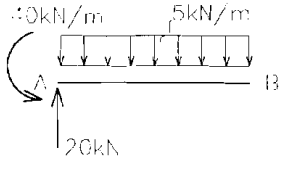


Figura 4.11

O carregamento é agora, apenas, um momento aplicado em B. Como não existem cargas verticais aplicadas, a reação R_{VA}, Fig. 4.12.a, deve ser nula, como se conclui com a aplicação das equações (4.14).

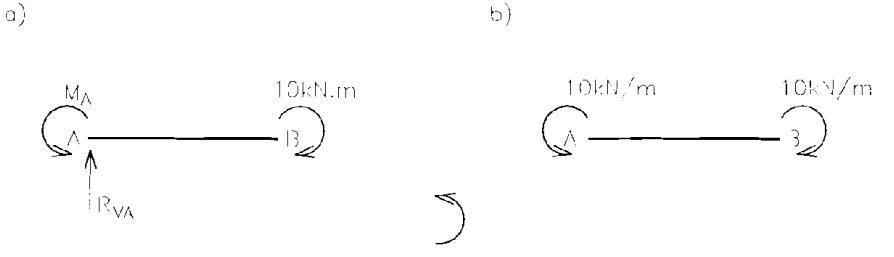


Figura 4.12

Com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VA} + 0 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 0$$

com

$$\sum M_A = 0$$

$$-10 + M_A = 0 \quad \therefore \quad M_A = 10\text{kNm}$$

4.6.3 - Exemplo 3 - Viga simplesmente apoiada, com balanço

Calcular as reaçõcs para os carregamentos aplicados na viga da Fig. 4.13.

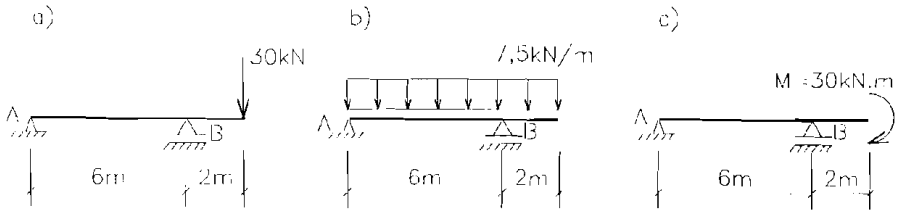


Figura 4.13

Resolução

a) Carga concentrada

Neste exemplo, como nos anteriores, as equações necessárias para o cálculo das reações são duas. Poderão ser utilizadas as equações (4.14) ou as (4.15).

A Fig. 4.14.a mostra a viga "isolada" e em equilíbrio sob a ação da carga aplicada e das reações de apoio.

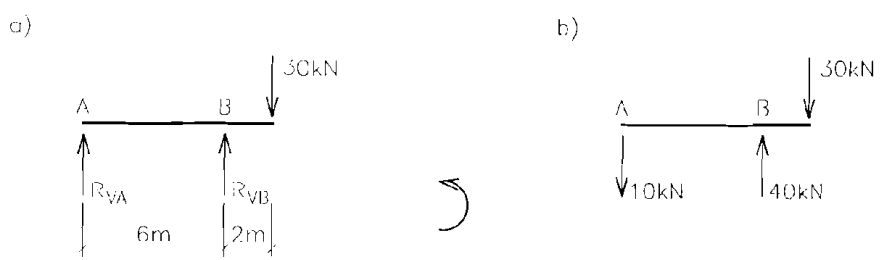


Figura 4.14

Primeira solução - (4.14)

Com

$$\sum M_A = 0$$

$$-8 \times 30 + 6 \times R_{VB} = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 40kN$$

com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VA} + R_{VB} - 30 = 0$$

substituindo-se o valor de R_{VB}, temos

$$R_{VA} + 40 - 30 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = -10kN$$

O sinal negativo de R_{VA} indica sentido oposto ao inicialmente arbitrado.

Segunda solução - (4.15)

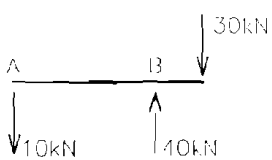


Figura 4.14.b

Com

$$\sum M_A = 0$$

$$-8 \times 30 + 6 \times R_{VB} = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 40kN$$

com

$$\sum M_B = 0$$

$$-2 \times 30 - 6 \times R_{VB} = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = -10kN$$

A Fig. 4.14.b mostra as reações com seus sentidos corretos. A decisão de utilizar um ou outro grupo de equações fica a cargo do leitor.

b) Carga distribuída

Substituindo-se o carregamento aplicado pela resultante, observa-se que a linha de ação passa entre os apoios, Fig. 4.15.a.

Para efeito apenas do cálculo das reações, o balanço não contribui e o problema é semelhante ao exemplo 4.6.1, item a.

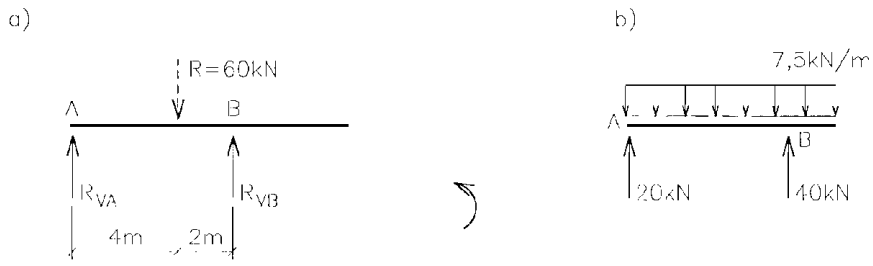


Figura 4.15

Com

$$\sum M_A = 0$$

$$6 \times R_{VB} - 4 \times 60 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 40kN$$

com

$$\sum M_B = 0$$

$$-6 \times R_{VA} + 2 \times 60 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 20kN$$

Observar que a utilização das equações (4.14) torna mais simples a solução.

c) Carga momento

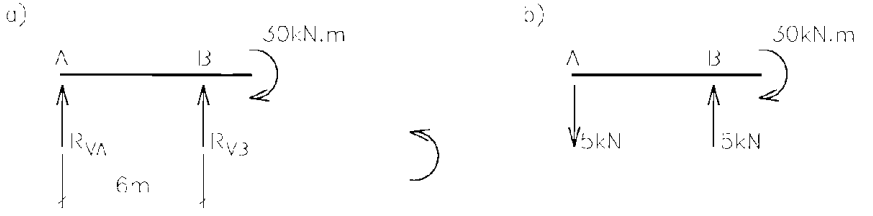


Figura 4.16

Como no exemplo 4.6.1, item e, o momento aplicado pode ser transportado para qualquer ponto da viga. A solução tem, portanto, encaminhamento semelhante.

Note-se que sendo a viga bi-apoiada, com ou sem balanço, as reações de apoio, independentemente do ponto de aplicação da carga momento, serão sempre equivalentes a um binário que se opõe ao carregamento.

4.6.4 - Exemplo 4 - Viga Gerber

As vigas do tipo Gerber são estruturas apropriadas para utilização de pré-moldados na construção civil. A viga Gerber pode ser definida, simplificadamente, como um conjunto de vigas onde uma ou mais vigas têm estabilidade própria, com as outras apoiadas sobre elas. A Fig. 4.17 mostra alguns exemplos.

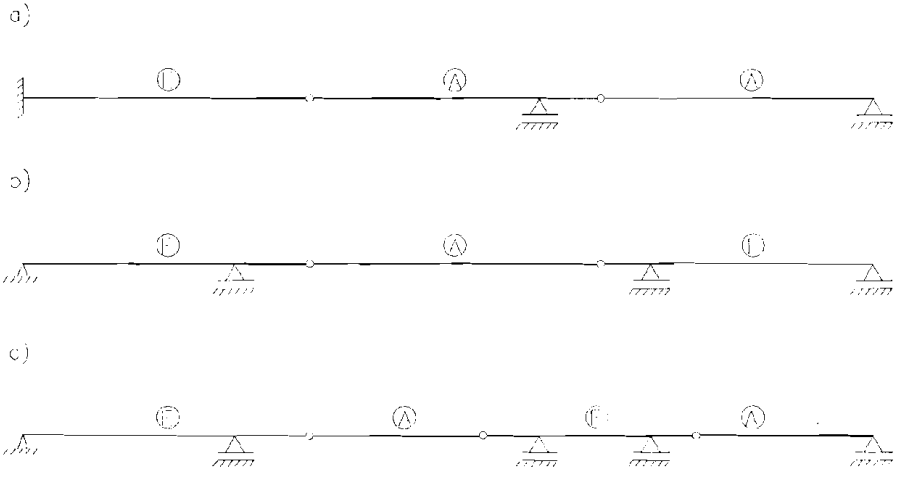


Figura 4.17

A letra E indica as vigas que têm estabilidade própria e a letra A aquelas que são apoiadas, ou, ainda, que adquirem estabilidade através do apoio. As vigas que compõem o conjunto são, exclusivamente, vigas engastadas, vigas bi-apoiadas e vigas bi-apoiadas com extremidades em balanço. Os vínculos entre as vigas são articulações que não impedem rotação relativa entre elas, impedindo apenas os deslocamentos relativos. As reações nos vínculos internos são, portanto, forças que se opõem aos deslocamentos, sendo nulas as reações momentos.

A Fig. 4.18.a mostra uma viga Gerber sob ação de cargas externas. Determinar as reações de apoio externas e internas.

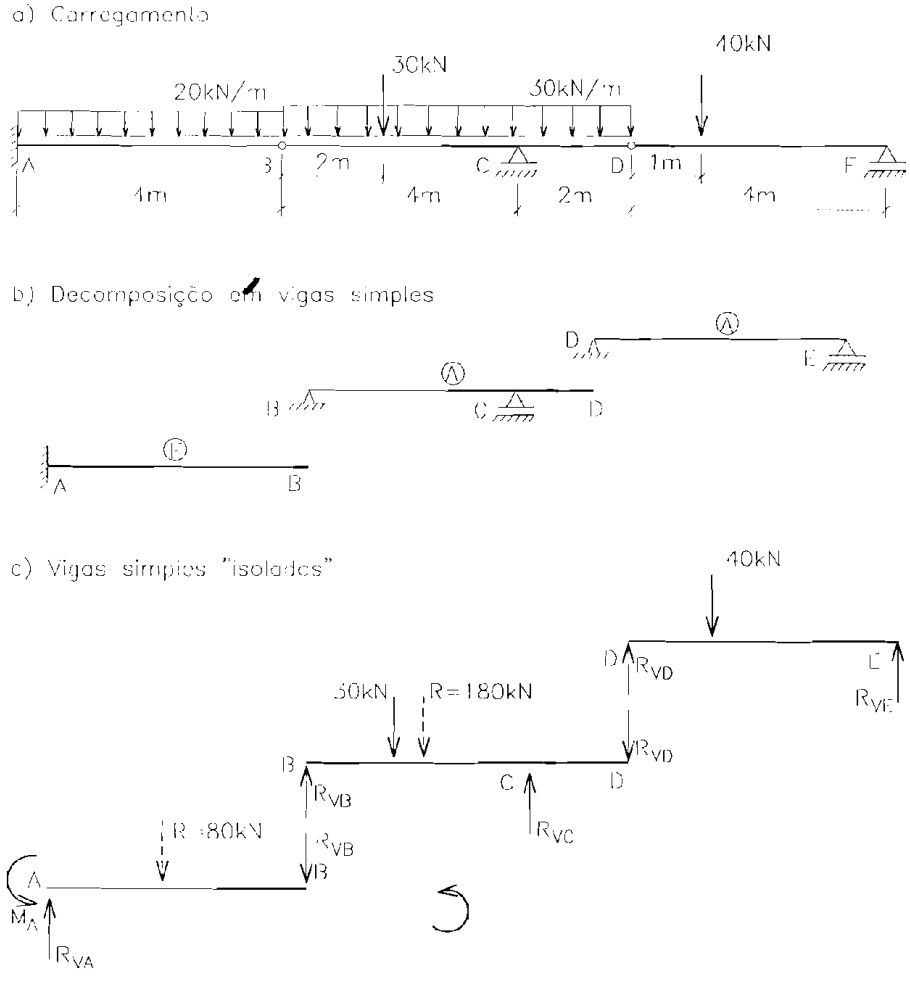


Figura 4.18

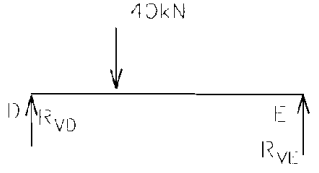
Resolução

A Fig. 4.18.b mostra a viga Gerber decomposta em vigas simples, objeto de cálculo de reações nos exemplos anteriores.

Como visto anteriormente, para cada viga simples existem duas equações

de equilíbrio relevantes aplicáveis. O cálculo das reações deve ser, então, iniciado pelas vigas apoiadas, devendo, em seguida, ser calculadas as reações nas vigas que têm estabilidade própria.

No exemplo, iniciaremos pela viga apoiada D-E.



Detalhe da Fig. 4.18.c

Viga D-E

Com

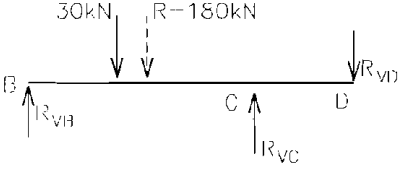
$$\sum M_D = 0$$

$$4 \text{ x } R_{VE} - 1 \text{ x } 40 = 0 \quad \therefore \quad R_{VE} = 10\text{kN}$$

com

$$\sum M_E = 0$$

$$-4 \text{ x } R_{VD} + 3 \text{ x } 40 = 0 \quad \therefore \quad R_{VD} = 30\text{kN}$$



Detalhe da Fig. 4.18.c

Viga B-D

Com

$$\sum M_B = 0$$

$$-6 \text{ x } R_{VD} + 4 \text{ x } R_{VC} - 3 \text{ x } 180 - 2 \text{ x } 30 = 0$$

substituindo-se o valor de R_{VD}

$$-180 + 4 \text{ x } R_{VC} - 540 - 60 = 0 \quad \therefore \quad R_{VC} = 195\text{kN}$$

Com

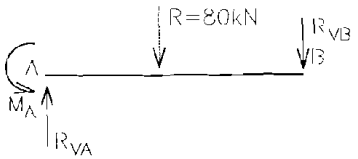
$$\sum Y = 0$$

$$R_{VB} - 30 - 180 + R_{VC} - R_{VD} = 0$$

substituindo-se os valores de R_{VC} e R_{VD}

$$R_{VB} - 30 - 180 + 195 - 30 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 45\text{kN}$$

Viga A-B



Detalhe da Fig. 4.18.c

Com

$$\sum M_A = 0$$

$$-4 \times R_{VB} - 2 \times 80 + M_A = 0$$

substituindo-se o valor de R_{VB}

$$-180 - 160 + M_A = 0 \quad \therefore \quad M_A = 340\text{kNm}$$

Com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VA} - 80 - R_{VB} = 0$$

substituindo-se o valor de R_{VB}

$$R_{VA} - 80 - 45 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 125\text{kN}$$

Os sinais positivos confirmam os sentidos inicialmente arbitrados. A Fig. 4.19 mostra a viga decomposta, com as reações obtidas nos sentidos corretos.

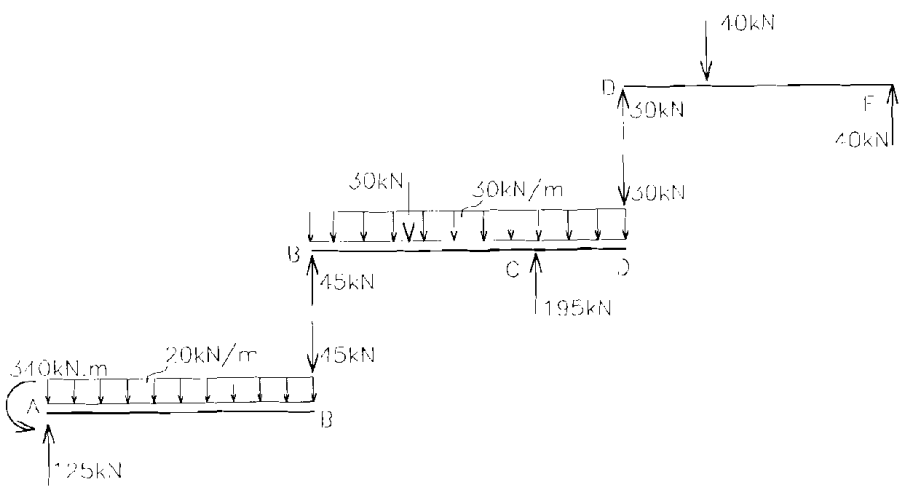


Figura 4.19

4.7 - PÓRTICOS

Pórticos planos são estruturas lineares, coplanares com as cargas ativas e reativas. Os elementos estruturais geralmente são unidos por nós rígidos, podendo existir articulações entre eles.

O pórtico isostático de nós rígidos é um quadro aberto, podendo ser considerado como uma única chapa. Necessita de três barras vinculares não concorrentes para restringir todos os movimentos no plano. Para o cálculo das reações de apoio, são necessárias, portanto, três equações de equilíbrio.

4.7.1 - Exemplo 1 - Pórtico simples

Determinar as reações de apoio para o carregamento apresentado na Fig. 4.20.a.

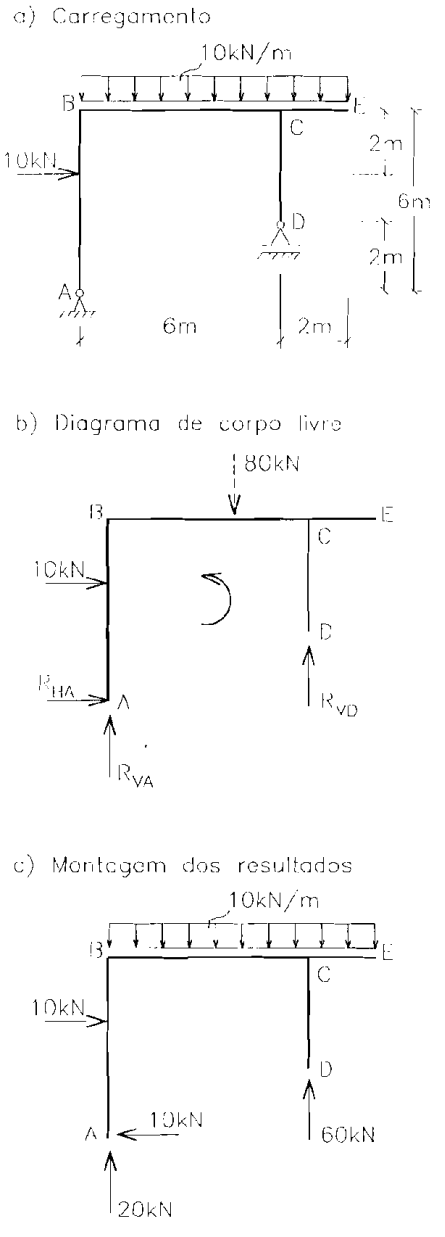


Figura 4.20

Resolução

$$\text{Com} \quad \sum M_A = 0$$

$$6 \times R_{VD} - 4 \times 80 - 10 \times 4 = 0 \quad \therefore \quad R_{VD} = 60\text{kN}$$

$$\text{com} \quad \sum Y = 0$$

$$R_{VA} + R_{VD} - 80 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 20\text{kN}$$

$$\text{com} \quad \sum X = 0$$

$$R_{HA} + 10 = 0 \quad \therefore \quad R_{HA} = -10\text{kN}$$

O sinal negativo de R_{HA} indica sentido oposto ao arbitrado inicialmente.

4.7.2 - Exemplo 2 - Pórtico em balanço

Determinar as reações de apoio para o carregamento da Fig. 4.21.a.

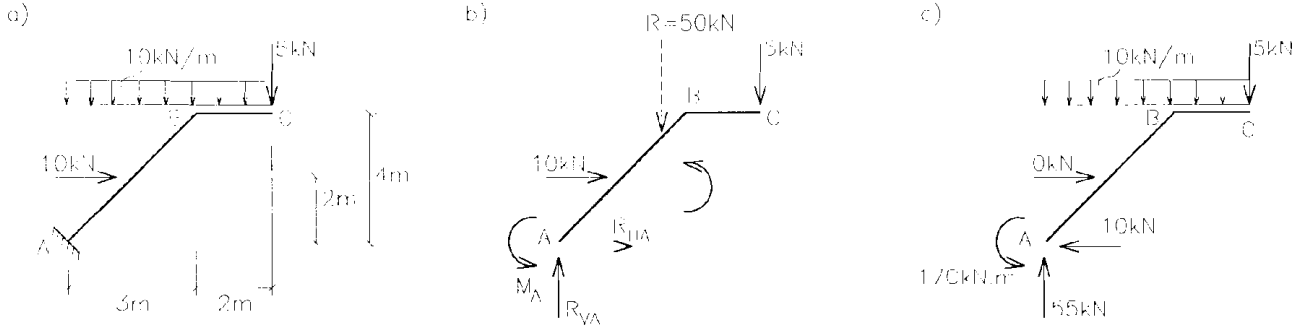


Figura 4.21

Resolução

Com $\sum M_A = 0$

$-5 \times 5 - 2{,}5 \times 50 - 2 \times 10 + M_A = 0 \quad \therefore \quad M_A = 170\text{kNm}$

com $\sum X = 0$

$R_{HA} + 10 = 0 \quad \therefore \quad R_{HA} = -10\text{kN}$

com $\sum Y = 0$

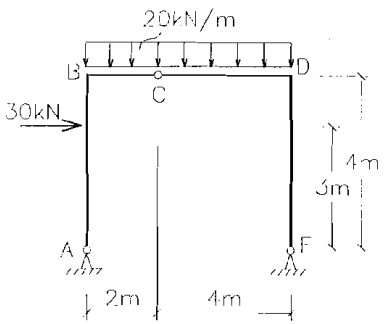
$R_{VA} - 50 - 5 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 55\text{kN}$

A Fig. 4.21.c mostra os resultados encontrados nos sentidos corretos.

4.7.3 - Exemplo 3 - Pórtico tri-articulado

Calcular as reações de apoio, externas e internas, devidas à ação do carregamento na Fig. 4.22.a.

a)



b)

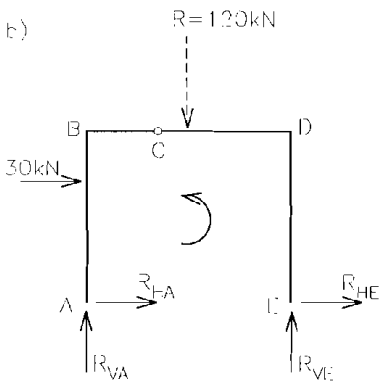


Figura 4.22

Obs.: A resultante da carga distribuída no trecho CD é igual a 80kN

As articulações externas — apoios fixos — do pórtico retiram quatro graus de mobilidade da estrutura, permitindo apenas rotações em A e E. Temos, neste caso, quatro reações externas de apoio, uma a mais que o número disponível de equações de equilíbrio, Fig. 4.22.b.

A quarta equação, necessária para o cálculo, pode ser obtida através da condição de nulidade da reação interna momento, na articulação C, ou seja, $M_C = 0$.

Resolução

Com

$$\sum M_A = 0$$

$$6 \times R_{VE} - 3 \times 120 - 3 \times 30 = 0 \quad \therefore \quad R_{VE} = 75kN$$

com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VA} + R_{VE} - 120 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 45kN$$

com $M_C = 0$ (calculado com as forças aplicadas na chapa CDE)

$$M_C = 4 \times R_{VE} + 4 \times R_{HE} - 2 \times 80 = 0 \quad \therefore \quad R_{HE} = -35kN$$

com

$$\sum X = 0$$

$$30 + R_{HA} + R_{HE} = 0 \quad \therefore \quad R_{HA} = 5kN$$

Para determinar as reações internas na articulação C basta "isolar" uma das chapas e com as duas equações de projeção calcular os esforços.

"Isolando" a chapa CDE, Fig. 4.23.a, podemos escrever

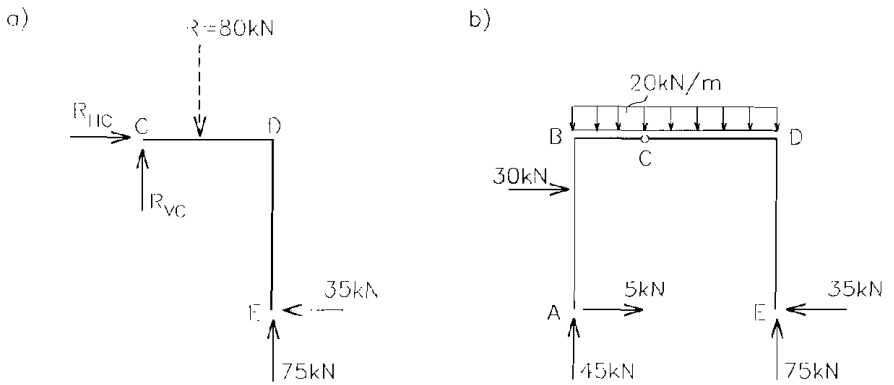


Figura 4.23

com

$$\sum X = 0$$

$$R_{HC} - 35 = 0 \quad \therefore \quad R_{HC} = 35kN$$

com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VC} + 75 - 80 = 0 \quad \therefore \quad R_{VC} = 5kN$$

Como as reações internas aparecem aos pares, com sentidos opostos, na chapa ABC teremos as mesmas reações com os sentidos contrários.

A Fig. 4.23.b apresenta os resultados encontrados. Observar que as reações internas foram omitidas, por ter sido considerada toda a estrutura na montagem dos resultados.

4.7.4 - Exemplo 4 - Pórtico atirantado

Determinar as reações externas e internas para o carregamento aplicado na estrutura da Fig. 4.24.a.

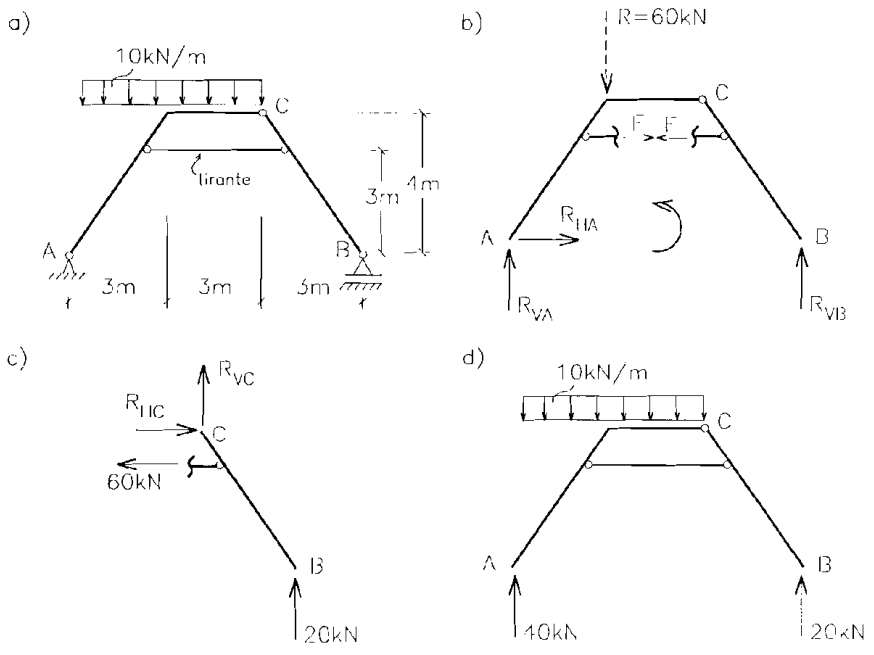


Figura 4.24

Resolução

A Fig. 4.24.b mostra o pórtico "isolado" e a ação do tirante sobre as chapas AC e CB. A reação F no tirante é interna e aparece aos pares com sentidos opostos.

Utilizando-se as três equações de equilíbrio disponíveis

com

$$\sum M_A = 0$$

$$9 \times R_{VB} + 3 \times F - 3 \times 60 - 3 \times F = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 20kN$$

com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VA} + R_{VB} - 60 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 40kN$$

com

$$\sum X = 0$$

$$R_{HA} + F - F = 0 \quad \therefore \quad R_{HA} = 0$$

A incógnita F é determinada com a condição de não existência de reação interna, momento, na articulação C, ou seja, $M_C = 0$.

Com $M_C = 0$, calculado com as forças aplicadas em CB,

$$M_C = 3 \text{ x } R_{VB} - 1 \text{ x } F = 0 \quad \therefore \quad F = 60kN$$

As reações internas na articulação, R_{VC} e R_{HC}, são determinadas com as equações de equilíbrio, de projeção na chapa CB "isolada", Fig. 4.24.c.

Com

$$\sum X = 0$$

$$R_{HC} = 60kN$$

com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VC} = -20kN$$

A Fig. 4.24.d mostra os resultados encontrados, onde se pode notar que a força no tirante e as reações na articulação não foram consideradas por serem internas.

4.8 - ARCOS

Arcos são estruturas planas com elementos estruturais de eixos, em geral curvos, apropriadas para vencer grandes vãos. Como nos pórticos, os eixos são

coplanares com as cargas. O único arco isostático de interesse, do ponto de vista prático, é o arco tri-articulado.

4.8.1 - Exemplo 1 - Arco tri-articulado

Calcular as reações nas articulações externas para o carregamento dado na Fig. 4.25.a.

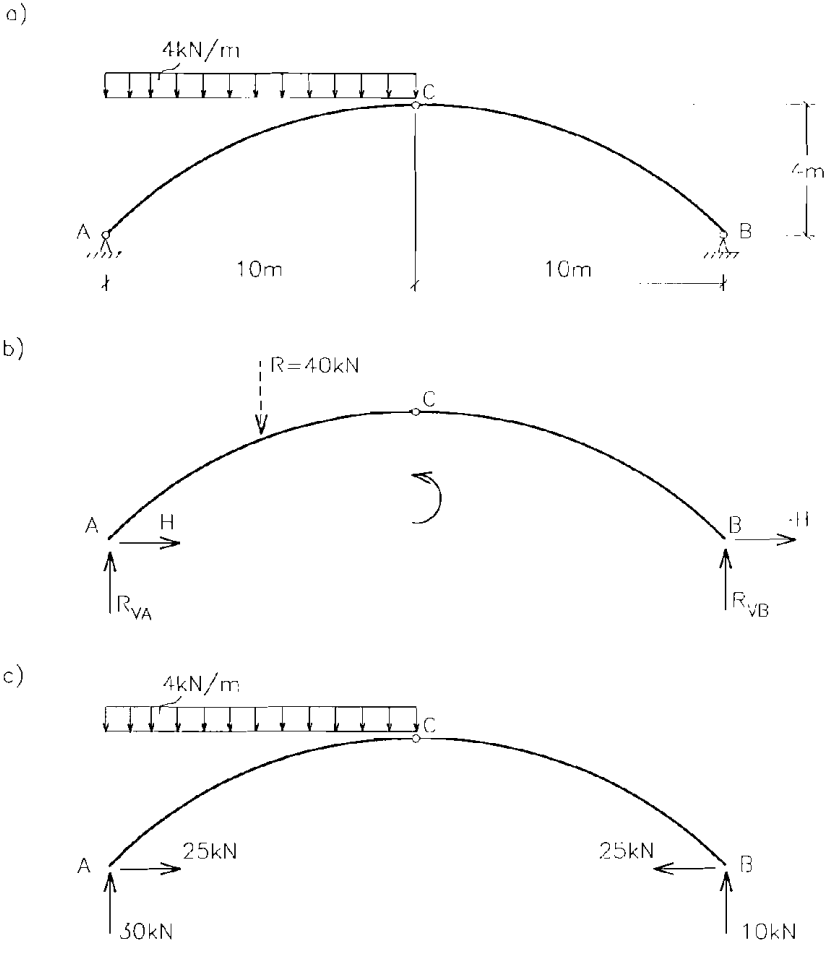


Figura 4.25

Resolução

Nos arcos com apoios articulados sujeitos apenas a cargas verticais as reações horizontais de apoio são iguais. São chamadas de empuxo e em geral são designadas pela letra H, Fig. 4.25.b. São portanto três as reações incógnitas e duas as equações de equilíbrio disponíveis. A terceira equação é obtida com a condição $M_C = 0$.

Com

$\sum M_A = 0$

$20 \times R_{VB} - 5 \times 40 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 10kN$

com

$\sum Y = 0$

$R_{VA} + R_{VB} - 40 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 30kN$

com

$M_C = 0$ (considerando-se as forças na chapa CB)

$10 \times R_{VB} - 4 \times H = 0 \quad \therefore \quad H = 25kN$

4.9 - ESTRUTURAS PLANAS SUJEITAS A CARGAS PERPENDICULARES AO SEU PLANO

Estruturas com este comportamento são chamadas grelhas. Ao contrário dos pórticos, as cargas aplicadas nas grelhas provocam tendência de rotação em relação a eixos coplanares com a estrutura e de deslocamento na direção das cargas.

Os vínculos devem, necessariamente, se opor a estas tendências. Para que uma grelha, formada por apenas uma chapa aberta, tenha sua posição determinada, são necessárias três barras vinculares, normais ao plano da estrutura e não coplanares.

Os apoios e vínculos comumente utilizados nas grelhas, com suas respectivas equivalências em barras vinculares, são mostrados na Fig. 4.26.

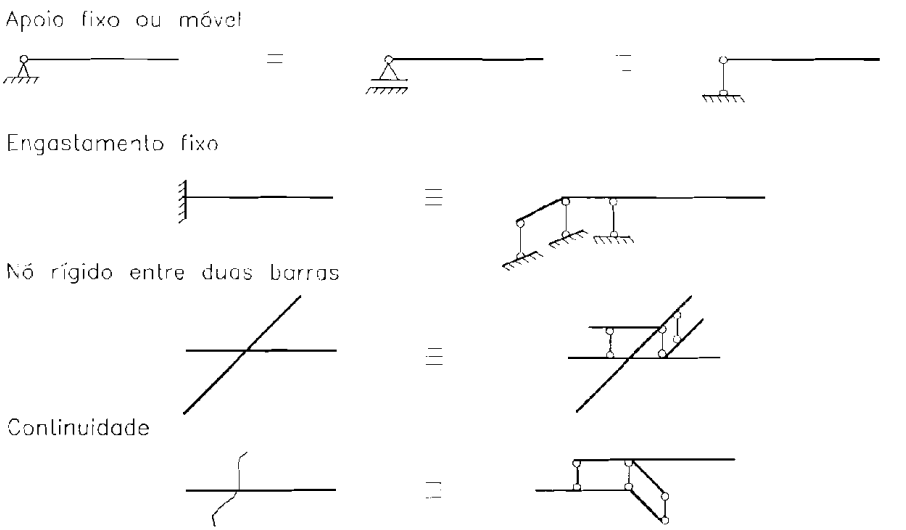


Figura 4.26

Geometricamente, podemos classificar as grelhas relativamente à função geométrica de seus elementos estruturais. Sendo b o número de barras vinculares e c o número de chapas, temos

b < 3c, grelha indeterminada ou móvel

b = 3c, grelha determinada

b > 3c, grelha super-determinada

Podemos, do ponto de vista estático, estabelecer a classificação das grelhas relativamente à função estática de seus elementos

b < 3c, grelha hipostática

b = 3c, grelha isostática

b > 3c, grelha hiperestática

Nesta publicação serão tratadas apenas as grelhas isostáticas, ou melhor, aquelas cujas deformações não precisam ser consideradas para sua completa análise estática.

4.9.1 - Exemplo 1 - Grelha engastada e livre

Determinar as reações de apoio para o carregamento e estrutura da Fig. 4.27.a. Todas as barras são ortogonais entre si.

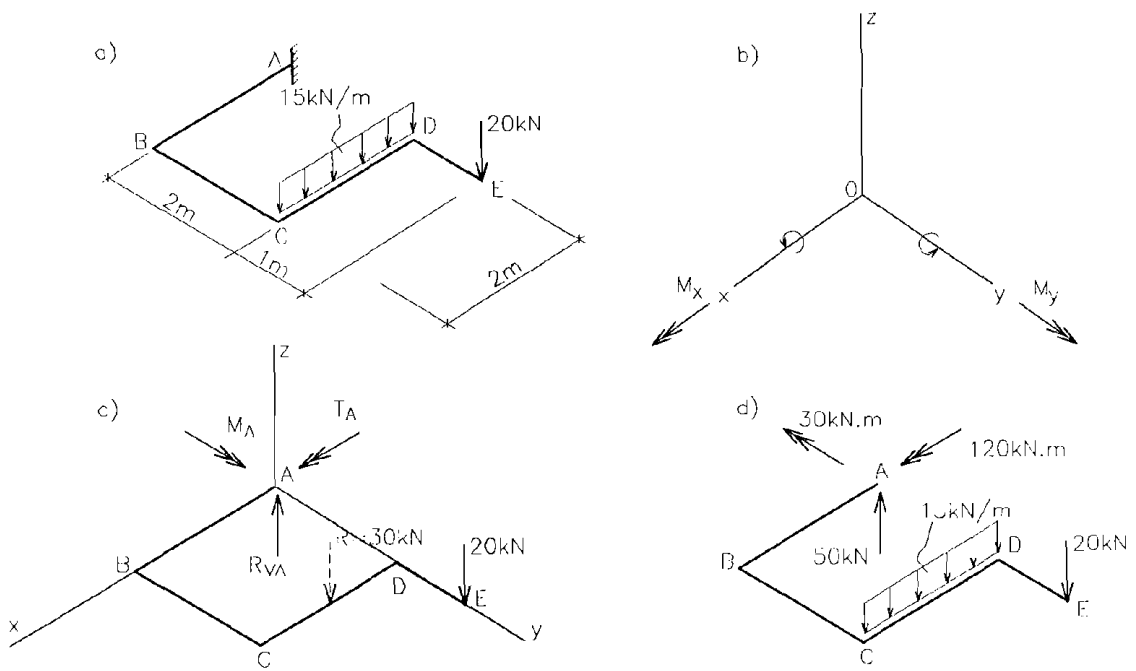


Figura 4.27

Resolução

A Fig. 4.27.a mostra a estrutura coplanar com os eixos cartesianos x e y, mostrados na Fig. 4.27.b. As cargas aplicadas são paralelas ao eixo z. A tendência de movimento, provocada pelas cargas, é uma rotação em torno de x, uma rotação em torno de y e um deslocamento na direção de z.

Das seis condições de equilíbrio de um corpo submetido a um sistema de forças quaisquer, três não são relevantes, pois não identificam o estado de equilíbrio estável da estrutura,

$$\sum X = 0$$
$$\sum Y = 0$$
$$\sum M_z = 0 \qquad (4.17)$$

As três condições restantes são suficientes para a solução do problema

$$\sum Z = 0$$
$$\sum M_x = 0$$
$$\sum M_y = 0 \qquad (4.18)$$

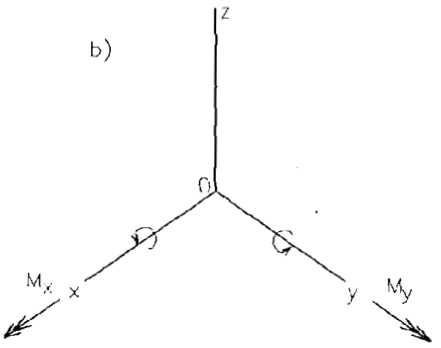


Figura 4.27.b

Sendo a primeira uma equação de projeção de forças em uma direção paralela a z e as duas últimas, equações de momentos em relação a eixos paralelos a x e y, respectivamente.

Supondo o sentido destrorso de rotação dos eixos como positivo, Fig. 4.27.b, segue-se

com

$$\sum M_x = 0$$
$$-3 \times 20 - 2 \times 30 + T_A = 0 \quad \therefore \quad T_A = 120\text{kNm}$$

com

$$\sum M_y = 0$$
$$0 \times 20 - 1 \times 30 + 0 \times R_{VA} + M_A = 0 \quad \therefore \quad M_A = -30\text{kNm}$$

com

$$\sum Z = 0$$
$$R_{VA} - 30 - 20 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 50\text{kN}$$

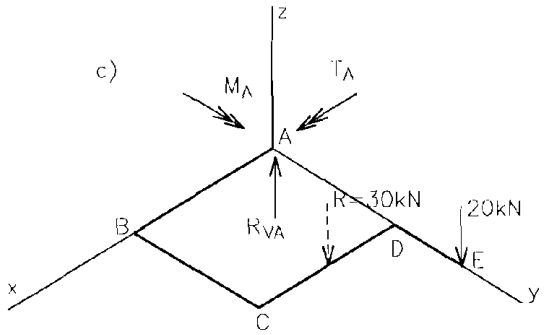


Figura 4.27.c

O sinal negativo de M_A indica sentido oposto ao inicialmente arbitrado. A Fig. 4.27.d mostra os resultados obtidos, com os sentidos corretos.

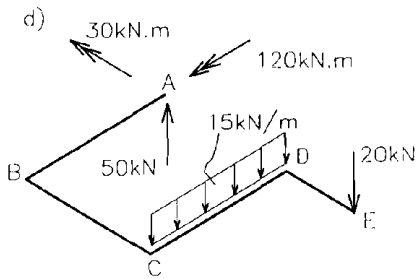


Figura 4.27.d

4.9.2 - Exemplo 2 - Grelha tri-apoiada

Calcular as reações de apoio para o carregamento da Fig. 4.28.a. As barras são ortogonais entre si.

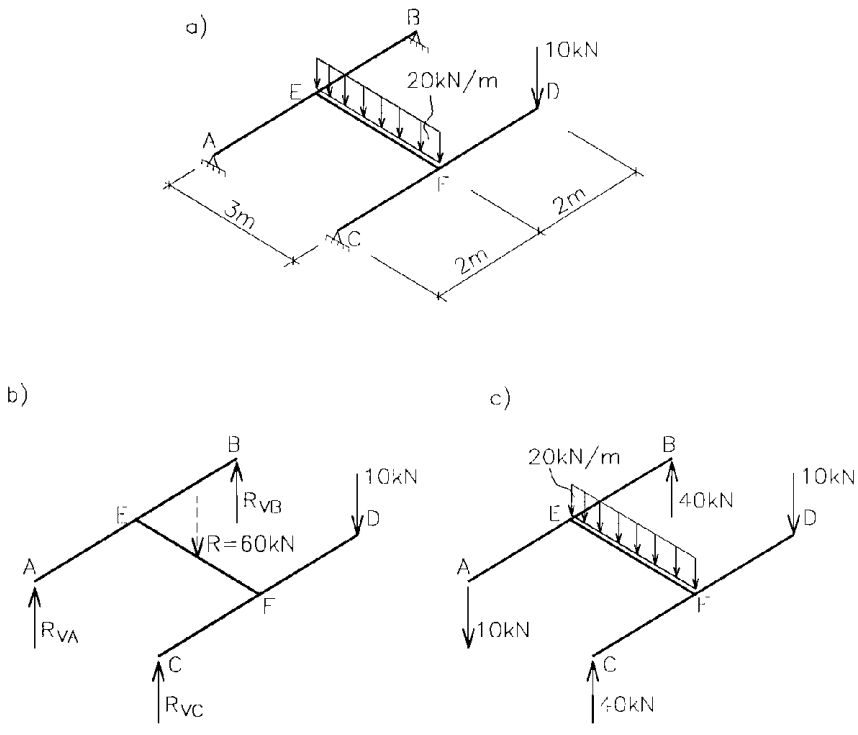


Figura 4.28

Resolução

As equações de equilíbrio de momentos serão tomadas em relação aos eixos que passam por $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$:

com $\sum M_{eixo\ AB} = 0$

$-3 \times 10 + 3 \times R_{VC} - 1{,}5 \times 60 = 0 \quad \therefore \quad R_{VC} = 40kN$

com $\sum M_{eixo\ AC} = 0$

$4 \text{ x } R_{VB} - 2 \text{ x } 60 - 4 \text{ x } 10 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 40kN$

com

$\sum Z = 0$

$R_{VA} + R_{VB} + R_{VC} - 60 - 10 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = -10kN$

O sinal negativo de R_{VA} indica sentido contrário ao inicialmente arbitrado. A Fig. 4.28.c apresenta os resultados encontrados.

Para a solução do exemplo 4.9.2 poderiam ter sido utilizadas equações de equilíbrio de momentos, em relação a três eixos que não fossem concorrentes no mesmo ponto

$\sum M_{eixo\ AB} = 0$

$\sum M_{eixo\ AC} = 0$

$\sum M_{eixo\ BD} = 0$

ESFORÇOS SOLICITANTES EM ESTRUTURAS PLANAS ESTATICAMENTE DETERMINADAS

5.1 - GENERALIDADES

No Capítulo II definimos estrutura como sendo um elemento ou conjunto de elementos ligados entre si e externamente ao solo, compondo um sistema estável capaz de receber ações externas e encaminhá-las internamente até seus vínculos exteriores.

No Capítulo I, as forças foram classificadas em externas e internas. As forças internas foram definidas como originadas pela interação entre os pontos ou corpos que constituem o conjunto em análise.

As forças internas, originadas pela interação entre os corpos ou elementos componentes da estrutura, foram tratadas no capítulo anterior sob a forma de reações internas, originadas pelos vínculos internos da estrutura.

Neste capítulo estudaremos as forças internas originadas pela interação entre os pontos ou partículas que constituem os elementos componentes da estrutura. Nas estruturas isostáticas, a existência destas forças internas está condicionada à ação de cargas ativas.

Para evidenciar as forças internas é necessário separar o elemento estrutural em análise em duas partes, através de um plano de corte imaginário. Este procedimento é conhecido como método dos cortes ou método das seções.

5.2 - DEFINIÇÃO DOS ESFORÇOS INTERNOS OU ESFORÇOS SOLICITANTES

Para a definição dos esforços internos, a estrutura, ou parte dela, é considerada na sua posição indeformada, sendo suficiente considerar as condições de equilíbrio vistas anteriormente.

Consideremos o corpo sólido da Fig. 5.1.a. Seja aplicado a ele um carregamento externo $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n$, cujas condições de equilíbrio estejam satisfeitas. Através de um corte imaginário, por uma seção genérica S, pode-se supor o corpo separado em duas partes. Cada uma, separadamente, em geral não se encontra mais em equilíbrio. Este fato decorre da eliminação, pelo corte, das barras vinculares internas.

Como o corpo, como um todo, encontrava-se em equilíbrio antes de se efetuar o corte, conclui-se que as interações entre as partículas da seção à esquerda e as da seção à direita garantiam o equilíbrio das duas partes.

Estas interações podem ser interpretadas como sendo forças internas, transmitidas na seção do corte imaginário. Para cortes em seções diferentes, as forças internas transmitidas são, em geral, diferentes.

Para restabelecer o equilíbrio em cada uma das partes basta aplicar nas seções, à direita e à esquerda do corte, os sistemas de forças que representam a ação da parte esquerda sobre a direita e vice-versa.

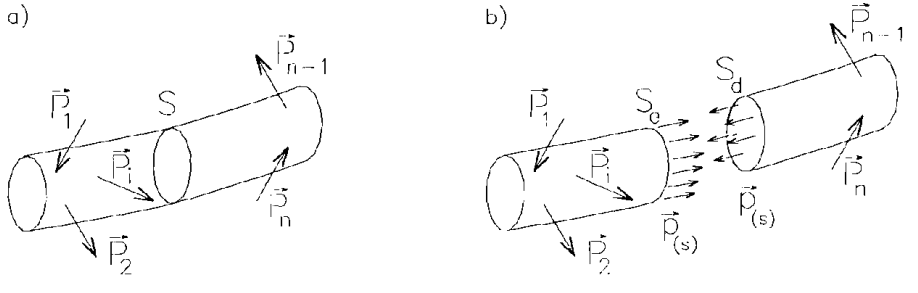


Figura 5.1

As forças internas, como já vimos, aparecem aos pares com sentidos opostos. Deste modo, a parte esquerda age sobre a parte direita, da mesma maneira que a direita age sobre a esquerda, Fig. 5.1.b.

As forças internas geralmente são distribuídas de forma complexa sobre as seções, mas, no entanto, as condições de equilíbrio são satisfeitas para cada parte separadamente. Isto significa que a resultante das forças internas, na seção genérica S, pode ser obtida pelas condições de equilíbrio, aplicadas tanto na parte esquerda quanto na direita do corte imaginário. Esta resultante é chamada esforço geral interno ou esforço geral solicitante na seção S.

No Capítulo I aprendemos a decompor, ou reduzir, um sistema de forças aplicadas em um mesmo corpo rígido a uma resultante $\vec{R}$ aplicada em um ponto, mais um binário $\vec{M}_R$. Com a ajuda desta propriedade da estática dos corpos rígidos podemos reduzir o sistema de forças internas aplicadas na seção do corte imaginário a uma resultante $\vec{R}$ aplicada no centro de gravidade da seção, mais um binário $\vec{M}_R$.

A Fig. 5.2.b mostra esta redução executada na seção à direita do corte. A resultante $\vec{R}$ e o binário $\vec{M}_R$ coincidem com a resultante e o momento resultante das forças à esquerda de S, Fig. 5.2.c.

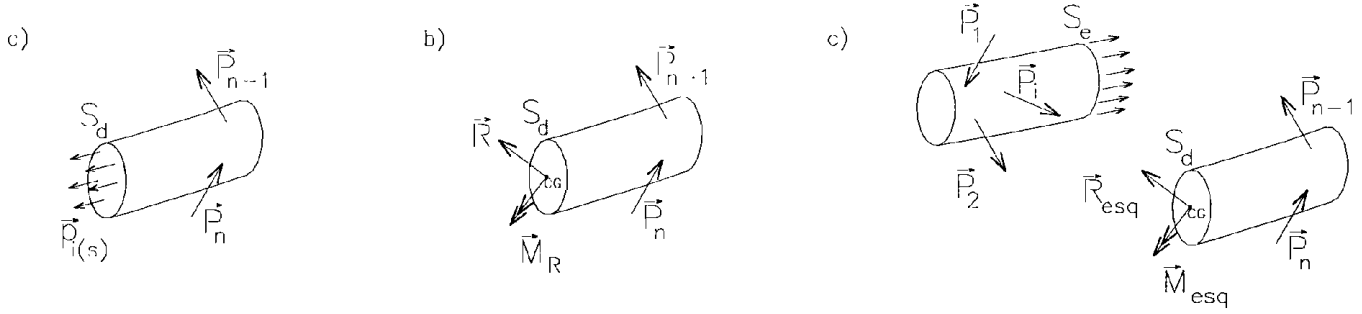


Figura 5.2

Esta última afirmativa pode ser demonstrada da seguinte forma:

Reduzindo o sistema de forças internas aplicadas na seção à direita do corte para o centro de gravidade da seção segue-se

$$\vec{R} = \sum \vec{p}_i(s)$$
$$\vec{M}_R = \sum \vec{m}_i(s) \qquad (5.1)$$

onde $\vec{m}_i(s)$ é o momento da força interna $\vec{p}_i(s)$ em relação ao centro de gravidade da seção.

Por outro lado, reduzindo o sistema de forças externas aplicado na parte esquerda do corpo para o centro de gravidade da seção à direita do corte, segue-se

$$\vec{R}_{esq} = \sum \vec{P}_{i\,esq}$$
$$\vec{M}_{R\,esq} = \sum \vec{M}_{i\,esq} \qquad (5.2)$$

onde $\vec{M}_{i\,esq}$ é o momento da força genérica aplicada na parte esquerda, em relação ao centro de gravidade da seção à direita do corte.

Como $\sum \vec{m}_i(s)$ e $\sum \vec{p}_i(s)$ representam a ação da parte esquerda do corpo sobre a parte direita, podemos escrever

$$\sum \vec{p}_i(s) = \sum \vec{P}_{i\,esq}$$
$$\sum \vec{m}_i(s) = \sum \vec{M}_{i\,esq} \qquad (5.3)$$

Comparando as equações (5.1) e (5.2) com (5.3), segue-se

$$\vec{R} = \vec{R}_{esq}$$
$$\vec{M}_R = \vec{M}_{R\,esq} \qquad (5.4)$$

Naturalmente, o mesmo raciocínio é válido para a seção à esquerda do corte imaginário. Desta forma, nesta seção teremos a resultante $\vec{R}$ e o momento resultante $\vec{M}_R$ nas mesmas direções e com sentidos opostos.

As componentes da resultante $\vec{R}$ e do momento resultante $\vec{M}_R$, que determinam o esforço geral solicitante, ficam situadas na tangente à linha central ou eixo do corpo e no plano da seção do corte. Tais componentes recebem o nome de força normal ou força axial N, força cortante V, momento torçor T e momento fletor M.

As componentes N, V, T e M são chamadas, de forma geral, de esforços solicitantes ou esforços internos na seção em estudo. As Fig. 5.3.a e 5.3.b mostram a decomposição de $\vec{R}$ e $\vec{M}_R$, respectivamente.

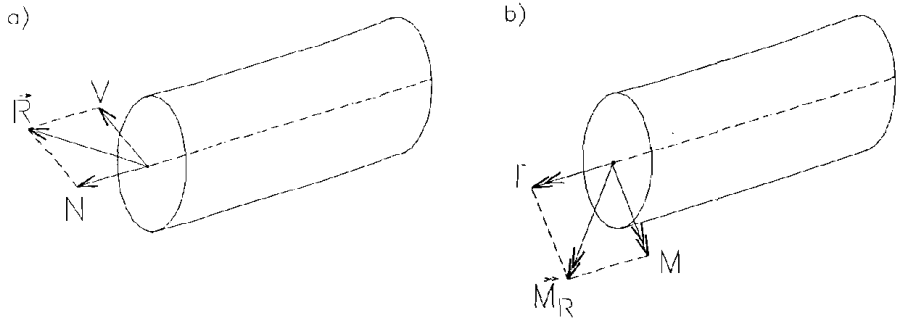


Figura 5.3

A força normal N e o momento torçor T têm sua posição determinada pela tangente ao eixo do elemento, necessitando apenas de suas intensidades para que fiquem caracterizados. Já o momento fletor M e a força cortante V necessitam de duas componentes no plano da seção.

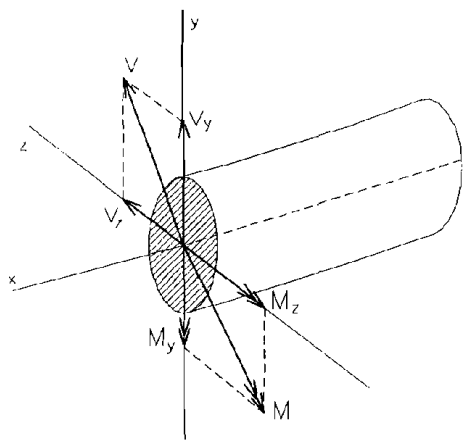


Figura 5.4

Através de um sistema de coordenadas cartesianas com eixos x, y e z, podemos definir a intensidade e a posição do momento fletor e da força cortante. A Fig. 5.4 mostra as componentes dos esforços solicitantes M e V segundo tais eixos.

b)

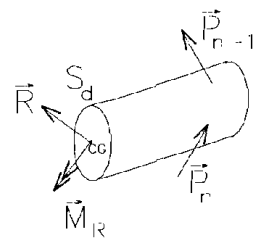


Figura 5.2.b

Os esforços solicitantes são definidos, portanto, por seis componentes: três de forças e três de momentos.

N força normal

V_y, V_z forças cortantes

T momento torçor

M_y, M_z momentos fletores

5.3 - SIMPLIFICAÇÃO PARA OS SISTEMAS PLANOS

Para o caso freqüente de cargas coplanares ao plano da estrutura, os esforços solicitantes se reduzem a três componentes. Supondo a estrutura no plano xy, teremos a força normal e a força cortante aplicadas neste mesmo plano. O momento fletor terá seu vetor normal ao plano xy e o momento torçor não poderá existir, pois não pode haver cargas fora deste plano.

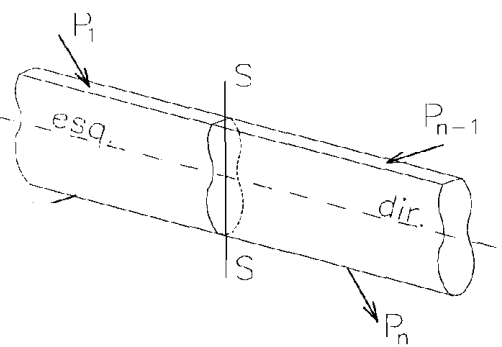


Figura 5.5.a

Nos casos planos podemos, portanto, dispensar os índices e os esforços solicitantes serão simplesmente M, V e N.

Como foi visto na Seção 5.2, as condições de equilíbrio da estática são suficientes para a determinação dos esforços solicitantes. Estes podem ser calculados através do corte imaginário por uma seção genérica S, que separa o corpo em análise em duas partes. Na prática, os esforços solicitantes podem ser calculados utilizando-se dois caminhos:

a) Considerando-se uma das partes do corpo, à esquerda ou à direita do corte, os esforços solicitantes na seção em questão podem ser calculados como sendo as componentes da resultante e do momento resultante das forças externas aplicadas na outra parte, reduzidas para o centro de gravidade da seção em análise.

Desta forma, se escolhemos a seção à esquerda do corte imaginário, teremos

$$M_{(s)} = \sum M_{i\ dir}$$
$$V_{(s)} = \sum Y_{i\ dir}$$
$$N_{(s)} = \sum X_{i\ dir} \qquad (5.5)$$

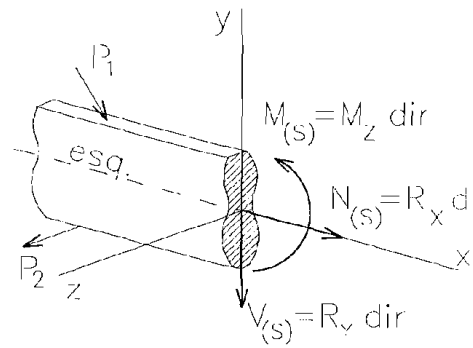


Figura 5.5.b

Onde $\sum M_{i\ dir}$ representa a componente M_z do momento resultante das forças aplicadas na parte direita, em relação ao centro de gravidade da seção S. As grandezas $\sum Y_{i\ dir}$ e $\sum X_{i\ dir}$ representam, respectivamente, as componentes R_y e R_x da resultante das forças aplicadas na parte direita da seção. A Fig. 5.5.b representa a determinação dos esforços solicitantes através deste caminho. Esse caminho pode ser chamado de cálculo direto dos esforços solicitantes.

b) Escolhendo-se uma das partes, à esquerda ou à direita do corte, os esforços solicitantes na seção escolhida podem ser calculados como sendo as componentes da resultante e do momento resultante das forças internas aplicadas na seção, reduzidas para o centro de gravidade. Como já vimos, estas forças internas representam a ação da outra parte sobre a seção em análise.

Como as partes, sob a ação das forças externas e internas, estão em equilíbrio, as condições (1.56) da Seção 1.11 são satisfeitas, para cada parte, separadamente.

$$\sum X = 0$$
$$\sum Y = 0$$
$$\sum M = 0 \qquad (5.6)$$

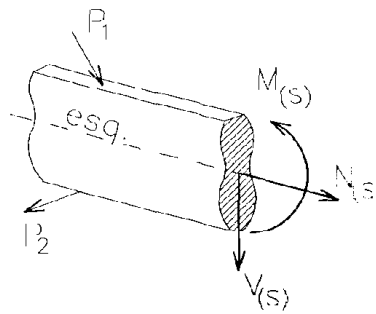


Figura 5.5.c

Desta forma se escolhermos, por exemplo, a parte à esquerda do corte, aplicando os esforços solicitantes na seção S, teremos juntamente com as cargas aplicadas um sistema de forças em equilíbrio. As equações (5.6) serão, portanto, suficientes para o cálculo dos esforços incógnitos M, V e N. A Fig. 5.5.c representa o cálculo por este caminho.

Conhecidas as cargas aplicadas na estrutura, podemos sempre calcular os esforços solicitantes em qualquer seção. Em geral, os esforços solicitantes variam de seção para seção, sendo necessário, por conseguinte, conhecer as leis

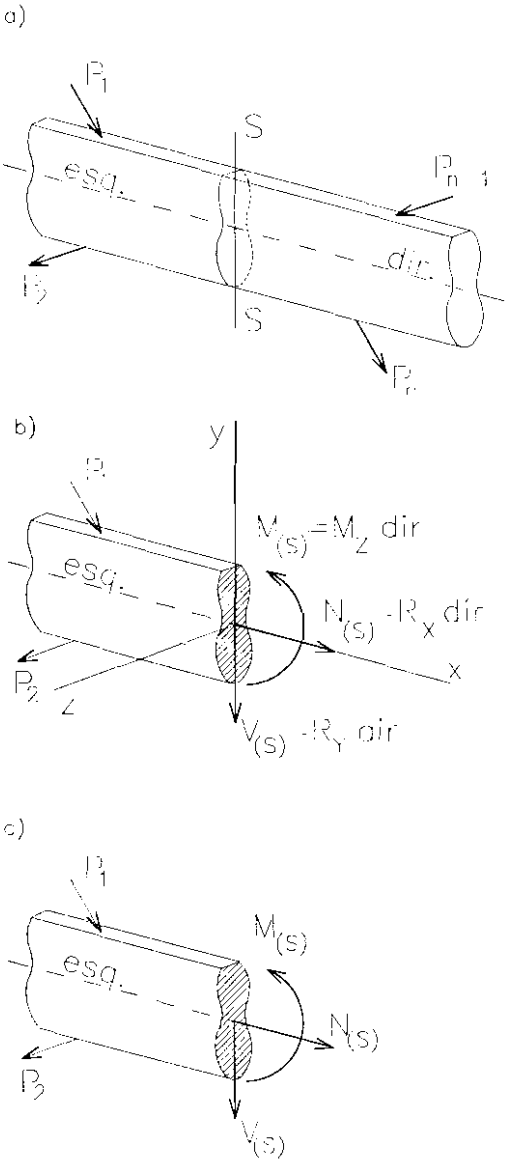


Figura 5.5

de variação destes esforços ao longo da estrutura. A variação destas grandezas pode ser visualizada traçando-se os diagramas dos esforços internos, também chamados diagramas de estado. Nestes, a abcissa representa o eixo da barra e a ordenada, o respectivo valor do esforço.

5.4 - CONVENÇÃO DE SINAIS

Qualquer que seja o caminho adotado para o cálculo dos esforços internos estaremos sempre somando forças e momentos. É conveniente, portanto, estabelecer uma convenção de sinais para os esforços solicitantes.

O esforço normal N tem o sinal convencionado independentemente da posição do observador, não depende da seção analisada ser à direita ou à esquerda do corte.

Convencionamos uma força normal, ou axial positiva, quando o sentido da força é o de sair da seção em análise; e como negativa, quando o sentido é o de entrar na seção. Estaticamente, a força normal é positiva quando provoca uma tração na peça em análise e negativa quando provoca uma compressão. A Fig. 5.6 ilustra a convenção de sinal para a força normal.

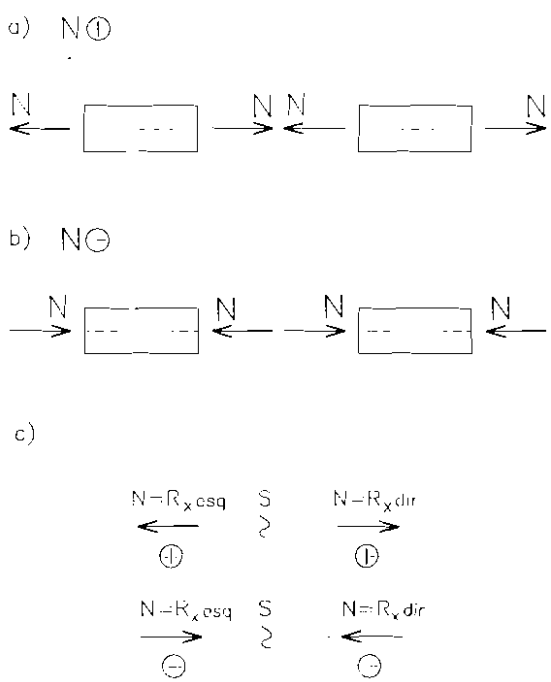


Figura 5.6

O momento fletor, nas estruturas planas fletidas, aparece sempre no plano

xy. Se o único esforço solicitante for um momento fletor, teremos o estado conhecido como flexão pura. Em geral, o momento fletor aparece acompanhado de forças cortantes também no plano xy. Estes esforços configuram o estado conhecido como flexão transversal.

O sinal do momento fletor está relacionado com a curvatura da peça fletida e o sentido dos eixos xy.

A Fig. 5.7.a mostra a definição do sinal do momento relacionada à posição dos eixos fixos xy.

O momento fletor positivo provoca na peça fletida uma curvatura tal que o centro de curvatura O fica com sentido contrário ao eixo y. Naturalmente o contrário ocorre com o momento negativo. De qualquer forma, ambos provocam na superfície convexa alongamento das fibras e, por conseguinte, tração. Nos diagramas desenhados para visualizar a variação do momento fletor, as ordenadas são desenhadas do lado tracionado da peça. Não há necessidade de se indicar o sinal.

Podemos convencionar o sinal do momento fletor na seção em análise, independentemente do sentido dos eixos externos xy e da posição da seção em relação ao corte. A Fig. 5.7.b ilustra esta convenção.

Se o momento resultante das forças aplicadas no lado à esquerda do corte

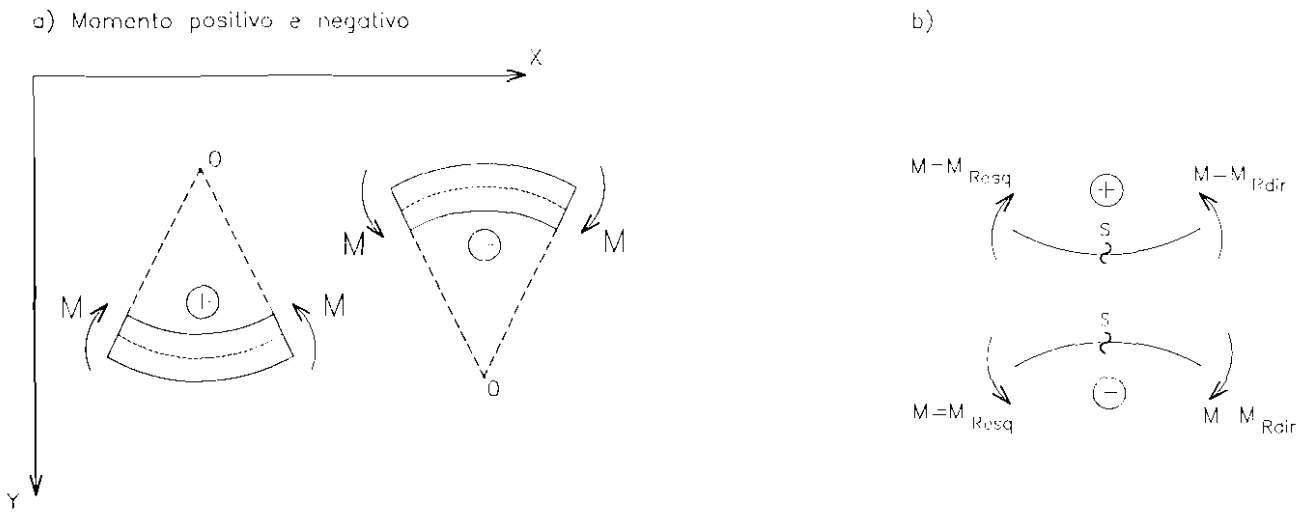


Figura 5.7

tiver sentido horário, o momento fletor na seção é positivo. Se o momento resultante das forças aplicadas no lado à esquerda do corte tiver sentido anti-horário, o sinal do momento fletor na seção é negativo.

A regra inversa deve ser aplicada à direita do corte: momento resultante das forças à direita e com sentido horário, negativo; momento resultante das forças à direita e com sentido anti-horário, positivo.

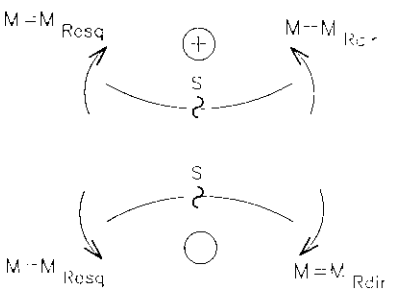


Figura 5.7.b

A convenção de sinais para a força cortante é mostrada na Fig. 5.8.a. Pode-se estabelecer, à semelhança da convenção para o momento fletor, uma regra que independe da posição da seção em relação ao corte:

Se a resultante das forças aplicadas na parte à esquerda do corte provocar tendência de rotação horária em relação à seção, a cortante é positiva. Se a resultante das forças aplicadas à esquerda do corte provocar tendência de rotação anti-horária, a cortante é negativa. Naturalmente, para as forças aplicadas no lado à direita do corte vale a mesma regra. A Fig. 5.8.b ilustra esta regra.

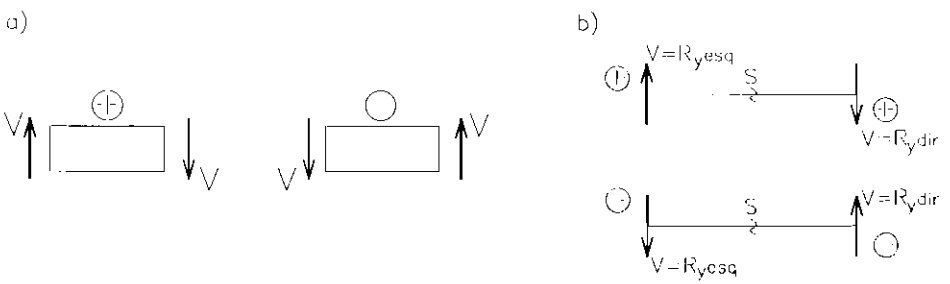


Figura 5.8

Nos diagramas dos esforços cortantes, as ordenadas positivas geralmente são desenhadas na parte superior e as negativas na inferior. Recomenda-se a indicação do sinal.

5.5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Exemplo 1

Calcular os esforços solicitantes para o carregamento dado nas seções transversais S_1, S_2 e S_3 da viga simplesmente apoiada da Fig. 5.9.

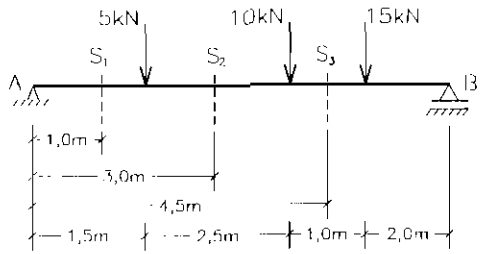


Figura 5.9

Resolução

Vigas horizontais carregadas transversalmente não sofrem ação de esforços axiais, portanto os esforços solicitantes procurados em cada seção transversal são as forças cortantes e os momentos fletores.

a) Cálculo das reações, Fig. 5.10

Com

$$\sum M_A = 0$$

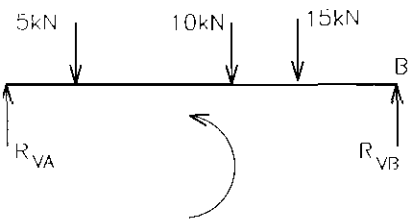
$$7 \text{ x } R_{VB} - 5 \text{ x } 15 - 4 \text{ x } 10 - 1{,}5 \text{ x } 5 = 0 \qquad \therefore R_{VB} = 17{,}5\text{kN}$$

com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VA} + 17{,}5 - 15 - 10 - 5 = 0 \qquad \therefore R_{VA} = 12{,}5\text{kN}$$

) Diagrama de corpo livre



) Montagem dos resultados

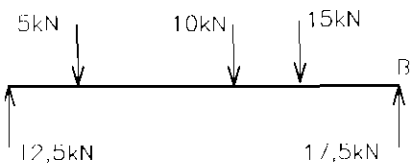


Figura 5.10

b) Cálculo dos esforços solicitantes

Equilíbrio das partes

Os esforços internos podem ser calculados através do equilíbrio de uma das partes separadas pelo corte imaginário, obtido com a aplicação dos esforços incógnitos, supostos positivos, na seção transversal.

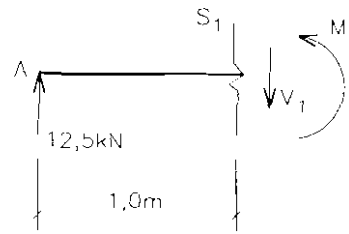


Figura 5.11

Seção S_1

Escolheremos a parte esquerda da viga, devido ao menor número de forças externas aplicadas, Fig. 5.11.

Com

$$\sum Y = 0$$

$$12{,}5 - V_1 = 0 \qquad \therefore \; V_1 = 12{,}5\text{kN}$$

com

$$\sum M_A = 0$$

$$M_1 - 1 \text{ x } V_1 = 0 \qquad \therefore \; M_1 = 12{,}5\text{kN.m}$$

Os sinais positivos de V_1 e M_1 indicam que os esforços solicitantes são positivos, como supostos inicialmente.

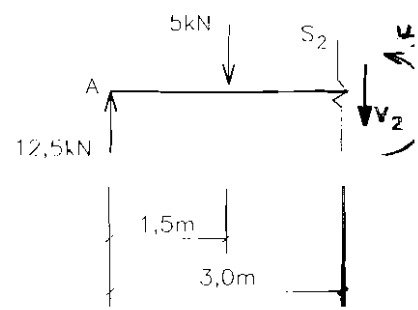


Figura 5.12

Seção S_2

Escolheremos, ainda, a parte esquerda, pelo mesmo motivo anterior, Fig. 5.12.

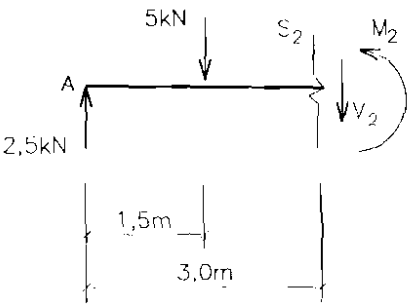


Figura 5.12

Com

$$\sum Y = 0$$

$$12{,}5 - 5 - V_2 = 0 \quad \therefore V_2 = 7{,}5\text{kN}$$

com

$$\sum M_A = 0$$

$$M_2 - 3 \times V_2 - 1{,}5 \times 5 = 0 \quad \therefore M_2 = 30\text{kN.m}$$

Os sinais positivos de V_2 e M_2 indicam que os esforços são positivos.

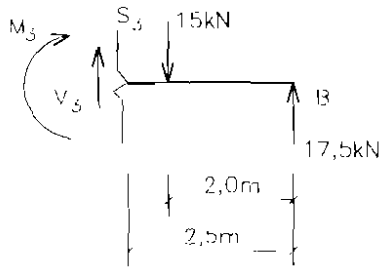


Figura 5.13

Seção S_3

Neste caso será mais cômodo trabalhar com a parte direita da viga, Fig. 5.13.

Com

$$\sum Y = 0$$

$$V_3 - 15 + 17{,}5 = 0 \quad \therefore V_3 = -2{,}5\text{kN}$$

com

$$\sum M_B = 0$$

$$M_3 + 2{,}5 \times V_3 - 2 \times 15 = 0 \quad \therefore M_3 = 36{,}25\text{kN.m}$$

O sinal negativo de V_3 indica uma cortante anti-horária na seção transversal.

Cálculo direto

Os esforços internos, em uma determinada seção transversal, também podem ser calculados diretamente como sendo as componentes da resultante das forças e dos momentos das forças que atuam na parte da viga à direita ou à esquerda da seção em questão, Fig. 5.14.

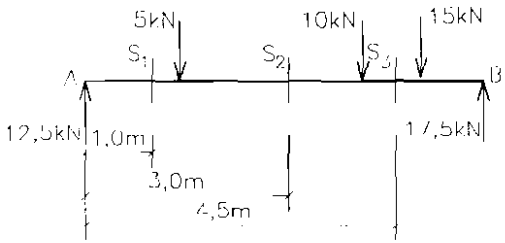


Figura 5.14

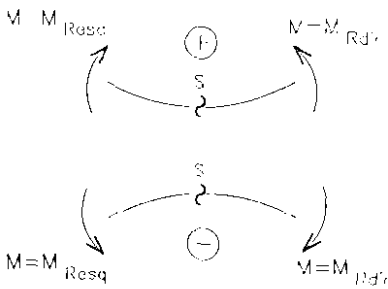


Figura 5.7.b

Seção S_1

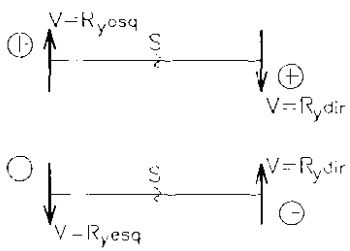


Figura 5.8.b

Tendo-se em vista a convenção de sinais da Seção 5.4, Fig. 5.7.b e Fig. 5.8.b, e considerando-se as forças aplicadas à esquerda de S_1

$M_1 = 1 \times 12,5 \quad \therefore M_1 = 12,5kN.m$

$V_1 = 12,5 \quad \therefore V_1 = 12,5kN$

Considerando-se as forças aplicadas à direita de S_1

$M_1 = 6 \times 17,5 - 4 \times 15 - 3 \times 10 - 0,5 \times 5 \quad \therefore M_1 = 12,5kN.m$

$V_1 = 17,5 + 15 + 10 + 5 \quad \therefore V_1 = 12,5kN$

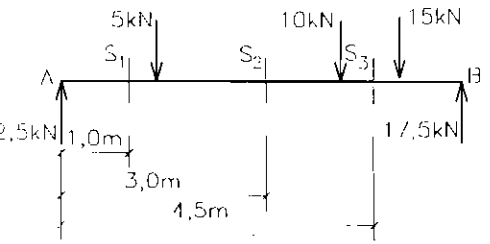


Figura 5.14

Seção S_2

Considerando-se as forças aplicadas à esquerda de S_2

$M_2 = 4 \times 17,5 - 2 \times 15 - 1 \times 10 \quad \therefore M_2 = 30kN.m$

$V_2 = -17,5 + 15 + 10 \quad \therefore V_2 = 7,5kN$

Considerando-se as forças aplicadas à direita de S_2

$M_2 = 4 \times 17,5 - 2 \times 15 - 1 \times 10 \quad \therefore M_2 = 30kN.m$

$V_2 = -17,5 + 15 + 10 \quad \therefore V_2 = 7,5kN$

Seção S_3

Considerando-se as forças à esquerda de S_3

$M_3 = 4,5 \times 12,5 - 3 \times 5 - 0,5 \times 10 \quad \therefore M_3 = 36,25kN.m$

$V_3 = 12,5 - 5 - 10 \quad \therefore V_3 = -2,5kN$

Considerando-se as forças à direita de S_3

$M_3 = 2,5 \times 17,5 - 0,5 \times 15 \quad \therefore M_3 = 36,25kN.m$

$V_3 = -17,5 + 15 \quad \therefore V_3 = -2,5kN$

Exemplo 2

Calcular os esforços solicitantes, para o carregamento dado, nas seções transversais S_1, S_2 e S_3 do pórtico tri-articulado da Fig. 5.15.a.

Resolução

a) Cálculo das reações

Com

$\sum M_A = 0$

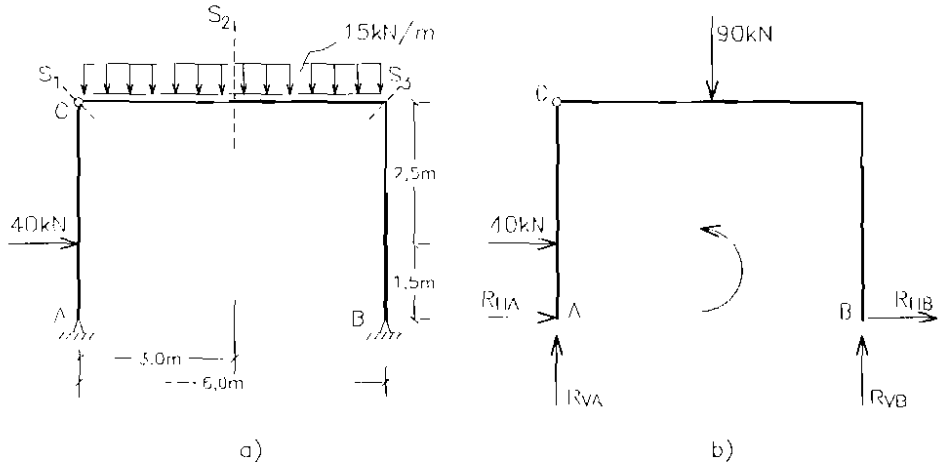


Figura 5.15

$6 \times R_{VB} - 3 \times 90 - 1{,}5 \times 40 = 0 \qquad \therefore R_{VB} = 55kN$

com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VA} + R_{VB} - 90 = 0 \qquad \therefore R_{VA} = 35kN$$

com

$M_C = 0$ (chapa AC)

$$4 \times R_{HA} + 2{,}5 \times 40 = 0 \qquad \therefore R_{HA} = -25kN$$

com

$$\sum X = 0$$

$$R_{HA} + R_{HB} + 40 = 0 \qquad \therefore R_{HB} = -15kN$$

A Fig. 5.16 mostra a estrutura submetida ao carregamento externo — ativo e reativo — e preparada para o cálculo dos esforços solicitantes, nas respectivas seções transversais, nas quais poderão ocorrer os três esforços internos, M, N e V.

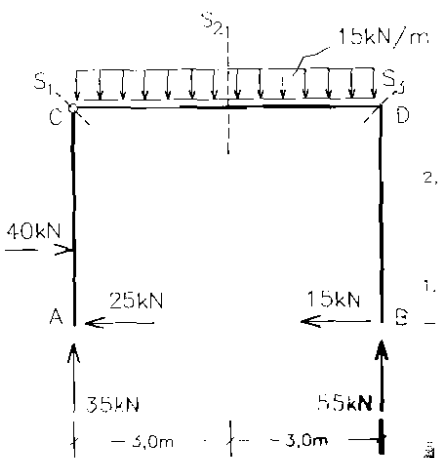


Figura 5.16

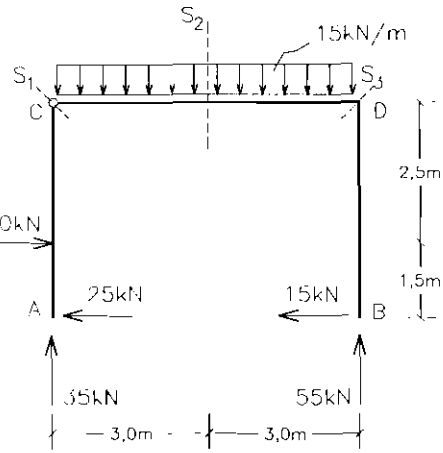


Figura 5.16

b) Cálculo dos esforços solicitantes

Equilíbrio das partes

Seção S_1

A seção S_1 contém a articulação C, portanto os esforços solicitantes serão, tão-somente, força cortante e força normal.

Considerando-se a seção pertencente à chapa AC, Fig. 5.17.a.

Com

$$\sum Y = 0$$

$$35 + N = 0 \qquad \therefore N_1 = -35kN$$

com

$$\sum X = 0$$

$$40 + V - 25 = 0 \qquad \therefore V_1 = -15kN$$

O sinal negativo de N_1 indica que a força normal na seção transversal é de compressão. O sinal negativo de V_1 indica que a força cortante é anti-horária.

Considerando-se a seção pertencente à chapa CDB, Fig. 5.17.b.

Com

$$\sum Y = 0$$

$$55 + V_1' - 90 = 0 \qquad \therefore V_1' = 35kN$$

com

$$\sum X = 0$$

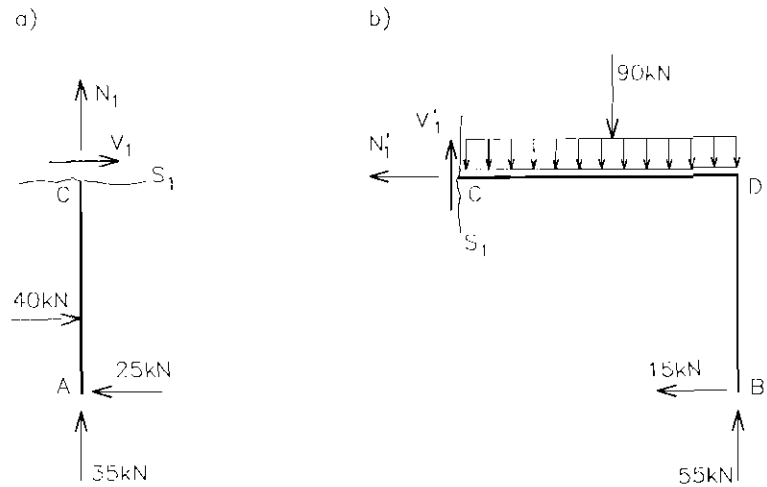


Figura 5.17

$-N_1' - 15 = 0 \qquad \therefore N_1' = -15kN$

O sinal negativo de N_1' indica uma força normal de compressão. Observar que V_1' é igual a N_1 em módulo e N_1' é igual a V_1, também em módulo. Este fato significa que, neste caso, a cortante e a normal na seção pertencente à chapa AC são, respectivamente, a normal e a cortante na seção pertencente à chapa CDB. Observar também que os esforços solicitantes são iguais às reações internas provocadas pela articulação C.

Seção S_2

Neste caso, para considerarmos a parte à esquerda do corte, basta o trecho entre a articulação C e o corte S_2, pois os esforços solicitantes são conhecidos em C, Fig. 5.18.

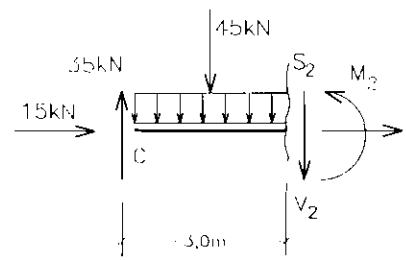


Figura 5.18

Com

$\sum Y = 0$

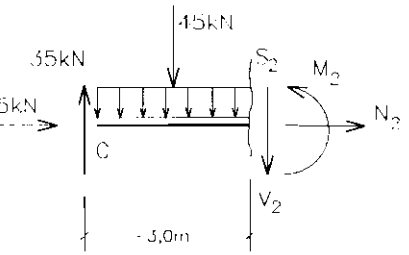


Figura 5.18

$$35 - 45 - V_2 = 0 \qquad \therefore V_2 = -10kN$$

com

$$\sum X = 0$$

$$15 + N_2 = 0 \qquad \therefore N_2 = -15kN$$

com

$$\sum M_c = 0$$

$$M_2 - 3 \text{ x } (-10) - 1{,}5 \text{ x } 45 = 0 \qquad \therefore \quad M_2 = 37{,}5kNm$$

Seção S_3

Neste caso escolheremos a parte à direita do corte, Fig. 5.19.a.

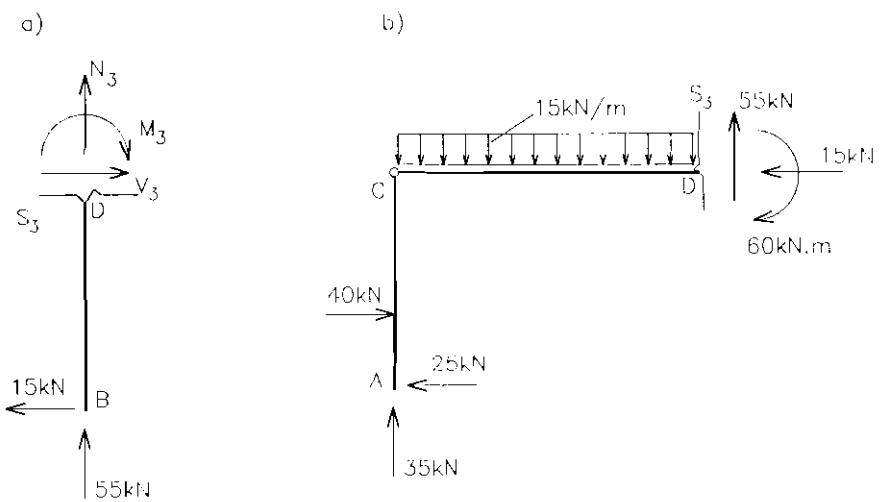


Figura 5.19

Com

$$\sum Y = 0$$

$55 + N_3 = 0 \qquad \therefore N_3 = -55kN$

com

$\sum X = 0$

$V_3 - 15 = 0 \qquad \therefore V_3 = 15kN$

com

$\sum M_B = 0$

$M_3 + 4 \times 15 = 0 \qquad \therefore M_3 = -60kNm$

O sinal negativo de M_3 indica que o momento fletor traciona as fibras externas da coluna do pórtico.

Na seção transversal à esquerda do corte os esforços estão indicados na Fig. 5.19.b.

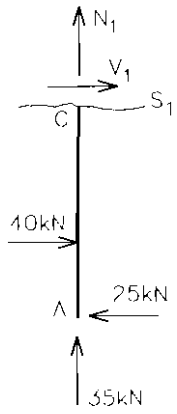


Figura 5.17.a

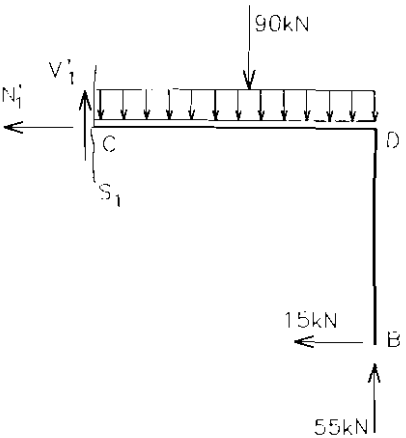


Figura 5.17.b

Cálculo direto

Seção S_1

Cargas aplicadas à esquerda de S_1 (chapa AC)

$M_1 = 0$ (articulação)

$N_1 = -35kN$ (entrando na seção)

$V_1 = 25 - 40 = -15kN$

Cargas aplicadas à direita de S_1 (chapa CDB)

$M_1 = 0$ (articulação)

$N_1' = -15kN$ (entrando na seção)

$V_1' = 90 - 55 = 35kN$

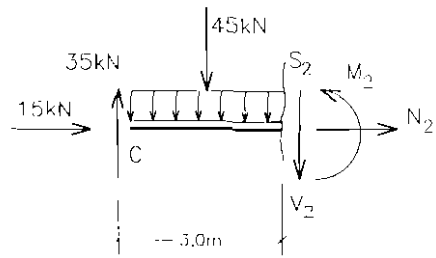


Figura 5.18

Seção S_2

Cargas aplicadas à esquerda de S_2

$M_2 = 3 \times 35 + 4 \times 25 - 2,5 \times 40 - 1,5 \times 45 = 37,5kNm$

$N_2 = -40 + 25 = -15kN$ (entrando na seção)

$V_2 = 35 - 40 = -10kN$

Cargas aplicadas à direita de S_2

$M_2 = 3 \times 35 + 4 \times 25 - 2,5 \times 40 - 1,5 \times 45 = 37,5kNm$

$N_2 = -40 + 25 = -15kN$ (entrando na seção)

$V_2 = 35 - 40 = -10kN$

Seção S_3

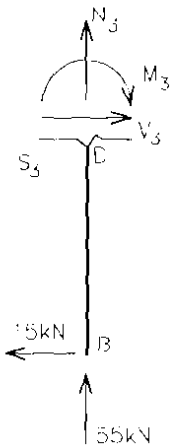


Figura 5.19.a

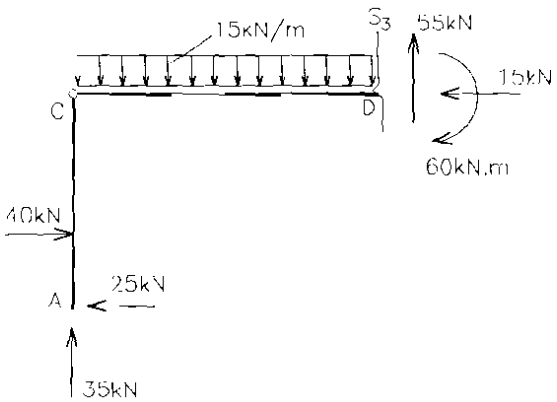


Figura 5.19.b

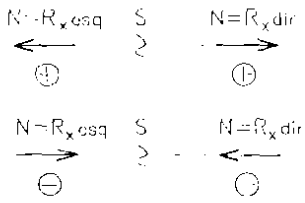


Figura 5.6.c

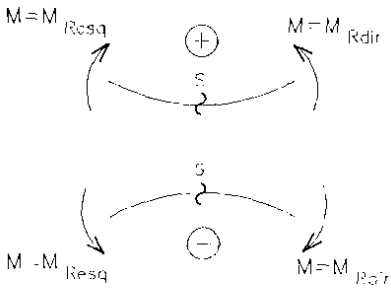


Figura 5.7.b

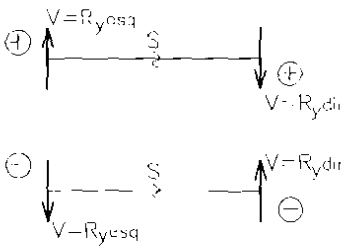


Figura 5.8.b

Cargas aplicadas à esquerda de S_3 (trecho ACD)

$M_1 = 6 \times 35 + 4 \times 25 - 2{,}5 \times 4{,}0 - 3 \times 90 = -60\text{kNm}$

$N_3 = -40 + 25 = -15\text{kN}$

$V_3 = 35 - 40 = -5\text{kN}$

Cargas aplicadas à direita de S_3 (trecho DB)

$M_3 = -4 \times 15 = -60\text{kNm}$

$N_3 = -55\text{kN}$ (entrando na seção)

$V_3 = 15\text{kN}$

Observar que a força normal no trecho DB é a cortante na seção pertencente ao trecho ACD e que a cortante corresponde à normal, na seção pertencente ao trecho ACD.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS ESFORÇOS INTERNOS – DIAGRAMAS DE ESTADO

6.1 - GENERALIDADES

Como vimos no capítulo anterior, os esforços solicitantes estão associados a uma determinada seção transversal. Mudando-se a seção transversal em geral os esforços solicitantes associados a esta nova seção serão diferentes. É conveniente, portanto, expressar a variação da grandeza dos esforços internos ao longo do eixo da estrutura.

Esta variação, seção por seção, pode ser mostrada graficamente utilizando-se o eixo da estrutura como eixo das abcissas, com as ordenadas representando a grandeza do esforço solicitante.

6.2 - TRAÇADO DOS DIAGRAMAS ATRAVÉS DE EXPRESSÕES ANALÍTICAS DAS FUNÇÕES DOS ESFORÇOS SOLICITANTES

Este procedimento será melhor ilustrado através de um exemplo numérico. Seja traçar os diagramas dos esforços solicitantes para o carregamento aplicado na viga da Fig. 6.1.a.

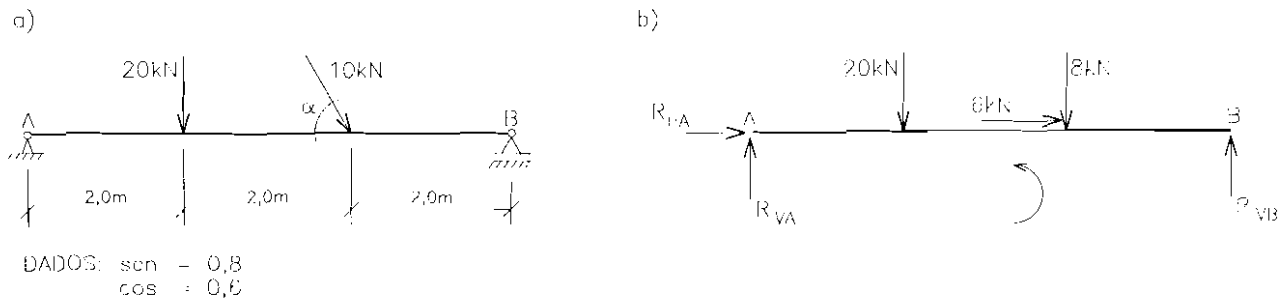


Figura 6.1

A Fig. 6.1.b mostra o diagrama de corpo livre da viga com a força inclinada substituída pelas suas componentes aplicadas transversalmente e paralela ao eixo da viga. As reações são determinadas pela aplicação das equações de equilíbrio.

Com

$$\sum M_A = 0$$

$$6 \times R_{VB} - 4 \times 8 - 2 \times 20 = 0 \quad \therefore R_{VB} = 12kN$$

com

$$\sum X = 0$$

$$R_{HA} + 6 = 0 \quad \therefore R_{HA} = -6kN$$

com

$$\sum Y = 0$$

$$R_{VA} + R_{VB} - 20 - 8 = 0 \quad \therefore R_{VA} = 16kN$$

A Fig. 6.2 mostra a viga com as forças aplicadas nos sentidos corretos e os cortes genéricos que serão utilizados para o equacionamento dos esforços solicitantes. O eixo x, das abcissas, tem origem em A e corre ao longo do eixo da viga.

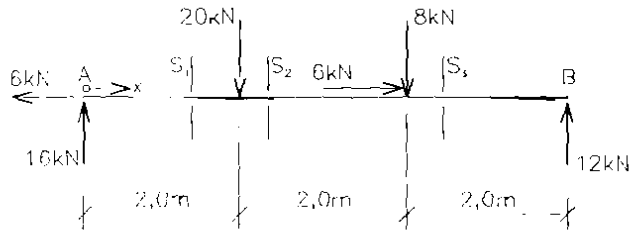


Figura 6.2

Como o carregamento aplicado é descontínuo (cargas concentradas), as expressões analíticas para as funções devem ser determinadas em cada trecho delimitado pelas cargas.

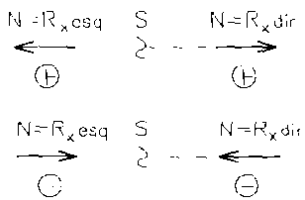


Figura 5.6.c

Seção genérica S_1 $(0 \leq x \leq 2)$

Considerando as cargas aplicadas à esquerda do corte,

$M = 16x \quad (kNm)$

$N = 6kN$

$V = 16kN$

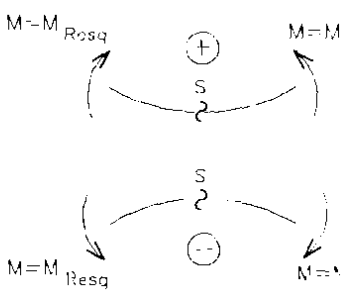


Figura 5.7.b

Seção genérica S_2 $(2 \leq x \leq 4)$

Considerando as cargas à esquerda do corte,

$M = 16x - 20\,(x - 2) \quad (kNm)$

$N = 6kN$

$V = 16 - 20 = -4kN$

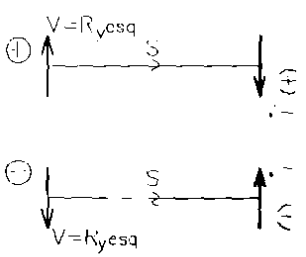


Figura 5.8.b

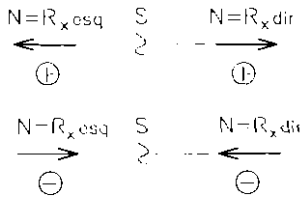


Figura 5.6.c

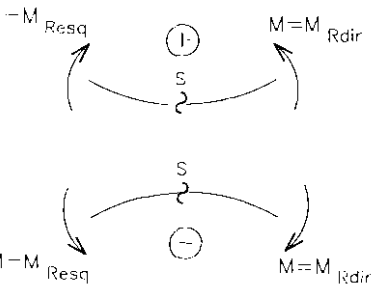


Figura 5.7.b

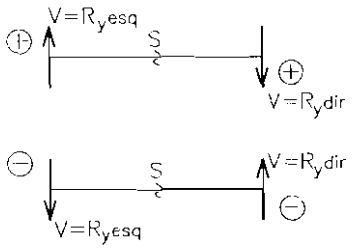


Figura 5.8.b

Seção genérica S_3 $(4 \leq x \leq 6)$

Considerando as cargas à direita do corte,

$$M = 12\ (6 - x)$$

$$N = 0$$

$$V = -12kN$$

Para controle dos resultados, calcularemos as expressões utilizando as cargas aplicadas à esquerda do corte.

$$M = 16x - 20(x - 2) - 8(x - 4)\ \ (kNm)$$

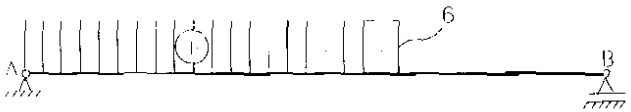
$$N = 6 - 6 = 0$$

$$V = 16 - 20 - 8 = -12kN$$

A Fig. 6.3 mostra a representação gráfica dos esforços solicitantes, através dos diagramas de estado. Comentaremos os resultados obtidos através da análise dos diagramas dos esforços solicitantes na próxima Seção.

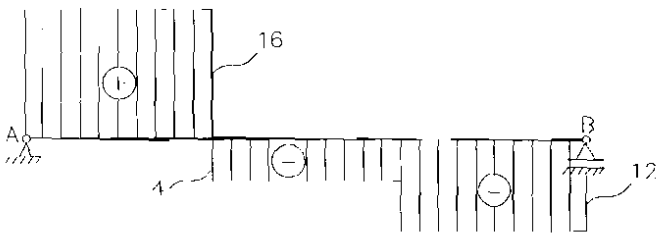
a)

(N) (kN)



b)

(V) (kN)



c)

(M) (kNm)

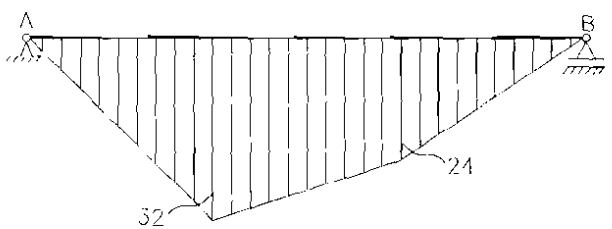


Figura 6.3

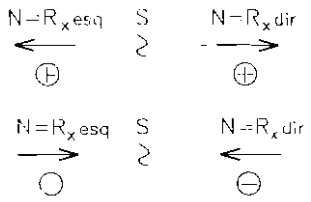


Figura 5.6.c

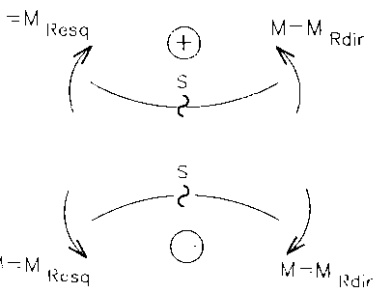


Figura 5.7.b

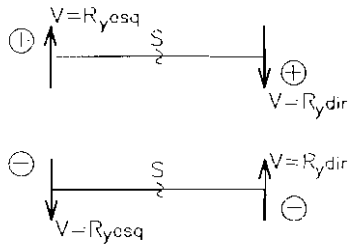


Figura 5.8.b

Seção genérica S_3 $(4 \leq x \leq 6)$

Considerando as cargas à direita do corte,

$$M = 12\ (6 - x)$$

$$N = 0$$

$$V = -12kN$$

Para controle dos resultados, calcularemos as expressões utilizando as cargas aplicadas à esquerda do corte.

$$M = 16x - 20(x - 2) - 8(x - 4)\ \ (kNm)$$

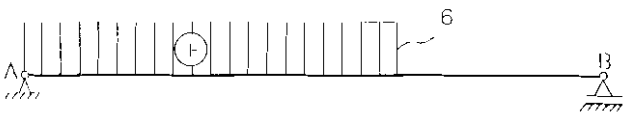
$$N = 6 - 6 = 0$$

$$V = 16 - 20 - 8 = -12kN$$

A Fig. 6.3 mostra a representação gráfica dos esforços solicitantes, através dos diagramas de estado. Comentaremos os resultados obtidos através da análise dos diagramas dos esforços solicitantes na próxima Seção.

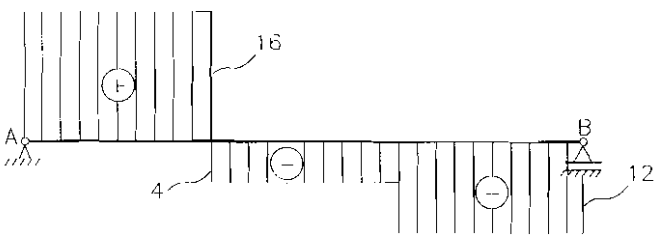
a)

(N) (kN)



b)

(V) (kN)



c)

(M) (kNm)

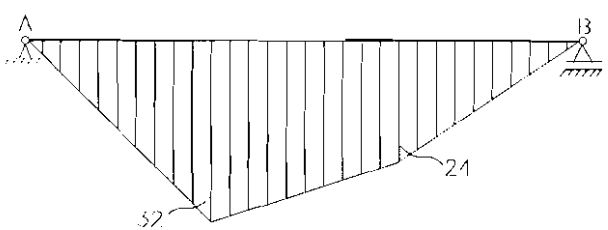


Figura 6.3

6.3 - RELAÇÕES ENTRE CARGA, FORÇA CORTANTE E MOMENTO FLETOR – EQUAÇÃO DIFERENCIAL DOS MOMENTOS

Supondo a carga, a força cortante e o momento fletor funções de x, abcissa ao longo do eixo da estrutura, para um elemento de comprimento infinitesimal dx, em equilíbrio sob efeito da carga, p = p(x), e dos esforços solicitantes, M = M(x) e V = V(x), Fig. 6.4, podemos estabelecer as seguintes relações diferenciais:

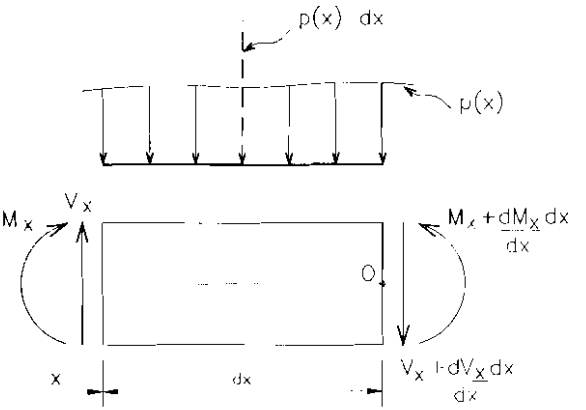


Figura 6.4

Com

$$\sum Y = 0$$

$$V_x - p(x)dx - V_x - \frac{dV_x}{dx}dx = 0 \qquad (6.1)$$

dividindo por dx,

$$\frac{dV_x}{dx} = -p(x) \qquad (6.2)$$

com $\sum M_O = 0$

$$M_x + \frac{dM_x}{dx}dx + p(x)dx\frac{dx}{2} - M_x - V_x d_x = 0 \qquad (6.3)$$

dividindo por dx e levando ao limite para $dx \to 0$,

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x \qquad (6.4)$$

Derivando (6.4) em relação a x e substituindo em (6.2),

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} = -p(x) \tag{6.5}$$

Sempre que se conhecer p(x) a equação pode ser resolvida para M_x e por diferenciação a cortante V_x pode ser determinada.

É extremamente útil discutir a solução da equação diferencial. Assim, através de duas integrações, teremos:

$$\frac{dM_x}{dx} = -p(x)x + C_1 \tag{6.6}$$

$$M_x = -p(x)\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \tag{6.7}$$

As constantes de integração, C_1 e C_2, podem ser determinadas através de condições de contorno, lembrando que (6.5) só tem validade nos trechos sem carga concentrada aplicada. Desta forma podemos considerar os seguintes casos:

a) Trechos onde p(x) = 0, com (6.6) e (6.7),

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x = C_1 \tag{6.8}$$

$$M_x = C_1x + C_2 \tag{6.9}$$

À vista de (6.8) e (6.9), podemos formular:

A força cortante é constante no trecho onde $p(x) = 0$ e o momento fletor é linear.

Se o momento fletor é constante, a força cortante é nula no trecho.

Se o diagrama de momentos fletores apresenta um ângulo, ou ponto singular, isto significa uma descontinuidade da derivada, ou seja, uma descontinuidade do diagrama da cortante. Isto indica uma carga concentrada aplicada e o salto no diagrama da cortante tem a magnitude da força aplicada.

No ponto onde a cortante muda de sinal teremos um valor máximo ou mínimo do momento fletor.

b) Trechos onde p(x) = cte = p,

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x = -px + C_1 \tag{6.10}$$

$$M_x = -p\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2 \tag{6.11}$$

$$\frac{dV_x}{dx} = -p \tag{6.12}$$

Apreciando (6.10), (6.11) e (6.12), podemos formular:

A força cortante é função linear e o momento fletor, função do segundo grau.

Se a inclinação da curva de momentos diminui da esquerda para a direita, temos cortante positiva. Se aumenta da esquerda para a direita, temos cortante negativa.

Se o diagrama de forças cortantes apresenta um ângulo, ou ponto singular, isto significa uma descontinuidade da derivada, ou seja, descontinuidade da carga p(x).

No ponto onde a cortante é nula, teremos um valor máximo ou mínimo do momento fletor.

c) Trechos onde p(x) é uma função linear de x (p(x) = kx),

Substituindo a função p(x) em (6.5) e integrando duas vezes, podemos formular:

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x = -\frac{k}{2}x^2 + C_1 \tag{6.13}$$

$$M_x = -\frac{k}{6}x^3 + C_1x + C_2 \tag{6.14}$$

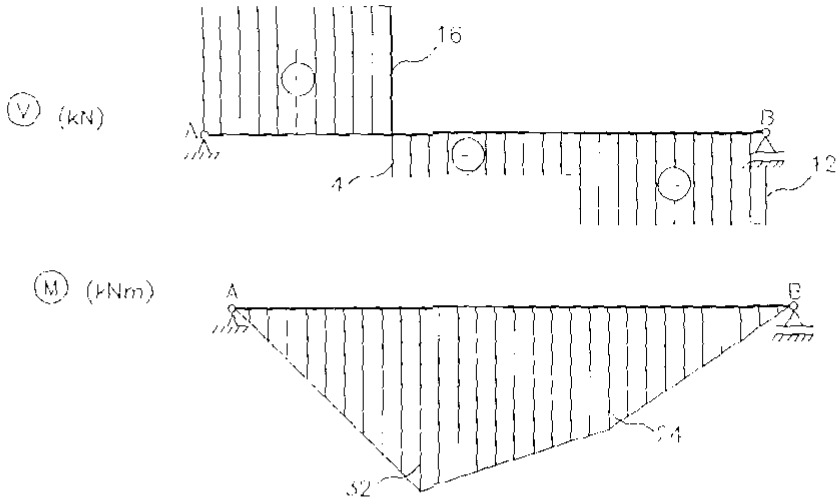
$$\frac{dV_x}{dx} = -kx \tag{6.15}$$

A cortante é uma função do segundo grau e o momento é função do terceiro grau (parábola do terceiro grau).

Se a inclinação da curva do momento fletor diminui da esquerda para a direita, temos cortante positiva. Se a inclinação aumenta da esquerda para a direita, temos cortante negativa.

Se a carga cresce da esquerda para a direita, a inclinação da curva da força cortante aumenta da esquerda para a direita.

Se a carga diminui da esquerda para a direita, a inclinação da curva da força cortante diminui da esquerda para a direita.



Figuras 6.3.*b* e *c*

Analisando, agora, o exemplo resolvido na Seção anterior, através da Fig. 6.3, podemos formular:

A inclinação da linha da força cortante, representada na Fig. 6.3.b, é nula — isto indica a não existência de carga distribuída.

No ponto onde a cortante muda de sinal temos o $M_{máx}$ igual a 32kNm.

As descontinuidades no diagrama da força cortante indicam existência de carga concentrada nestes pontos e suas intensidades são iguais ao valor do "salto" no diagrama. Nestas posições são verificados ângulos, ou pontos singulares, no diagrama do momento fletor.

6.4 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO UTILIZANDO A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOMENTO FLETOR

Exemplo 1 - Viga simplesmente apoiada com carga distribuída uniforme

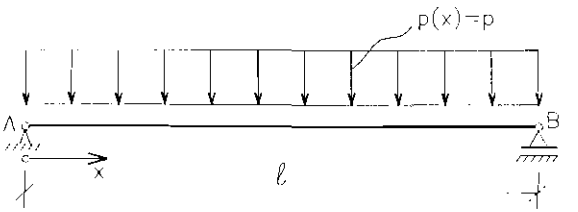


Figura 6.5

$$M_x = -p\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Condições de contorno:

com

$$\begin{cases} x = 0 \\ M_x = 0 \end{cases}, \quad C_2 = 0 \tag{6.16}$$

com

$$\begin{cases} x = \ell \\ M_x = 0 \end{cases}, \quad -\frac{p\ell^2}{2} + C_1\ell = 0 \quad \therefore \quad C_1 = \frac{p\ell}{2} \tag{6.17}$$

então

$$M_x = -p\frac{x^2}{2} + \frac{p\ell}{2}x \tag{6.18}$$

A curva do momento fletor é uma parábola do segundo grau, com corda horizontal ($M_{(x=0)} = 0$ e $M_{(x=l)} = 0$). Para traçar o gráfico basta conhecer a flecha da parábola, que neste caso coincide com o momento máximo.

O momento máximo ocorre onde $\frac{dM_x}{dx} = 0$, então

$$0 = -px + \frac{p\ell}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{\ell}{2} \tag{6.19}$$

Com (6.19) em (6.18),

$$M_{máx} = -p\,\frac{\ell^2}{8} + \frac{p\ell}{2}\,\frac{\ell}{2} \;\therefore\; M_{máx} = \frac{p\ell^2}{8} = f \quad \text{(flecha da parábola)} \qquad (6.20)$$

A Fig. 6.6 ilustra a construção da parábola e, por conseguinte, o traçado gráfico do diagrama do momento fletor M_x.

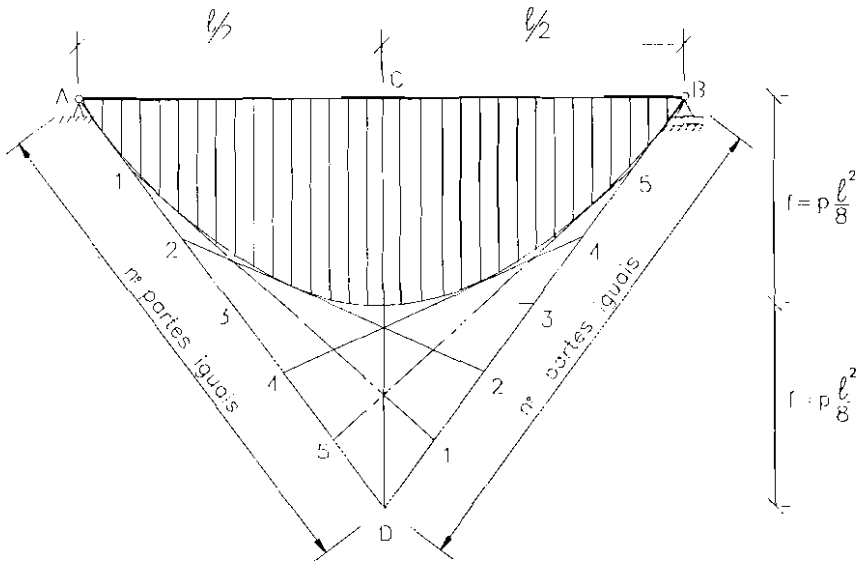


Figura 6.6

É facilmente demonstrável que o segmento CD, determinado pela interseção das tangentes à parábola, nos extremos, é igual a $pl^2/4$, ou 2f. Os segmentos AD e DB devem ser divididos em partes iguais e numerados, como indica a Fig. 6.6. Ligando-se os pontos de mesma numeração, obtém-se uma poligonal tangente à parábola.

Esta construção também pode ser utilizada nos casos em que a corda da parábola esteja inclinada. A Fig. 6.7 ilustra este caso.

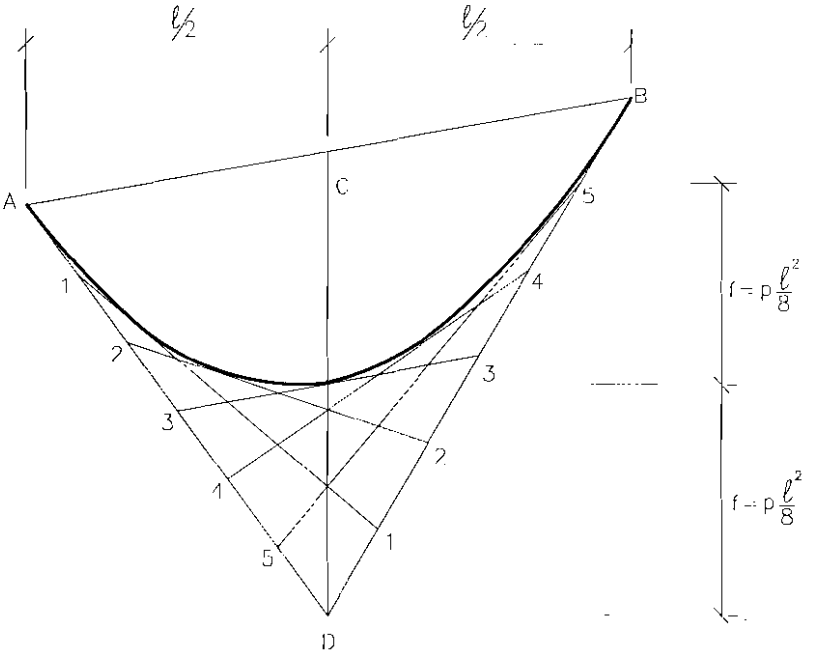


Figura 6.7

A força cortante pode ser obtida pela derivada $\frac{dM_x}{dx} = 0$, então

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x = -px + \frac{p\ell}{2} \tag{6.21}$$

O diagrama de V_x é linear e portanto pode ser traçado com dois pontos; para $x = 0$ e $x = l$. Com (6.21),

$$V_{(x=0)} = \frac{p\ell}{2}$$

$$V_{(x=\ell)} = -p\ell + \frac{p\ell}{2} = -\frac{p\ell}{2}$$

A Fig. 6.8 mostra o diagrama da força cortante V_x.

Uma simplificação, bastante útil e interessante no caso da viga simplesmente apoiada sujeita a cargas uniformemente distribuídas, pode ser empregada quando se deseja calcular o momento fletor, em qualquer ponto do eixo, sem a utilização da equação (6.18).

Seja calcular o momento fletor em uma seção genérica do eixo, situada à distância "a" do apoio esquerdo e à distância "b" do apoio direito, Fig. 6.9.a.

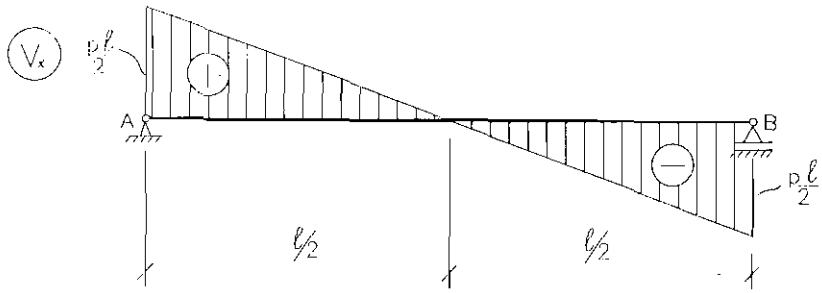


Figura 6.8

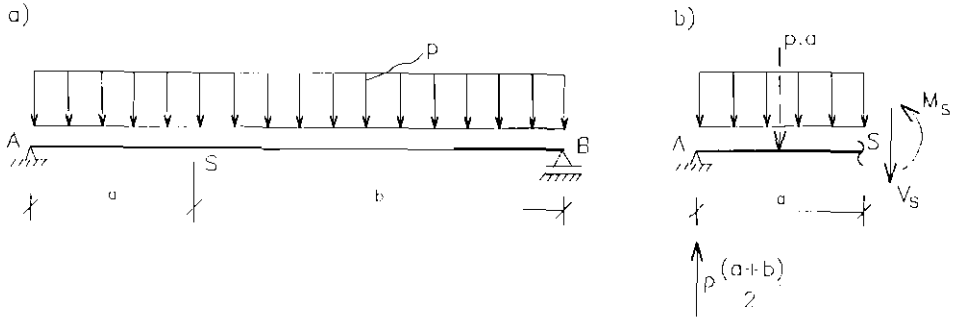


Figura 6.9

A reação no apoio, A ou B, é igual a $p\frac{(a+b)}{2}$ e o momento, na seção genérica, pode ser calculado com as cargas à esquerda ou à direita de S. Tomemos as cargas à esquerda de S. A Fig. 6.9.b auxilia o cálculo.

$$M_S = p\frac{(a+b)}{2}a - pa\frac{a}{2} = p\frac{a^2}{2} + p\frac{ab}{2} - p\frac{a^2}{2}$$

$$M_S = p\frac{ab}{2} \qquad (6.22)$$

O momento máximo, como vimos, ocorre para $a = b = \ell/2$. Substituindo-se em (6.22),

$$M_{máx} = \frac{p\ell^2}{8}$$

Resultado já encontrado em (6.20).

Exemplo 2 - Viga em balanço, com carga distribuída uniforme

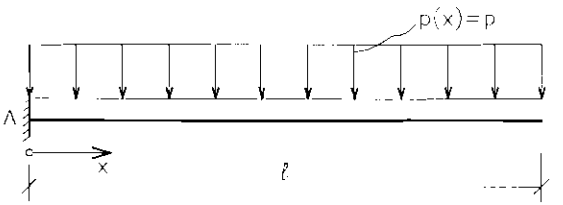


Figura 6.10

$$M_x = -\frac{px^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$V_x = \frac{dM}{dx} = -px + c_1$$

Condições de contorno:

com

$$\begin{cases} x = \ell \\ M_x = 0 \end{cases}, \quad 0 = -\frac{p\ell^2}{2} + C_1\ell + C_2 \tag{6.23}$$

com

$$\begin{cases} x = \ell \\ V_x = 0 \end{cases}, \quad 0 = -p\ell + C_1 \quad \therefore \quad C_1 = p\ell \tag{6.24}$$

e, com (6.24) em (6.23), obtemos

$$0 = -\frac{p\ell^2}{2} + p\ell^2 + C_2 \quad \therefore \quad C_2 = -\frac{p\ell^2}{2} \tag{6.25}$$

então

$$M_x = -\frac{px^2}{2} + p\ell x - \frac{p\ell^2}{2} \tag{6.26}$$

$$V_x = -px + p\ell$$

A função M_x é parabólica e portanto pode ser traçada conforme a Fig. 6.7. Os diagramas de M_x e V_x são mostrados na Fig. 6.11.

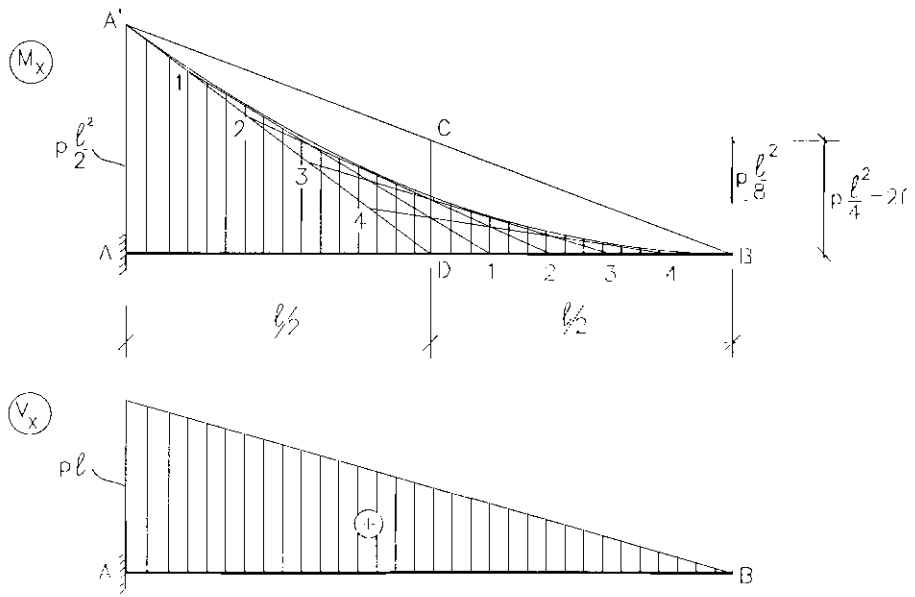


Figura 6.11

Exemplo 3 - Viga simplesmente apoiada com carga distribuída variável linear

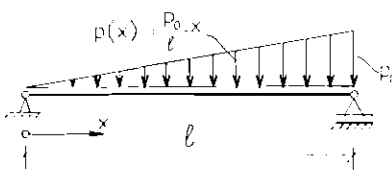


Figura 6.12

$$M_x = -\frac{p_o}{6\ell}x^3 + C_1 x + C_2$$

Condições de contorno:

com

$$\begin{cases} x = 0 \\ M_x = 0 \end{cases}, \quad C_2 = 0 \tag{6.27}$$

com

$$\begin{cases} x = \ell \\ M_x = 0 \end{cases}, \quad 0 = -\frac{p_o}{\ell}\frac{\ell^3}{6} + C_1\ell \quad \therefore \quad C_1 = p_o\frac{\ell}{6} \tag{6.28}$$

$$M_x = -\frac{p_o}{6\ell}x^3 + p_o\frac{\ell}{6}x \tag{6.29}$$

$$V_x = -\frac{p_o}{2\ell}x^2 + p_o\frac{\ell}{6} \tag{6.30}$$

A curva da força cortante é uma parábola do segundo grau e a do momento fletor, uma parábola do terceiro grau.

Para traçar o diagrama de V_x procedemos como no primeiro exemplo, para construir a parábola. As tangentes à curva de V_x, nos pontos extremos, são as derivadas $\frac{dV_x}{dx}$ para $x = 0$ e $x = l$, respectivamente.

Com

$$\begin{cases} x = 0 \\ dV_x / dx = -po\ x / \ell \end{cases}, \quad dV_x / dx = 0 \tag{6.31}$$

com

$$\begin{cases} x = \ell \\ dV_x / dx = -po\ x / \ell \end{cases}, \quad dV_x / dx = -po \tag{6.32}$$

que nada mais são que os valores do carregamento distribuído para $x = 0$ e $x = l$.

As cortantes nas extremidades A e B são, respectivamente, $V_A = p_o l/6$ e $V_B = -p_o l/3$.

A Fig. 6.13 mostra a construção da parábola e por conseguinte o diagrama da força cortante V_x.

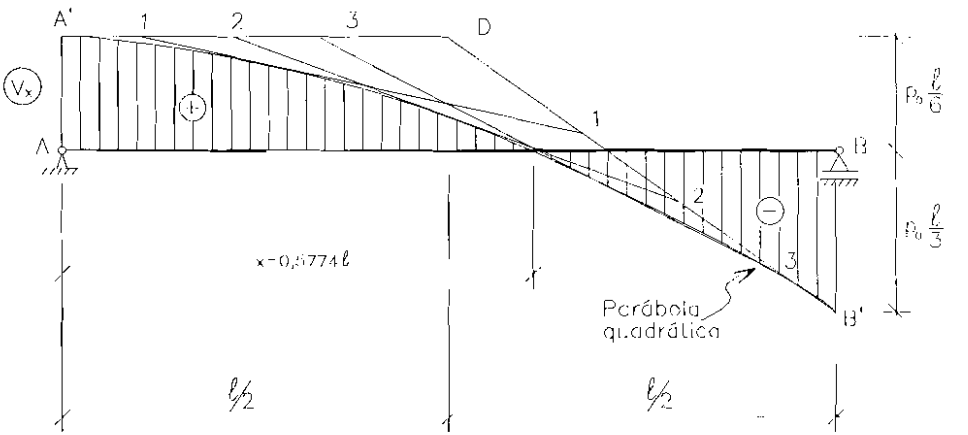


Figura 6.13

Observe-se que a inclinação da curva aumenta da esquerda para a direita, o mesmo acontecendo com o valor do carregamento distribuído.

Para a completa caracterização do diagrama de momentos fletores são necessários alguns parâmetros, além da flecha da parábola. Estes parâmetros são determinados como se segue.

O momento máximo ocorre no ponto onde a cortante se anula, ou seja, quando $\frac{dM_x}{dx} = 0$

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x = -\frac{p_o}{2\ell}x^2 + p_o\frac{\ell}{6} = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell = 0{,}5774\ell \tag{6.33}$$

$$M_{máx} = f = -\frac{p_o}{6\ell}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{3}\ell + p_o\frac{\ell}{6}\frac{\sqrt{3}}{3}\ell \quad \therefore$$

$$M_{máx} = f = \frac{\sqrt{3}}{27}p_o\ell^2 = 0{,}006415p_o\ell^2 = \frac{p_o\ell^2}{15{,}59} \tag{6.34}$$

O ponto de interseção das tangentes à parábola, nos extremos, é facilmente determinável pela condição $\frac{dM_x}{dx} = V_x$ nas extremidades da viga. A Fig. 6.14 ilustra tal fato.

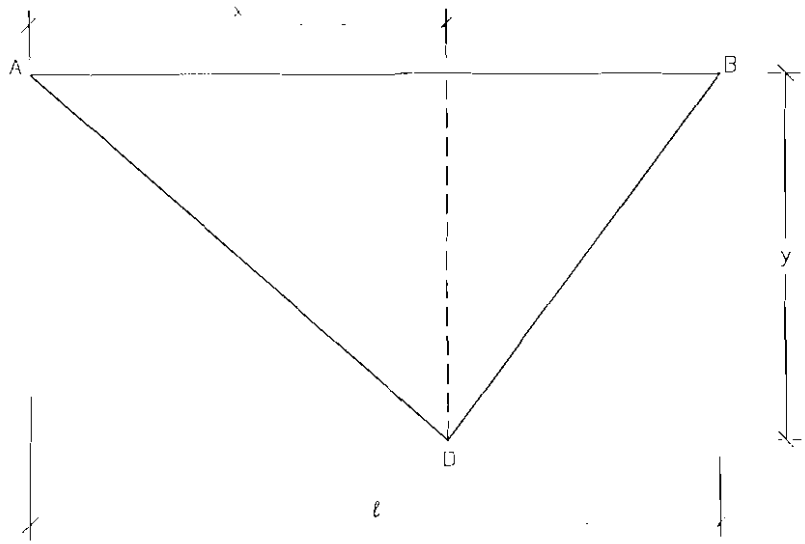


Figura 6.14

AD e BD são tangentes à parábola;

x e y são as coordenadas do ponto de interseção D;

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= p_o\frac{\ell}{6} = V_A \\ \frac{y}{\ell - x} &= p_o\frac{\ell}{3} = -V_B \end{aligned} \quad \therefore \quad \left\{ x = \frac{2}{3}\ell \;;\; y = p_o\frac{\ell^2}{9} \right.$$

Com os parâmetros determinados, podemos, enfim, traçar o diagrama do momento fletor para o carregamento dado. A Fig. 6.15 mostra o diagrama completo de M_x.

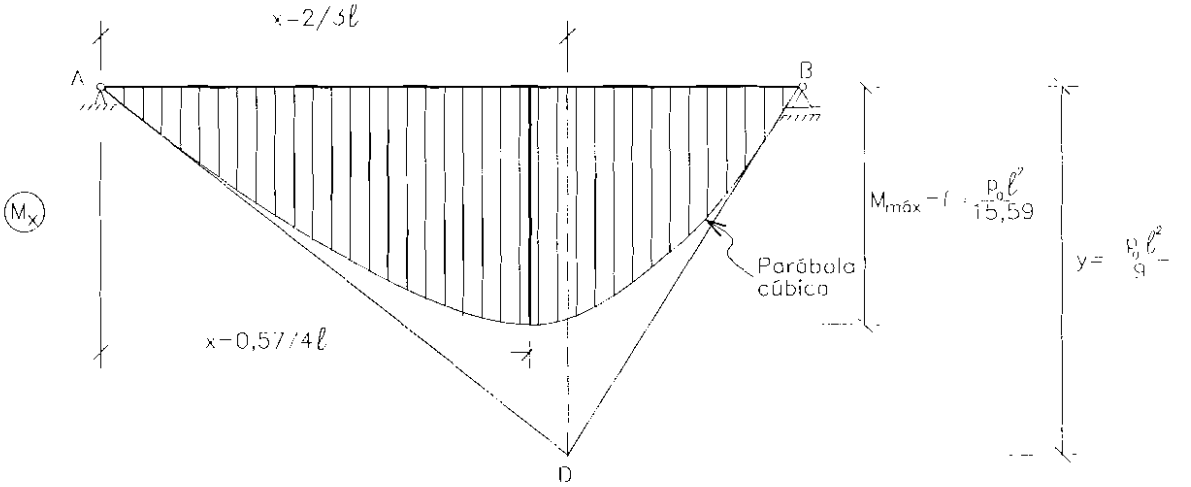


Figura 6.15

Exemplo 4 - Viga em balanço com carga distribuída variável linear

$$M_x = -\frac{p_o}{6\ell}x^3 + C_1 x + C_2$$

Condições de contorno:

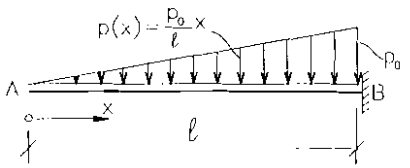


Figura 6.16

com

$$\begin{cases} x = 0 \\ M_x = 0 \end{cases}, \quad C_2 = 0 \tag{6.35}$$

com

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{dM_x}{dx} = 0 \end{cases}, \quad C_1 = 0 \tag{6.36}$$

$$M_x = -\frac{p_o}{6\ell}x^3 \tag{6.37}$$

$$V_x = -\frac{p_o}{6\ell}x^2 \tag{6.38}$$

A curva da força cortante é uma parábola quadrática e a do momento fletor, uma parábola cúbica. No engastamento B, os esforços são, portanto, $M_B = -p_o l^2/6$ e $V_B = -p_o l/2$.

A Fig. 6.17, mostra os diagramas de M_x e V_x.

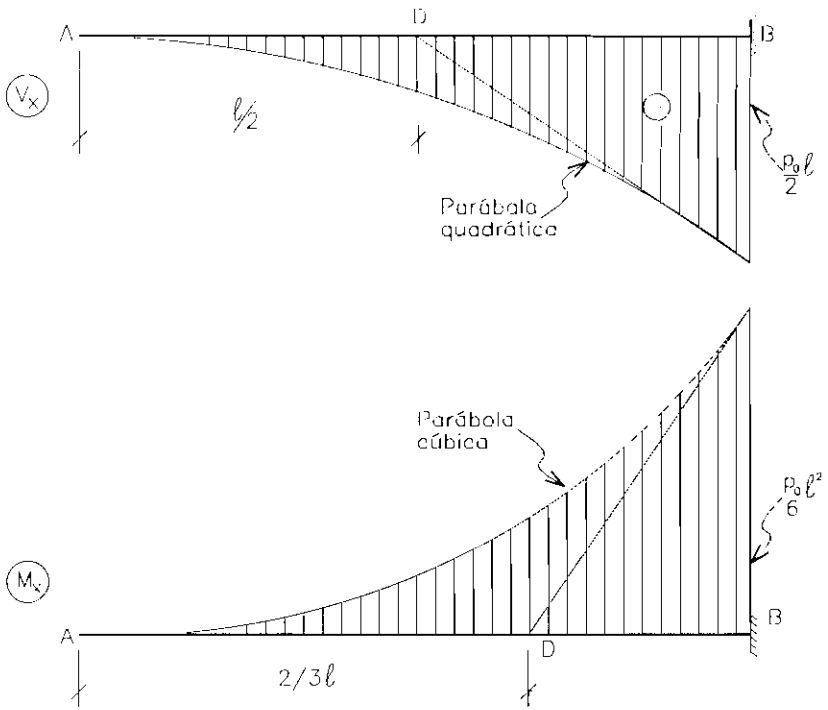


Figura 6.17

Se o carregamento fosse decrescente da esquerda para a direita, conforme a Fig. 6.18.a, os diagramas dos esforços solicitantes seriam como os indicados nas Fig. 6.18.b e c.

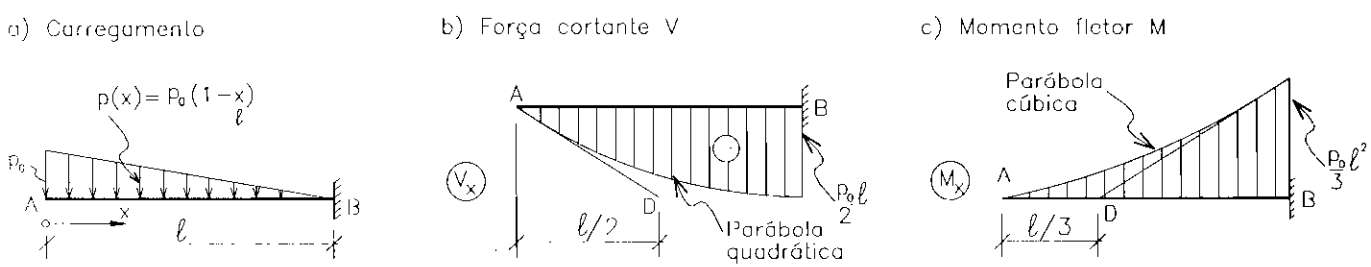


Figura 6.18

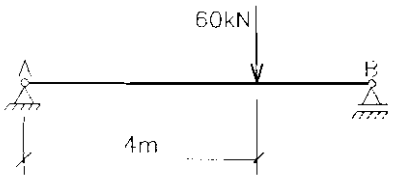
EXEMPLOS DE APLICAÇÃO — TRAÇADO DIRETO

7.1 - GENERALIDADES

Neste capítulo serão resolvidos alguns exemplos, iniciando pelas vigas simples, submetidas aos mais diversos carregamentos. Serão abordados, mais adiante, vigas do tipo Gerber, pórticos, arcos e estruturas planas submetidas a cargas perpendiculares ao seu plano, como as grelhas. Serão resolvidos os exemplos do Capítulo IV, que já têm as reações determinadas, com a inclusão de outros, considerados de importância para o desenvolvimento do tema nessa introdução à análise de estruturas.

Os exemplos serão resolvidos diretamente, apenas mentalizando os cortes nas seções de interesse e calculando as respectivas forças internas. As leis que regem a distribuição dos esforços solicitantes, ao longo do eixo da estrutura, bem como os preceitos formulados no capítulo anterior serão de capital importância para a compreensão das soluções aqui apresentadas.

a) Carregamento



b) Reações de apoio

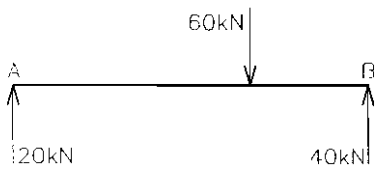


Figura 7.1

7.2 - VIGAS

Exemplo 1 - Viga simplesmente apoiada

a) Carga concentrada

As reações, calculadas no Capítulo IV, estão representadas na Fig. 7.1.b.

Como temos, no caso, carregamento descontínuo sem carga distribuída, o diagrama da cortante é constante em cada trecho e apresenta uma descontinuidade no ponto de aplicação da carga concentrada. Em qualquer corte mentalizado, no trecho à esquerda da carga, a cortante vale 20kN e tem sentido horário, portanto é positiva. No trecho à direita da carga, a cortante é anti-horária, portanto negativa, com intensidade de 40kN. O diagrama é mostrado na Fig. 7.2.a, onde se pode notar o "salto" numericamente igual ao valor da carga concentrada.

O diagrama do momento fletor é linear e apresenta uma angulosidade no ponto de aplicação da carga. O momento máximo ocorre nesta seção e coincide com o ponto onde a cortante muda de sinal. Imaginando um corte no ponto de aplicação da carga e com as forças do lado esquerdo, teremos

$M = 4 \times 20 = 80\ kN.m$ (tração nas fibras inferiores)

Como nas extremidades da viga o momento é nulo, pode-se desenhar o diagrama de M. A figura 7.2.b, mostra o diagrama dos momentos fletores na viga.

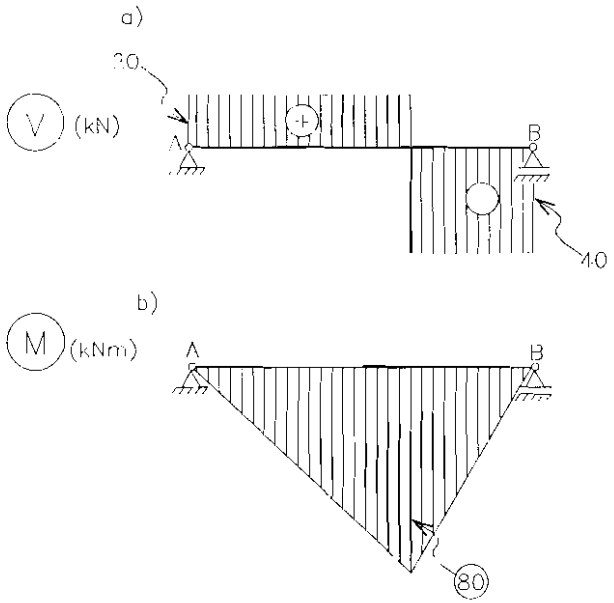


Figura 7.2

b) Carga uniformemente distribuída

As reações, calculadas no Capítulo IV, estão representadas na Fig. 7.3.b.

Neste exemplo, o carregamento é contínuo e uniformemente distribuído. Temos, portanto, para cada esforço solicitante uma única função regente. A curva do momento fletor é uma parábola do segundo grau, com a corda horizontal — momentos nulos nas extremidades da viga — e a força cortante varia linearmente.

Para traçar os diagramas de V e M, serão necessários, respectivamente, os valores das cortantes nas extremidades e a flecha da parábola, que neste caso coincide com o momento máximo. Assim, teremos

$V_A = 9kN$

$V_B = -9kN$

$f = M_{máx} = \frac{p\ell^2}{8} = 3 \text{ x } \frac{6^2}{8} = 13{,}5kNm$ (tração embaixo)

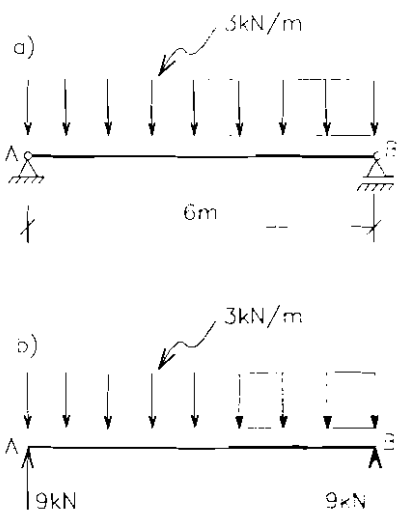


Figura 7.3

Note-se que, neste caso, o momento máximo ocorre onde a força cortante se anula, ou onde muda de sinal. A Fig. 7.4 mostra os diagramas, onde a parábola foi construída conforme as regras vistas no Capítulo VI.

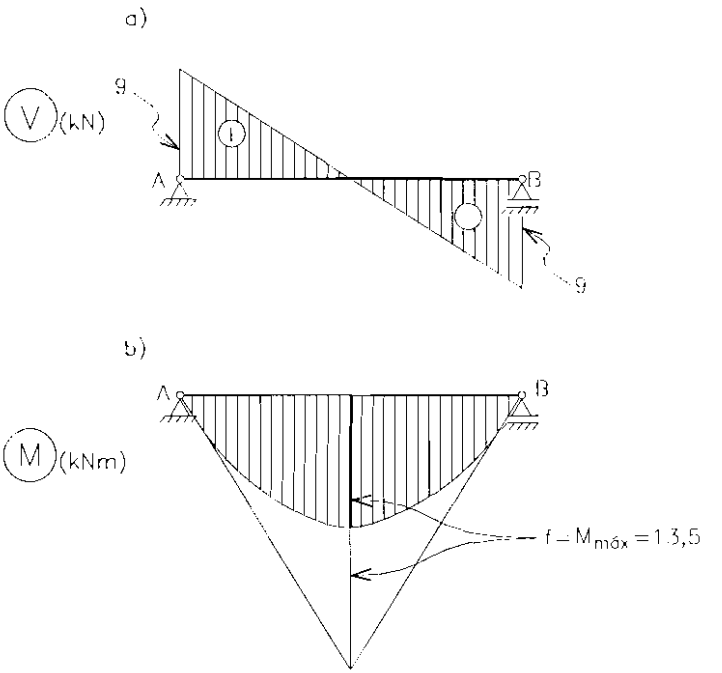


Figura 7.4

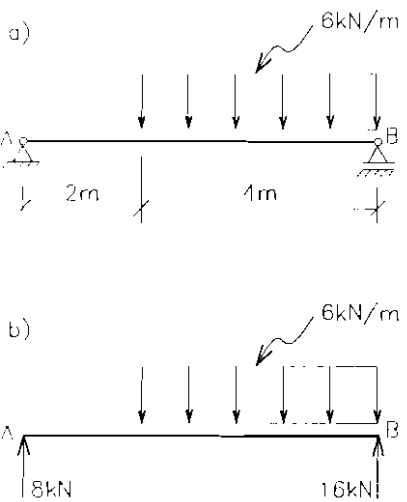


Figura 7.5

c) Carga uniforme distribuída cuja extremidade não alcança o outro apoio

As reações, calculadas no Capítulo IV, estão representadas na Fig. 7.5.b.

Neste exemplo, temos um carregamento distribuído descontínuo e portanto dois trechos. O trecho sem carga distribuída apresenta o diagrama de V constante e o de M, linear. No trecho com carga distribuída a cortante é linear e o momento fletor, parábola do segundo grau.

O diagrama de V não tem descontinuidade, pois não existe carga concentrada aplicada no vão da viga, mas apresenta uma angulosidade no ponto onde começa o carregamento distribuído. Fato devido à descontinuidade do carregamento.

O diagrama de M é contínuo, sem angulosidades. Isto indica que a parte linear do diagrama é tangente à parábola.

Traçado do diagrama da força cortante

No trecho com p = 0, a cortante é positiva e numericamente igual a 8kN. No segundo trecho, para traçar a reta de V basta mais um ponto, por exemplo a cortante no apoio B, negativa, pois anti-horária, e numericamente igual a 16kN. O diagrama está indicado na Fig. 7.6.a.

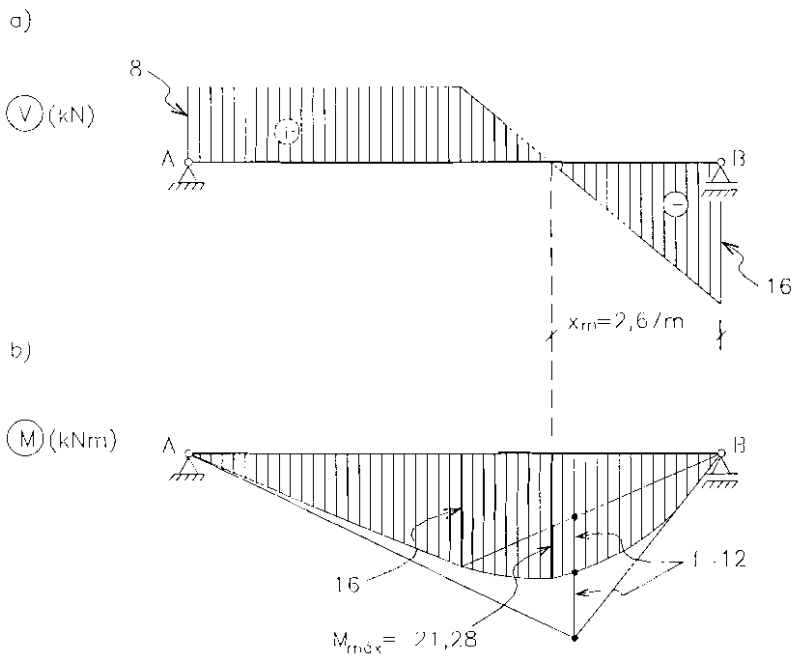


Figura 7.6

Traçado do diagrama do momento fletor

Como o momento fletor em A é nulo, para traçar a reta de M basta mais um valor da função, assim no extremo do trecho linear temos

M = 2 x 8 = 16kNm

O momento em B também é nulo, portanto temos definida a corda da parábola, ou a sua linha de fecho. Basta, portanto, o valor da flecha que é

$$f = \frac{6 \times 4^2}{8} = 12\text{kNm}$$

O momento máximo ocorre no ponto em que a cortante se anula. Assim, com as forças aplicadas no lado direito da viga anulamos a cortante na seção genérica, distante x_m do apoio B.

$$V = -16 + 6x_m = 0 \ \therefore x_m = 2{,}67\text{m}$$

O momento máximo vale, então,

$$M_{máx} = 2{,}67 \times 16 - 6 \times 2{,}67 \times \frac{2{,}67}{2} = 21{,}28\text{kNm}$$

O diagrama completo está representado na Fig. 7.6.b.

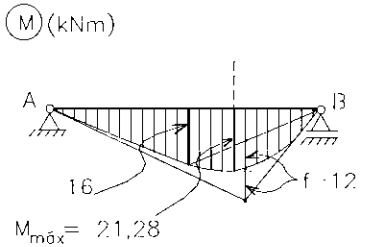


Figura 7.6.b

d) Carga uniforme distribuída parcialmente

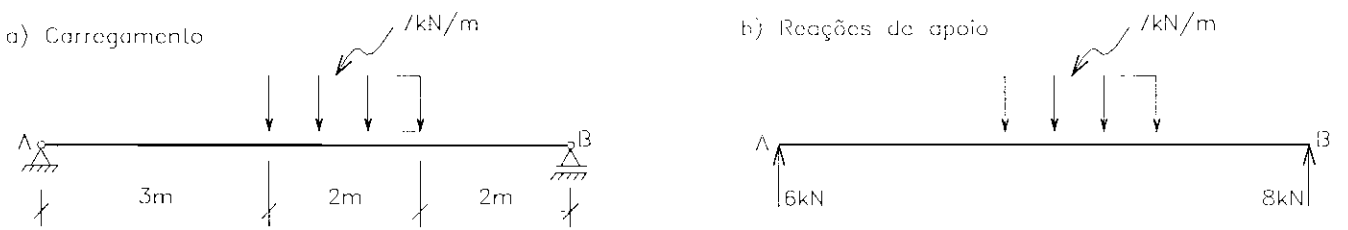


Figura 7.7

As reações de apoio, que podem ser facilmente calculadas, são apresentadas na Fig. 7.7.b.

Neste exemplo, à semelhança do anterior, o carregamento distribuído é parcial e são três os trechos a se considerar para o traçado dos diagramas. No caso da força cortante, temos dois trechos constantes interligados por um trecho intermediário linear.

No caso do momento fletor, os trechos lineares das extremidades são tangentes ao trecho parabólico. As outras considerações são semelhantes às do exemplo anterior. Os diagramas completos estão representados na Fig. 7.8.

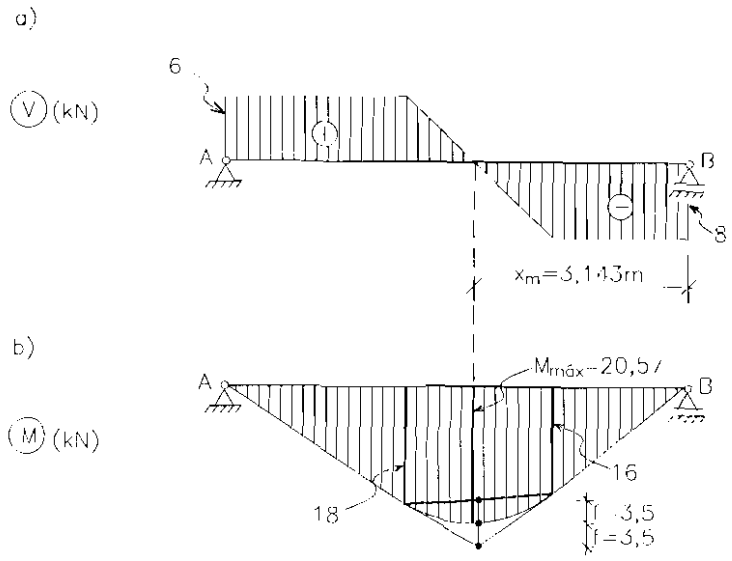


Figura 7.8

Cálculo do $M_{máx}$

$$V = -8 + 7 \text{ x } (x_m - 2) = 0 \quad \therefore \quad x_m = 3{,}143\text{m}$$

$$M_{máx} = 8 \text{ x } 3{,}143 - 7 \text{ x } (3{,}143 - 2) \text{ x } \frac{(3{,}143 - 2)}{2} \quad \therefore \quad M_{máx} = 20{,}57\text{kNm}$$

e) Carga uniforme descontínua

As reações são facilmente determináveis e estão representadas na Fig. 7.9.b.

A descontinuidade da carga indica um ponto singular, ou angulosidade, no diagrama da força cortante. Em cada trecho com carga distribuída, a função é linear. Como são conhecidas as cortantes em A, 25kN, e em B, −29kN, basta determinar o valor de V na seção onde a carga distribuída muda de valor e traçar as retas.

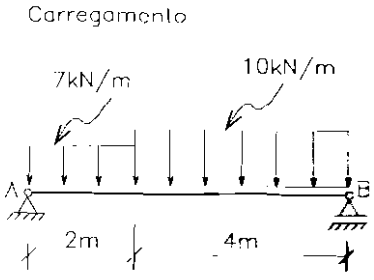


Figura 7.9a

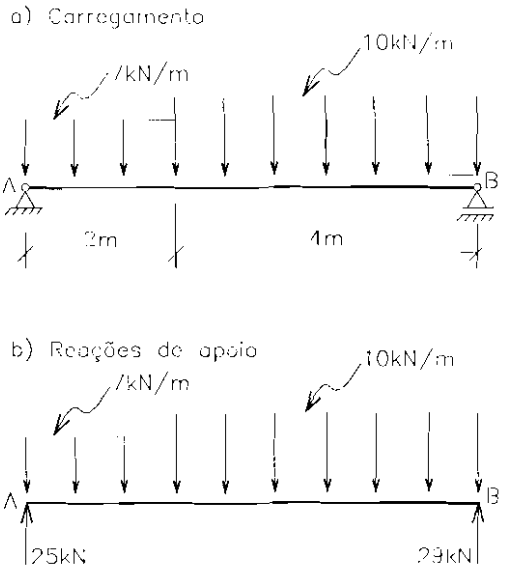


Figura 7.9

Assim, considerando as forças à esquerda da seção,

$$V = 25 - 14 = 11\text{kN}$$

O diagrama da força cortante está representado na Fig. 7.10.a.

Em cada trecho com carga distribuída a função de M é uma parábola do segundo grau, todas distintas entre si. No ponto onde ocorre a descontinuidade da carga, no entanto, a tangente às duas funções tem a mesma inclinação.

Para traçar o diagrama do momento fletor basta, portanto, determinar o valor de M na seção onde p muda de valor, assim teremos, considerando as cargas do lado esquerdo da seção,

$$M = 2 \text{ x } 25 - 1 \text{ x } 14 = 36\text{kNm}$$

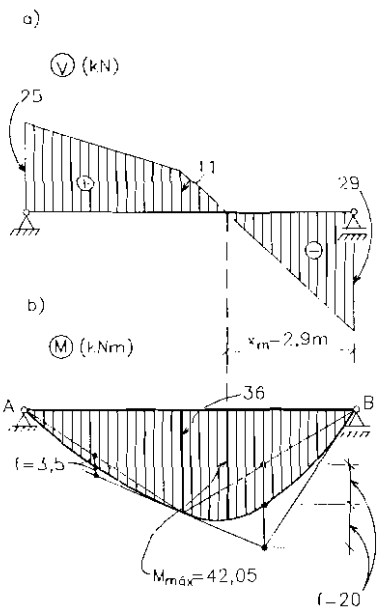


Figura 7.10

Com as flechas das parábolas em cada trecho pode-se construir o diagrama. O momento máximo ocorre no ponto onde a cortante se anula e pode ser assim determinado

$$V = -29 + 10x_m = 0 \quad \therefore \quad x_m = 2{,}9\text{m}$$

$$M_{máx} = 2{,}9 \text{ x } 29 - 10 \text{ x } 2{,}9 \text{ x } \frac{2{,}9}{2} \quad \therefore \quad M_{máx} = 42{,}05\text{kNm}$$

O diagrama completo encontra-se representado na Fig. 7.10.b.

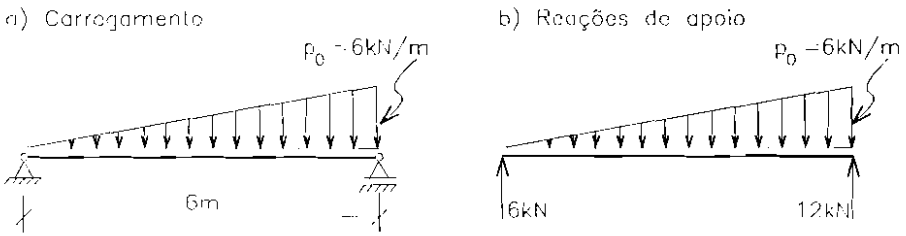


Figura 7.11

f) Carga variável linearmente

As reações, calculadas no Capítulo IV, estão representadas na Fig. 7.11.b.

Neste caso temos um carregamento contínuo, variável linearmente. Como vimos no Capítulo VI, a força cortante varia segundo uma parábola quadrática e o momento fletor, segundo uma parábola do terceiro grau.

A força cortante em A tem tangente nula e sua inclinação aumenta da esquerda para a direita. O momento máximo ocorre onde a cortante se anula. De acordo com o terceiro exemplo do capítulo anterior, podemos traçar diretamente os diagramas, que podem ser vistos na Fig. 7.12.

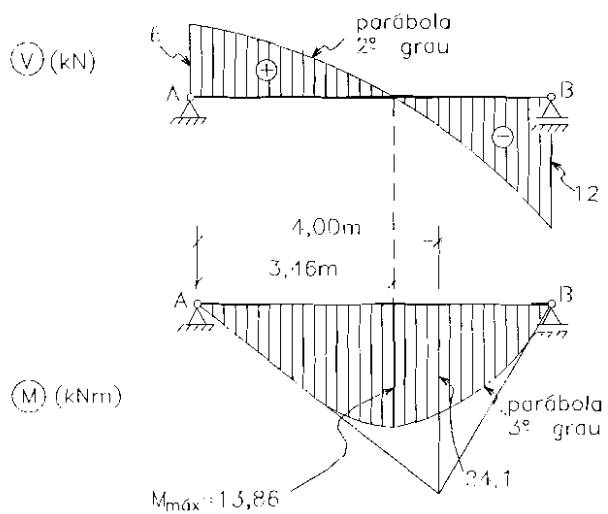


Figura 7.12

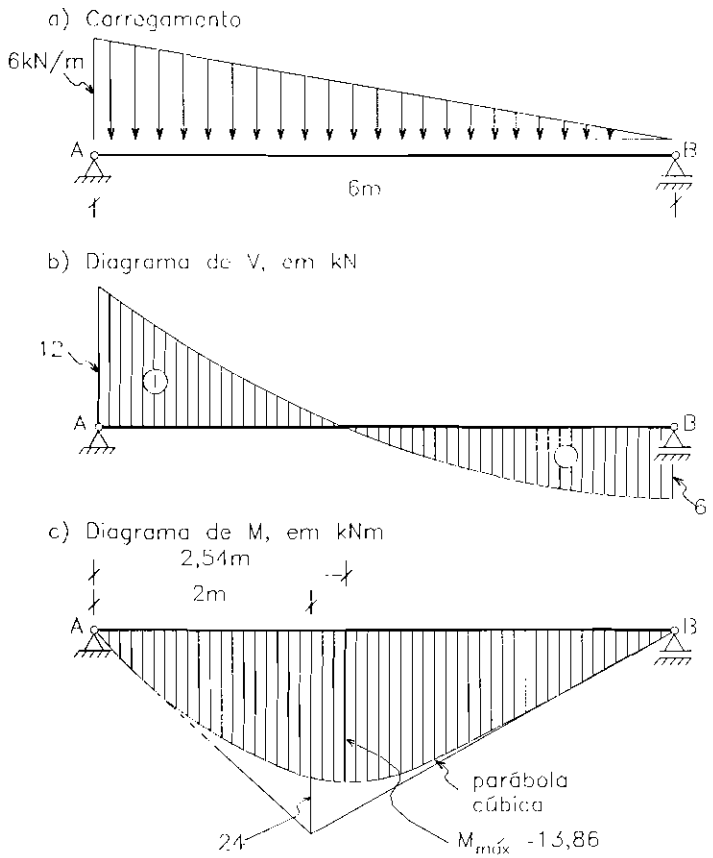


Figura 7.13

Supondo que o mesmo carregamento tivesse, agora, o vértice em B, conforme a Fig. 7.13.a, os diagramas dos esforços solicitantes seriam os da Fig. 7.13, diagramas b e c.

g) Carga momento

Resolveremos este exemplo literalmente por ser o resultado final mais interessante desta forma. Os casos possíveis de carregamento são para carga nas extremidades e no interior do vão.

A Fig. 7.14 mostra os três casos possíveis, com as respectivas reações de apoio (os momentos M_o foram considerados no sentido horário).

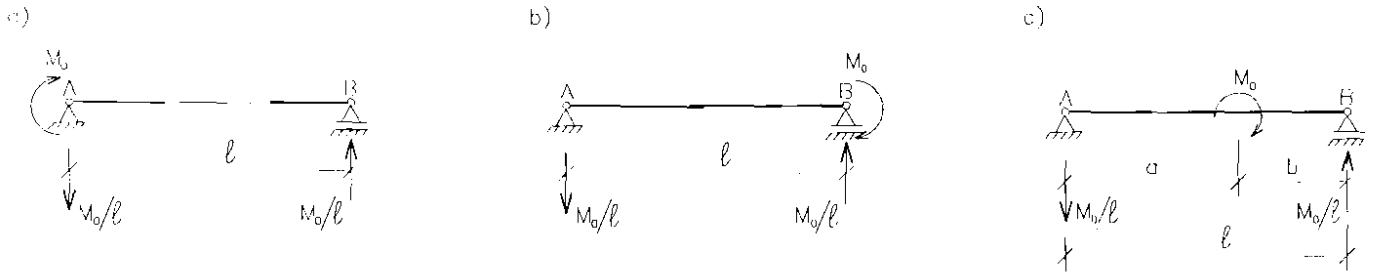


Figura 7.14

Nos casos a e b o momento fletor varia linearmente, com o momento nulo nos apoios opostos à carga e com o momento M_0 no apoio carregado. A força cortante é constante e negativa (anti-horário) em ambos os casos.

No caso c, o momento fletor também varia linearmente, apresentando uma descontinuidade no ponto de aplicação de M_0. A força cortante é constante, indicando que a linha de M, nos dois trechos, tem a mesma inclinação. Note-se que o "salto" no diagrama de momento fletor é numericamente igual ao momento aplicado.

A Fig. 7.15 apresenta os diagramas de V e M para os três casos.

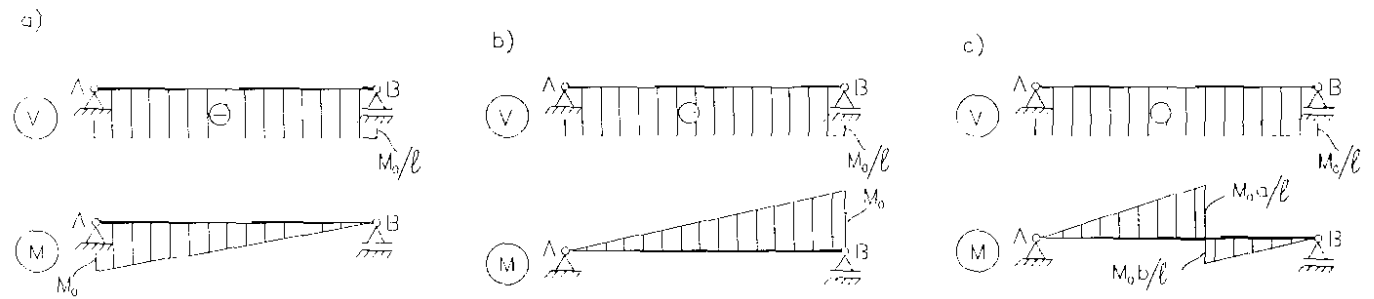


Figura 7.15

Exemplo 2 - Viga inclinada simplesmente apoiada

Carga distribuída uniforme

Atuando sobre a viga inclinada podem ocorrer carregamentos distribuídos verticais ou horizontais. A Fig. 7.16 mostra os dois casos, onde a e b são, respectivamente, as projeções horizontal e vertical do vão *l*.

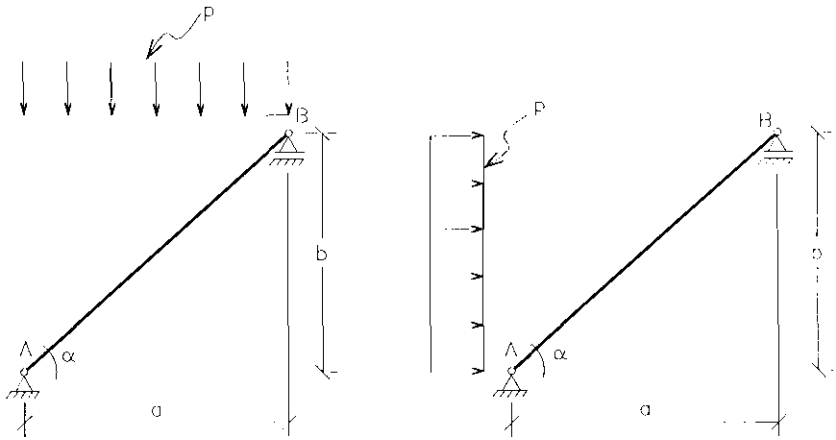


Figura 7.16

Também neste caso a variação dos esforços solicitantes pode ser mostrada por diagramas, utilizando como eixo das abcissas o próprio eixo da viga e representando, segundo o eixo das ordenadas, a intensidade do esforço, seção por seção.

Como no caso de eixos horizontais, o momento varia parabolicamente, bastando para sua caracterização o valor do momento máximo, ou flecha da parábola. O valor da flecha pode ser calculado em função da projeção do vão e deve ser indicado perpendicularmente ao eixo da viga. A Fig. 7.17 mostra os diagramas de M.

Para o traçado dos diagramas de forças cortantes e forças normais é conveniente decompor o carregamento e as reações de apoio em componentes perpendiculares e paralelas ao eixo da viga. As reações podem ser calculadas, muito facilmente, com o emprego das equações de equilíbrio. Com base na Fig. 7.18, temos

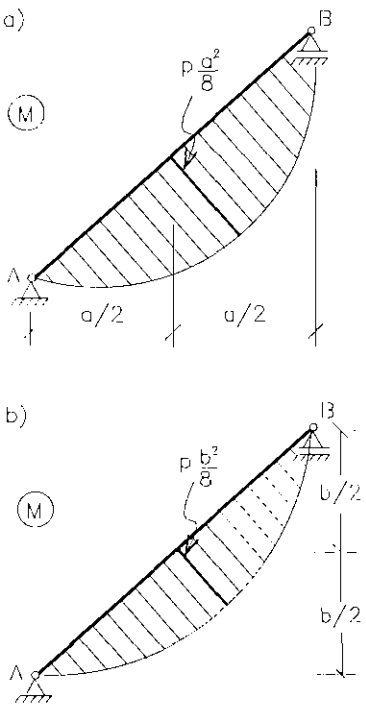


Figura 7.17

Caso a

Com $\sum M_A = 0$,

$$aR_{VB} - pa\frac{a}{2} = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = \frac{pa}{2}$$

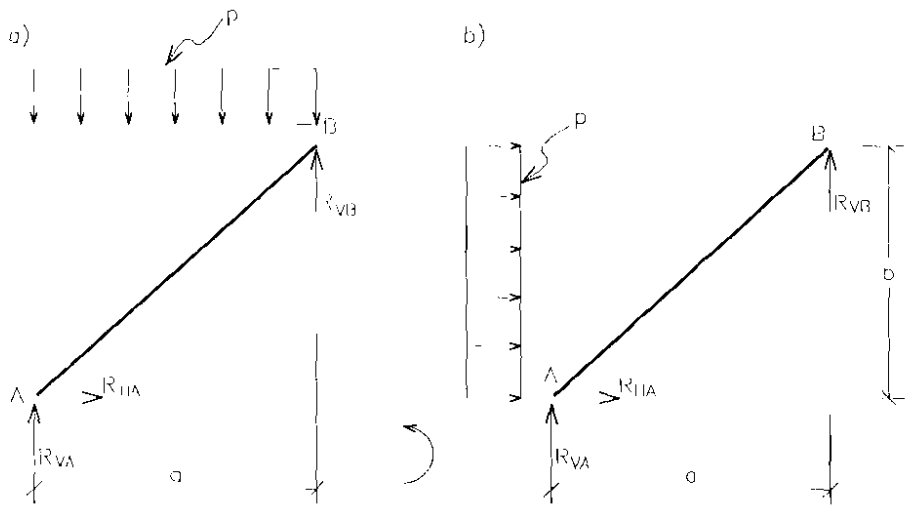


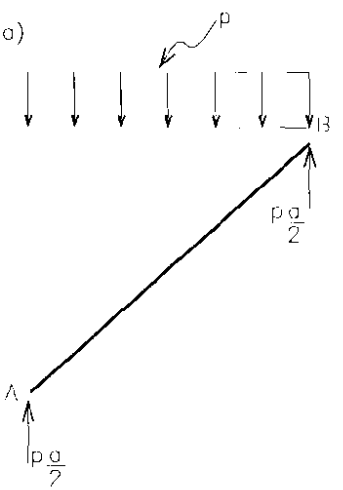
Figura 7.18

com $\sum X = 0$,

$R_{HA} = 0$

com $\sum Y = 0$,

$$R_{VA} + \frac{pa}{2} - pa = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = \frac{pa}{2}$$



Caso b

Com $\sum M_A = 0$,

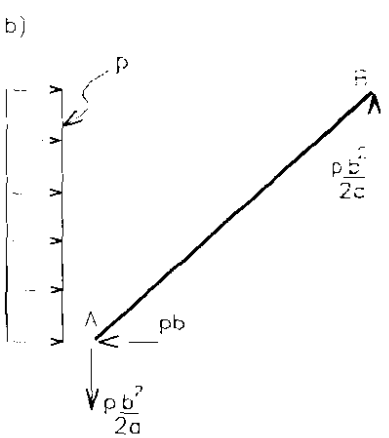
$$aR_{VB} - pb\frac{b}{2} = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = \frac{pb^2}{2a}$$

com $\sum X = 0$,

$$pb + R_{HA} = 0 \quad \therefore \quad R_{HA} = -pb$$

com $\sum Y = 0$,

$$R_{VA} + \frac{pb^2}{2a} = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = -\frac{pb^2}{2a}$$



A Fig. 7.19 mostra as reações de apoio, para os dois casos, com os sentidos corretos.

Figura 7.19

As componentes dos carregamentos podem ser determinadas com base na Fig. 7.20.

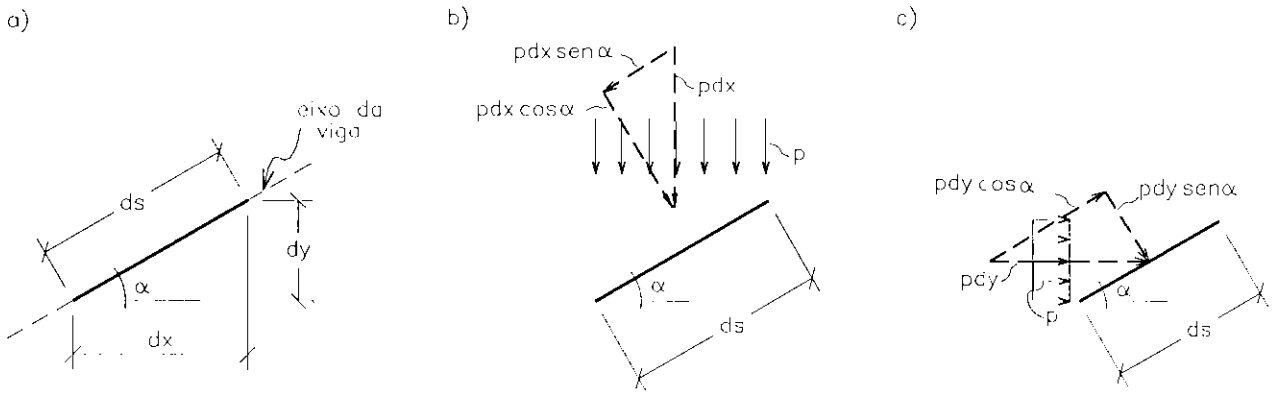


Figura 7.20

$$ds = \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$$

A resultante do carregamento vertical que atua no comprimento dx é pdx. A Fig. 7.20.b mostra a resultante pdx com suas componentes perpendicular e paralela a ds, pdx.cosα e pdx.senα, respectivamente. Estas componentes podem ser distribuídas uniformemente pelas unidades de comprimento do eixo da viga, bastando, para isto, dividi-las por ds, onde ds = dx/cosα, Fig. 7.20.a,

$$pd\,x\cos\alpha\frac{1}{ds} = pd\,x\,\cos\alpha\frac{1}{\frac{dx}{\cos\alpha}} = p\cos^2\alpha \tag{7.1}$$

$$pd\,x\,\operatorname{sen}\alpha\frac{1}{ds} = pd\,x\,\operatorname{sen}\alpha\frac{1}{\frac{dx}{\cos\alpha}} = p\,\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \tag{7.2}$$

Para o carregamento horizontal, Fig. 7.20.c, valem as mesmas considerações. Desta forma, teremos, com ds = dy/senα, Fig. 7.20.a,

$$pdy\,\operatorname{sen}\alpha\frac{1}{ds} = pdy\,\operatorname{sen}\alpha\frac{1}{\frac{dy}{\operatorname{sen}\alpha}} = p\,\operatorname{sen}^2\alpha \tag{7.3}$$

$$pdy\,\cos\alpha\frac{1}{ds} = pdy\,\cos\alpha\frac{1}{\frac{dy}{\operatorname{sen}\alpha}} = p\,\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \tag{7.4}$$

A Fig. 7.21 mostra as componentes do carregamento e das reações de apoio para os dois casos.

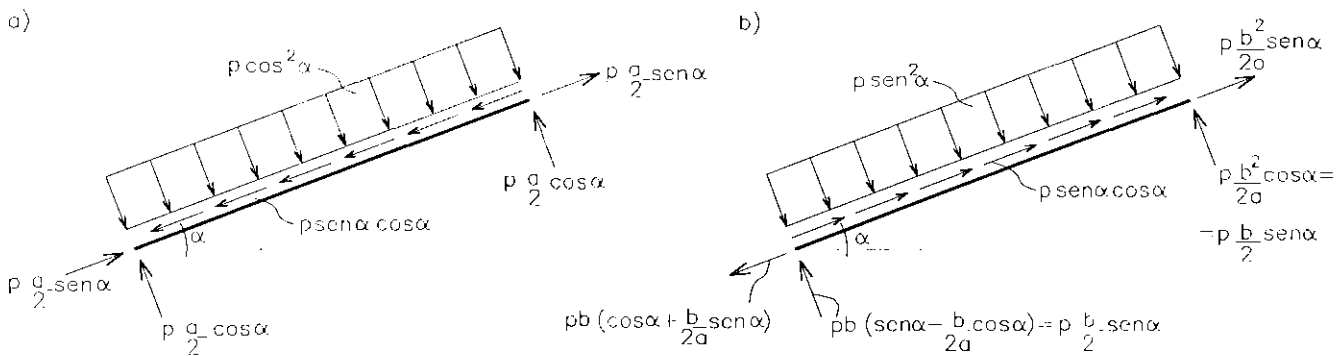


Figura 7.21

O traçado dos diagramas de esforços cortantes e axiais fica, assim, simplificado. Como as cargas ao longo da viga são uniformemente distribuídas, os diagramas são lineares, bastando os valores dos esforços solicitantes nas extremidades para o traçado das linhas.

A Fig. 7.22, a seguir, mostra os diagramas de V_S e N_S completos.

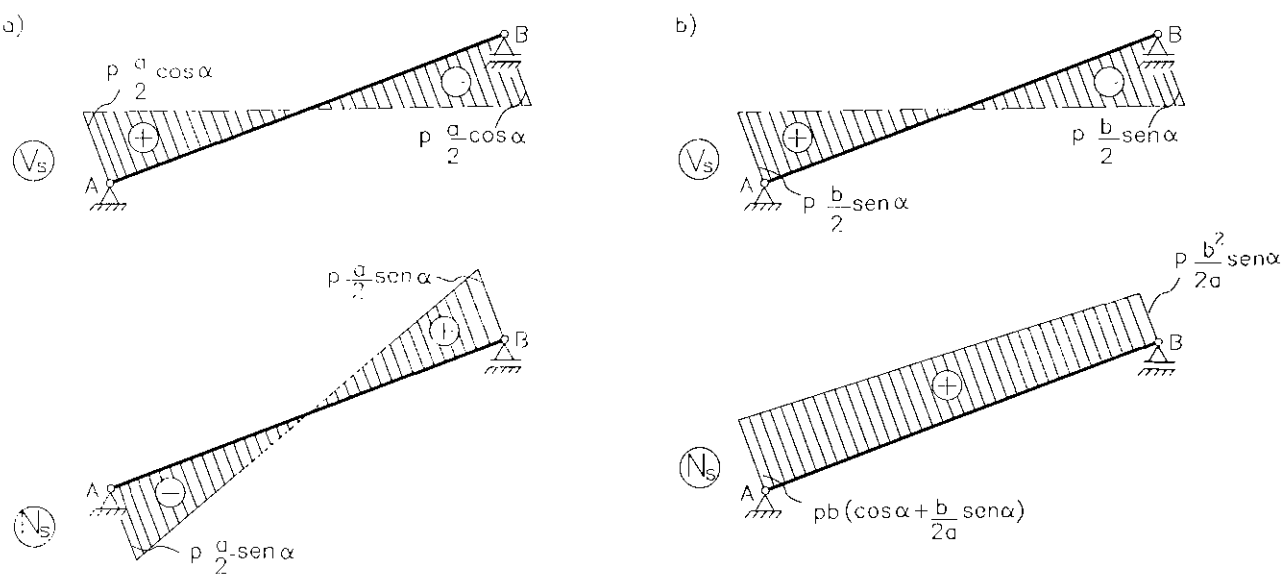
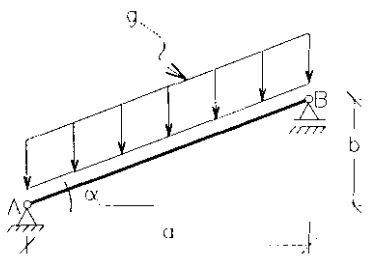


Figura 7.22

Exemplo 3 - Viga inclinada com peso próprio

a) Viga c/ peso próprio



b) Reações de apoio

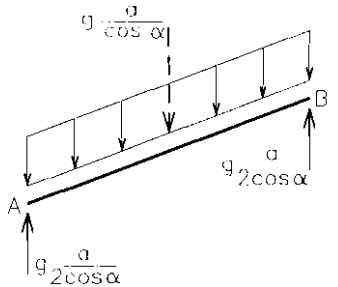


Figura 7.23

O peso próprio de um elemento estrutural linear pode ser considerado como um carregamento uniforme, distribuído linearmente sobre o eixo do elemento. A direção do carregamento é sempre vertical, atuando de cima para baixo, como toda força gravitacional.

Veremos neste exemplo a análise estrutural da viga simples, inclinada, submetida ao seu peso próprio, ilustrada na Fig. 7.23.a, onde a e b são as projeções horizontais do vão *l*.

As reações de apoio são imediatas e determinadas em função da resultante do carregamento distribuído, g a/ cos α. A Fig. 7.23.b mostra tais reações.

Para resolver a viga inclinada com peso próprio torna-se mais cômodo trabalhar com as componentes do carregamento nas direções perpendicular e paralela ao eixo da viga.

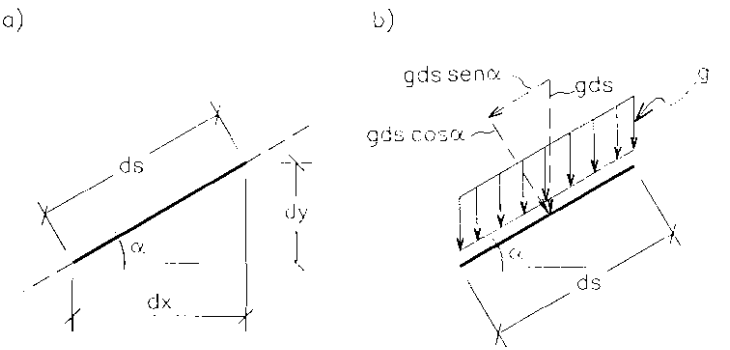


Figura 7.24

A resultante do peso próprio, que atua no comprimento ds, é gds com componentes gds cos α e gds sen α, respectivamente nas direções perpendicular e paralela a ds. Estas podem ser distribuídas, uniformemente, por unidade de comprimento do eixo. Assim teremos, com base na Fig. 7.24,

$$\text{gds } \cos\alpha . \frac{1}{\text{ds}} = \text{g} \cos\alpha \tag{7.5}$$

$$\text{gds } \text{sen}\,\alpha . \frac{1}{\text{ds}} = \text{g sen}\,\alpha \tag{7.6}$$

A Fig. 7.25 mostra a viga com as componentes do carregamento e das reações de apoio.

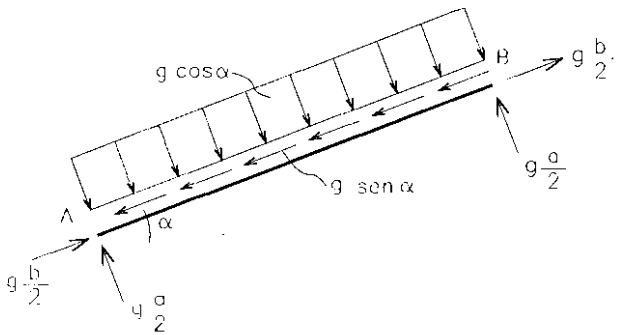


Figura 7.25

Para a viga simplesmente apoiada submetida aos esforços externos da Fig. 7.25 o momento fletor varia parabolicamente e as forças normal e cortante variam linearmente. A Fig. 7.26 mostra os diagramas dos esforços solicitantes.

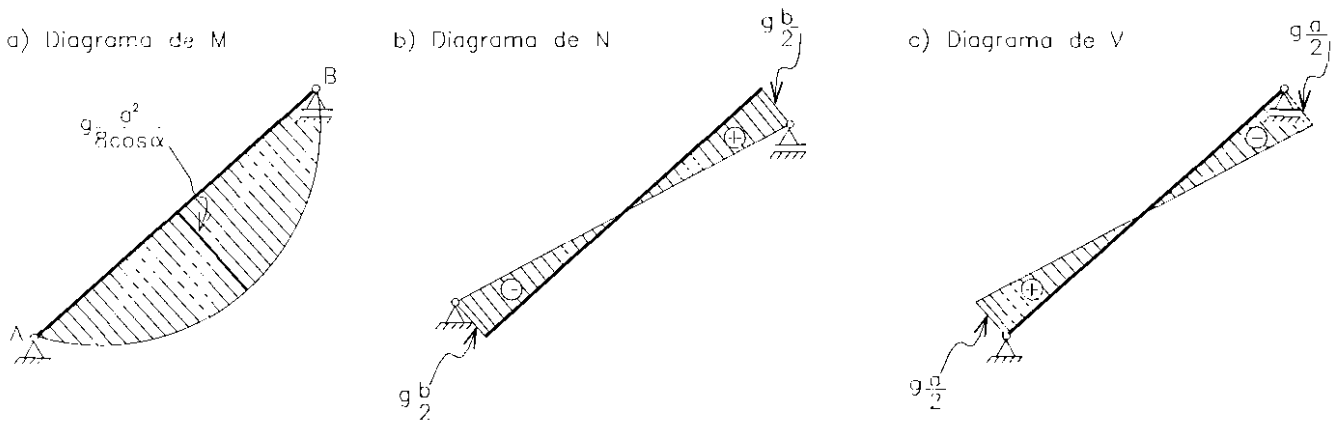


Figura 7.26

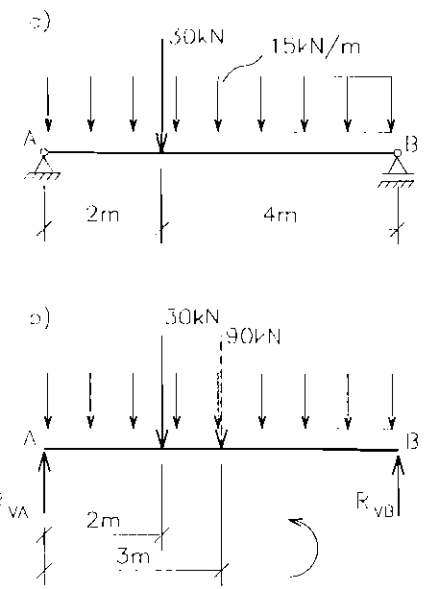


Figura 7.27

Exemplo 4 - Carregamentos combinados

As estruturas podem ser submetidas a carregamentos combinados, tais como cargas concentradas, distribuídas e momentos, nas mais diversas situações. Resolveremos, neste item, alguns casos convencionais, visando aplicações práticas futuras.

Retornaremos aos exemplos numéricos, para evitar a utilização dos exemplos como formulário e levar o leitor a resolver cada situação à medida que forem surgindo nas suas aplicações em análise estrutural.

a) Cargas concentradas e distribuídas

Exemplo 1

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para o carregamento da Fig. 7.27.a.

Cálculo das reações

Como o carregamento é transversal ao eixo da viga, só existem reações verticais. Conforme o diagrama de corpo livre da Fig. 7.27.b,

com $\sum M_A = 0$

$6 \times R_{VB} - 3 \times 90 - 2 \times 30 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 55kN$

com $\sum Y = 0$

$R_{VA} + 55 - 30 - 90 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 65kN$

A montagem dos resultados está apresentada na Fig. 7.28.

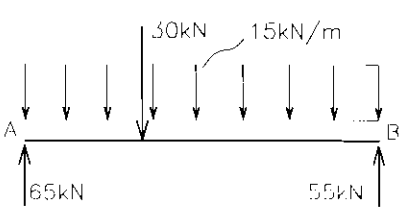


Figura 7.28

Esforços solicitantes

Para efeito do cálculo dos esforços solicitantes a carga concentrada, de 30kN, divide a viga em dois trechos com carga uniformemente distribuída. Assim, as forças cortantes variam linearmente, com a mesma inclinação em cada

trecho e o diagrama tem uma descontinuidade no ponto de aplicação da carga. Para definir as linhas da força cortante, bastam portanto dois pontos, no início e na extremidade de cada trecho.

Desta forma teremos

$V_A = 65kN$

Cortante à esquerda da carga concentrada

$V_{esq} = 65 - 30 = 35kN$ (horário)

Cortante à direita da carga concentrada

$V_{dir} = 65 - 30 - 30 = 5kN$ (horário)

$V_B = -55kN$

O momento fletor varia parabolicamente em cada trecho, bastando, portanto, para sua definição, as flechas e as cordas das respectivas parábolas. No ponto de aplicação da carga concentrada, o diagrama apresenta uma angulosidade, ou ponto singular. O momento máximo ocorre no ponto em que a cortante se anula. Nos apoios, o momento fletor é nulo, bastando calcular o momento fletor no ponto de aplicação da carga

$M = 2 \times 65 - 1 \times 30 = 100kNm$ (tração embaixo)

Os diagramas de V e M estão ilustrados na Fig. 7.29.

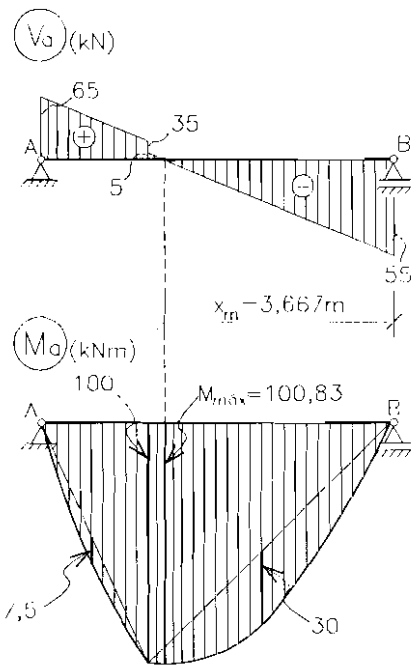


Figura 7.29

A estrutura da Fig. 7.27.a poderia facilmente ser resolvida superpondo-se os carregamentos, concentrado e uniformemente distribuído, aplicados isoladamente na viga simplesmente apoiada, conforme mostrado na Fig. 7.30.

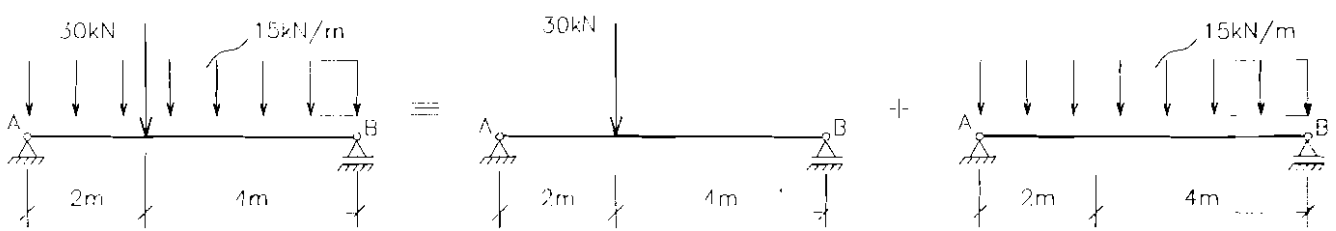


Figura 7.30

Conhecidos os diagramas de estado, das forças cortantes e dos momentos fletores, para cada carregamento, estes podem ser superpostos somando-se alge-

bricamente as coordenadas, seção por seção. Os diagramas finais são apresentados nas Fig. 7.31.a e 7.31.b.

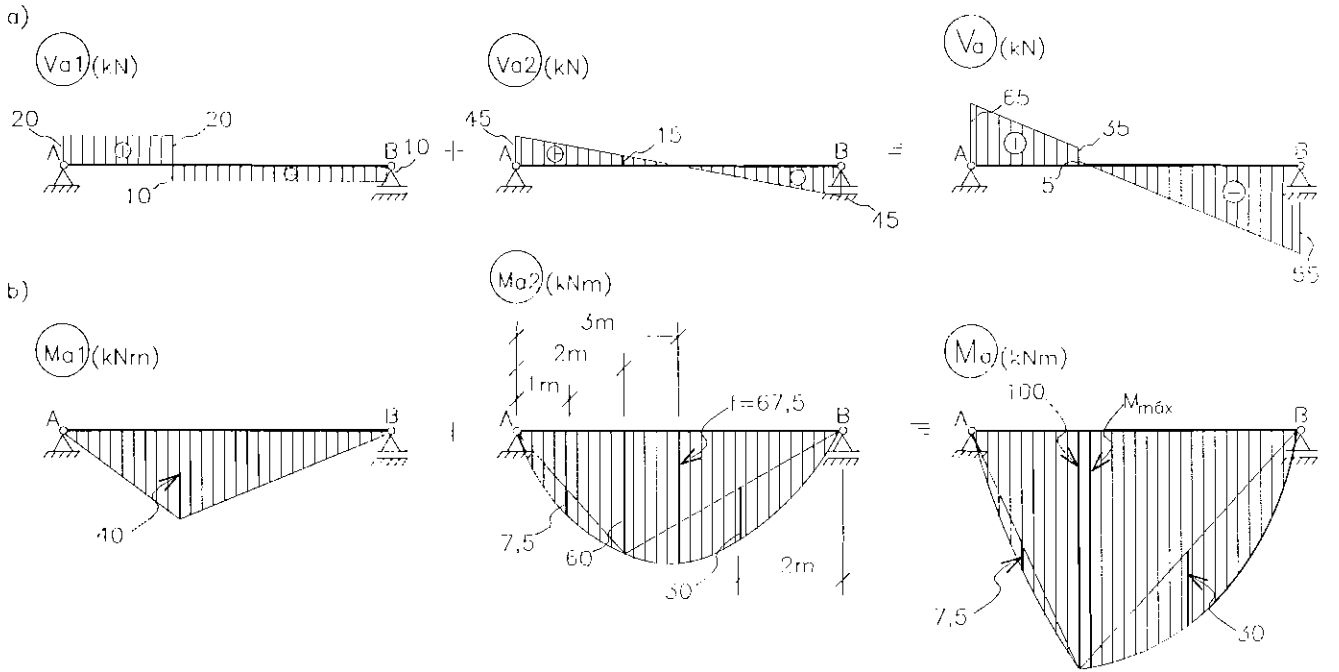


Figura 7.31

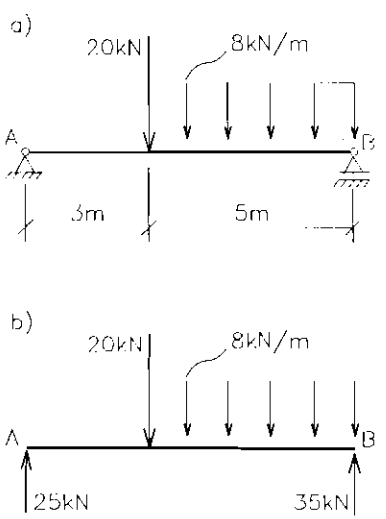


Figura 7.32

Exemplo 2

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para o carregamento da Fig. 7.32.a.

As reações de apoio são imediatas e encontram-se indicadas na Fig. 7.32.b. Como no exemplo anterior, os diagramas possuem dois trechos distintos. A força cortante é constante no primeiro trecho, à esquerda da carga concentrada, e linear no segundo.

Para traçar o diagrama de V basta determinar a cortante à direita da carga concentrada

$V_{dir} = 25 - 20 = 5kN$, ou

$V_{dir} = -35 + 40 = 5kN$ (horário)

O momento fletor varia linearmente no primeiro trecho e parabolicamente no segundo. Para traçar o diagrama de M basta determinar o momento fletor no ponto de aplicação da carga ficando, então, definida a posição da corda da parábola.

$M = 3 \times 25 = 75 kNm$, ou

$M = 5 \times 36 - 40 \times 2{,}5 = 75 kNm$ (tração embaixo)

A Fig. 7.33 mostra os diagramas dos esforços solicitantes V e M.

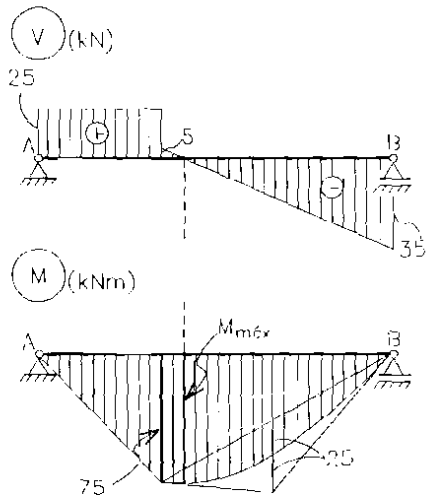


Figura 7.33

b) Cargas concentradas, cargas distribuídas e carga momento

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para o carregamento e estrutura da Fig. 7.34.a.

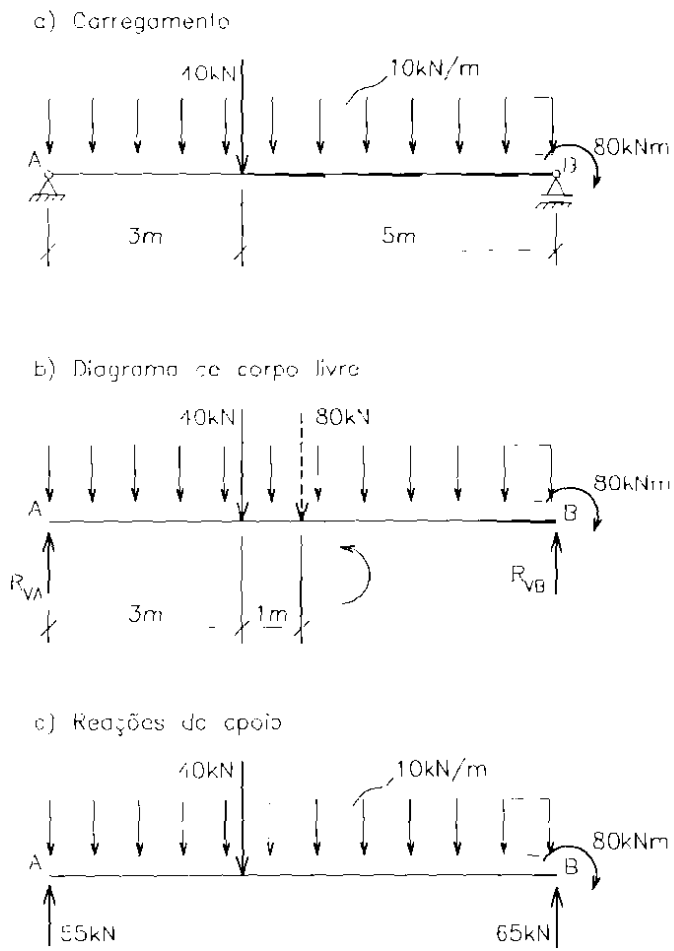


Figura 7.34

As reações de apoio são facilmente calculáveis através das equações de equilíbrio. Assim,

$$\text{com } \sum M_A = 0$$

$$8 \times R_{VB} - 80 - 4 \times 80 - 3 \times 40 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 65\text{kN}$$

$$\text{com } \sum Y = 0$$

$$R_{VA} + 65 - 40 - 80 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 55\text{kN}$$

Para efeito do traçado dos diagramas dos esforços solicitantes consideramos dois trechos, com carga uniformemente distribuída, à esquerda e à direita da carga de 40kN.

A força cortante é, portanto, linear, tendo a mesma inclinação em ambos os trechos. No ponto de aplicação da carga concentrada o diagrama apresenta uma descontinuidade, com "salto" numericamente igual ao valor da carga.

Sabendo-se que nos apoios a força cortante é numericamente igual às reações, resta determinar o esforço à esquerda e à direita da carga concentrada.

$$V_{esq} = 55 - 30 = 25\text{kN}$$

$$V_{dir} = 55 - 30 - 40 = -15\text{kN}$$

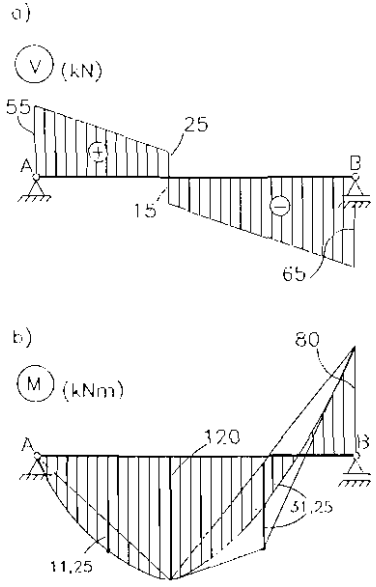


Figura 7.35

O momento fletor varia parabolicamente em cada trecho. No apoio A é nulo e no apoio B é numericamente igual ao momento aplicado, tracionando a face superior da viga. No ponto de aplicação da carga, o diagrama de M tem uma angulosidade.

Para traçar o diagrama de momentos fletores basta calcular o esforço no ponto de aplicação da carga concentrada, definindo a posição das cordas das parábolas.

$$M = 3 \times 55 - 1{,}5 \times 30 = 120\text{kNm}$$

Os diagramas completos estão na Fig. 7.35.

O diagrama de momentos fletores poderia ser facilmente traçado por superposição dos diagramas da carga momento e da carga concentrada mais a distribuída. É a seguinte a seqüência dos procedimentos:

I - Traça-se a ordenada M = 80kNm, na extremidade B, tracionando em cima. Unindo-se com a extremidade A, obtém-se a linha de fecho do diagrama, Fig. 7.36.a;

II - Na posição da carga concentrada, a partir da linha de fecho, "pendura-se" a ordenada M = 150kNm, obtida no ponto de aplicação da carga de 40kN, na viga carregada com a carga concentrada mais a distribuída, Fig. 7.36.b;

III - Unindo-se a extremidade livre da ordenada com as extremidades da linha de fecho obtém-se as cordas das parábolas. Calculam-se as flechas respectivas, o que permite a construção das parábolas e a conclusão do diagrama, Fig. 7.36.c.

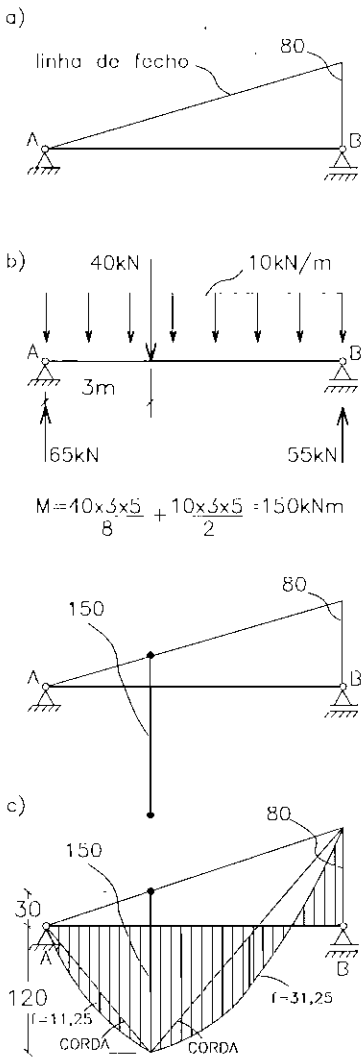


Figura 7.36

Exemplo 5 - Viga engastada ou em balanço

1) Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para os carregamentos aplicados na viga em balanço da Fig. 7.37. As reações de apoio foram calculadas no Capítulo IV e podem ser vistas nas Fig. 7.37.d a 7.37.f.

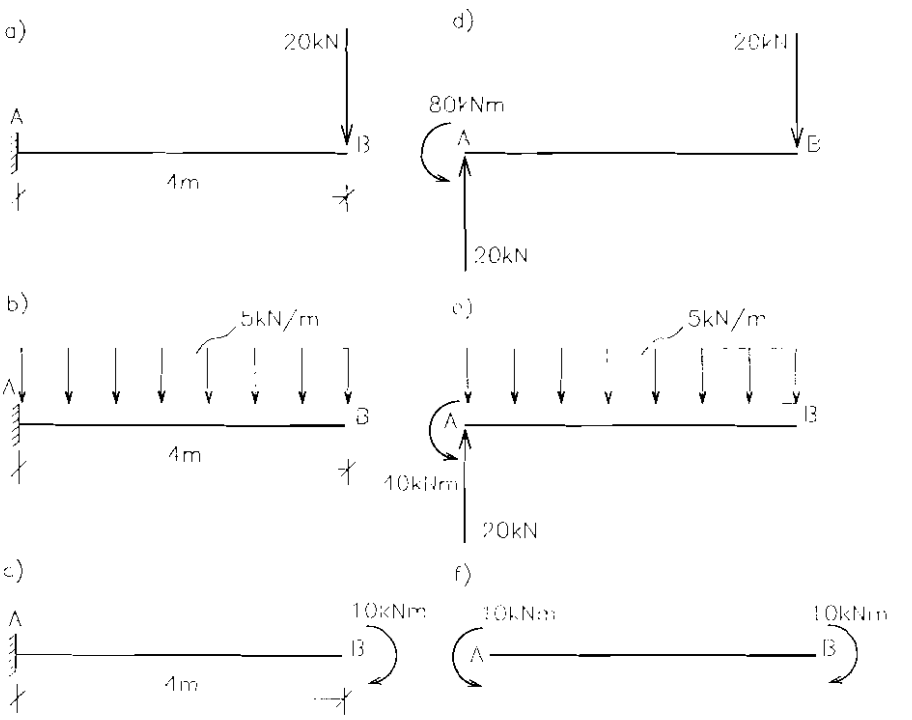


Figura 7.37

Os diagramas são imediatos e não requerem nenhum cálculo, com exceção da flecha da parábola no carregamento da Fig. 7.37.b. Lembrando as relações entre carga, força cortante e momento fletor, podemos formular:

Para o carregamento da Fig. 7.37.a, a cortante é constante porque não ocorre carga distribuída. O diagrama de M é, portanto, linear. Com $M_A = -80kNm$ (tração em cima) e $M_B = 0$, traça-se a reta. A Fig. 7.38 ilustra os diagramas de estado.

No caso da carga uniforme, a cortante varia linearmente e o momento fletor é uma função quadrática. A linha da cortante passa pelos pontos $V_B = 0$ e $V_A = 20kN$, definindo o diagrama. Com $M_B = 0$ e $M_A = -40kNm$, fica definida a corda da parábola e com $f = 10kNm$ constrói-se o diagrama. Os diagramas estão na Fig. 7.39.

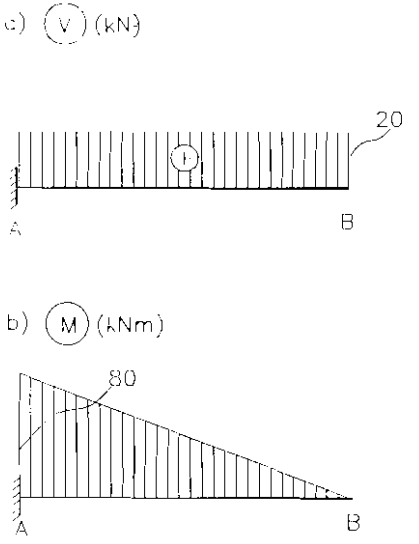


Figura 7.38

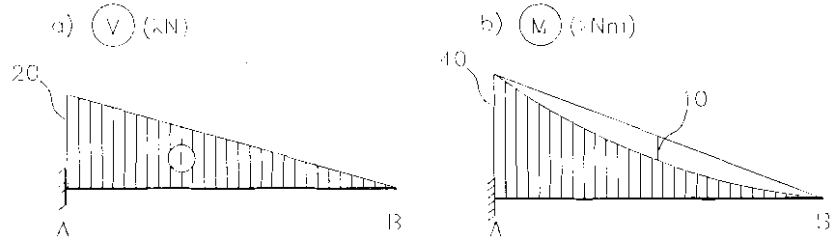


Figura 7.39

No terceiro caso, o momento fletor é constante, implicando na nulidade da força cortante. Este tipo de solicitação é chamada de flexão pura. A Fig. 7.40 apresenta o diagrama.

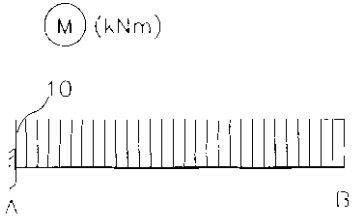


Figura 7.40

2) Podem ocorrer, nas vigas em balanço, carregamentos como os da Fig. 7.41.a. Nestes casos, os diagramas dos esforços solicitantes são semelhantes aos do exemplo 1. As Fig. 7.41.b e c registram os diagramas dos esforços solicitantes em função da posição do carregamento.

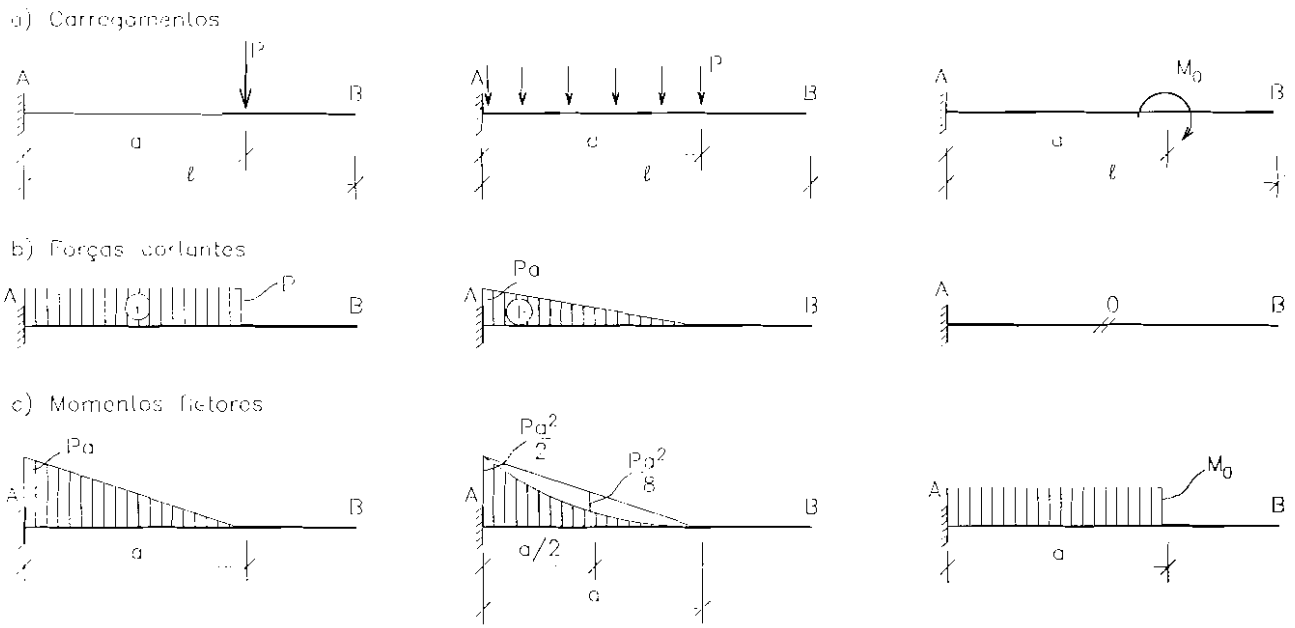


Figura 7.41

Exemplo 6 - Viga simplesmente apoiada com balanço

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes, M e V, para os carregamentos aplicados nas vigas da Fig. 7.42.a. As reações de apoio foram calculadas no Capítulo IV e estão registradas na Fig. 7.42.b.

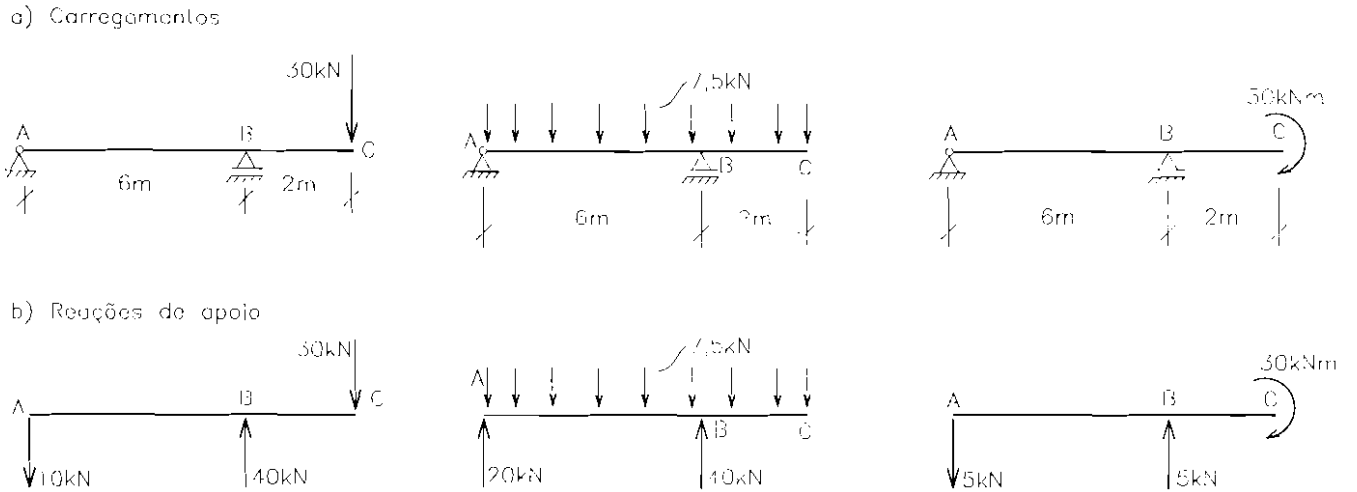


Figura 7.42

Traçado dos diagramas

Os esforços solicitantes provocados pelo carregamento concentrado são constantes, no caso da força cortante, tanto no vão AB quanto no balanço, e variam linearmente no caso do momento fletor.

A cortante no trecho AB (B excluído) é numericamente igual à reação no apoio A, com sentido anti-horário, portanto negativa. No trecho BC (B excluído), é numericamente igual à carga concentrada e horária, portanto positiva. Para traçar o diagrama de M, basta calcular o momento fletor no apoio B; $M_B = -60kNm$ (tração em cima). A Fig. 7.43 apresenta os diagramas.

O carregamento distribuído provoca força cortante variando linearmente em cada trecho, com a mesma inclinação das retas. Para traçar as linhas, basta calcular a cortante à esquerda e à direita de B, já que a cortante na extremidade do balanço, ponto C, é nula e no apoio A tem a magnitude da reação R_{VA}.

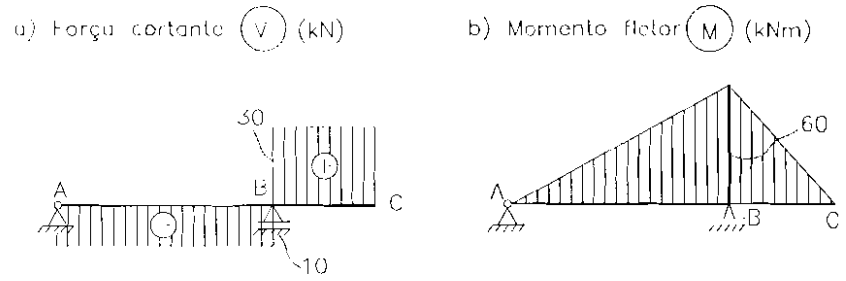


Figura 7.43

$V_{Besq} = 20 - 45 = -25kN$

$V_{Bdir} = 15kN$

Para traçar o diagrama dos momentos fletores basta calcular o momento em B, $M_B = -15kNm$, e determinar as cordas das parábolas nos dois trechos, lembrando-se de que os momentos em A e em C são nulos.

Os respectivos diagramas estão apresentados na Fig. 7.44.

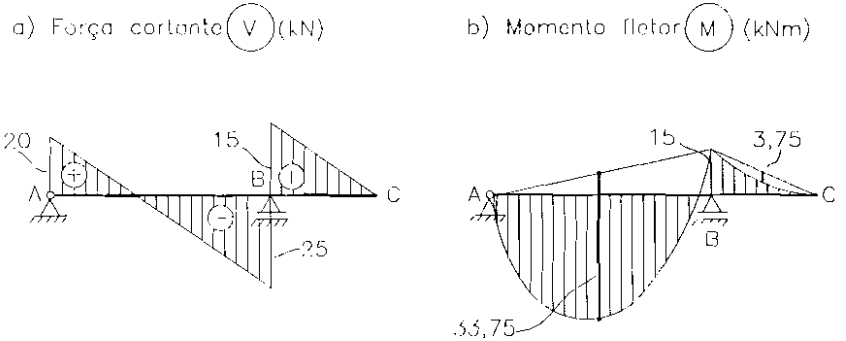


Figura 7.44

A carga momento aplicada na extremidade C do balanço não provoca cortante no trecho BC. Em AB a cortante é constante e anti-horária, valendo 5kN.

O diagrama de M é constante no balanço, provocando tração na parte superior, portanto negativo, e igual ao momento aplicado. No trecho AB é linear, variando de $M_A = 0$ a $M_B = -30kNm$.

Os diagramas respectivos são apresentados nas Fig. 7.45.a e b.

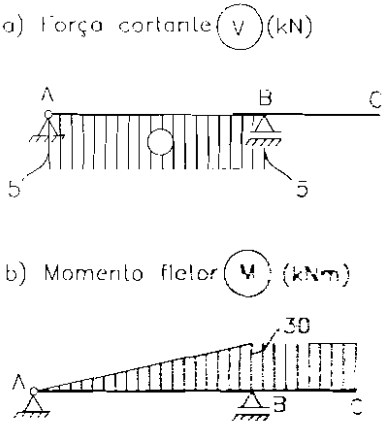


Figura 7.45

Exemplo 7 - Viga Gerber

Determinar os diagramas dos esforços internos, força cortante e momento fletor para a estrutura da Fig. 7.46.a. As reações de apoio foram calculadas no Capítulo IV e estão representadas nas Fig. 7.46.b e c.

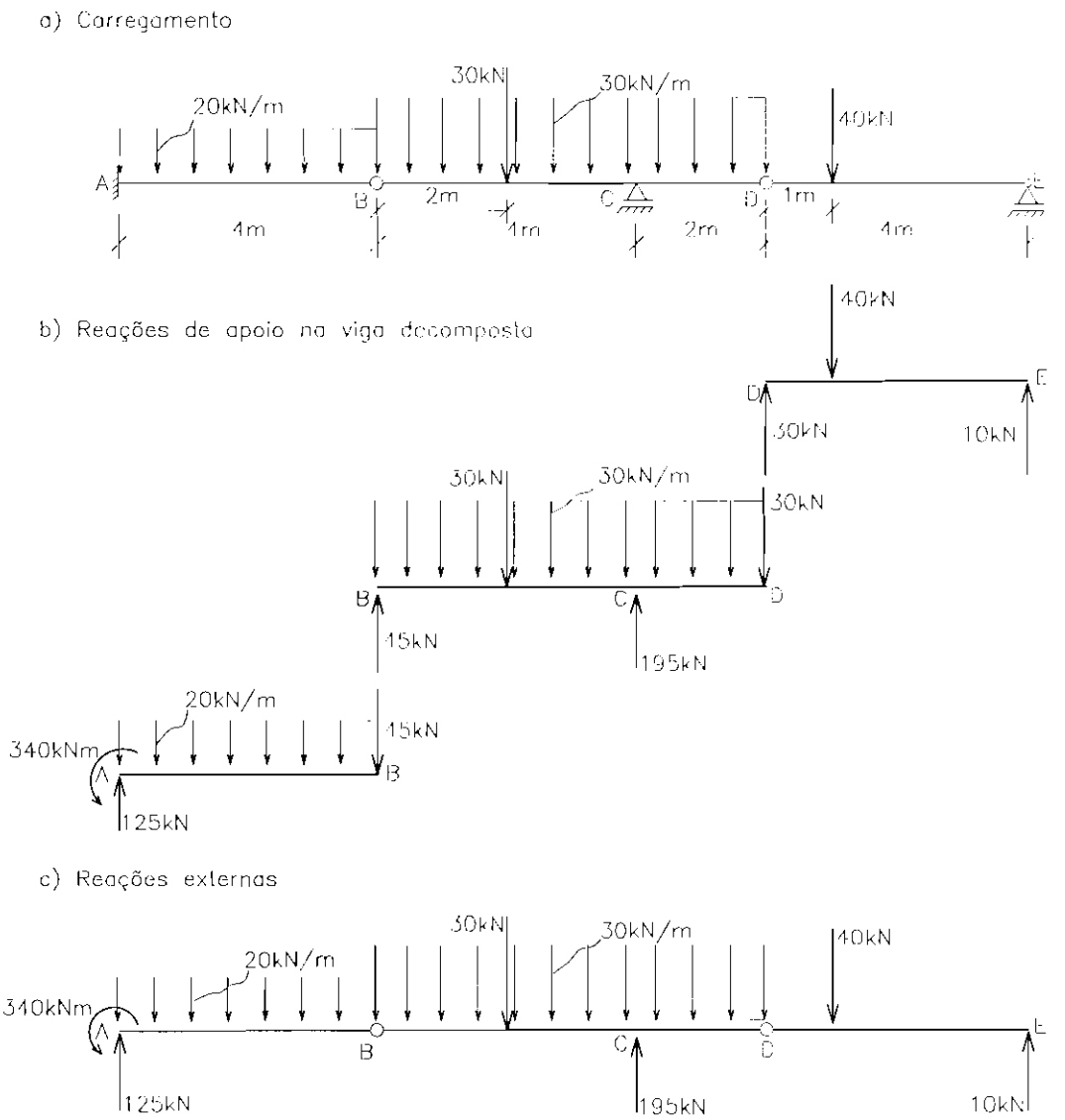


Figura 7.46

Traçado dos diagramas

Os diagramas podem ser traçados, naturalmente, como para uma viga contínua, apenas observando-se que as articulações não transmitem momentos, isto é, $M_{art} = 0$ e a cortante é contínua.

Iniciando pelo diagrama da força cortante, da direita para a esquerda, temos:

Trecho DE

A cortante é constante, com descontinuidade no ponto de aplicação da carga de 40kN. Basta calcular o valor do esforço à direita e à esquerda da carga.

$V_{dir} = -10\text{kN}$

$V_{esq} = -10 + 40 = 30\text{kN}$

Trecho BCD

A cortante varia linearmente, com descontinuidades em C e no ponto de aplicação da carga de 30kN.

$V_{Cdir} = -10 + 40 + 60 = 90\text{kN}$

$V_{Cesq} = -90 - 195 = -105\text{kN}$

$V_{dir} = -105 + 60 = -45\text{kN}$

$V_{esq} = -45 + 30 = -15\text{kN}$

$V_B = -15 + 60 = 45\text{kN}$

Trecho AB

A cortante é linear, sem descontinuidade, portanto basta o valor da cortante em A, de mesma grandeza da reação R_{VA}.

$V_A = 125\text{kN}$

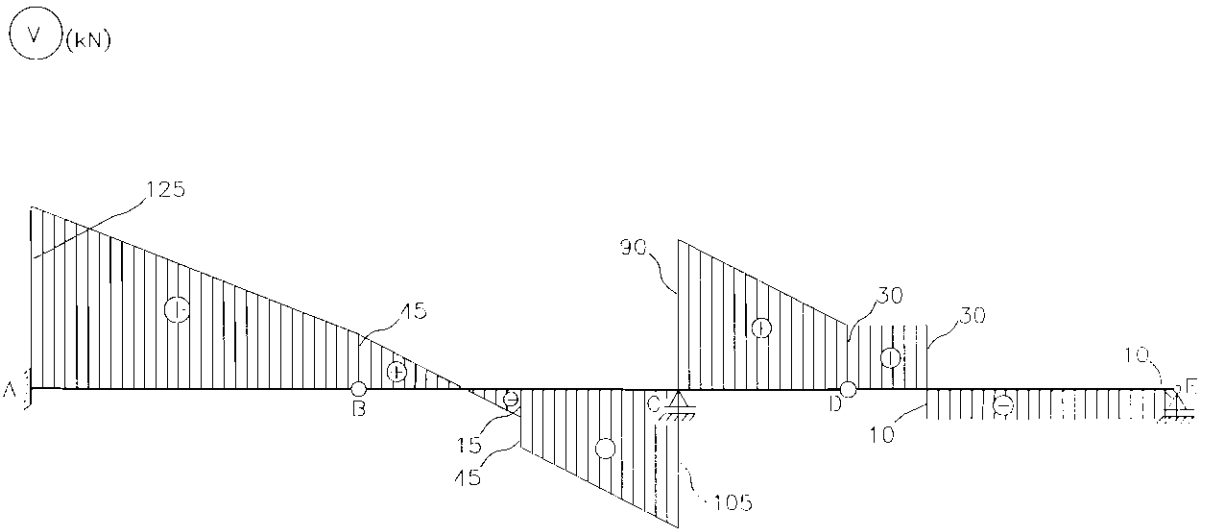


Figura 7.47

A Fig. 7.47 mostra o diagrama dos esforços cortantes. Calcula-se o diagrama dos momentos fletores também partindo-se da direita para a esquerda

Trecho DE

O momento varia linearmente, portanto basta calcular o valor no ponto de aplicação da carga concentrada.

$M = 3 \times 10 = 30 kNm$

Trecho BCD

As cargas concentradas, aplicadas em BCD, delimitam três trechos distintos nos quais o diagrama é parabólico. Para determinar as cordas das parábolas basta calcular os momentos em C e no ponto de aplicação da carga de 30kN.

$M_C = 6 \times 10 - 3 \times 40 - 1 \times 60 = -120 kNm$

$M = 8 \times 10 - 5 \times 40 + 2 \times 195 - 2 \times 120 = 30 kN$

Trecho AB

Neste caso temos apenas um trecho parabólico. A corda está definida pelo momento aplicado em A, $M_A = -340 kNm$.

A Fig. 7.48 ilustra o diagrama.

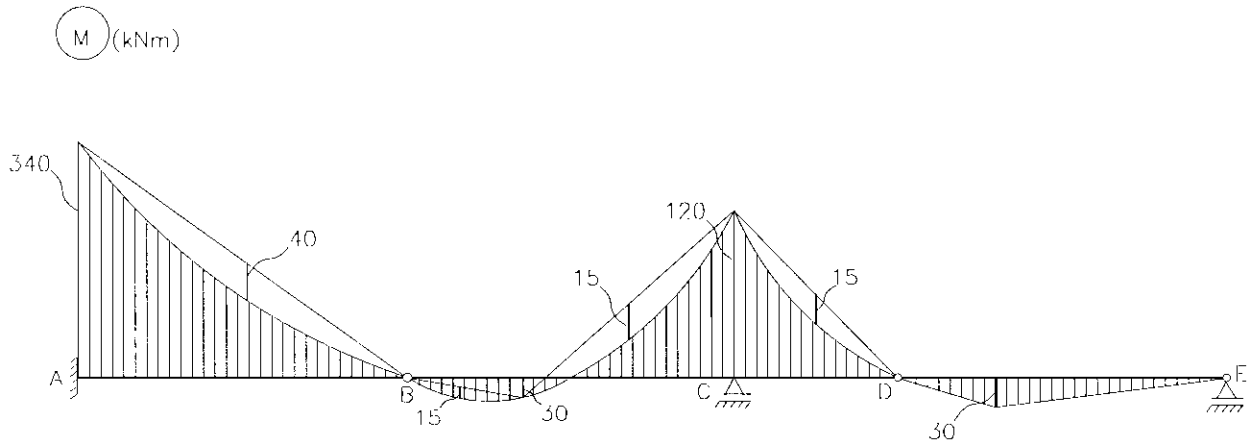


Figura 7.48

Exemplo 8 - Viga curva engastada ou em balanço

Seja calcular os esforços solicitantes na estrutura da Fig. 7.49.a, cujo eixo descreve um setor circular de ângulo ϕ e raio r. As reações de apoio foram obtidas através das equações de equilíbrio $\sum M_A = 0$ e $\sum Y = 0$.

A Fig. 7.49.b apresenta tais reações.

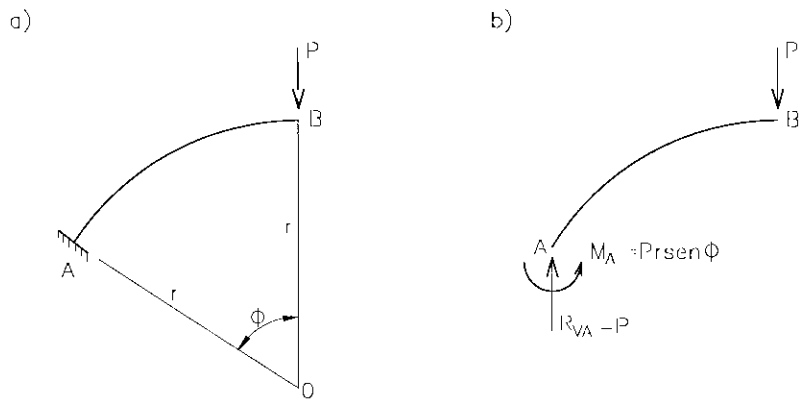


Figura 7.49

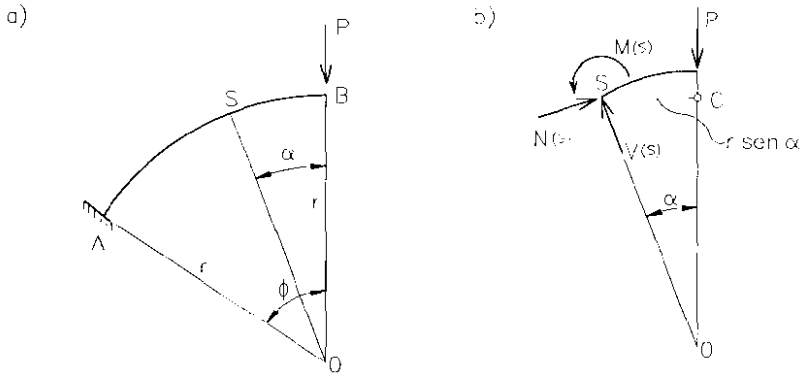


Figura 7.50

Em uma seção genérica S, definida pelo ângulo α como indicado na Fig. 7.50.a, os esforços solicitantes, ou esforços internos, são o momento fletor $M_{(S)}$, tracionando as fibras superiores, a força cortante $V_{(S)}$, atuando no plano da seção, com sentido horário, e a força normal, $N_{(S)}$, na direção da tangente ao eixo em S e comprimindo a seção. Os esforços podem ser calculados com o auxílio da Fig. 7.50.b.

$$M_{(S)} = -Pr\,sen\alpha$$

$$V_{(S)} = P\cos\alpha$$

$$N_{(S)} = -Psen\alpha$$

A Fig. 7.51 mostra os diagramas dos esforços solicitantes, obtidos por pontos e traçados perpendicularmente ao eixo da viga.

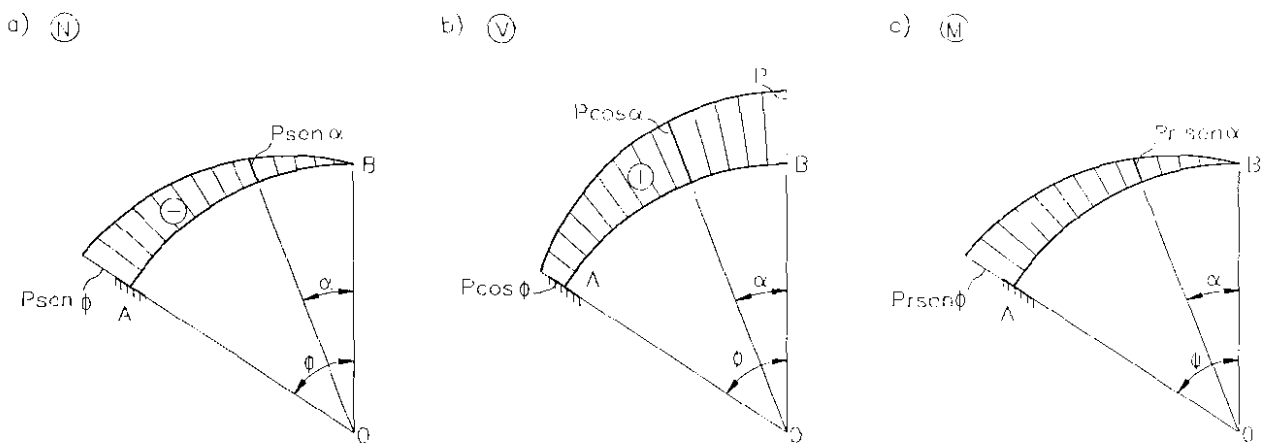


Figura 7.51

Note-se que o momento fletor cresce linearmente com o segmento $\overline{SC} = r\,sen\alpha$, pode-se, portanto, e muitas vezes é conveniente, traçar o diagrama da viga reta engastada equivalente, de vão $r\,sen\phi$, como mostrado na Fig. 7.52.

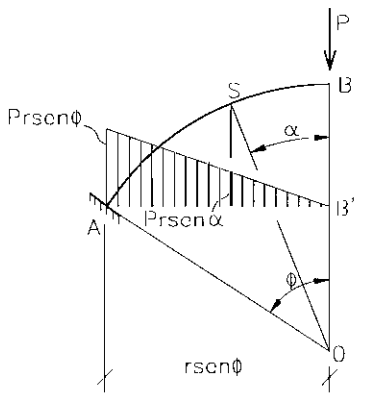


Figura 7.52

Exemplo 9 - Viga curva simplesmente apoiada

Vejamos como determinar os diagramas dos esforços solicitantes para a viga curva da Fig. 7.53.a, com eixo circular e raio r, submetida a uma carga concentrada central. As reações de apoio estão representadas na Fig. 7.53.b.

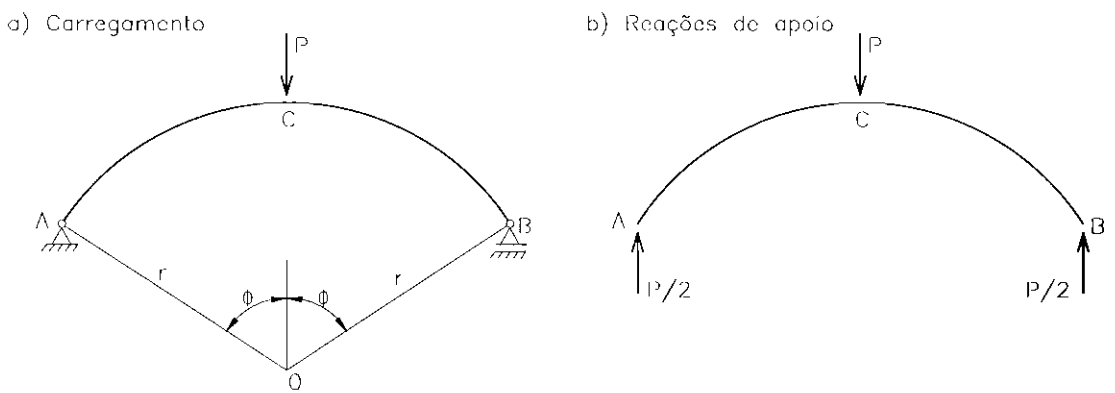


Figura 7.53

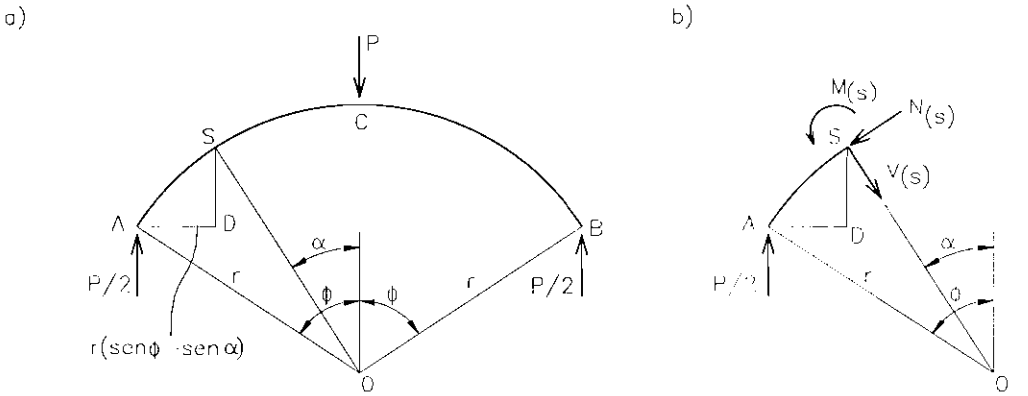


Figura 7.54

À semelhança do exemplo anterior, os esforços internos em uma dada seção transversal S, definida pelo ângulo α, podem ser determinados com o auxílio da Fig. 7.54 para o trecho AC ($0 \le \alpha \le \phi$). Os esforços solicitantes na seção genérica, S, calculados a seguir estão representados com seus sentidos corretos na Fig. 7.54.b.

$$M_{(S)} = \frac{1}{2} Pr(sen\phi - sen\alpha)$$

$$V_{(S)} = \frac{1}{2} P \cos\alpha$$

$$N_{(S)} = -\frac{1}{2} P sen\alpha$$

Recorrendo à simetria do exemplo não haverá necessidade de se equacionar os esforços internos para o trecho CB.

A Fig. 7.55 mostra os diagramas, obtidos por pontos e traçados perpendicularmente ao eixo da viga.

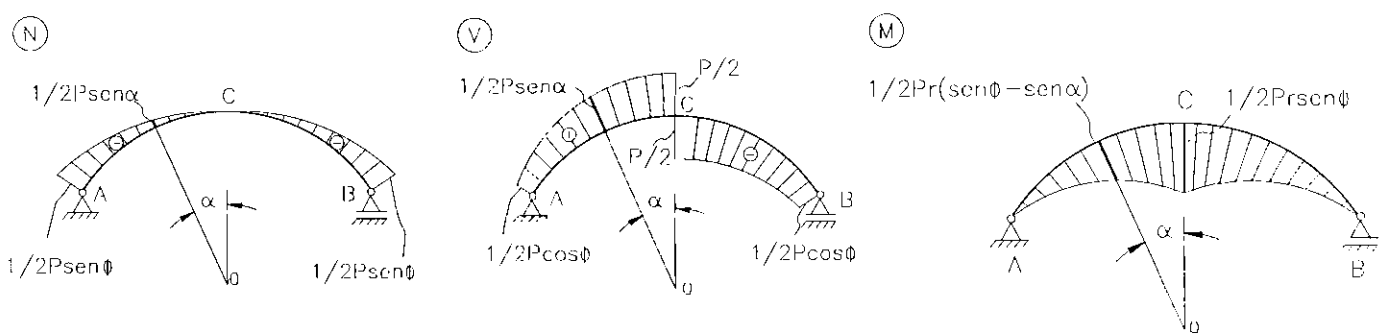


Figura 7.55

Como no exemplo anterior, o momento fletor cresce linearmente com o segmento $\overline{AD} = r(\text{sen}\phi - \text{sen}\alpha)$, para $\phi \geq \alpha \geq 0$. Podemos, portanto, traçar o diagrama do momento fletor na viga reta, simplesmente apoiada, equivalente. A Fig. 7.56 ilustra tal fato.

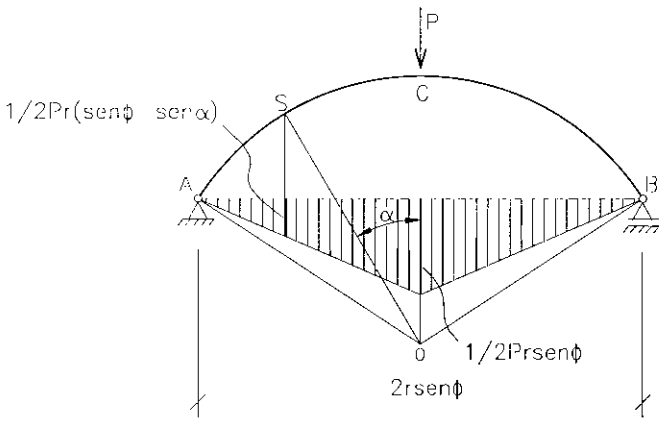


Figura 7.56

7.3 - PÓRTICOS

Exemplo 1 - Pórtico simples

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para o carregamento aplicado na estrutura da Fig. 7.57.a. As reações de apoio, calculadas no Capítulo IV, estão ilustradas na Fig. 7.57.b.

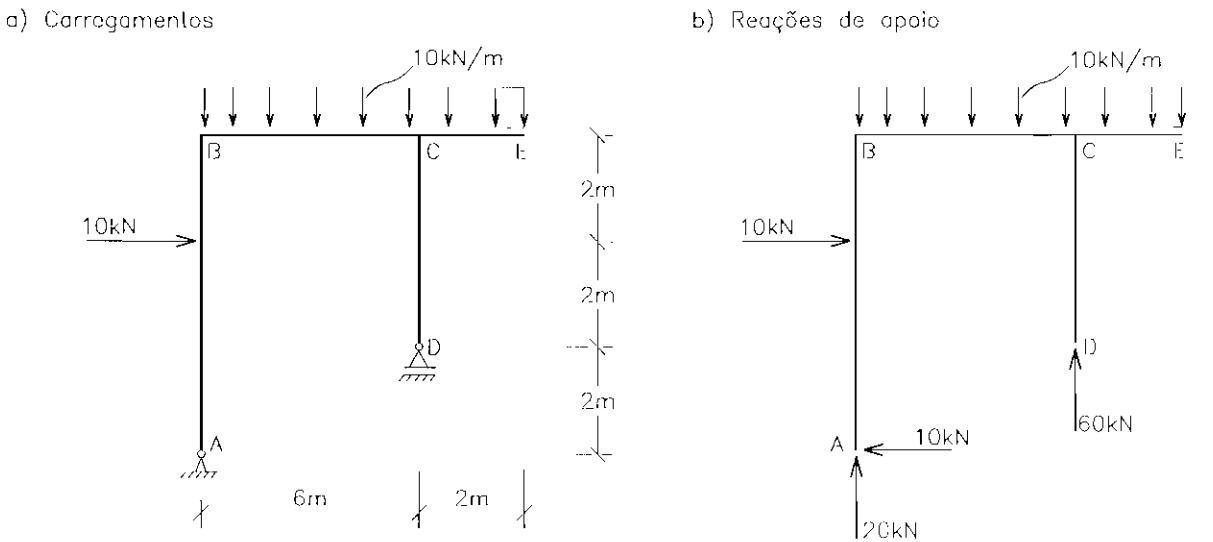


Figura 7.57

Diagramas de M, N e V

Os esforços internos serão calculados trecho a trecho da estrutura. Assim, para o problema apresentado, temos, (conforme Fig. 7.57.b):

Esforço normal (N)

Trecho CE

Como não existe força axial aplicada, o esforço normal é nulo.

Trecho CD

O esforço é constante, de compressão, portanto negativo, e vale 60kN.

Trecho BC

O trecho CD não provoca esforço axial em C e não há ocorrência de forças aplicadas no eixo entre B e C. O esforço normal em BC é, portanto, nulo.

Trecho AB

Esforço normal constante, de compressão, negativo, com intensidade de 20kN.

Esforço cortante (V)

Trecho BCE

A cortante varia linearmente, com descontinuidade em C. Para traçar as linhas basta calcular a cortante à direita e à esquerda de C, já que a cortante em E é nula e em B vale 20kN.

$V_{Cdir} = 20kN$

$V_{Cesq} = 20 - 60 = -40kN$

Trecho CD

Como não há forças transversais ao eixo, a cortante é nula em todo o trecho.

Trecho AB

A cortante é constante, com descontinuidade no ponto de aplicação da carga de 10kN. Para traçar o diagrama, basta o cálculo, à esquerda e à direita da carga concentrada.

$V_{esq} = 10kN$

$V_{dir} = 10 - 10 = 0$

Momento fletor (M)

Trecho AB

Neste trecho o momento fletor é função linear. Para traçar as linhas basta

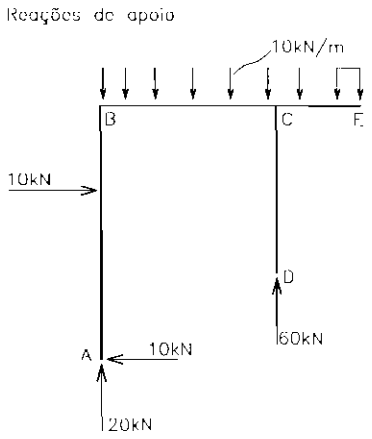


Figura 7.57.b

calcular o valor de M no ponto de aplicação da carga de 10kN e no ponto B. Considerando-se a face interna do pórtico como "embaixo"

$M = 4 \times 10 = 40kNm$

$M_B = 6 \times 10 - 2 \times 10 = 40kNm$

Trecho CD

Como não há ocorrência de forças transversais nem de cargas momento aplicadas no trecho, o esforço solicitante momento fletor é nulo.

Trecho BCE

O momento fletor é função parabólica. Para traçar as curvas, determinam-se as cordas das parábolas, em CE e BC, calculando-se o momento em C e as flechas respectivas. Os momentos em B e E são conhecidos e valem, respectivamente, M_B = 40kNm (continuidade da estrutura em B) e M_E = 0 (extremidade livre).

$M_C = -1 \times 20 = -20kNm$

A Fig. 7.58 apresenta os diagramas dos esforços solicitantes.

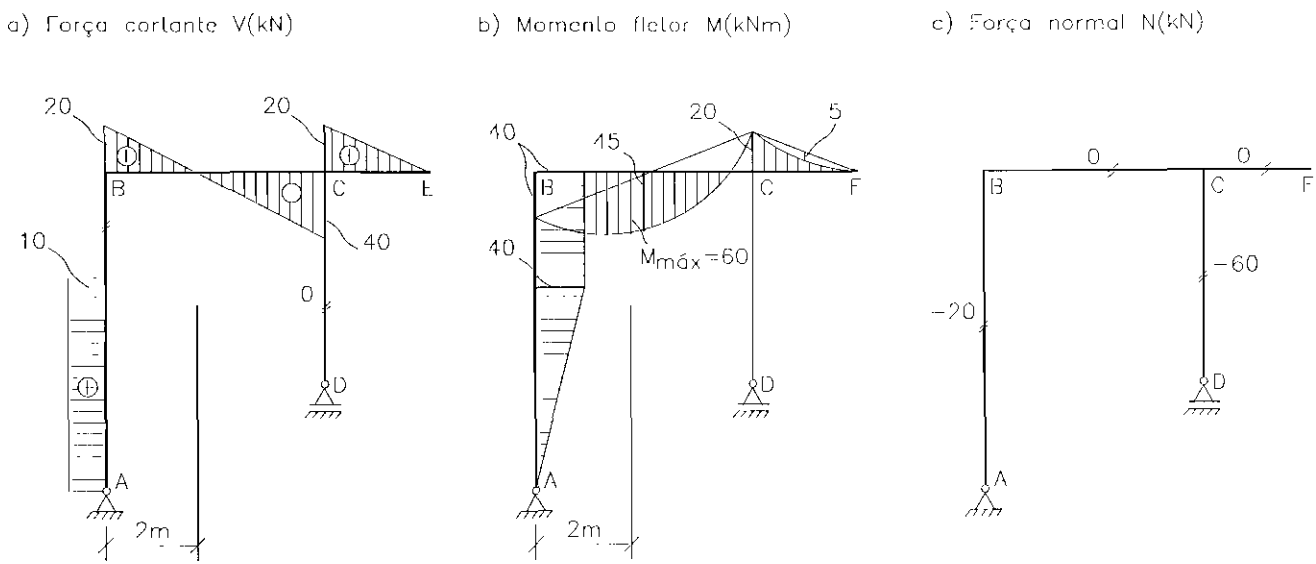


Figura 7.58

Exemplo 2 - Pórtico em balanço

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para o carregamento aplicado na estrutura da Fig. 7.59.a. As reações de apoio foram calculadas no Capítulo IV e estão representadas na Fig. 7.59.b.

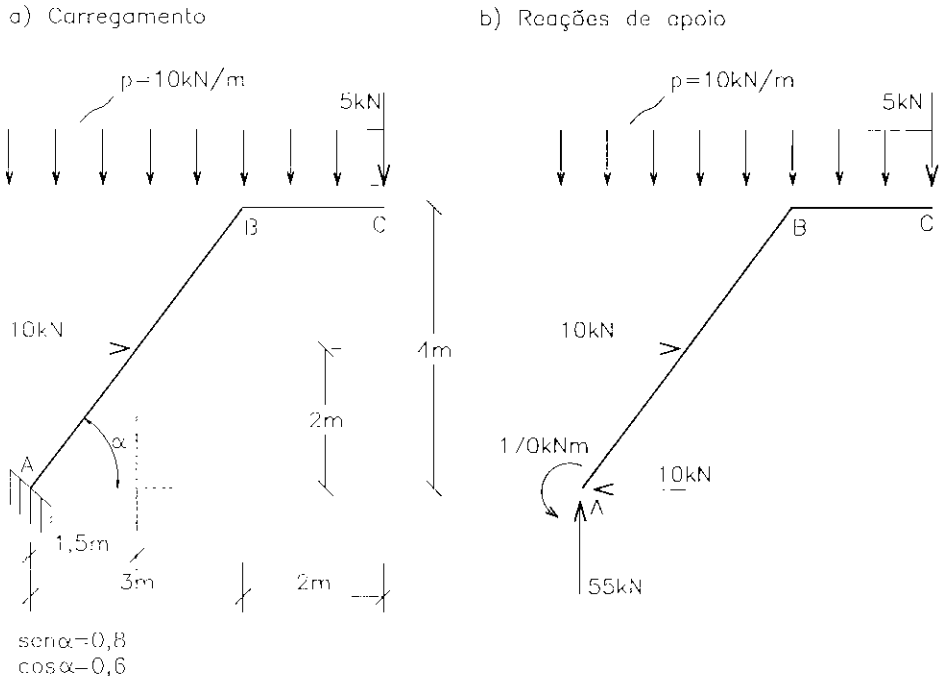


Figura 7.59

Os diagramas de estado são representações gráficas dos esforços internos ao longo da estrutura, tendo como eixo das abcissas o eixo dos elementos estruturais, suas ordenadas representam o valor do esforço na seção referida.

Nos trechos inclinados, para simplificação do cálculo, as cargas concentradas e distribuídas devem ser decompostas em componentes transversais e paralelas ao eixo. A Fig. 7.60, na página seguinte, mostra a estrutura com as componentes das cargas no trecho AB. As componentes da carga distribuída foram obtidas com as equações (7.1) e (7.2). As forças aplicadas no ponto A representam a soma das componentes, transversais e paralelas ao eixo, neste ponto.

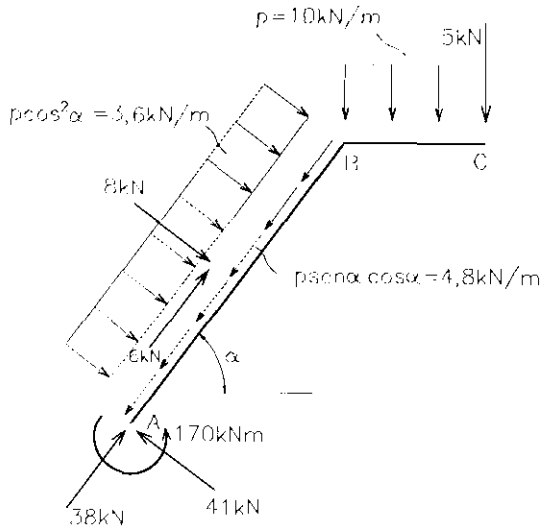


Figura 7.60

Traçado dos diagramas

Esforço normal (N)

Trecho BC

$N = 0$

Trecho AB

Linear, com descontinuidade no ponto de aplicação da componente axial de 6kN. Para traçar as linhas, calcula-se N_{esq} e N_{dir} da componente e N_B. O valor de N_A é o mesmo da componente axial aplicada em A e vale $N_A = -38kN$ (compressão).

$$N_{esq} = -38 + 4{,}8 \text{ x } 2{,}5 = -26kN$$

$$N_{dir} = -26 - 6 = -32kN$$

$$N_B = -32 + 4{,}8 \text{ x } 2{,}5 = -20kN$$

Esforço cortante (V)

Trecho BC

A cortante no trecho é função linear. Na extremidade C é positiva e vale 5kN, na seção em B seu valor é 25kN.

Trecho AB

A cortante varia linearmente, com descontinuidade no meio do vão devido à componente vertical de 8kN. Para traçar as retas, que têm a mesma inclinação, bastam o valor em A, os valores à esquerda e à direita da componente de 8kN e o valor em B.

$V_A = 41kN$

$V_{esq} = 41 - 3{,}6 \text{ x } 2{,}5 = 32kN$

$V_{dir} = 32 - 8 = 24kN$

$V_B = 24 - 3{,}6 \text{ x } 2{,}5 = 15kN$

A força normal na extremidade B do trecho inclinado bem como a força cortante poderiam ser obtidas decompondo-se a cortante V_B, do trecho BC, na direção do eixo e perpendicularmente a ele, respectivamente,

$N_B(\text{trecho AB}) = -25\text{sen}\alpha = -20kN$

$V_B(\text{trecho AB}) = 25\cos\alpha = 15kN$

Momento fletor

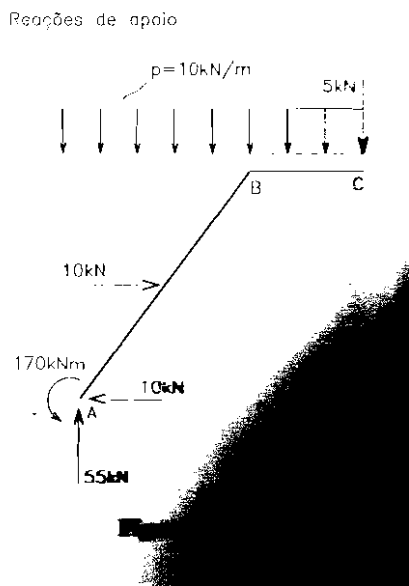
Para traçar o diagrama de estado de momentos fletores pode-se utilizar as cargas da Fig. 7.59.b, como segue.

Trecho BC

O momento varia parabolicamente. Para traçar a curva basta o valor do momento em B e a flecha da parábola.

$M_B = -2 \text{ x } 5 - 1 \text{ x } 20 = -30kNm$

$f = \dfrac{10 \text{ x } 2^2}{8} = 5kNm$



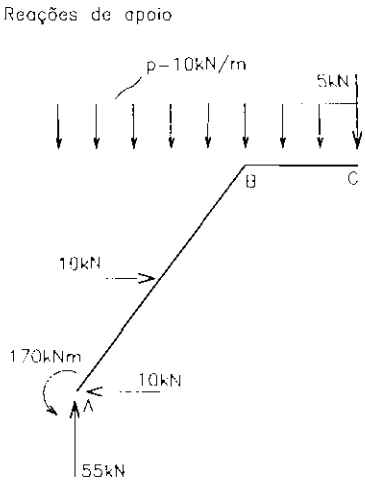


Figura 7.59.b

Trecho AB

Como há ocorrência de carga distribuída, as funções são parábolas quadráticas. Para traçar as curvas, determina-se o momento, no ponto de aplicação da carga de 10kN, e as flechas respectivas.

$M = 1{,}5 \times 55 + 2 \times 10 - 170 - 0{,}75 \times 15 = -78{,}75\text{kNm}$

Os momentos nas extremidades A e B são conhecidos

$M_A = -170\text{kNm}$

$M_B = -30\text{kNm}$ (continuidade da estrutura em B)

A Fig. 7.61 ilustra os diagramas dos esforços M, N e V.

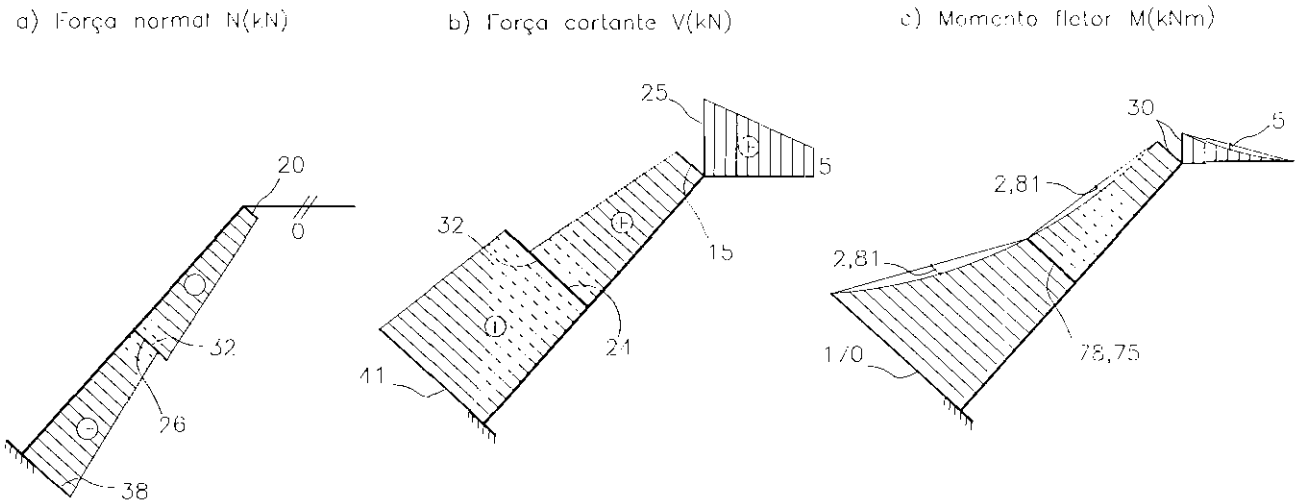


Figura 7.61

Exemplo 3 - Pórtico tri-articulado

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para o carregamento aplicado na estrutura da Fig. 7.62.a. As reações de apoio foram calculadas no Capítulo IV e estão representadas na Fig. 7.62.b.

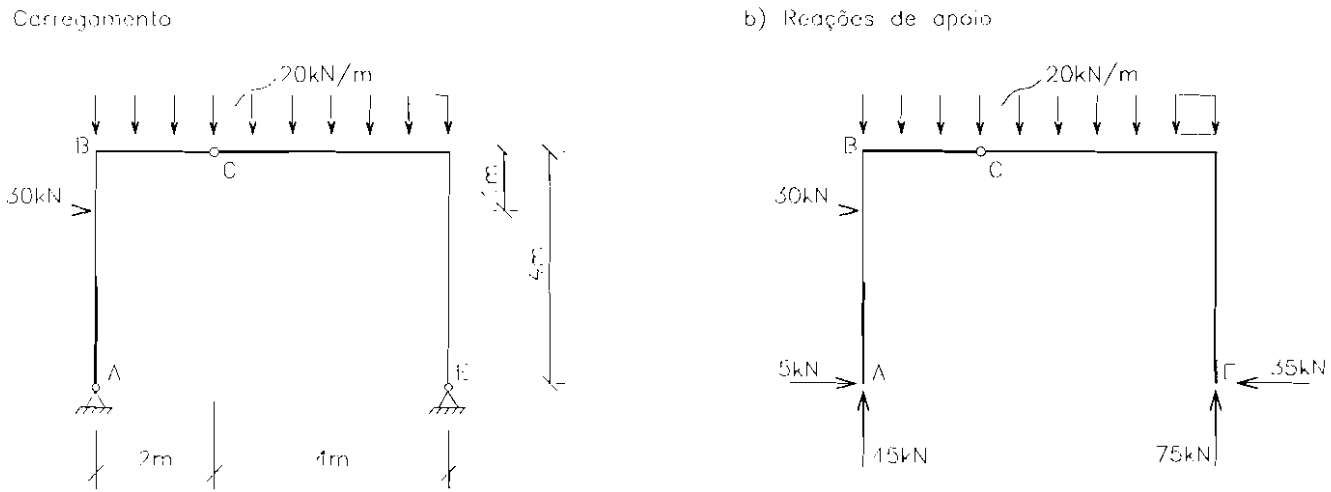


Figura 7.62

Traçado dos diagramas de M, N e V

O traçado dos diagramas pode ser realizado diretamente, trecho a trecho, sem que seja necessário "abrir" a estrutura. Basta notar que a articulação C não transmite momentos mas proporciona continuidade para os esforços axiais e cortantes.

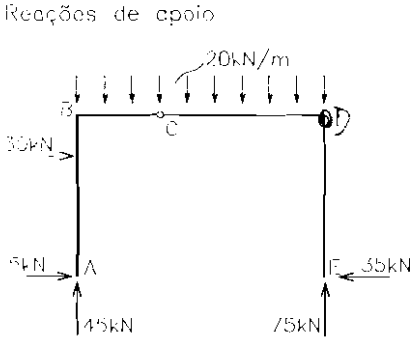


Figura 7.62.b

Força normal (N)

Trecho DE

A força normal é constante, de compressão, e seu valor é

$$N_{DE} = -75kN$$

Trecho BCD

Neste trecho a força normal pode ser obtida, em qualquer seção transversal, através das forças aplicadas à esquerda ou à direita da seção. É, portanto, constante e de compressão.

$$N_{BCD} = -35kN$$

Trecho AB

Constante, de compressão e igual a

$$N_{AB} = -45kN$$

Força cortante (V)

Trecho DE

Constante, horária e igual a 35kN.

Trecho BCD

Linear; para traçar a reta bastam os valores da cortante em B e em D.

$V_B = 45kN$

$V_D = -75kN$

Trecho AB

Constante, com descontinuidade no ponto de aplicação da carga de 30kN. São suficientes os valores da cortante à esquerda e à direita da carga concentrada.

$V_{esq} = -5kN$

$V_{dir} = -35kN$

Note-se que a força cortante, na extremidade de um trecho, é igual à força normal no mesmo ponto do trecho ortogonal adjacente e vice-versa.

Momento fletor (M)

Trecho AB

Linear, com angulosidade no ponto de aplicação da carga de 30kN. Tração do lado externo do trecho. Considerando o lado interno como "embaixo", o momento fletor na seção correspondente à carga de 30kN e em B é

$M = -3 \times 5 = -15\text{kNm}$

$M_B = -4 \times 5 - 1 \times 30 = -50\text{kNm}$

Trecho DE

Linear. Basta calcular M_D, lembrando que a parte interna é "embaixo".

$M_D = -4 \times 35 = -140\text{kNm}$

Trecho BCD

O momento fletor varia parabolicamente com uma única curva, que intercepta o eixo BCD na articulação C. Para traçar o diagrama basta calcular a flecha, já que a corda está definida pelos momentos em B e D, já conhecidos.

A Fig. 7.63 mostra os diagramas de M, N e V.

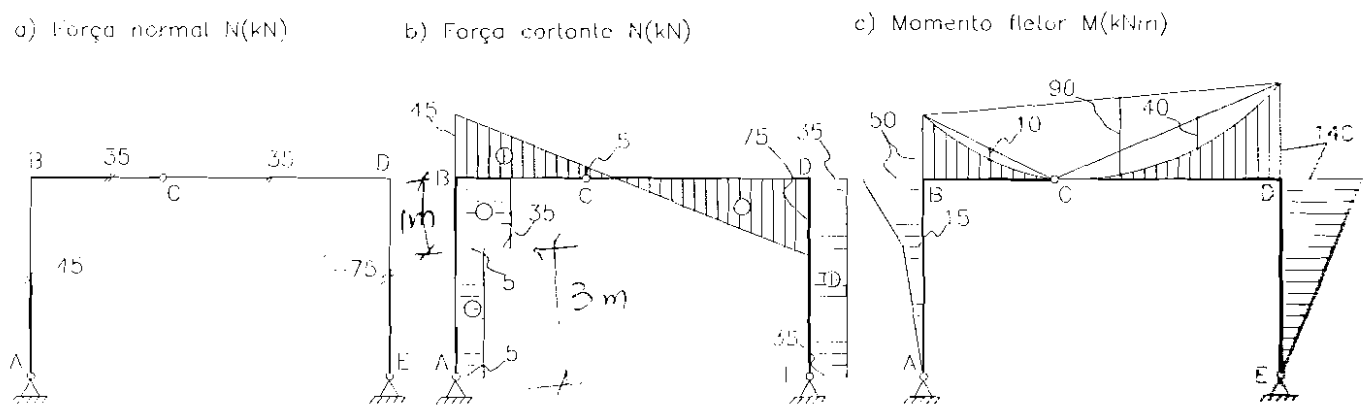


Figura 7.63

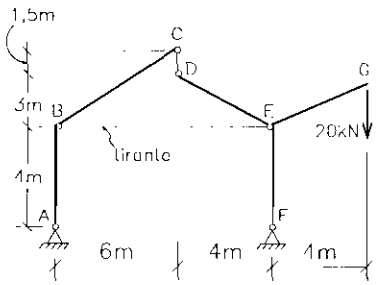


Figura 7.64

Exemplo 4 - Pórtico atirantado

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para o pórtico da figura 7.64.

Cálculo das reações

Considerando toda a estrutura, Fig. 7.65.a

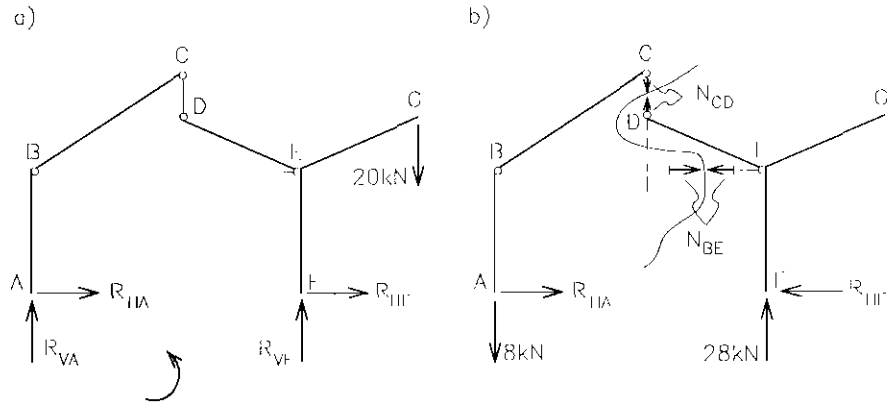


Figura 7.65

Com $\sum M_A = 0$

$$10R_{VF} - 14 \times 20 = 0 \quad \therefore \quad R_{VF} = 28kN$$

com $\sum Y = 0$

$$R_{VA} + 28 = 20 \quad \therefore \quad R_{VA} = -8kN$$

com $\sum X = 0$

$$R_{HA} + R_{HF} = 0 \quad \therefore \quad R_{HF} = -R_{HA}$$

Considerando as chapas ABC e DEFG "isoladas", mediante o corte, imaginário, das barras CD e BE, Fig. 7.65.b, e aplicando as equações de equilíbrio na chapa ABC, segue-se

com $\sum M_1$ (ponto de interseção de CD com BE) = 0

$-6 \times 8 - 4R_{HA} = 0 \quad \therefore \quad R_{HA} = -12kN$

com $\sum X = 0$

$R_{HA} + N_{BE} = 0 \quad \therefore \quad N_{BE} = -R_{HA} = 12kN$

com $\sum Y = 0$

$-8 - N_{CD} = 0 \quad \therefore \quad N_{CD} = -8kN$

Montagem dos resultados

A Fig. 7.66 representa as reações de apoio e as forças na barra vincular CD e no tirante BE.

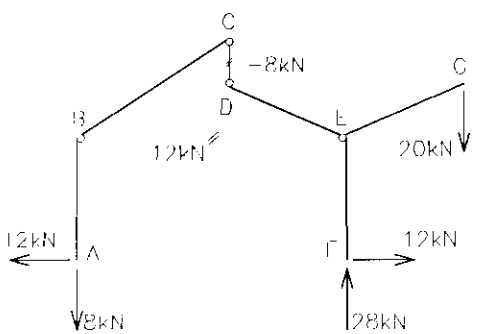


Figura 7.66

Traçado dos diagramas

O diagrama dos momentos fletores é linear, em todos os trechos, pois não há ocorrência de cargas distribuídas. Para o cálculo, não haverá necessidade de se decompor as forças aplicadas nos trechos inclinados. Basta, portanto, determinar os momentos nas extremidades das barras que incidem nos nós contínuos B e E. Assim, no trecho AB,

$M_B = 4 \times 12 = 48kNm$ (tracionando internamente)

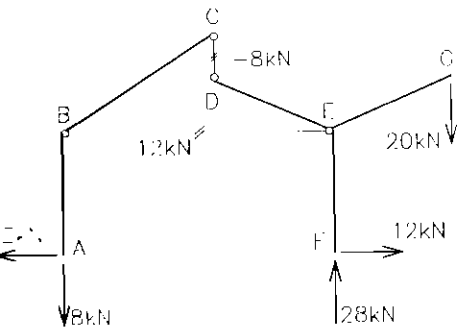


Figura 7.66

Pela continuidade da estrutura em B, temos, no trecho BC,

$M_B = 48$kNm (tracionando internamente)

O nó contínuo B está, portanto, equilibrado, como mostra a Fig. 7.67.a.

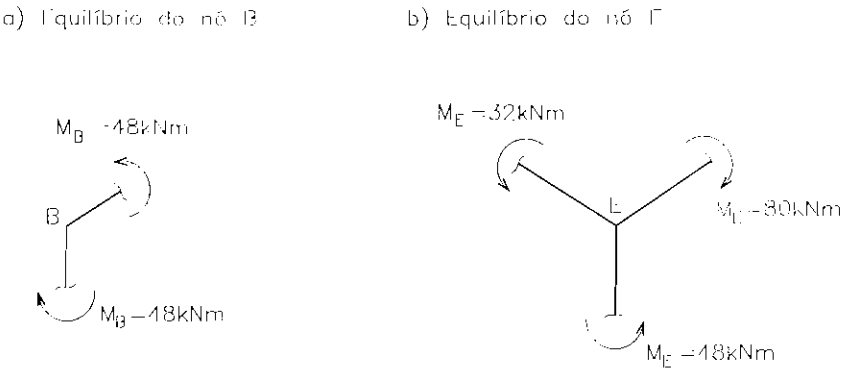


Figura 7.67

Trecho EF

$M_E = 4 \times 12 = 48$kNm (tracionando internamente)

Trecho EG

$M_E = 4 \times 20 = 80$kNm (tração em cima)

O momento M_{ED} pode ser determinado diretamente pelo equilíbrio do nó contínuo E, Fig. 7.67.b.

$\sum M_E = 0$

$M_E + 48 - 80 = 0$

$M_E = 32$kNm (no mesmo sentido do momento de 48KNm do trecho EF e tracionando em cima)

A Fig. 7.68 ilustra o diagrama.

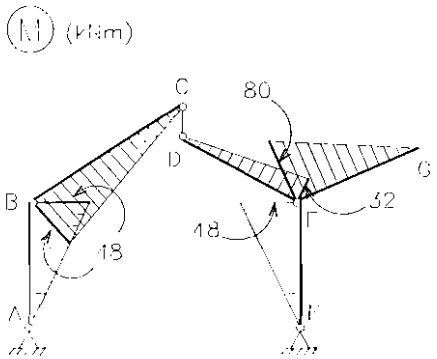


Figura 7.68

Para o traçado dos diagramas dos esforços cortantes e axiais é conveniente a decomposição prévia das forças em componentes paralelas e perpendiculares ao eixo da estrutura. A Fig. 7.69 mostra as forças decompostas nas extremidades C, D e G.

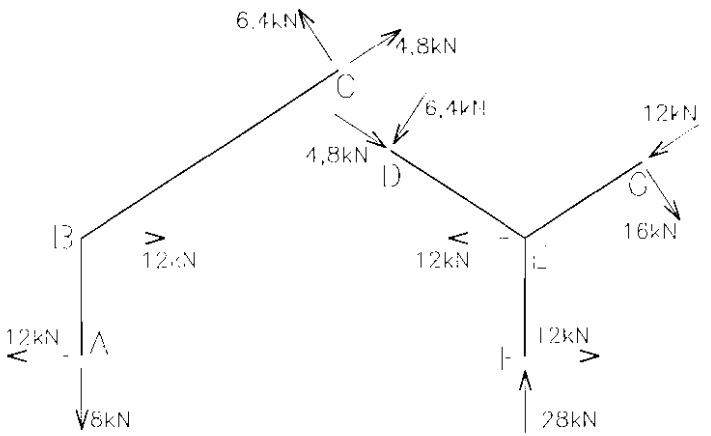


Figura 7.69

Os esforços internos, cortantes e axiais, são constantes e para determiná-los bastam os valores das forças aplicadas nas extremidades dos trechos. Os diagramas são apresentados na Fig. 7.70.

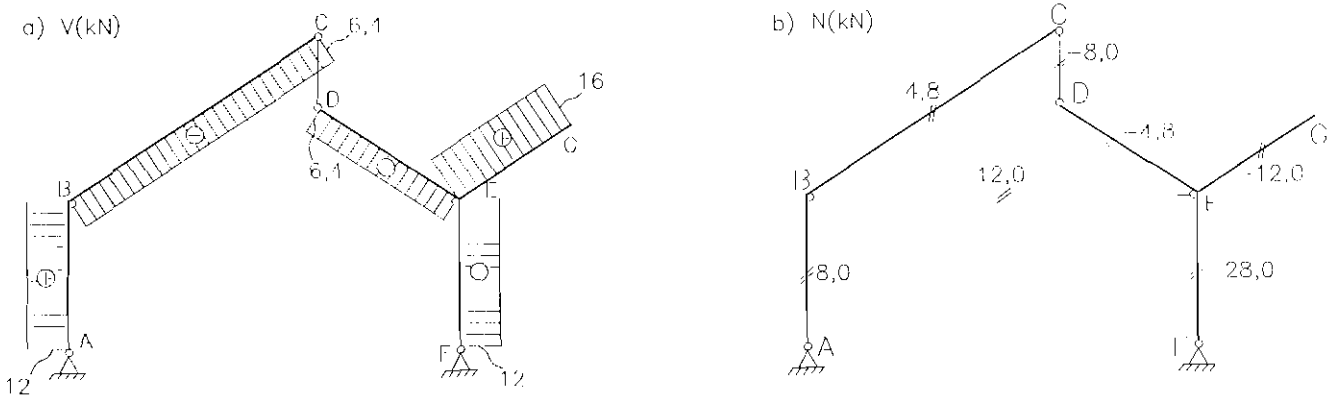


Figura 7.70

7.4 - ARCOS TRI-ARTICULADOS COM APOIOS NO MESMO NÍVEL, SUJEITOS A CARREGAMENTO VERTICAL

Seja o arco tri-articulado da Fig. 7.71.a. As reações de apoio são obtidas, como já visto no Capítulo IV, através das equações de equilíbrio.

Com $\sum M_A = 0$, obtém-se R_{VB};

com $\sum Y = 0$, obtém-se R_{VA}; e,

com $M_C = 0$, obtém-se a reação horizontal, ou empuxo, H.

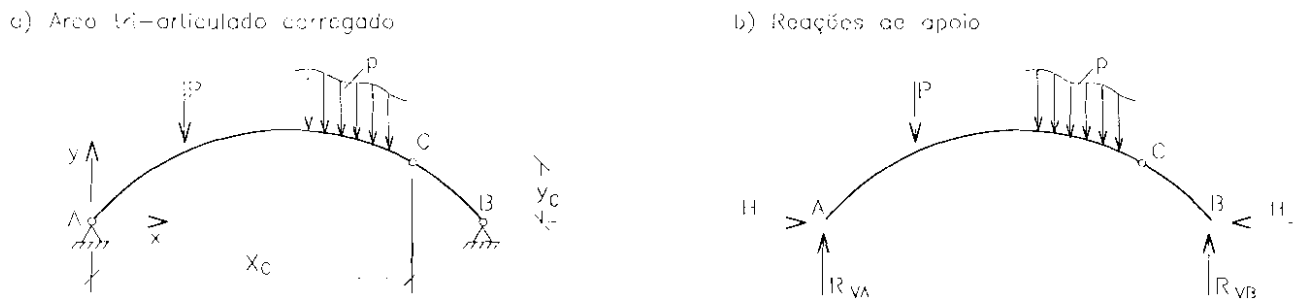


Figura 7.71

Nas estruturas isostáticas, as relações de equilíbrio entre as forças externas e internas podem ser obtidas sem considerar a deformação da estrutura, e conseqüentemente, sem se levar em conta sua posição deslocada.

Tal fato nos permite, sem que as relações de equilíbrio se alterem, substituir o arco tri-articulado por uma viga curva, simplesmente apoiada, de mesmo eixo e sujeita às mesmas cargas verticais. A viga curva também está submetida a uma força horizontal H (aplicada no apoio móvel) tal que o momento fletor na seção que corresponde à articulação C seja nulo. A Fig. 7.72, na página seguinte, esclarece a transformação efetuada.

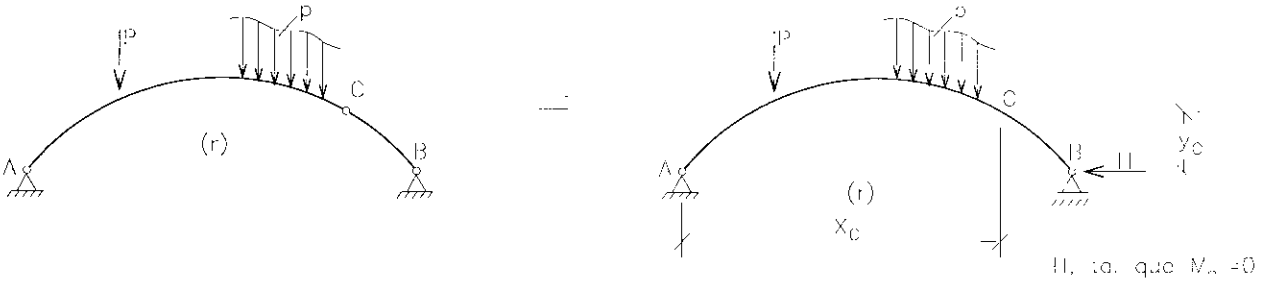


Figura 7.72

Superpondo-se o carregamento, vertical e horizontal, aplicado à viga curva, agora equivalente estaticamente à estrutura real, e evidenciando H, como indicado na Fig. 7.73, na página seguinte, podemos escrever

$$(r) = (0) + H\,(1) \tag{7.7}$$

ou, em termos dos momentos fletores,

$$M = M_0 + H\,M_1 \tag{7.8}$$

onde M é o momento fletor no arco tri-articulado; M_0, o momento fletor na viga curva, submetida ao carregamento real; e M_1, o momento fletor na viga curva solicitada por uma força horizontal unitária, aplicada no apoio móvel.

O momento M_0 também pode ser determinado como sendo o momento fletor na viga simplesmente apoiada equivalente, de vão AB, tracionando as fibras inferiores. M_1, que provoca tração nas fibras superiores da viga curva, para uma seção qualquer é igual a $-y$. Sendo y a ordenada da seção em relação à origem do sistema xy. M_1, portanto, tem sempre a forma do eixo do arco quando suas ordenadas forem marcadas sobre a reta AB.

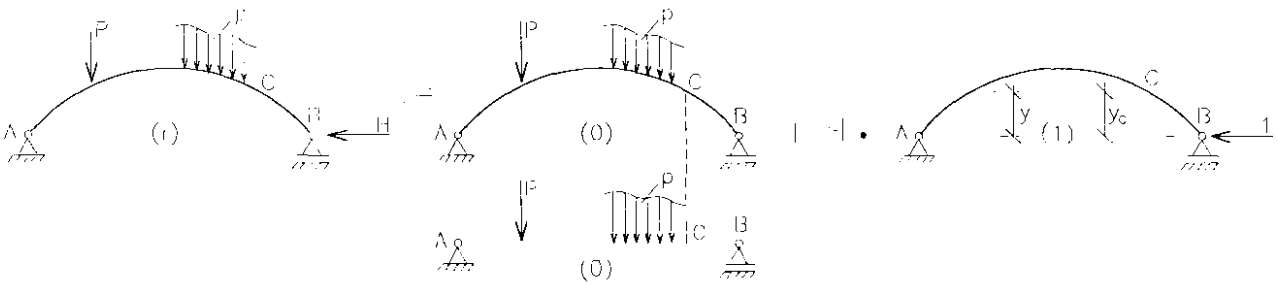
A equação (7.8) pode, então, ser escrita

$$M = M_0 - Hy \tag{7.9}$$

Para o ponto do arco correspondente à articulação C, podemos escrever

$$M_C = M_{OC} - Hy_C = 0 \quad \therefore \quad H = \frac{M_{OC}}{yc} \tag{7.10}$$

onde M_{oc} é o momento fletor na seção da viga equivalente que corresponde à projeção sobre ela da articulação C e yc é a ordenada da articulação C, no arco *tri*-articulado.



Superposição de carregamentos e viga equivalente

Figura 7.73

A força normal N e a força cortante V, no arco tri-articulado, variam com a inclinação α da seção transversal. A inclinação α é o ângulo entre a tangente ao eixo, na seção considerada, e a direção horizontal. N e V são obtidos através das projeções da força cortante (V'_S), calculada na seção correspondente da viga equivalente, e do empuxo H, na direção normal e tangencial ao plano da seção do arco. Desta forma podemos escrever, com o auxílio da Fig. 7.74.b,

$$N = -\left(V'_{(S)}\operatorname{sen}\alpha + H\cos\alpha\right) \tag{7.11}$$

$$V = \left(V'_{(S)}\cos\alpha - H\operatorname{sen}\alpha\right) \tag{7.12}$$

Voltando à equação (7.9), $M = M_o - Hy$, percebemos que o eixo do arco tri-articulado pode ser concebido de forma a suportar cargas verticais fixas com momento nulo.

Da equação (7.9), fazendo $M = 0$, segue-se

$$H = \frac{M_o}{y} \tag{7.13}$$

Sendo o eixo do arco uma função da abcissa x e escolhida sua forma proporcionalmente a M_o, podemos escrever

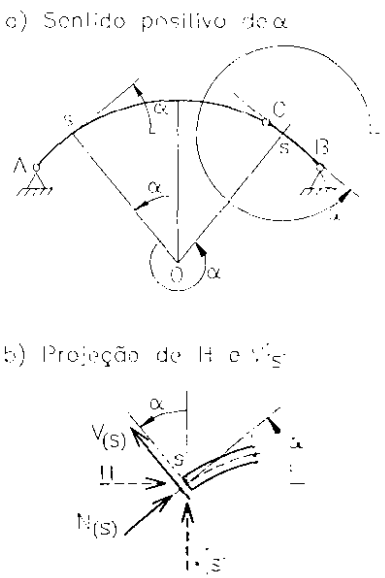


Figura 7.74

$$y = kM_o \tag{7.14}$$

com (7.14) em (7.13),

$$H = \frac{M_o}{kM_o} \quad \therefore \quad H = \frac{1}{k} \tag{7.15}$$

com (7.15) e (7.14) em (7.9), para uma seção qualquer,

$$M = M_o - \frac{1}{k} kM_o = 0$$

Sendo M = 0 em todas as seções do arco, a força cortante também será nula para qualquer seção, pois dM/dx = V = 0.

O arco, portanto, suportará cargas verticais fixas apenas solicitado por forças normais de compressão. A equação do eixo, que condiciona esta situação, é conhecida como linha de pressões do arco.

Exemplo 1

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para o arco de eixo circular e o carregamento da Fig. 7.75.a.

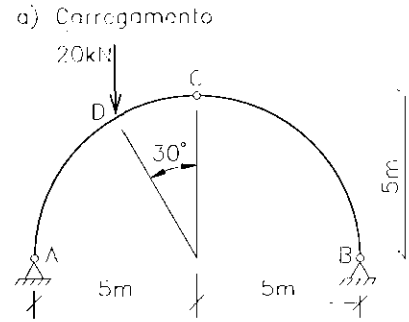


Figura 7.75.a

Solução

Os esforços solicitantes podem ser obtidos através das equações (7.9), (7.11) e (7.12). Para uma seção S qualquer do arco, podemos escrever

$$M = M_0 - Hy$$

$$V = V'_{(S)} \cos\alpha - H\,\mathrm{sen}\alpha$$

$$N = -\left(V'_{(S)}\,\mathrm{sen}\alpha + H\cos\alpha\right)$$

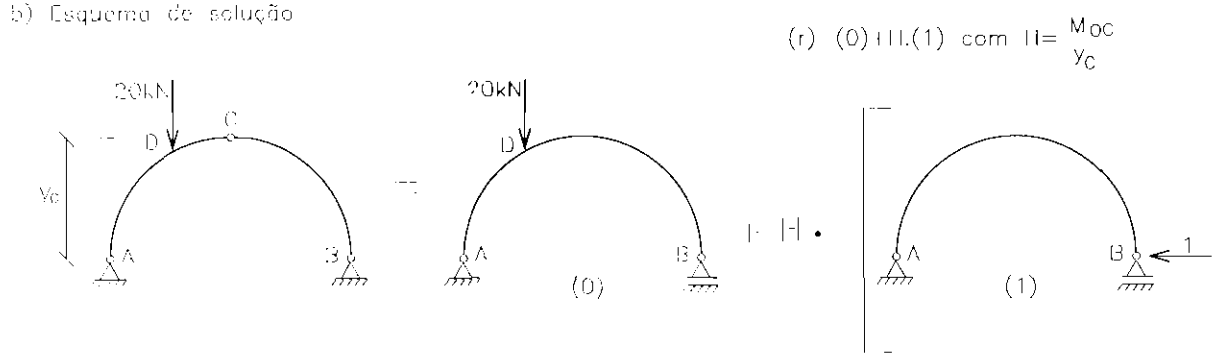


Figura 7.75.b

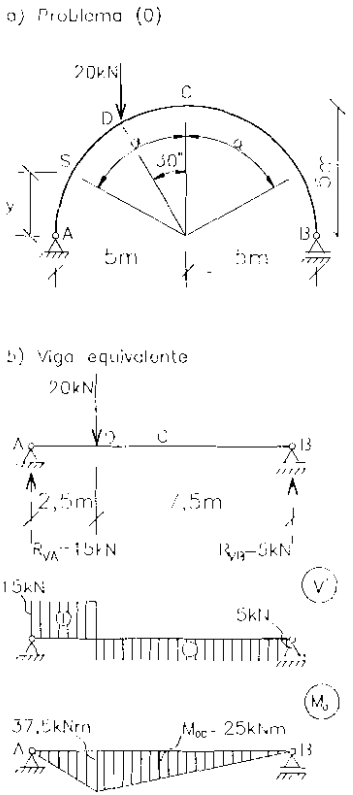


Figura 7.76

Com o auxílio da Fig. 7.76.a e b podemos facilmente calcular M_0, y, H e V'.

No trecho AD do arco, M_O pode ser calculado através da reação R_{VA}. No trecho DB, através da reação R_{VB}. Assim, para $\pi/2 \geq \alpha \geq 30°$,

$$M_o = 15 \times 5\,(1 - \text{sen}\alpha) = 75\,(1 - \text{sen}\alpha)$$

para $30° \geq \alpha \geq -\pi/2$,

$$M_o = 5 \times 5\,(1 + \text{sen}\alpha) = 25\,(1 + \text{sen}\alpha)$$

A função $y = f(\alpha)$ pode ser calculada para $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Naturalmente, para a outra metade do arco, a função é simétrica. Assim,

$$y = r\cos\alpha = 5\cos\alpha$$

O empuxo H pode ser calculado com a equação (7.10).

$$H = \frac{M_{OC}}{y_C} = \frac{25}{5} = 5\text{kN}$$

Por sua vez, a força cortante $V'_{(S)}$, na viga equivalente, conforme a Fig. 7.76.b, para o trecho AD é igual a 15kN e, para o trecho DB, a -5kN.

Os esforços solicitantes são calculados, ponto a ponto, e suas ordenadas são marcadas perpendicularmente ao eixo do arco. Para simplificar e organizar o cálculo manual utiliza-se a Tabela 7.1.

Tabela 7.1 - Cálculo de M, N e V

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
α	senα	cosα	y	M_0	Hy	$V_{(S')}$	$V_{(S')}$senα	$V_{(S')}$cosα	Hsenα	Hcosα	M	N	V
$\pi/2$	1,000	0,000	0,00	0,00	0,00	15,00	15,00	0,00	5,00	0,00	0,00	−15,00	−5,00
$\pi/3$	0,866	0,500	2,50	10,05	12,50	15,00	12,99	7,50	4,33	2,50	−2,45	−15,49	3,17
$\pi/6$	0,500	0,866	4,33	37,50	21,65	15,00	7,50	12,99	2,50	4,33	15,85	−11,83	10,49
						−5,00	−2,50	−4,33				−1,83	−6,83
0	0,000	1,000	5,00	25,00	25,00	−5,00	0,00	−5,00	0,00	5,00	0,00	−5,00	−5,00
$-\pi/6$	−0,500	0,866	4,33	12,50	21,65	−5,00	2,50	−4,33	−2,50	4,33	−9,15	−6,83	−1,83
$-\pi/3$	−0,866	0,500	2,50	3,35	12,50	−5,00	4,33	−2,50	−4,33	2,50	−9,15	−6,83	1,83
$-\pi/2$	−1,000	0,000	0,00	0,00	0,00	−5,00	5,00	0,00	−5,00	0,00	0,00	−5,00	5,00

Os diagramas dos esforços solicitantes, representados na Fig. 7.77, foram desenhados, ponto por ponto, perpendicularmente ao eixo do arco.

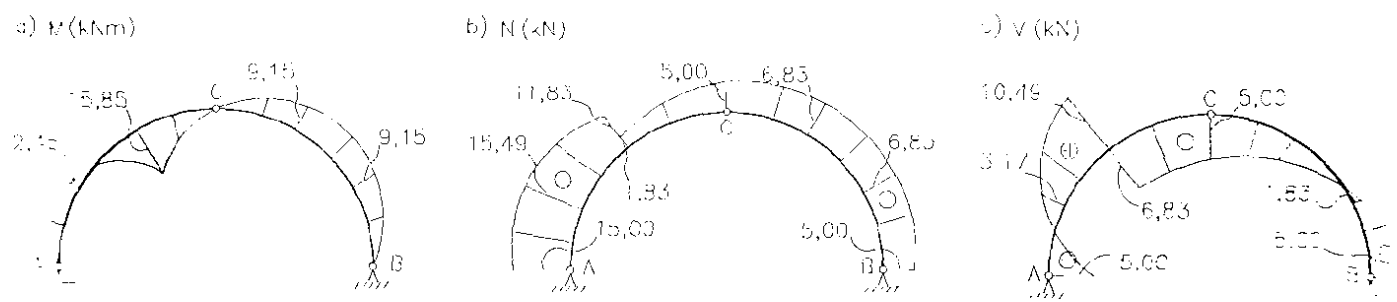


Figura 7.77

7.5 - ESTRUTURAS PLANAS, CONSTITUÍDAS POR BARRAS RETAS, SUJEITAS A CARGAS PERPENDICULARES AO SEU PLANO

Exemplo 1 - Grelha engastada

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para a estrutura e o carregamento da Fig. 7.78.a. As barras são ortogonais entre si.

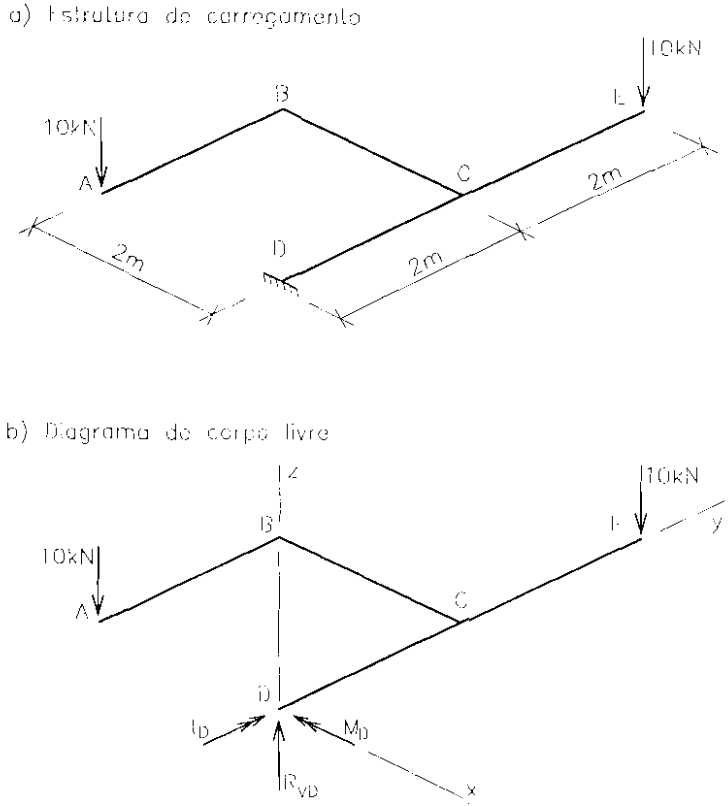


Figura 7.78

As reações aplicadas na estrutura pelo engastamento estão indicadas na Fig. 7.78.b, no sentido positivo.

Cálculo das reações

Com $\sum Z = 0$,

$R_{VD} - 10 - 10 = 0 \quad \therefore \quad R_{VD} = 20kN$

com $\sum M_{eixoX} = 0$,

$4 \times 10 + M_D = 0 \quad \therefore \quad M_D = -40kNm$

com $\sum M_{eixoY} = 0$,

$-2 \times 10 + T_D = 0 \quad \therefore \quad T_D = 20kNm$

Na Fig. 7.79 estão representadas as reações nos sentidos corretos.

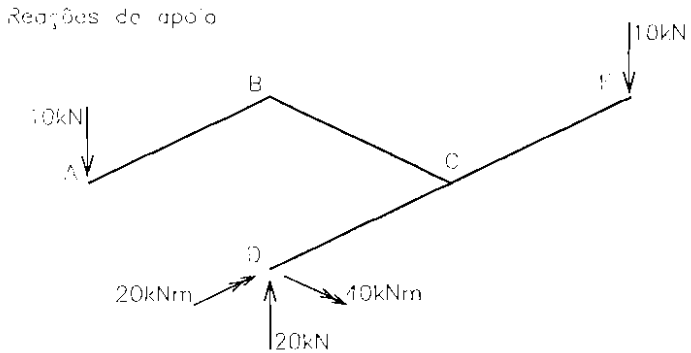


Figura 7.79

Cálculo dos esforços solicitantes

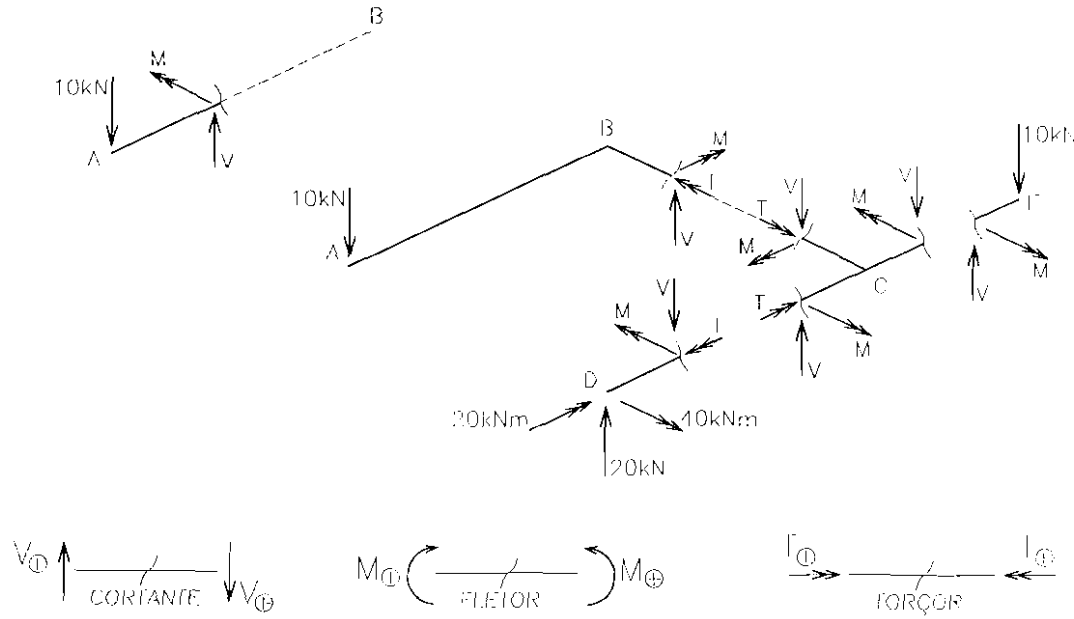
Força cortante (V)

O sentido horário ou anti-horário da força cortante depende da posição do observador. Adotaremos a posição natural do leitor como ponto de observação. Assim a estrutura é vista, no trecho ABC, pelo lado de dentro, e, no trecho DCE, pelo lado de fora.

Como só há ocorrência de forças concentradas, a cortante é constante em todos os trechos. Nos trechos AB e BC é igual a $-10kN$, como se pode constatar através de cortes imaginários em AB e BC, considerando-se as forças à esquerda dos cortes.

No trecho DC a cortante é positiva e igual a 20kN. Em CE, é positiva e

igual a 10kN. Observe-se a descontinuidade no ponto C, provocada pela incidência das forças do trecho ABC. A Fig. 7.80 ilustra o procedimento adotado.



Esforços solicitantes nos cortes imaginários e convenção de sinais

Figura 7.80

O traçado do diagrama da força cortante encontra-se na Fig. 7.81, p. 184.

Momento fletor (M)

O momento fletor varia linearmente em todos os trechos da grelha. De acordo com a convenção de sinais e os cortes imaginários da Fig. 7.80, determina-se facilmente o diagrama, que é apresentado na Fig. 7.81.

Note-se a descontinuidade no ponto C do trecho DCE, ocasionada pelo momento torçor no trecho BC.

Momento torçor

Nas grelhas não há ocorrência de esforços axiais. Por outro lado, as forças aplicadas fora dos planos verticais que contêm as barras provocam o esforço solici-

tante momento torçor, já apresentado ao leitor na Seção 5.2. Este momento atua no plano da seção transversal da barra e o vetor que o representa tem a sua linha de ação tangente ao eixo da barra.

Convencionamos como positivo o vetor cujo sentido, determinado pela "regra da mão direita", entra na seção transversal, Fig. 7.80. O esforço é constante nos trechos onde ocorre e sua determinação fica simplificada através de cortes imaginários nos diversos trechos.

Seguindo este procedimento e com o auxílio da Fig. 7.80 podemos escrever:

Trecho AB

À esquerda do corte imaginário não ocorrem forças fora do plano vertical que contém a barra. Portanto, T = 0.

Trecho BC

À esquerda do corte encontramos a força de 10kN aplicada em A, portanto fora do plano vertical de BC. O torçor é positivo e igual a 20 kNm.

Trecho CE

À direita do corte, a carga aplicada em E pertence ao plano vertical de CE, portanto T = 0.

Trecho DC

À esquerda do corte temos a reação torçora de 20kNm cujo vetor entra na seção transversal. Então T é positivo e igual a 20kNm.

Diagrama na Fig. 7.81, a seguir.

Diagrama dos esforços solicitantes

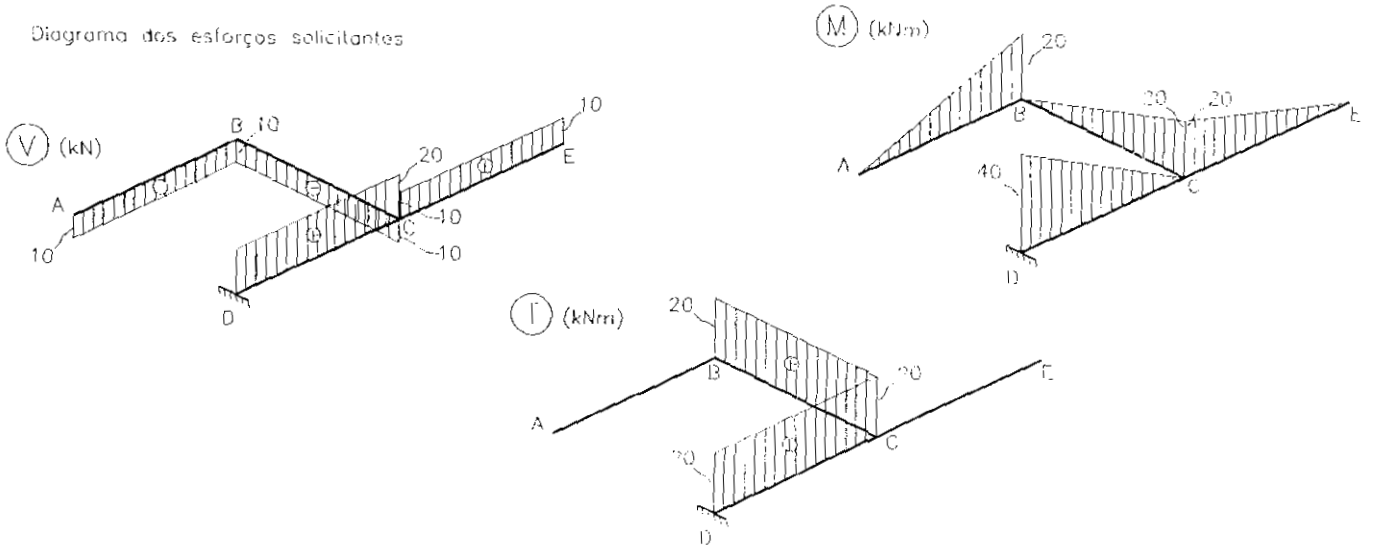
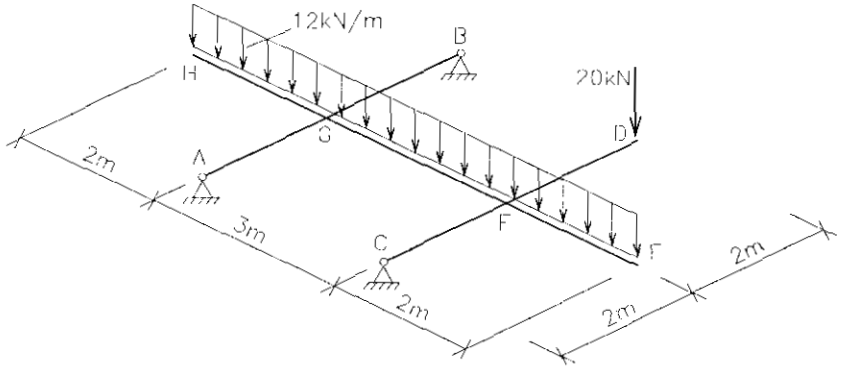


Figura 7.81

Exemplo 2 - Grelha tri-apoiada

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes na estrutura e carregamento da Fig. 7.82.a. O diagrama de corpo livre está representado na Fig. 7.82.b.

a) Carregamento



b) Diagrama de corpo livre

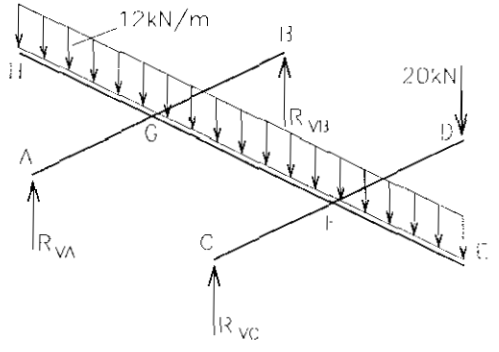


Figura 7.82

Diagrama de corpo livre

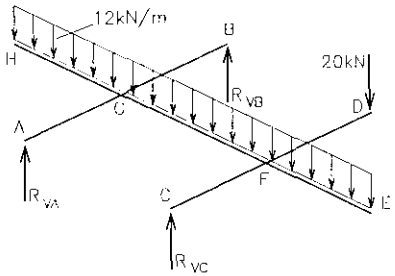


Figura 7.82.b

Cálculo das reações

Com $\sum M_{eixoAB} = 0$,

$3 \times R_{VC} - 3 \times 20 - 1{,}5 \times 84 = 0 \quad \therefore \quad R_{VC} = 62kN$

com $\sum M_{eixoAC} = 0$,

$4 \times R_{VB} - 4 \times 20 - 2 \times 84 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 62kN$

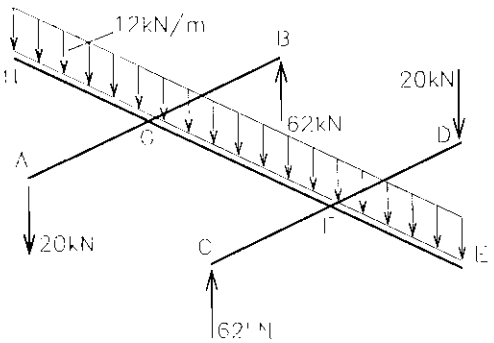
com $\sum Z = 0$,

$R_{VA} + 62 + 62 - 20 - 84 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = -20kN$

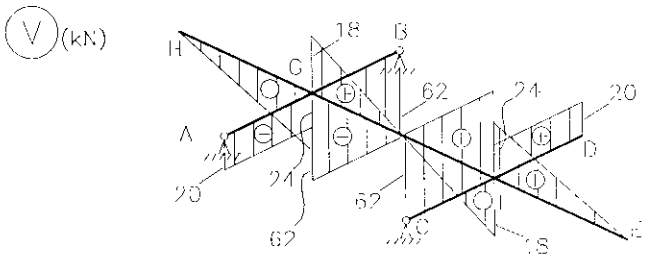
As reações de apoio estão representadas na Fig. 7.83.a, com os sentidos corretos.

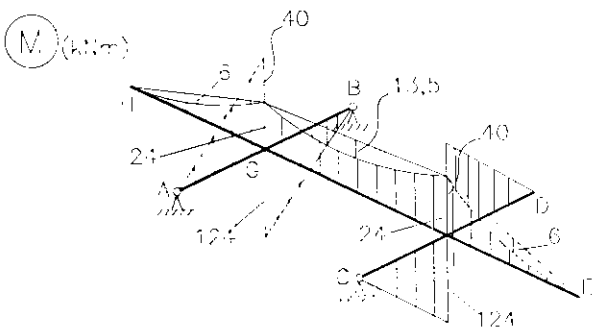
Os diagramas apresentados na Fig. 7.83.b foram determinados como no exemplo anterior, através de cortes imaginários. Note-se que o trecho EFGH, pelo fato da não ocorrência de torçores em AGB e CFD, trabalha como uma viga simplesmente apoiada, com balanços, submetida à carga distribuída.

a) Reações de apoio



b) Diagramas dos esforços solicitantes





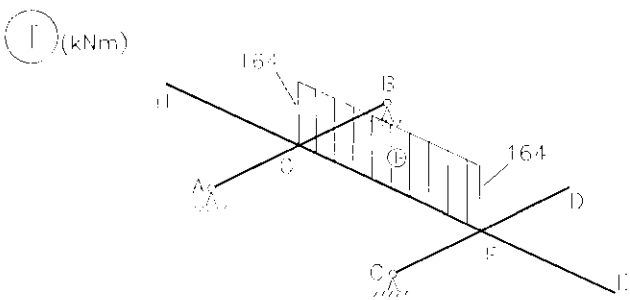


Figura 7.83

7.6 - GRELHA CURVA OU VIGA BALCÃO

A estrutura plana submetida a cargas perpendiculares ao seu plano e constituída por uma barra curva é uma grelha conhecida como viga balcão. Da mesma forma que as grelhas constituídas por barras retas, não necessitam de vínculos que transmitam esforços no seu plano. As equivalências entre barras vinculares e os apoios e vínculos são, portanto, as mesmas vistas na Seção 4.9 do Capítulo IV.

Exemplo 1 - Viga balcão de eixo circular, engastada e submetida à força concentrada

Traçar os diagramas dos esforços solicitantes para a estrutura e o carregamento da Fig. 7.84.a.

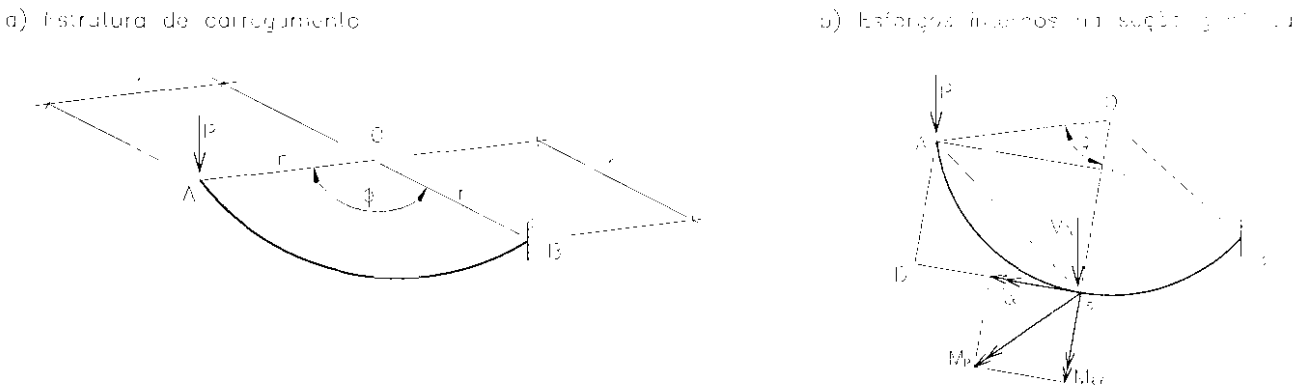


Figura 7.84

O vetor M_R, que representa o momento de P em relação à seção genérica S, é normal ao plano vertical formado pela força P e a reta AS, sendo, portanto, coplanar com a estrutura. As componentes do momento, M_α e T_α, são, respectivamente, perpendicular e tangente ao eixo da viga, em S, e representam o momento fletor e o momento torçor na seção genérica, à direita de S.

É imediato concluir que as intensidades das componentes podem ser calculadas pelo produto de P com as projeções AC e AD, da reta AS.

$M_\alpha = -P.AC$

$T_\alpha = -P.AD$

com $AC = r\,sen\alpha$ e $AD = CS = r(1 - \cos\alpha)$.

As equações que determinam os esforços solicitantes para qualquer seção transversal são, portanto,

$M_\alpha = -Prsen\alpha$, provocando tração nas fibras superiores;

$T_\alpha = -Pr(1 - \cos\alpha)$, anti-horário no plano da seção; e

V_α = constante $= -P$, anti-horário em S.

Reações de apoio representadas na Fig. 7.85 e os diagramas de estado, na 7.86.

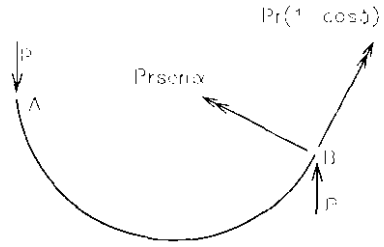


Figura 7.85

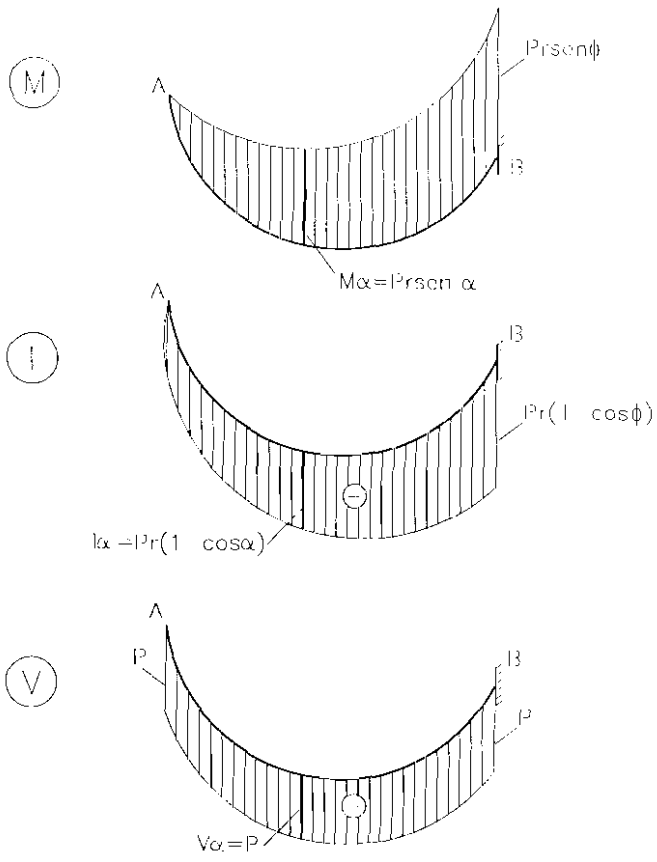


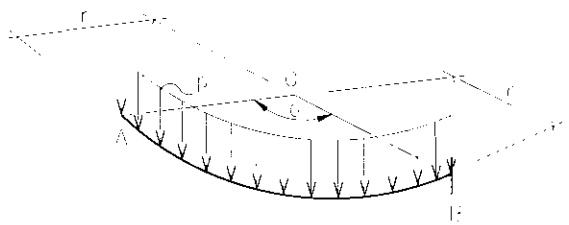
Figura 7.86

Exemplo 2 - Viga balcão engastada, de eixo circular, submetida a carga uniformemente distribuída

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para a estrutura e carregamento da Fig. 7.87.a.

Como no exemplo anterior, M_α e T_α são as componentes do momento M_R, cuja intensidade é CS.R, onde R é a resultante do carregamento que atua no arco AS e C é o ponto de aplicação da resultante. Também, como no exemplo anterior, M_α e T_α podem ser calculadas como sendo o produto da resultante pelas projeções y_R e x_R, da reta CS, na direção tangencial e normal à seção genérica S, respectivamente.

a) Estrutura de carregamento



b) Resultante R do carregamento no arco $\overset{\frown}{AS}$ e coordenadas x_R e y_R do ponto de aplicação

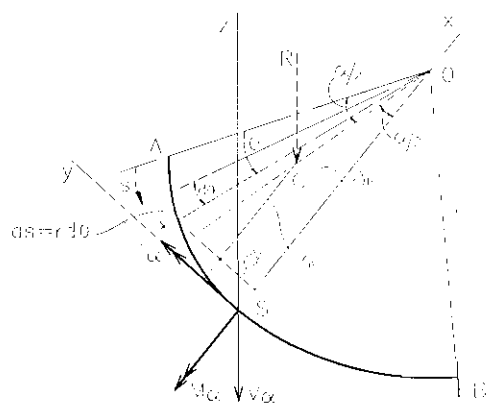


Figura 7.87

Por sua vez, x_R e y_R são as coordenadas do ponto de aplicação da resultante do carregamento vertical distribuído, no arco AS, em relação ao sistema de eixos cartesianos com origem na seção S. Os eixos x e y são coplanares com a estrutura e têm direção e orientação representadas na Fig. 7.87.b.

Os esforços solicitantes na seção genérica são, desta forma,

$M_\alpha = -y_R R$ (momento fletor tracionando as fibras superiores);
$T_\alpha = -x_R R$ (momento torçor anti-horário no plano da seção); e
$V_\alpha = -R$ (força cortante anti-horária em S).

A resultante do carregamento no arco AS e suas coordenadas em relação aos eixos x e y são, conforme Seção 4.3 do Capítulo IV,

$$R = A = pr\alpha \tag{7.16}$$

$$x_R = \frac{\int_o^\alpha x dA}{\int_o^\alpha dA} \tag{7.17}$$

$$y_R = \frac{\int_o^\alpha y dA}{\int_o^\alpha dA} \tag{7.18}$$

Com o auxílio da Fig. 7.87.b,

$$dA = pds = prd\theta \tag{7.19}$$

$$x = r\left[1 - \cos(\alpha - \theta)\right] \tag{7.20}$$

$$y = r \operatorname{sen}(\alpha - \theta) \tag{7.21}$$

Com (7.19), (7.20) e (7.21) adequadamente substituídos em (7.17) e (7.18) e desenvolvendo-se estas expressões, segue-se

$$x_R = \frac{pr^2\int_o^\alpha [1-\cos(\alpha-\theta)]d\theta}{pr\int_o^\alpha d\theta} = \frac{r\left(\int_o^\alpha d\theta - \int_o^\alpha \cos\alpha\cos\theta d\theta - \int_o^\alpha \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta d\theta\right)}{\int_o^\alpha d\theta} =$$

$$= \frac{r(\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{\alpha} = \frac{r}{\alpha}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$$

$$y_R = \frac{pr^2\int_o^\alpha \operatorname{sen}(\alpha-\theta)d\theta}{pr\int_o^\alpha d\theta} = \frac{r\left(\int_o^\alpha \operatorname{sen}\alpha\cos\theta d\theta - \int_o^\alpha \cos\alpha\operatorname{sen}\theta d\theta\right)}{\int_o^\alpha d\theta} =$$

$$= \frac{r\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha\right)}{\alpha} = \frac{r}{\alpha}(1-\cos\alpha)$$

As equações dos esforços solicitantes, na seção genérica, ficam, então,

$$M_\alpha = -pr^2\ (1-\cos\alpha) \tag{7.22}$$

$$T_\alpha = -pr^2\ (\alpha - \operatorname{sen}\alpha) \tag{7.23}$$

$$V_\alpha = -pr\alpha \tag{7.24}$$

As reações de apoio são mostradas na Fig. 7.88 e os diagramas estão representados na Fig. 7.89.

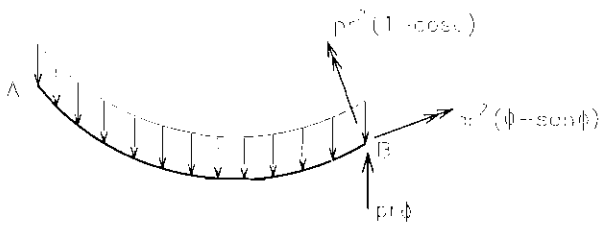


Figura 7.88

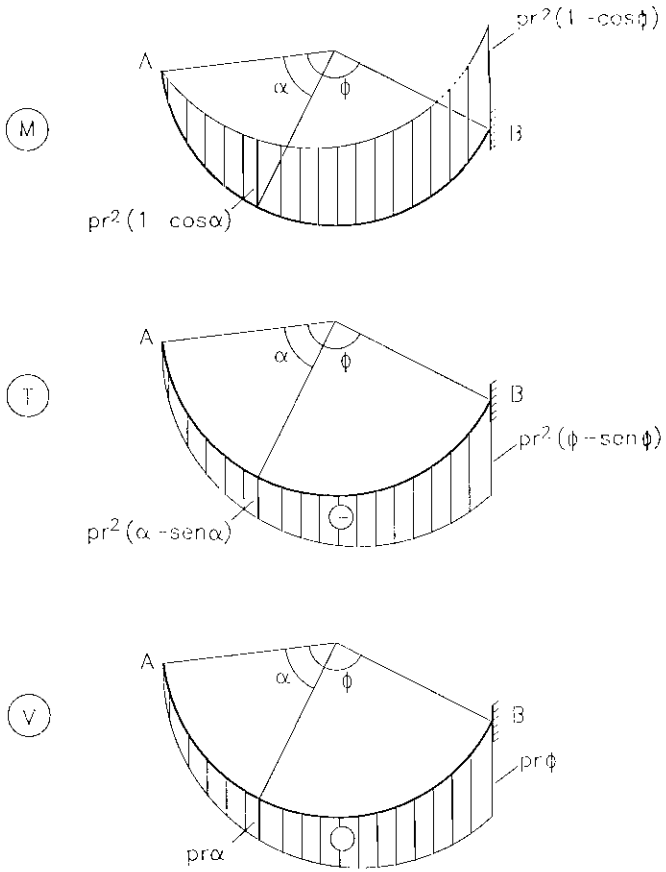
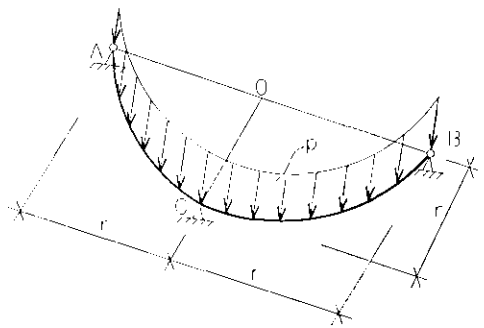

M
A
α
ϕ
B
pr²(1 -cosϕ)
pr²(1 cosα)
T
A
α
ϕ
B
pr²(ϕ -senϕ)
pr²(α -senα)
V
A
α
ϕ
B
prϕ
prα

Figura 7.89

Exemplo 3 - Viga balcão de eixo circular, tri-apoiada

Determinar os diagramas dos esforços solicitantes para a estrutura e o carregamento da Fig. 7.90.a.

a) Estrutura e carregamento



b) Diagrama de corpo livre e ponto de aplicação da resultante

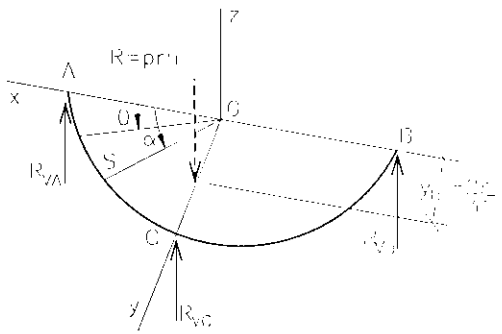


Figura 7.90

Ponto de aplicação da resultante

Para determinar a posição da resultante do carregamento, basta a coordenada y_R, considerando-se a simetria da carga.

$$y_R = \frac{\int_o^\pi y dA}{\int_o^\pi dA}\ ,\quad \text{com } dA = prd\theta\ ;\ y = r\text{sen}\theta$$

$$y_R = \frac{pr^2 \int_o^\pi \text{sen}\theta d\theta}{pr\int_o^\pi d\theta} = \frac{-r[\cos\theta]_o^\pi}{[\theta]_o^\pi} = \frac{2r}{\pi}$$

Cálculo das reações

Com $\sum M_{\text{eixoAB}} = 0$,

$$r.R_{VC} - \frac{2r}{\pi} \text{ x } pr\pi = 0 \quad \therefore \quad R_{VC} = 2pr$$

com $\sum Z = 0$,

$$R_{VA} + R_{VB} + 2pr - pr\pi = 0$$

com $R_{VA} = R_{VB}$, por simetria,

$$R_{VA} = R_{VB} = pr\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

As reações são mostradas na Fig. 7.91.

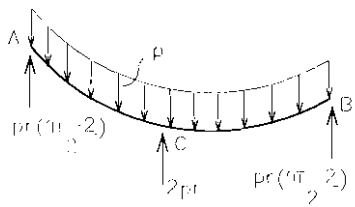


Figura 7.91

Cálculo dos esforços solicitantes

Na seção genérica S, definida pelo ângulo α, os esforços solicitantes são expressos por funções de α, válidas para $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Naturalmente, para a outra metade, as funções são simétricas, com excessão dos sinais para o momento torçor e para a força cortante.

As equações são obtidas superpondo-se os dois casos anteriores, levando-se em consideração o sinal do esforço na seção genérica. Assim, para $0 \leq \alpha \leq \pi/2$,

$$M\alpha = pr^2\left[\frac{\pi - 2}{2}\text{sen}\alpha - (1 - \cos\alpha)\right]$$

$$T\alpha = pr^2\left[\frac{\pi - 2}{2}(1 - \cos\alpha) - (\alpha - \text{sen}\alpha)\right]$$

$$V\alpha = pr\left(\frac{\pi - 2}{2} - \alpha\right)$$

Os diagramas de estado estão representados na Fig. 7.92.

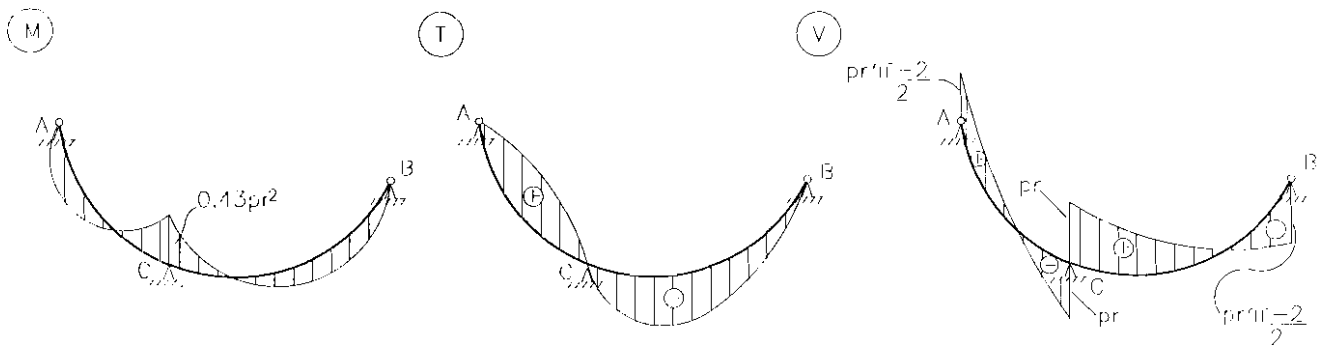


Figura 7.92

TRELIÇAS PLANAS

8.1 - GENERALIDADES

Este tipo de estrutura, por sinal uma das mais importantes formas estruturais, foi definida anteriormente como sendo a estrutura formada unicamente por barras unidas pelos seus pontos extremos, denominados nós. Quando os eixos das barras são coplanares, temos as treliças planas.

Para a formação das treliças pode-se partir de uma base, suposta rígida, definindo-se a posição do nó inicial através de duas barras e estabelecendo-se os nós seguintes, acrescentando, sempre, duas barras de cada vez ao sistema inicial. As treliças também podem ser formadas a partir de três barras, formando um triângulo, acrescentando-se ao sistema os nós restantes, através do acréscimo de duas barras. Vale lembrar que para a fixação da treliça assim formada ao seu plano são ainda necessárias três barras vinculares, que não sejam concorrentes num ponto próprio ou impróprio.

As treliças com esta lei de formação são chamadas de treliças simples e sua função estrutural é a mesma de uma grande viga de alma cheia, adequada para suportar cargas ao longo do seu vão. Existem formas consagradas de treliças adequadas às mais variadas funções estruturais como, por exemplo, para pontes e coberturas de edifícios. A Fig. 8.1 apresenta algumas treliças simples de utilização corrente na engenharia civil.

A função estática da barra da treliça é transmitir uma única força na direção de seu eixo, o que significa esforço cortante e fletor nulo na barra.

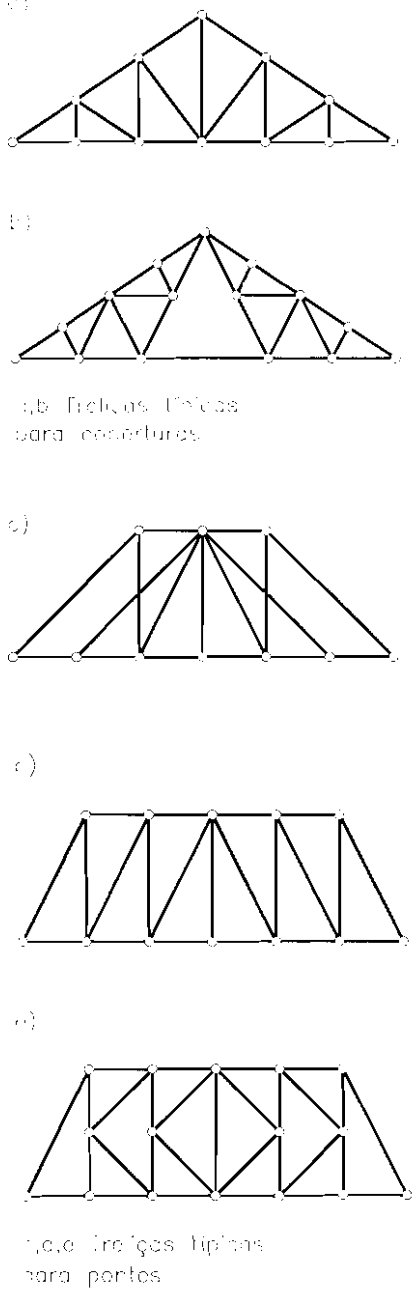


Figura 8.1

Para que esta distribuição de esforços seja verificada é necessário que os nós extremos da barra sejam articulações ideais, isto é, sem atrito, e que toda força concentrada ou distribuída aplicada na treliça o seja através dos nós. Esta situação provoca, nas barras da treliça, apenas esforços diretos de tração ou compressão, também chamados de esforços primários.

Na prática, os nós das treliças são ligações rígidas, soldadas ou parafusadas, o que provoca flexão nas barras. No entanto, se as barras da treliça forem posicionadas de tal forma que seus eixos sejam concorrentes em cada nó, esta flexão, devido à rigidez dos nós, não afeta significativamente a magnitude dos esforços primários. Desta forma, para efeito da determinação dos esforços internos nas barras das treliças, objeto do presente capítulo, os nós serão considerados como articulações ideais e as cargas suportadas pela estrutura serão sempre aplicadas através dos nós.

Mesmo na treliça ideal, as barras sofrerão pequena flexão devido ao seu peso próprio. Na prática, essa flexão é em geral desprezada e o peso próprio de cada barra é suposto concentrado nos seus nós extremos, por intermédio de duas cargas iguais.

Na prática, a aplicação das cargas através dos nós é ilustrada na Fig. 8.2, que representa esquematicamente uma ponte em treliça. As cargas aplicadas no tabuleiro da ponte — compreendido por um sistema de vigas transversais apoiadas nos nós correspondentes e por um sistema de vigas longitudinais apoiadas nas transversais — são sem sombra de dúvida transmitidas somente aos nós das treliças.

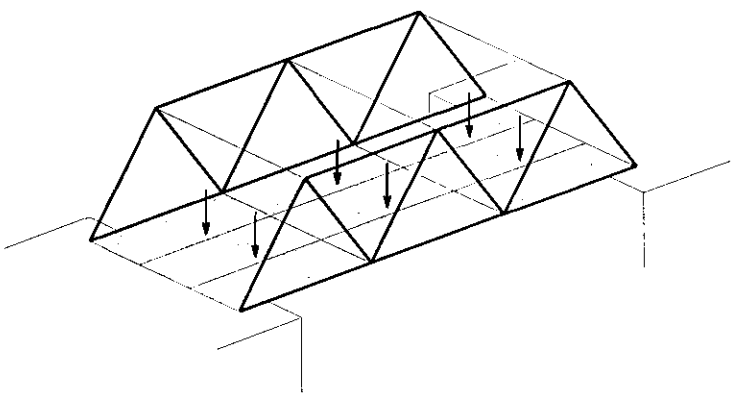


Figura 8.2

8.2 - DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DOS ESFORÇOS INTERNOS NAS BARRAS DAS TRELIÇAS SIMPLES

Método do equilíbrio dos nós

Com a consideração de só existirem esforços axiais nas barras da treliça e cargas aplicadas somente através dos nós, inclusive as reações de apoio, cada nó se constitui, estaticamente, em um ponto material submetido a um sistema de forças em equilíbrio, coplanares e concorrentes no ponto.

As equações de equilíbrio são, portanto, aquelas vistas na seção 1.7, $\sum X_i = 0$ e $\sum Y_i = 0$.

Podem ser escritas duas equações por nó, totalizando 2n equações independentes, com um número de incógnitas igual ao número b de barras. A solução do sistema de equações encerra a análise, fornecendo inclusive as reações de apoio.

Na prática, determinam-se inicialmente as reações de apoio, com a aplicação das três equações de equilíbrio relativamente à estrutura como um todo. As treliças simples têm, sempre, pelo menos um nó formado pela união de duas barras. O cálculo, pelo método dos nós, deve ser iniciado isolando-se e aplicando-se as equações de equilíbrio a este nó.

É comum, nas treliças simples, ocorrerem nós formados por duas ou três barras, nas quais os esforços internos podem ser determinados sem o estabelecimento das respectivas equações de equilíbrio. Estes nós são conhecidos como nós característicos e são de dois tipos:

a) Quando um nó é formado pela união de duas únicas barras, não ocorrendo força externa aplicada, os esforços nas barras são nulos.

b) Quando um nó é formado pela união de três barras, com duas delas colineares, os esforços internos nestas duas últimas são iguais em valor e sinal, com esforço nulo na terceira barra, desde que não haja ocorrência de força externa aplicada ao nó. Na Fig. 8.3 são mostrados os dois tipos de nós característicos.

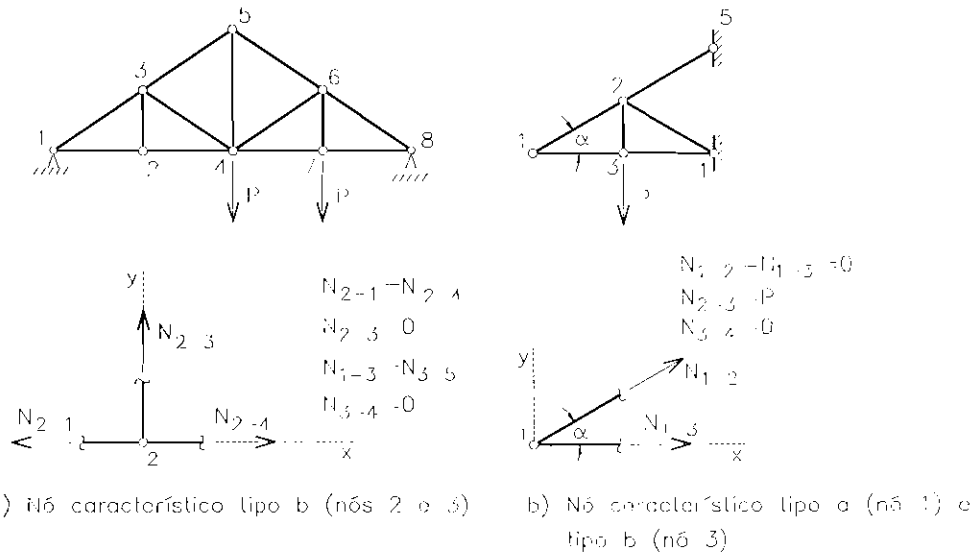


Figura 8.3

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

Calcular as forças internas nas barras da treliça simples da Fig. 8.4.

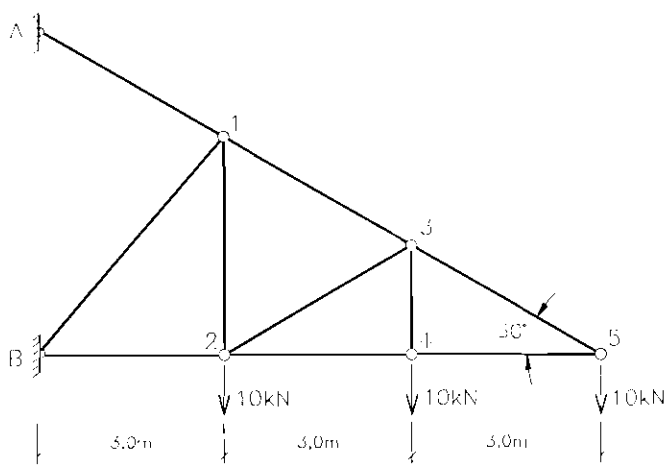


Figura 8.4

Solução

Isolando-se um nó qualquer e aplicando-se a ele as forças externas, se existirem, e as internas, que são as ações das barras correspondentes sobre o nó, definimos um sistema de forças coplanares, em equilíbrio, concorrentes em um ponto material.

Os esforços internos são as forças incógnitas que devem sempre ser assumidas como positivas, isto é, de tração, saindo do nó. Deste modo a interpretação do resultado fica simplificada, pois se resultar sinal negativo para uma força, ela será de compressão, entrando no nó.

As equações de equilíbrio disponíveis são duas, portanto o cálculo deve ser sempre iniciado pelo nó formado pela interseção de duas barras.

No exemplo iniciaremos pelo nó 5. A Fig. 8.5 mostra o nó isolado, em equilíbrio, sob a ação das forças externas e internas.

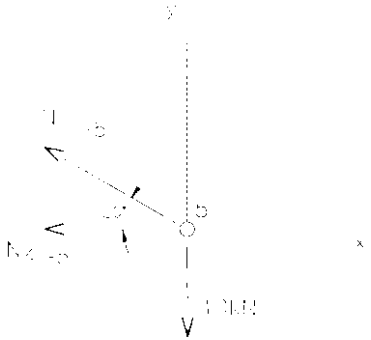


Figura 8.5

As equações $\sum X = 0$ e $\sum Y = 0$ referem-se às componentes das forças nas direções x e y, respectivamente, desta forma,

Com $\sum X = 0$,

$$-N_{4-5} - N_{3-5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

com $\sum Y = 0$,

$$N_{3-5} \cdot 0{,}5 - 10 = 0 \quad \therefore \quad N_{3-5} = 20\text{kN}$$

A equação anterior fica:

$$-N_{4-5} - 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \therefore \quad N_{4-5} = -10\sqrt{3}\text{kN}$$

O nó a ser equilibrado em seguida é o 4, agora com apenas duas incógnitas. A Fig. 8.6 mostra o nó 4 com a força N_{4-5} de compressão, portanto entrando no nó, com o seu sentido correto.



Figura 8.6

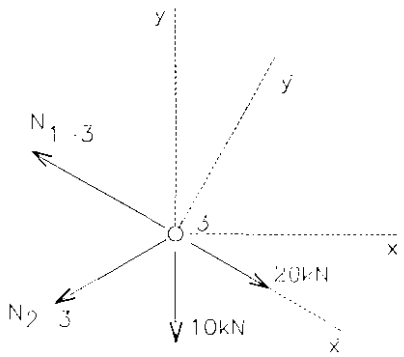


Figura 8.7

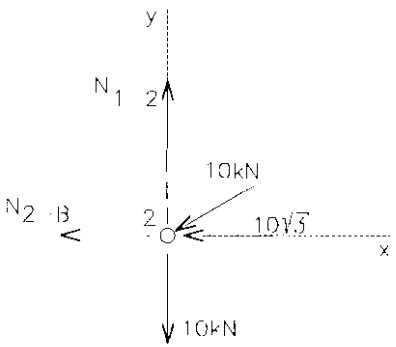


Figura 8.8

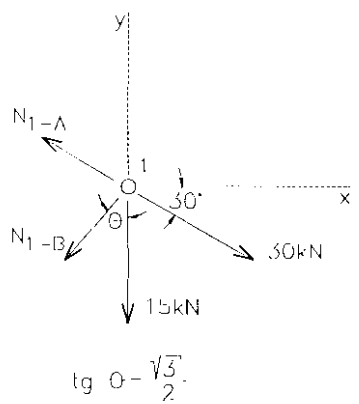


Figura 8.9

O resultado é visual e imediato

$$-N_{2-4} - 10\sqrt{3} = 0 \quad \therefore \quad N_{2-4} = -10\sqrt{3}\text{kN}$$

$$N_{3-4} - 10 = 0 \quad \therefore \quad N_{3-4} = 10\text{kN}$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio, o próximo nó será o de número 3. A Fig. 8.7 representa as forças conhecidas, com os sentidos corretos, e as incógnitas assumidas como de tração.

As equações de equilíbrio $\sum X = 0$ e $\sum Y = 0$ são, respectivamente,

$$-N_{1-3}\frac{\sqrt{3}}{2} - N_{2-3}\frac{\sqrt{3}}{2} + 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$N_{1-3}.0{,}5 - N_{2-3}.0{,}5 - 10 - 20.0{,}5 = 0$$

Com solução $N_{1-3} = 30\text{kN}$ e $N_{2-3} = -10\text{kN}$.

Poderiam, também, ter sido utilizadas equações de projeção nos eixos $\bar{x}$, $\bar{y}$.

O equilíbrio do nó 2, segundo o sentido das forças mostradas na Fig. 8.8, pode ser expresso conforme as equações seguintes.

$$-N_{2-B} - 10.\frac{\sqrt{3}}{2} - 10\sqrt{3} = 0 \quad \therefore \quad N_{2-B} = -15\sqrt{3}\text{kN}$$

$$N_{1-2} - 10.0{,}5 - 10 = 0 \quad \therefore \quad N_{1-2} = 15\text{kN}$$

Finalmente, encerrando o cálculo, equilibra-se o nó número 1, visto na Fig. 8.9, com as ações das barras sobre o nó.

Com o auxílio do ângulo q, formado entre a força N_{1-B} e a vertical, facilmente determinável, podemos estabelecer as equações de equilíbrio segundo x e y.

$$-N_{1-A}.\frac{\sqrt{3}}{2} - N_{1-B}\text{sen}\theta + 30.\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$N_{1-A}.0{,}5 - N_{1-B}\cos\theta - 15 - 30.0{,}5 = 0$$

Com solução $N_{1-A} = 40\text{kN}$ e $N_{1-B} = -5\sqrt{7}\text{kN}$.

Montagem dos resultados

As forças internas nas barras da treliça são constantes, por conseguinte, para expressar o resultado final, basta escrever o valor de cada força e seu sinal sobre a barra respectiva, no esquema da treliça.

Na Fig. 8.10 são apresentados os resultados da análise efetuada pelo método dos nós.

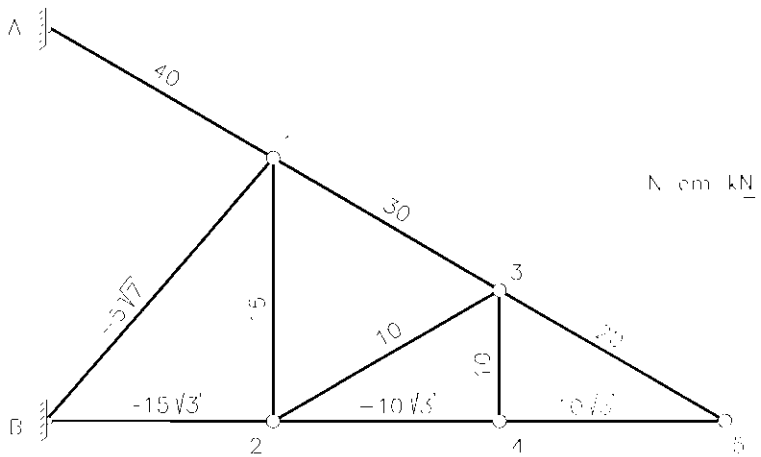


Figura 8.10

Exemplo 2

Determinar as forças internas nas barras da treliça da Fig. 8.11 para o carregamento dado.

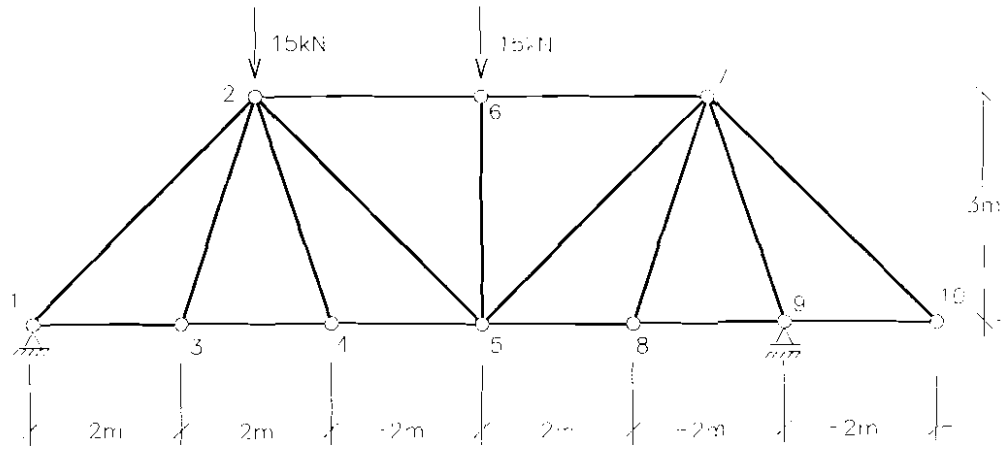


Figura 8.11

Solução

Reações de apoio

Estruturalmente, a treliça em questão assemelha-se a uma viga horizontal sob a ação de cargas verticais. Portanto ocorrem somente reações verticais.

Com $\sum M_1 = 0$,

$10\,R_{v9} - 6 \times 15 - 3 \times 15 = 0 \quad \therefore \quad R_{v9} = 13{,}5\text{kN}$

com $\sum Y = 0$,

$R_{v1} + 13{,}5 - 15 - 15 = 0 \quad \therefore \quad R_{v1} = 16{,}5\text{kN}$

Nós característicos

Para o carregamento dado, os nós 3, 4, 8 e 10 apresentam características especiais e dispensam a aplicação das equações de equilíbrio.

Os nós 3, 4 e 8 são formados, cada um, por três barras, sendo duas delas colineares, sem ocorrência de força externa aplicada aos nós. Pode-se, então, afirmar que

$$N_{2-3} = N_{2-4} = N_{7-8} = 0$$

$$N_{1-3} = N_{3-4} = N_{4-5} \quad \text{(em valor e sinal)} \tag{8.1}$$

$$N_{5-8} = N_{8-9} \quad \text{(em valor e sinal)} \tag{8.2}$$

O nó 10 é formado por duas barras concorrentes, sem ocorrer carga externa no nó. Afirma-se então que

$$N_{7-10} = N_{9-10} = 0$$

O diagrama de corpo livre pode ser visto na Fig. 8.12.

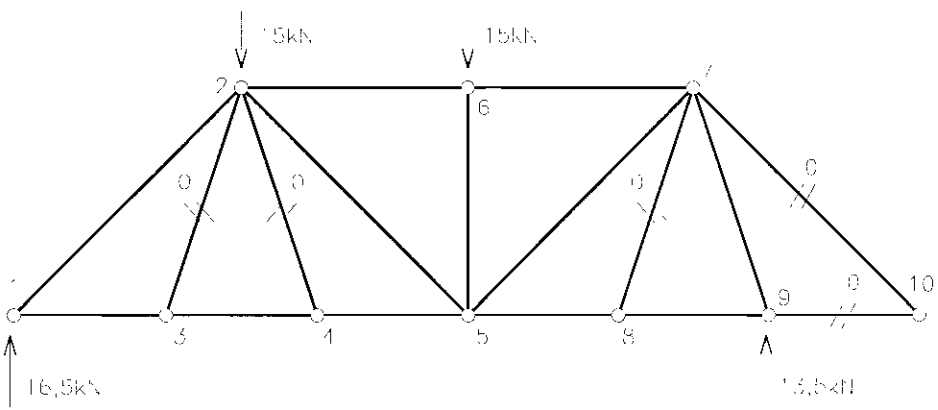


Figura 8.12

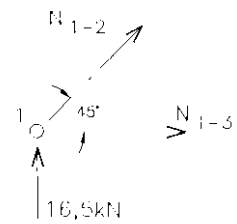


Figura 8.13

Iniciaremos pelo nó 1, Fig. 8.13, conforme as equações de equilíbrio,

Com $\sum Y = 0$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}N_{1-2} + 16{,}5 = 0 \quad \therefore \quad N_{1-2} = -16{,}5.\sqrt{2}\,kN$$

Com $\sum X = 0$,

$$N_{1-2}\frac{\sqrt{2}}{2} + N_{1-3} = 0 \quad \therefore \quad N_{1-3} = 16{,}5kN$$

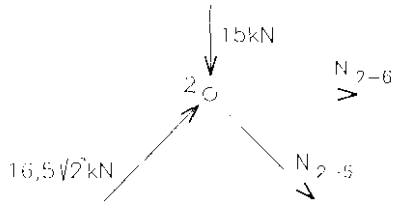


Figura 8.14

De onde conclui-se, pela (8.1), que $N_{1-3} = N_{3-4} = N_{4-5} = 16,5kN$.

A Fig. 8.14 mostra o nó 2 com a força N_{1-2}, agora conhecida, aplicada no sentido correto. Do equilíbrio, segue-se,

Com $\sum Y = 0$,

$$16{,}5.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - 15 - N_{2-5}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \therefore \quad N_{2-5} = 1{,}5\sqrt{2}\,kN$$

com $\sum X = 0$,

$$16{,}5.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + N_{2-5}\frac{\sqrt{2}}{2} + N_{2-6} = 0 \quad \therefore \quad N_{2-6} = -18{,}0kN$$

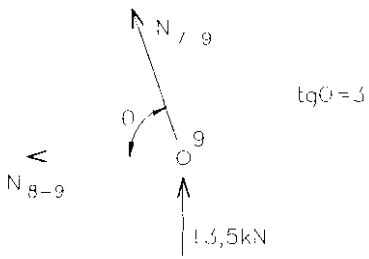


Figura 8.15

Observando-se o nó 6, dadas suas características, conclui-se de imediato que $N_{2-6} = N_{6-7} = -18kN$ e $N_{5-6} = -15kN$.

Passamos, agora, a analisar o nó número 9. A Fig. 8.15 mostra o nó isolado.

Com $\sum Y = 0$,

$$N_{7-9}\,sen\theta + 13{,}5 = 0$$

com $\sum X = 0$,

$$-N_{7-9}\cos\theta - N_{8-9} = 0$$

Com solução $N_{8-9} = 4,5kN$ e $N_{7-9} = -4,5\sqrt{10}kN$.

Pela equação (8.2) conclui-se que $N_{5-8} = N_{8-9} = 4,5kN$. Finalmente podemos equilibrar o nó 7, visto na Fig. 8.16.

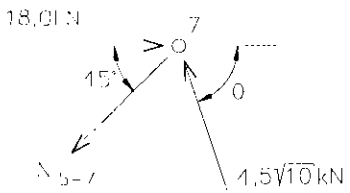


Figura 8.16

Com $\sum Y = 0$,

$$4,5\sqrt{10}.\text{sen}\theta - N_{5-7}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \therefore \quad N_{5-7} = 13,5\sqrt{2}kN$$

A montagem dos resultados é apresentada na Fig. 8.17.

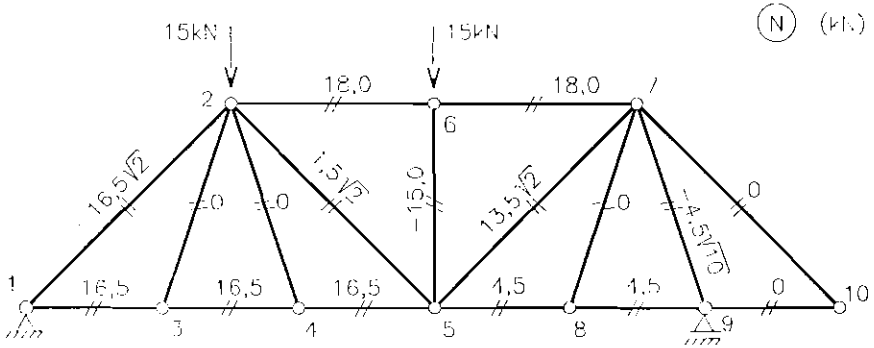


Figura 8.17

Corte de Ritter ou método das seções

Um grande avanço na análise das forças internas nas barras de treliças ocorreu por volta de 1860, graças ao engenheiro alemão A. Ritter. Ritter mostrou que através de equações seletivas de equilíbrio de momentos pode-se obter as forças em determinadas barras sem recorrer sucessivamente às condições de equilíbrio dos nós.

O método é baseado no equilíbrio das partes de uma treliça, separada por um corte imaginário que a atravesse totalmente. A treliça, anteriormente em equilíbrio sob ação das cargas ativas e reativas, após o corte, geralmente, não apresenta as partes, separadamente, sob a mesma condição, ou seja, em equilíbrio. Isto ocorre devido à destruição dos vínculos internos entre as barras.

Para restaurar o equilíbrio, por exemplo, da parte esquerda, aplica-se nas barras cortadas seus esforços internos, que nada mais são que a ação da parte direita sobre a esquerda. O equilíbrio da parte direita é restaurado de forma recíproca. Evidentemente, os esforços internos, que representam a ação de uma parte sobre a outra, são iguais em valor e sinal.

O método é apropriado para treliças que possam ser, imaginariamente, cortadas através de três barras, duas a duas concorrentes. Desta forma a força em uma das barras pode ser determinada através da equação de momento, com apenas uma incógnita, formulada em relação ao ponto comum entre as outras duas.

O método dos cortes será ilustrado a seguir. Pretende-se determinar as forças nas barras 2-4, 3-4 e 3-5 da treliça da Fig. 8.18.a através do corte imaginário S_1-S_1.

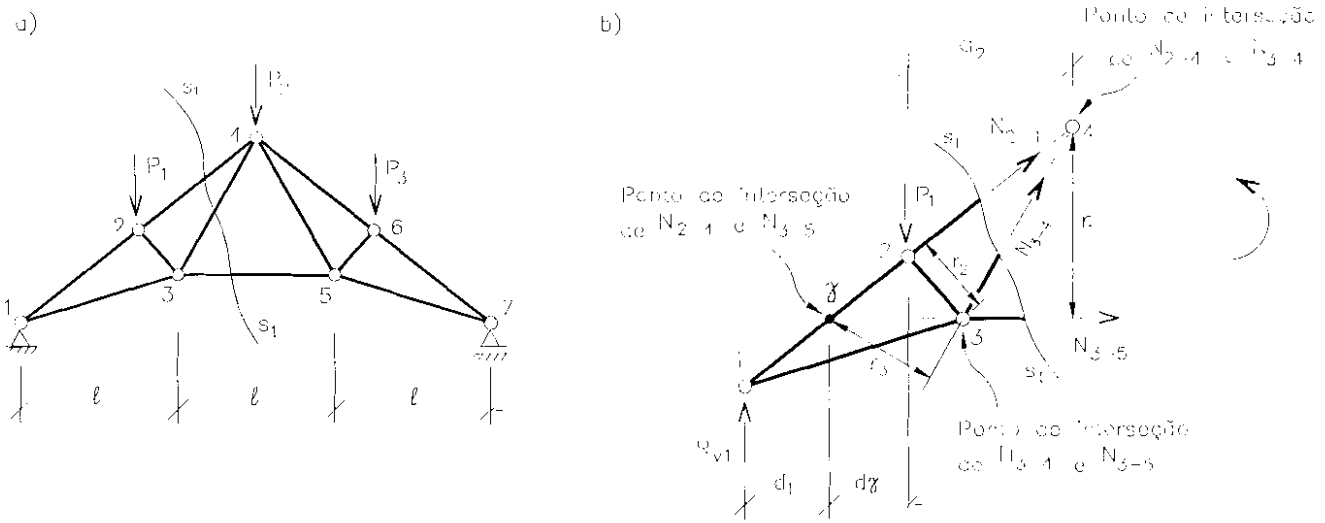


Figura 8.18

A Fig. 8.18.b mostra a parte à esquerda do corte, em equilíbrio, sob ação das forças externas e internas. Naturalmente, a parte à direita do corte também estará em equilíbrio sob a ação das mesmas forças internas. A técnica consiste em escolher, sempre, a parte com menor número de forças externas aplicadas.

Com $\sum M_4 = 0$, determina-se $N_{3\text{-}5}$.

$$N_{3-5}.r_1 + P_1.d_2 - R_{v1}.\frac{3\ell}{2} = 0 \quad \therefore \quad N_{3-5} = \frac{\frac{3}{2}R_{v1}.\ell - P_1.d_2}{r_1} \tag{8.3}$$

Com $\sum M_3 = 0$, determina-se N_{2-4}

$$P_1\left(\ell - d_7 - d_1\right) - R_{v1}.\ell - N_{2-4}.r_2 = 0 \ \therefore$$

$$N_{2-4} = \frac{R_{v1}.\ell - P_1\left(\ell - d_7 - d_1\right)}{r_2} \tag{8.4}$$

Com $\sum M_7 = 0$, determina-se N_{3-4}

$$N_{3-4}.r_3 - P_1.d_7 - R_{v1}.d_1 = 0 \quad \therefore \quad N_{3-4} = \frac{P_1.d_7 + R_{v1}.d_1}{r_3} \tag{8.5}$$

Observando-se as equações (8.3), (8.4) e (8.5) nota-se que o denominador sempre representa o momento das forças externas em relação ao ponto de interseção das outras duas barras, e o dividendo é o braço de alavanca do esforço procurado em relação ao mesmo ponto.

O método também pode ser aplicado às treliças mais complexas, mas que seguem a lei de formação das treliças simples. Seja, por exemplo, a treliça K da Fig. 8.19.a.

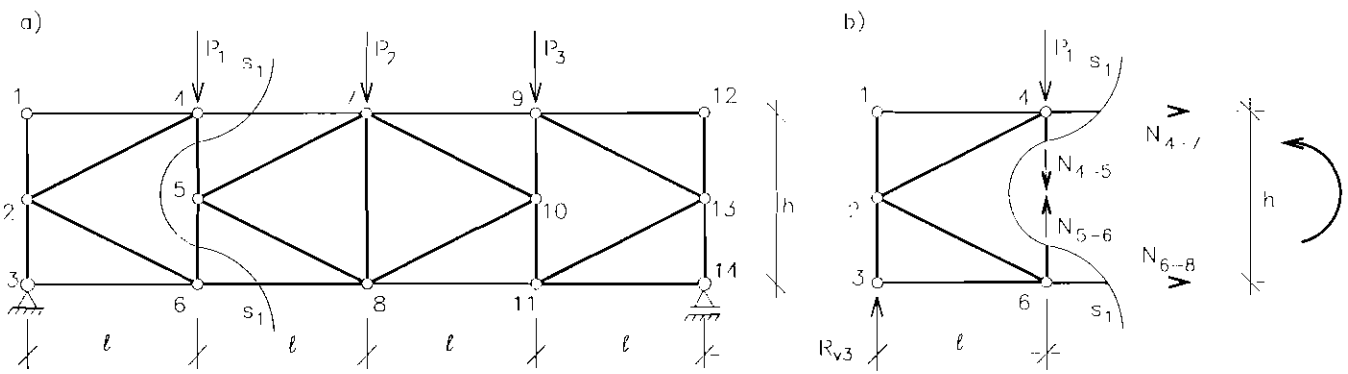


Figura 8.19

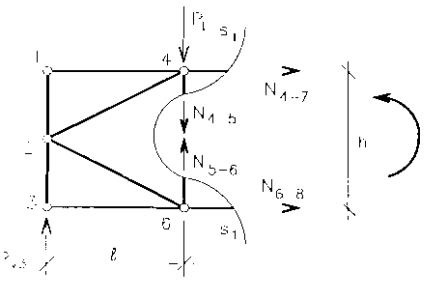


Figura 8.19.b

Pretende-se determinar a força na barra 4-7. Com o auxílio do corte S_1-S_1, apesar de cortar quatro barras, é possível calcular a força N_{4-7}, pois as outras três forças internas têm ponto comum no nó 6, como se pode notar pela Fig. 8.19.b.

Com $\sum M_6 = 0$,

$$-N_{4-7}.h - R_{v3}.\ell = 0 \quad \therefore \quad N_{4-7} = -\frac{R_{v3}.\ell}{h}$$

Outro exemplo de treliça mais complexa mas que segue ainda a lei de formação das treliças simples é o da Fig. 8.20.a, onde pretende-se, por exemplo, determinar a força na barra 3-4.

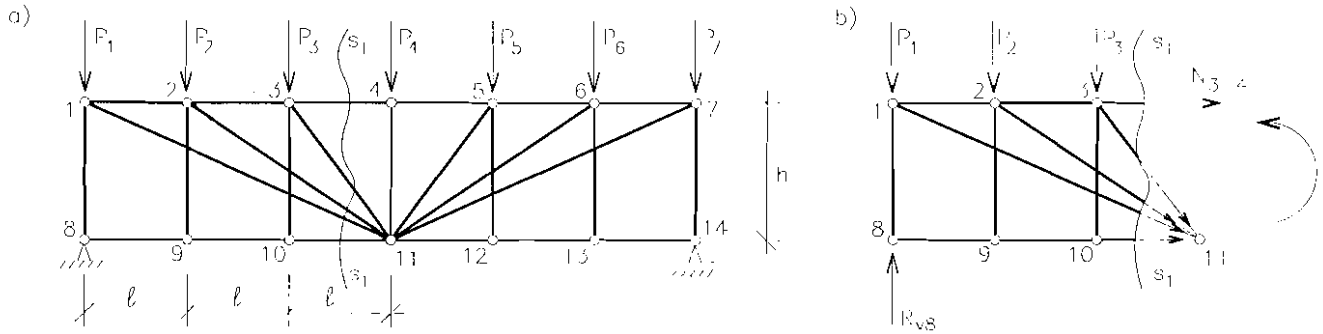


Figura 8.20

No exemplo, apesar de o corte atravessar a treliça interceptando cinco barras, o método de Ritter pode ser utilizado para achar N_{3-4}. Como se pode notar na Fig. 8.20.b, as outras quatro barras têm ponto comum no nó 11.

Com $\sum M_{11} = 0$,

$$-R_{v8}.3\ell + P_1.3\ell + P_2.2\ell + P_3.\ell - N_{3-4}.h = 0 \quad \therefore \quad N_{3-4} = \frac{(3P_1 + 2P_2 + P_3 - 3R_{v8}).\ell}{h}$$

Na prática, o método dos cortes de Ritter geralmente é utilizado associado ao método do equilíbrio dos nós. Uma das aplicações mais úteis do método dos cortes é feita na análise de treliças com barras superiores e inferiores paralelas,

carregadas verticalmente. Este tipo de treliça é comumente denominada viga treliça ou viga treliçada. A Fig. 8.21 mostra a estrutura.

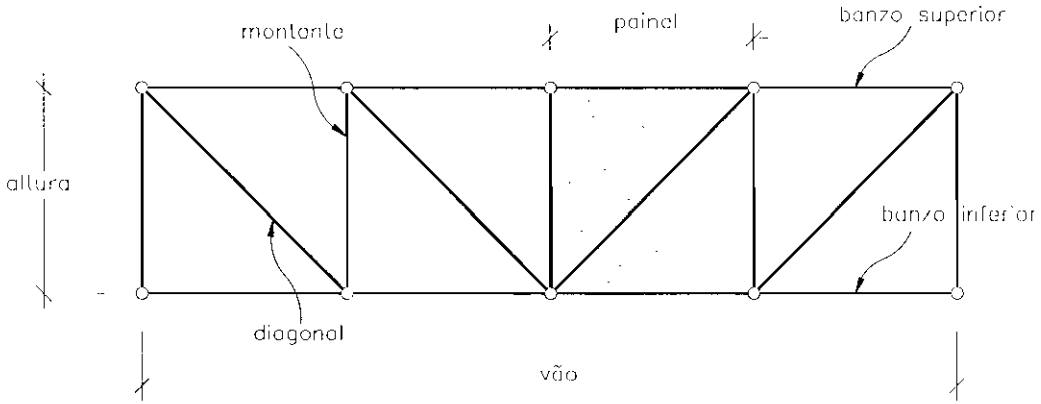


Figura 8.21

Seja determinar as forças nas barras da treliça de banzos paralelos da Fig. 8.22.a.

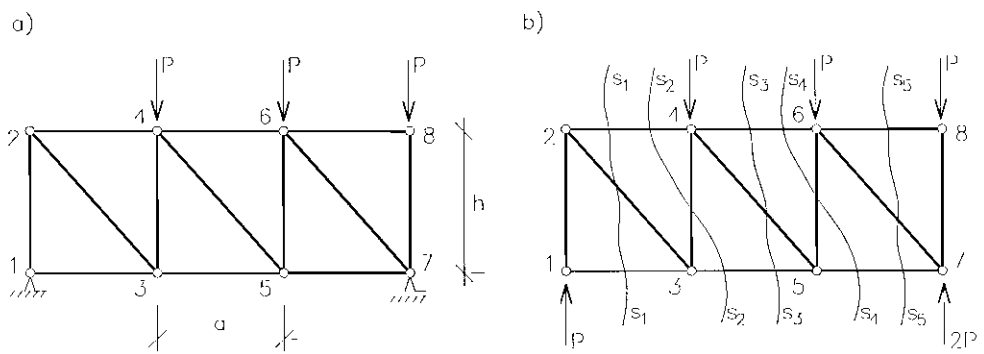


Figura 8.22

O cálculo das reações de apoio foi omitido, tendo em vista sua simplicidade. As reações são apresentadas na Fig. 8.22.b.

Os cortes, apesar de atravessarem a treliça sempre por três barras, não são suficientes para determinar todas as forças devido ao paralelismo dos banzos. As

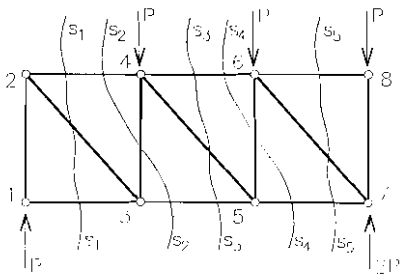


Figura 8.22.b

forças nos montantes e nas diagonais podem ser determinadas por equações de projeção ou equilíbrio de nós.

Assim, iniciaremos a análise pelas forças nos banzos, superiores e inferiores, com os cortes S_1-S_1, S_3-S_3 e S_5-S_5 e com as partes, à direita ou à esquerda, menos solicitadas por forças externas, Fig. 8.23.a, b e c.

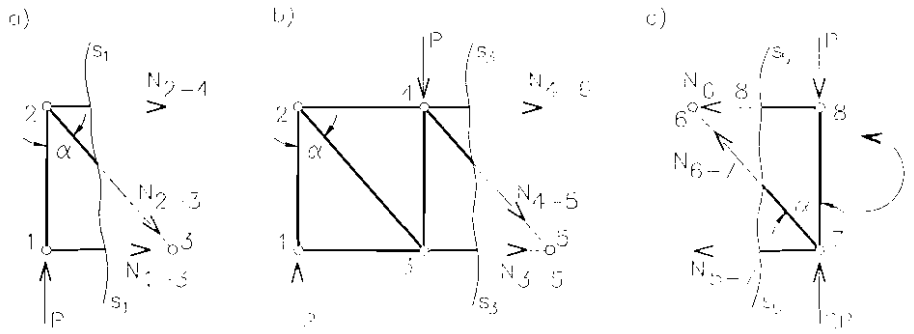


Figura 8.23

Corte S_1-S_1 (Fig. 8.23.a)

Com $\sum M_2 = 0$ determina-se N_{1-3} (banzo inferior)

$$P.0 + N_{1-3}.h = 0 \quad \therefore \quad N_{1-3} = \frac{0}{h} = 0 \tag{8.6}$$

Com $\sum M_3 = 0$ determina-se N_{2-4} (banzo superior)

$$-P.a - N_{2-4}.h = 0 \quad \therefore \quad N_{2-4} = -\frac{P.a}{h} \tag{8.7}$$

Corte S_3-S_3 (Fig. 8.23.b)

Com $\sum M_4 = 0$, determina-se N_{3-5} (banzo inferior)

$$-P.a + N_{3-5}.h = 0 \quad \therefore \quad N_{3-5} = \frac{P.a}{h} \tag{8.8}$$

Com $\sum M_5 = 0$ determina-se N_{4-6} (banzo superior)

$$-P.2a + P.a - N_{4-6}.h = 0 \quad \therefore \quad N_{4-6} = -\frac{P.a}{h} \tag{8.9}$$

Corte S_5-S_5 (Fig. 8.23.c)

Com $\sum M_6 = 0$ determina-se N_{3-7} (banzo inferior)

$$2P.a - P.a - N_{5-7}.h = 0 \quad \therefore \quad N_{5-7} = \frac{P.a}{h} \tag{8.10}$$

Com $\sum M_7 = 0$ determina-se N_{6-8} (banzo superior)

$$2P.0 + P.0 + N_{6-8}.h = 0 \quad \therefore \quad N_{6-8} = \frac{0}{h} = 0 \tag{8.11}$$

Note-se que as equações (8.6) a (8.11) são todas do tipo $N = \pm\frac{M}{h}$, onde N é a força procurada, M é o momento de todas as forças externas aplicadas na parte analisada da treliça, em relação ao ponto de interseção das outras duas, e h é o braço de alavanca da força procurada em relação ao mesmo ponto. Note-se ainda que todas as forças nas barras do banzo inferior são positivas ou nulas e as do banzo superior são negativas ou nulas.

O momento M das forças externas em relação aos pontos de interseção das duas outras barras, em cada corte, é igual ao momento fletor na seção transversal de uma viga equivalente, de alma cheia, nos pontos correspondentes. A viga equivalente tem o mesmo vão, a mesma vinculação e a mesma solicitação da estrutura real. O sinal das forças, nos banzos, corresponde à fibra tracionada (+) ou comprimida (–) na extremidade inferior e superior, respectivamente, da viga equivalente. A Fig. 8.24.a, na página seguinte, mostra a treliça e a viga equivalente.

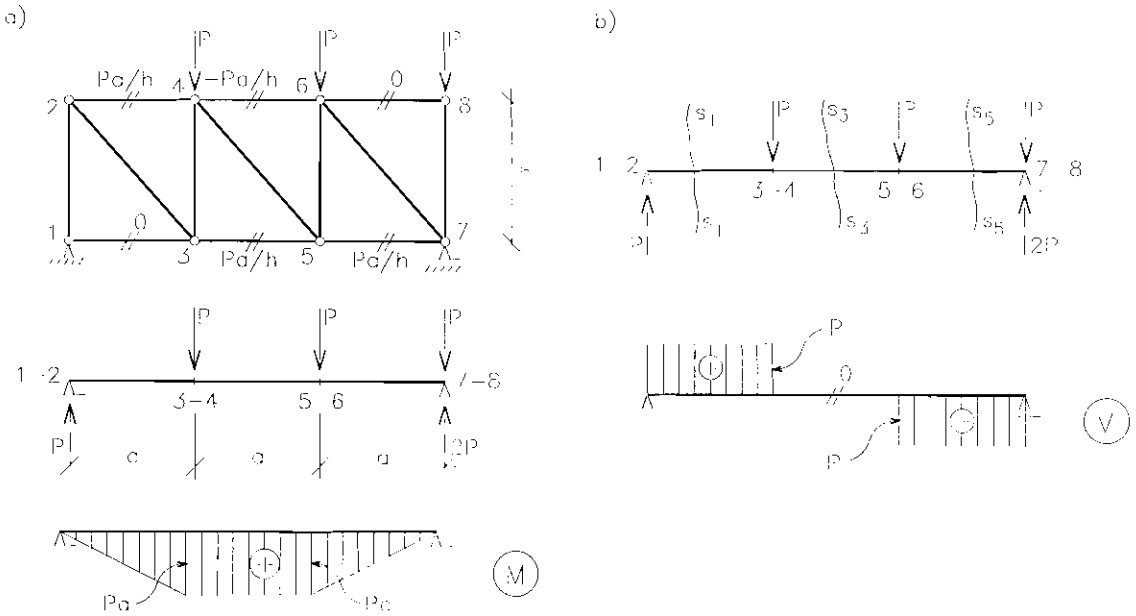


Figura 8.24

As treliças de banzos paralelos, bi-apoiadas, com cargas verticais de cima para baixo, têm sempre as barras do banzo superior comprimidas e as do banzo inferior tracionadas.

É interessante adaptar a expressão $N = \pm\frac{M}{h}$ para cargas verticais com quaisquer sentidos ou para outras posições dos vínculos. Assim podemos formalizar as seguintes expressões para as forças nos banzos:

$$N \text{ (banzo superior)} = -\frac{M}{h} \tag{8.12}$$

$$N \text{ (banzo inferior)} = \frac{M}{h} \tag{8.13}$$

Com M de mesmo sinal do momento fletor obtido na viga equivalente, para o ponto correspondente.

As forças nos montantes e nas diagonais podem ser obtidas por equações de projeção ou por equilíbrio dos nós. Com o auxílio das Fig. 8.23.a, b e c e fazendo a projeção das forças nas diagonais, para o eixo vertical, obtemos $N_{2\text{-}3}$, $N_{4\text{-}5}$ e $N_{6\text{-}7}$.

Com $\sum Y = 0$,

$$P - N_{2-3}\cos\alpha = 0 \quad \therefore$$

$$N_{2-3} = \frac{P}{\cos\alpha} \qquad \text{(Fig. 8.23.a)} \qquad (8.14)$$

$$P - P - N_{4-5}\cos\alpha = 0 \quad \therefore$$

$$N_{4-5} = \frac{0}{\cos\alpha} = 0 \qquad \text{(Fig. 8.23.b)} \qquad (8.15)$$

$$2P + N_{6-7}\cos\alpha - P = 0 \quad \therefore$$

$$N_{6-7} = -\frac{P}{\cos\alpha} \qquad \text{(Fig. 8.23.c)} \qquad (8.16)$$

Observando as equações (8.14) a (8.16) nota-se que as forças nas diagonais são da forma $N = \frac{V}{\cos\alpha}$, onde V é a força cortante na viga equivalente correspondente à seção do corte de Ritter.

No exemplo estudado, devido à disposição das diagonais, o sinal da cortante na viga equivalente coincidiu com o sinal da força. Se a disposição for mudada, como na Fig. 8.25, as forças nas diagonais trocam de sinal.

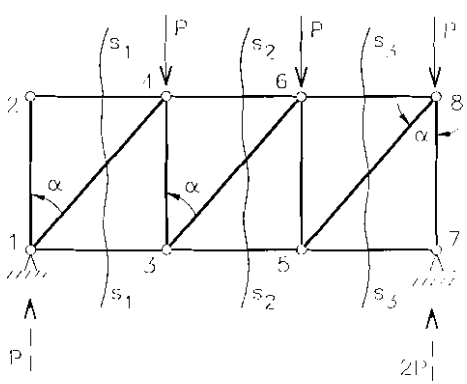
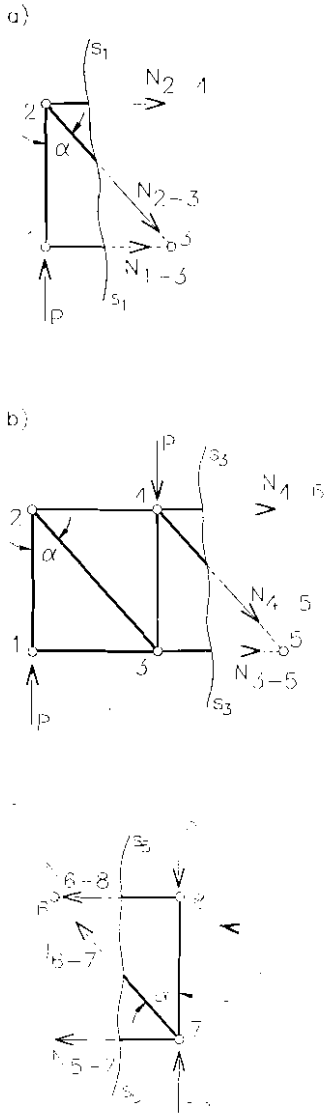


Figura 8.25

Considerando-se os mesmos cortes e projetando as forças no eixo vertical, pode-se escrever,



Figuras 8.23.a, b e c

Com $\sum Y = 0$,

$$N_{1-4}\cos\alpha + P = 0 \quad \therefore \quad N_{1-4} = -\frac{P}{\cos\alpha} \tag{8.17}$$

$$N_{3-6}\cos\alpha + P - P = 0 \quad \therefore \quad N_{3-6} = \frac{0}{\cos\alpha} = 0 \tag{8.18}$$

$$2P - P - N_{5-8}\cos\alpha = 0 \quad \therefore \quad N_{5-8} = \frac{P}{\cos\alpha} \tag{8.19}$$

Comparando as equações (8.17) a (8.19) com as equações (8.14) a (8.16) nota-se que as forças são iguais, a menos do sinal, e da forma $N = \frac{V}{\cos\alpha}$, onde V é igual à grandeza da força cortante na viga equivalente correspondente à seção do corte.

Generalizando a expressão da força na diagonal, podemos escrever

$$N_{(diagonal)} = \frac{|V|}{\cos\alpha} \tag{8.20}$$

O ângulo α é sempre o ângulo compreendido entre a diagonal e o eixo vertical. O sinal é obtido pela observação do equilíbrio das forças no trecho cortado.

As forças nos montantes 3-4 e 5-6 da treliça original da Fig. 8.22.a podem ser obtidas através dos cortes S_2-S_2 e S_4-S_4, mostrados na Fig. 8.22.b, pelo equilíbrio vertical das forças em uma das partes cortadas.

As figuras 8.26.a e 8.26.b mostram os cortes S_2-S_2 e S_4-S_4, respectivamente, e as partes à esquerda dos cortes.

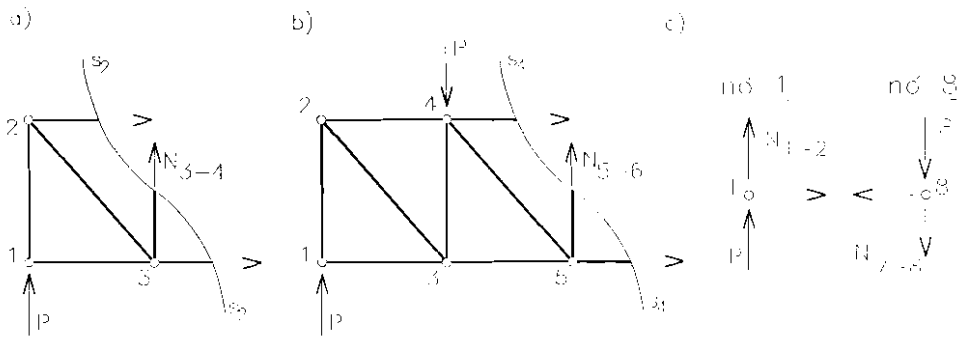


Figura 8.26

Com o auxílio da Fig. 8.26.a, equilibrando a parte à esquerda do corte S_2-S_2, determina-se N_{3-4}.

Com $\sum Y = 0$,

$$P + N_{3-4} = 0 \quad \therefore \quad N_{3-4} = -P \tag{8.21}$$

Pela Fig. 8.26.b, formulando a equação de equilíbrio, determina-se N_{5-6}.

Com $\sum Y = 0$,

$$P + N_{5-6} - P = 0 \quad \therefore \quad N_{5-6} = 0 \tag{8.22}$$

Observando-se as equações (8.21) e (8.22) nota-se que as forças nos montantes são da forma N = V, onde V é a grandeza da força cortante na viga equivalente no trecho correspondente às cargas aplicadas à esquerda ou à direita do corte de Ritter.

Generalizando a expressão para as forças nos montantes, cujos cortes de Ritter atravessam apenas três barras, uma diagonal e duas paralelas, escrevemos:

$$N_{(montante)} = |V|$$

O sinal é determinado pela necessidade de equilíbrio das forças envolvidas.

Nos montantes atravessados por cortes que atinjam apenas duas barras, como os dos extremos da treliça da Fig. 8.22.a, fica mais fácil utilizar o método do equilíbrio dos nós, Fig. 8.26.c.

Com $\sum Y = 0$, formulada para os nós 1 e 8, determinam-se N_{1-2} e N_{7-8}.

$$N_{1-2} + P = 0 \quad \therefore \quad N_{1-2} = -P$$
$$-P - N_{7-8} = 0 \quad \therefore \quad N_{7-8} = -P$$

As forças nas barras da treliça são apresentadas na Fig. 8.27.

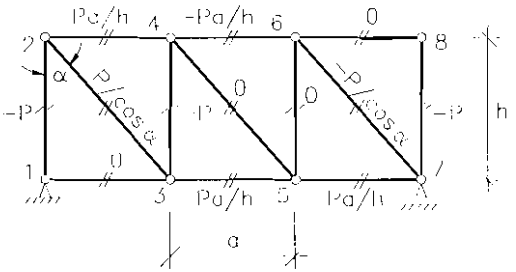


Figura 8.27

Veremos, a seguir, um exemplo de aplicação para resolução de treliças de banzos horizontais utilizando a viga equivalente.

Exemplo 3

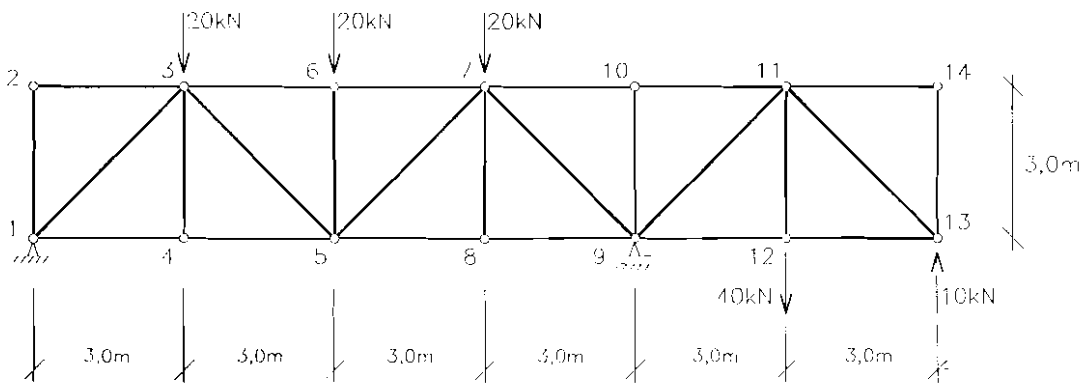


Figura 8.28

Para a treliça de banzos paralelos submetida ao carregamento da Fig. 8.28, determinar:

a) A disposição das diagonais, para que as mesmas fiquem solicitadas somente por forças de tração;

b) Para este novo arranjo, determinar as forças nas barras, utilizando a viga equivalente.

Solução

O primeiro passo é a determinação das reações de apoio da estrutura, providência que pode ser tomada diretamente na viga equivalente apresentada na Fig. 8.29.a.

Com $\sum M_1 = 0$,

$$18 \times 10 - 15 \times 40 + 12 \times R_{v9} - 20 \times 9 - 20 \times 6 - 20 \times 3 = 0 \quad \therefore \quad R_{v9} = 65kN$$

com $\sum Y = 0$,

$$R_{v1} + 65 + 10 - 100 = 0 \quad \therefore \quad R_{v1} = 25kN$$

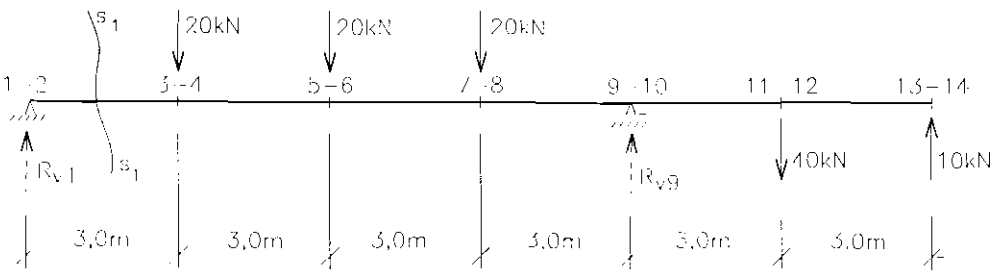


Figura 8.29.a

O passo seguinte é o traçado dos diagramas de V e M na viga equivalente. Os diagramas estão representados na Fig. 8.29.b e 8.29.c.

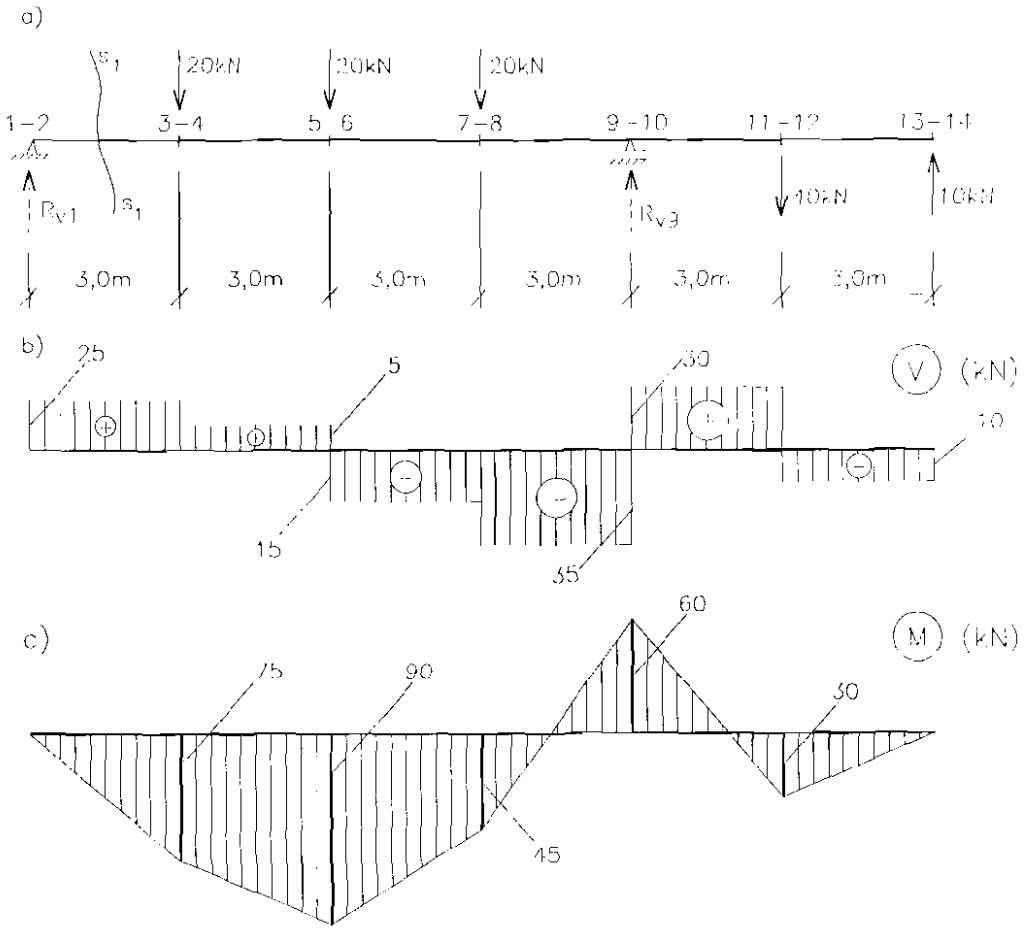


Figura 8.29

a) Disposições das diagonais

A técnica consiste em analisar o sinal da diagonal, em um painel qualquer, em razão do sinal da força cortante no trecho correspondente da viga equivalente. Tomemos, por exemplo, o primeiro painel da esquerda para a direita. O corte imaginário pelas barras 2-3, 1-3 e 1-4 é mostrado na Fig. 8.30.a e corresponde à cortante positiva.

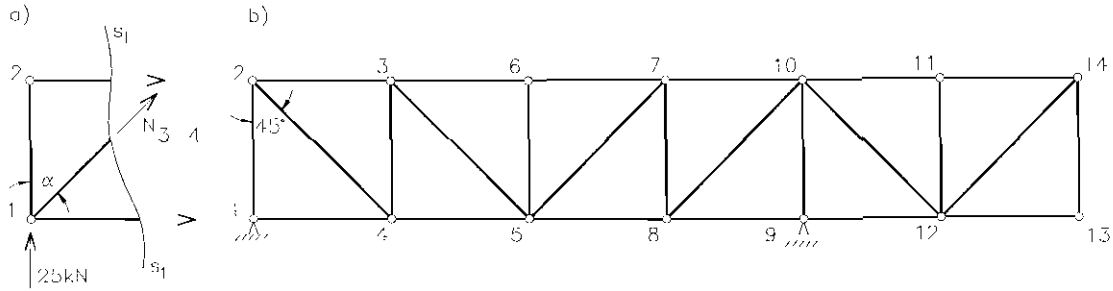


Figura 8.30

À vista da Fig. 8.30.a percebe-se que para haver equilíbrio no sentido vertical é necessário que a diagonal 1-3 esteja comprimida. Concluímos que, para uma cortante positiva, no trecho correspondente, a diagonal deve ser ascendente para a esquerda para ficar tracionada. A disposição das diagonais, portanto, deve ser tal que, nos painéis que correspondam a trechos com cortante positiva, sejam ascendentes para a esquerda, valendo o contrário para os painéis que correspondam a cortantes negativas, na viga equivalente. A nova disposição é apresentada na Fig. 8.30.b.

b) Força nas barras

Banzo superior - Forças nas barras da esquerda para a direita

As seções correspondentes, na viga equivalente, são as dos pontos 4, 5, 5, 8, 12, 12, respectivamente.

$$N_{2-3} = -\frac{M_4}{h} = -\frac{75}{3} = -25\text{kNm}$$

$$N_{3-6} = -\frac{M_5}{h} = -\frac{90}{3} = -30\text{kNm}$$

$$N_{6-7} = -\frac{M_5}{h} = -\frac{90}{3} = -30\text{kNm}$$

$$N_{7-10} = -\frac{M_8}{h} = -\frac{45}{3} = -15\text{kNm}$$

$$N_{10-11} = -\frac{M_{12}}{h} = -\frac{30}{3} = -10\text{kNm}$$

$$N_{11-14} = -\frac{M_{12}}{h} = -\frac{30}{3} = -10\text{kNm}$$

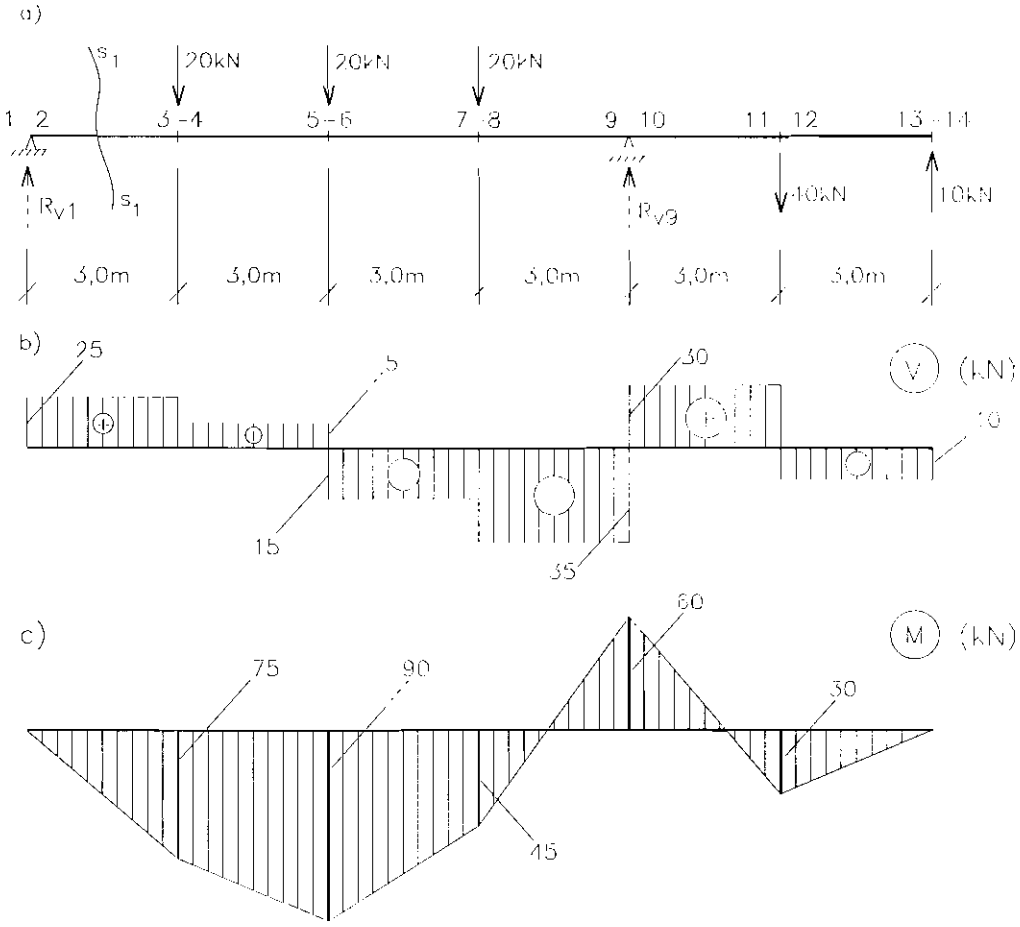


Figura 8.29

Banzo inferior - da esquerda para a direita

Pontos correspondentes são 2, 3, 7, 10, 10, 14.

$$N_{1-4} = \frac{M_2}{h} = \frac{0}{3} = 0$$

$$N_{4-5} = \frac{M_3}{h} = \frac{75}{3} = 25\text{kNm}$$

$$N_{5-8} = \frac{M_7}{h} = \frac{45}{3} = 15\text{kNm}$$

$$N_{8-9} = \frac{M_{10}}{h} = -\frac{60}{3} = -20\text{kNm}$$

$$N_{9-12} = \frac{M_{10}}{h} = -\frac{60}{3} = -20\text{kNm}$$

$$N_{12-13} = \frac{M_{14}}{h} = \frac{0}{3} = 0$$

Diagonais - da esquerda para a direita

As diagonais foram rearranjadas para ficarem submetidas à tração. Não há, portanto, necessidade de análise do sinal.

$$N_{2-4} = \frac{|V_{1-4}|}{\cos\alpha} = \frac{25}{\sqrt{2}/2} = 25\sqrt{2}\text{kN}$$

$$N_{3-5} = \frac{|V_{4-5}|}{\cos\alpha} = \frac{5}{\sqrt{2}/2} = 5\sqrt{2}\text{kN}$$

$$N_{5-7} = \frac{|V_{5-8}|}{\cos\alpha} = \frac{15}{\sqrt{2}/2} = 15\sqrt{2}\text{kN}$$

$$N_{8-10} = \frac{|V_{8-9}|}{\cos\alpha} = \frac{35}{\sqrt{2}/2} = 35\sqrt{2}\text{kN}$$

$$N_{10-12} = \frac{|V_{9-12}|}{\cos\alpha} = \frac{30}{\sqrt{2}/2} = 30\sqrt{2}\text{kN}$$

$$N_{12-14} = \frac{|V_{12-13}|}{\cos\alpha} = \frac{10}{\sqrt{2}/2} = 10\sqrt{2}\text{kN}$$

Os índices V_{i-j} referem-se ao trecho, no diagrama de força cortante, correspondente ao corte de Ritter.

Montantes - da esquerda para a direita

Os montantes cujos cortes de Ritter atravessam três barras são apenas dois, montantes 3-4 e 7-8; o sinal é analisado pelo equilíbrio.

$$N_{3-4} = -|V_{2-3}| = -25\text{kN}$$

$$N_{7-8} = -|V_{7-10}| = -35\text{kN}$$

Os demais montantes são analisados por equilíbrio dos nós; assim temos, de acordo com a Fig. 8.31,

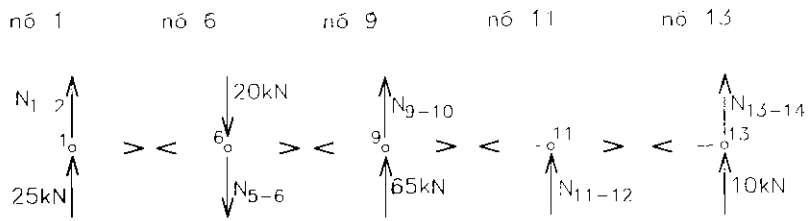


Figura 8.31

$N_{1-2} = -25kN$

$N_{5-6} = -20kN$

$N_{9-10} = -65kN$

$N_{11-12} = 0$ (nó característico)

$N_{13-14} = -10kN$

Os resultados são apresentados na Fig. 8.32.

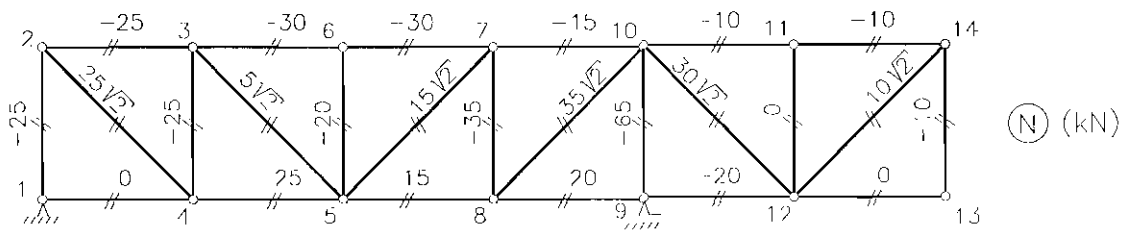


Figura 8.32

8.3 - TRELIÇAS ISOSTÁTICAS COMPLEXAS

Excluindo os casos excepcionais, treliças isostáticas complexas são aquelas que satisfazem a condição b = 2n mas não seguem a lei de formação das treliças simples. A Fig. 8.33 apresenta alguns casos de treliças complexas.

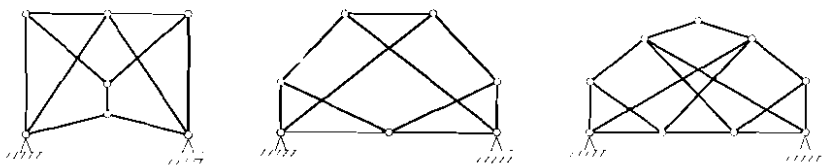


Figura 8.33

A determinação analítica, pelos métodos vistos anteriormente, é geralmente complicada, seja pela impossibilidade do cálculo direto das reações, ou pela inviabilidade de cortes de Ritter atravessarem apenas três barras, duas a duas concorrentes, ou, ainda, pela inexistência de nós formados por apenas duas barras, obrigando à resolução de um número muito grande de equações pelo método dos nós.

Estas treliças, no entanto, podem ser resolvidas de maneira relativamente simples através de um artifício imaginado por L. Henneberg em 1886 e que se tornou conhecido como método de Henneberg.

A idéia consiste no fato de que se pode, sempre, transformar uma treliça geometricamente determinada em outra, também determinada, pela troca, conveniente, da posição de uma barra, sem alterar o número de nós e barras.

O único cuidado que deve ser tomado, ao se trocar a posição da barra, é transformar a treliça complexa em treliça simples, sem recair em caso excepcional. O exemplo a seguir ilustra o procedimento.

Seja resolver a treliça complexa da Fig. 8.34.a.

O problema real da Fig. 8.34.a não se altera se a barra 3-6 for trocada pela barra 1-5, desde que a grandeza do par de forças X_1, aplicada na direção 3-6, seja

tal que a força na barra de substituição $N_{1\text{-}5}$ resulte nula, Fig. 8.34.b. Neste caso, X_1 nada mais é que a força na barra 3-6 do problema real.

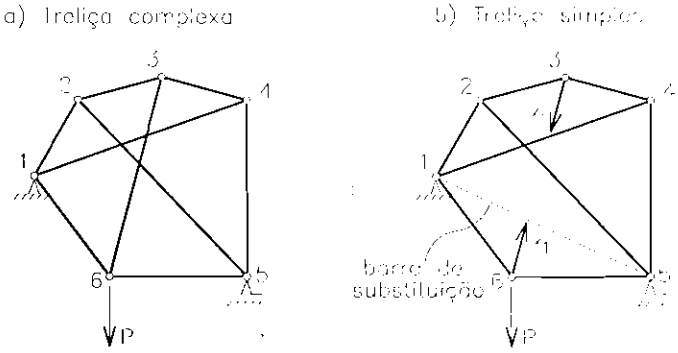


Figura 8.34

O problema real da Fig. 8.34.b pode ser expandido em um problema 0, com a treliça simples transformada submetida ao carregamento original, mais um problema 1, onde X_1 é colocado em evidência, com a treliça simples submetida a um par de forças unitárias na direção 3-6. A Fig. 8.35 representa o anteriormente exposto.

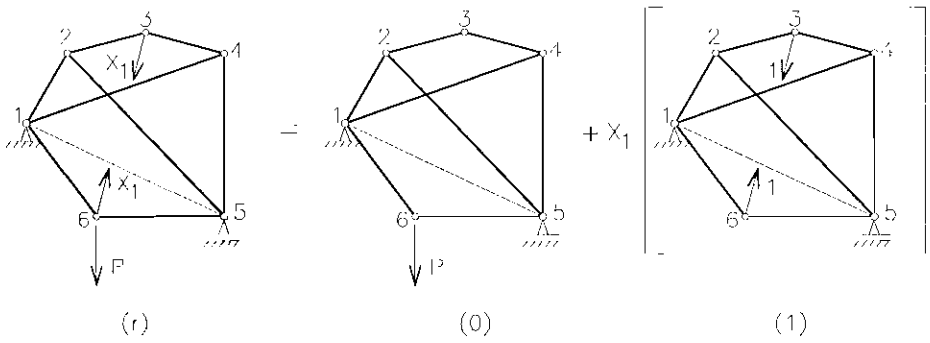


Figura 8.35

A superposição de carregamentos pode ser expressa, formalmente, como (r) = (0) + X_1.(1). Valendo a superposição, podemos escrever para as forças internas às barras do problema real

tal que a força na barra de substituição $N_{1\text{-}5}$ resulte nula, Fig. 8.34.b. Neste caso, X_1 nada mais é que a força na barra 3-6 do problema real.

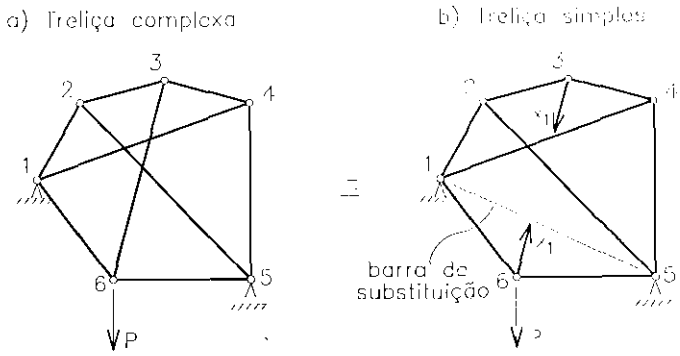


Figura 8.34

O problema real da Fig. 8.34.b pode ser expandido em um problema 0, com a treliça simples transformada submetida ao carregamento original, mais um problema 1, onde X_1 é colocado em evidência, com a treliça simples submetida a um par de forças unitárias na direção 3-6. A Fig. 8.35 representa o anteriormente exposto.

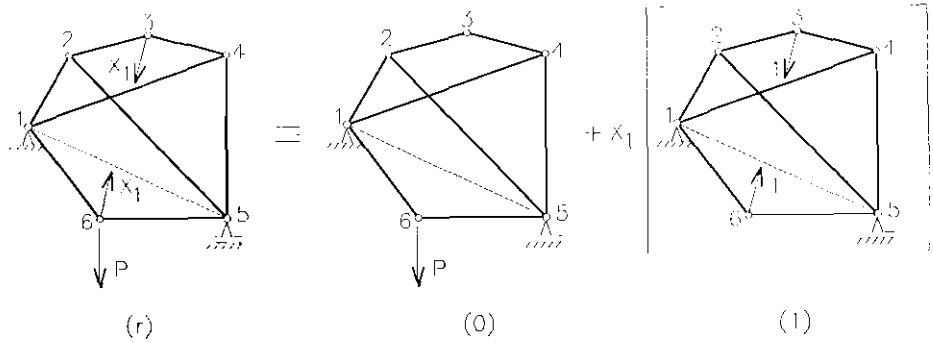


Figura 8.35

A superposição de carregamentos pode ser expressa, formalmente, como (r) = (0) + X_1.(1). Valendo a superposição, podemos escrever para as forças internas às barras do problema real

$$N_r = N_0 + X_1 N_1 \tag{8.23}$$

Para a barra i, genérica, temos especificamente

$$N_{ir} = N_{i0} + X_1 N_{i1} \tag{8.24}$$

X_1 pode ser determinado usando-se a condição de que a força na barra 1-5, no problema real, é igual a zero.

Assim, chamando de N_1 a força na barra 1-5,

$$N_{1r} = N_{10} + X_1 N_{11} = 0 \quad \therefore \quad X_1 = -\frac{N_{10}}{N_{11}} \tag{8.25}$$

onde

N_{1r} é a força na barra de substituição ($N_{1\text{-}5}$) no problema real;

N_{10} é a força na barra de substituição no problema 0 e N_{11} é a força na barra de substituição no problema 1.

Determinando-se X_1, com o auxílio da (8.24), determinam-se as forças nas demais barras.

Em algumas treliças isostáticas mais complexas, para transformá-las em treliças simples poderá haver necessidade de se efetuar várias trocas de barras. Neste caso a treliça simples, transformada, será expandida em um problema 0, mais tantos problemas quantos forem o número de barras substituídas.

$$(r) = (0) + X_1(1) + X_2(2) + X_3(3) + \ldots \tag{8.26}$$

com X_1, X_2, X_3... sendo, respectivamente, as forças nas direções da primeira, segunda, terceira... barras ficticiamente eliminadas.

A força na barra genérica i da treliça original será, então, determinada pela expressão

$$N_{ir} = N_{io} + X_1 N_{i1} + X_2 N_{i2} + X_3 N_{i3} + \ldots \tag{8.27}$$

Desta forma, sendo N_1 a força na primeira barra de substituição, N_2 a força na segunda barra de substituição, N_3, na terceira, e assim por diante, e com a condição de que no problema real transformado as forças nas barras de substituição N_1, N_2, N_3... têm valor nulo, as incógnitas X_1, X_2, X_3... são determinadas pela solução do sistema de equações

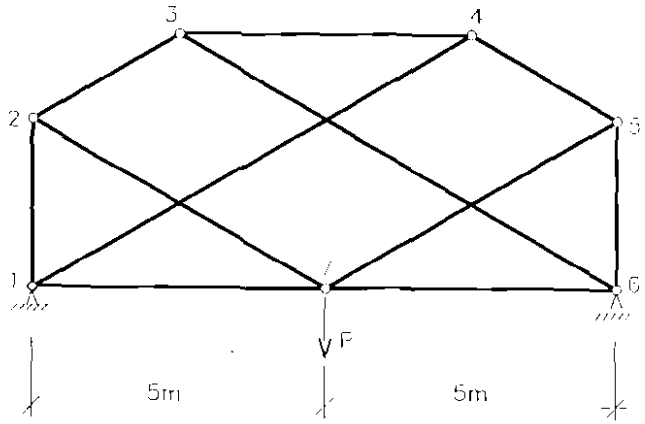
$$\begin{aligned}
N_{1r} &= N_{10} + X_1 N_{11} + X_2 N_{12} + X_3 N_{13} + \ldots = 0 \\
N_{2r} &= N_{20} + X_1 N_{21} + X_2 N_{22} + X_3 N_{23} + \ldots = 0 \\
N_{3r} &= N_{30} + X_1 N_{31} + X_2 N_{32} + X_3 N_{33} + \ldots = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{8.28}$$

Determinadas as incógnitas X_1, X_2, X_3... as forças nas barras da treliça original são calculadas por superposição de efeitos, com a equação (8.27).

$$N_{ir} = N_{io} + X_1 N_{i1} + X_2 N_{i2} + X_3 N_{i3} + \ldots$$

Exemplo de aplicação

Calcular as forças nas barras da treliça para a estrutura e o carregamento da Fig. 8.36.



OBS: As barras inclinadas fazem ângulos de 30° com a horizontal

Figura 8.36

Solução

Como se pode perceber após o cálculo elementar das reações, não é possível prosseguir com a análise da treliça. É, portanto, um caso de treliça complexa, solucionável pelo método de Henneberg.

Esquema de solução

O método prevê a troca de posição de uma ou mais barras sem alterar o número de nós ou barras até que a treliça complexa seja transformada em treliça simples.

a) Barra retirada

A barra a ser retirada deve ser tal que permita o cálculo pelos processos analíticos vistos anteriormente.

b) Barra de substituição

Em algumas treliças complexas não fica muito evidente, de imediato, a posição da barra de substuição. Quando isto acontece deve ser seguido o seguinte caminho:

Após a retirada da barra, elimina-se um nó e as duas barras que o ligam ao resto da estrutura. Repete-se a operação, eliminando-se seqüencialmente um nó e duas barras até que se encontre uma barra com ligação insuficiente com o restante da estrutura. A barra necessária para fixá-la ao sistema é a barra de substituição.

Se a treliça assim transformada ainda não é uma treliça simples, troca-se nova barra e assim sucessivamente até transformar a treliça complexa em treliça simples.

No exemplo em questão retira-se, por exemplo, a barra 1-4. Para descobrir qual é a barra de substituição, começa-se por eliminar o nó 4 e as barras 4-3 e 4-5; a seguir eliminam-se o nó 5 e as barras 5-7 e 5-6; em seguida o nó 6 e as barras 6-7 e 6-3. A barra 2-3 fica, desta forma, sem ligações suficientes com o restante do sistema. Para fixar o nó 3 é necessária a inclusão da barra 3-7; esta é, portanto, a barra de substituição. A Fig. 8.37 mostra a seqüência executada.

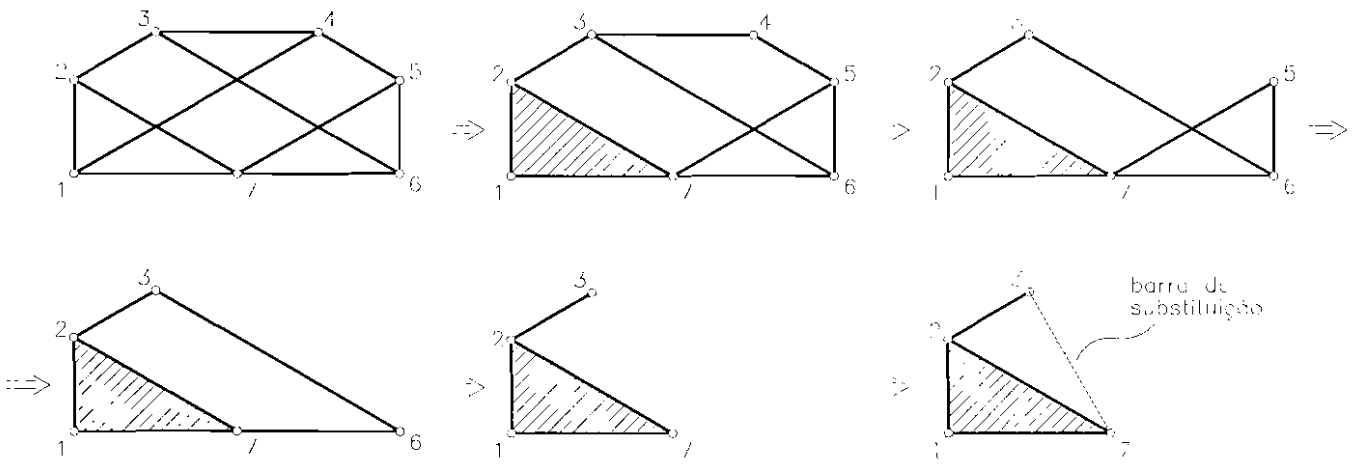


Figura 8.37

Esquema de solução

Sendo N_1 a força na barra 3-7, de substituição, Fig. 8.38,

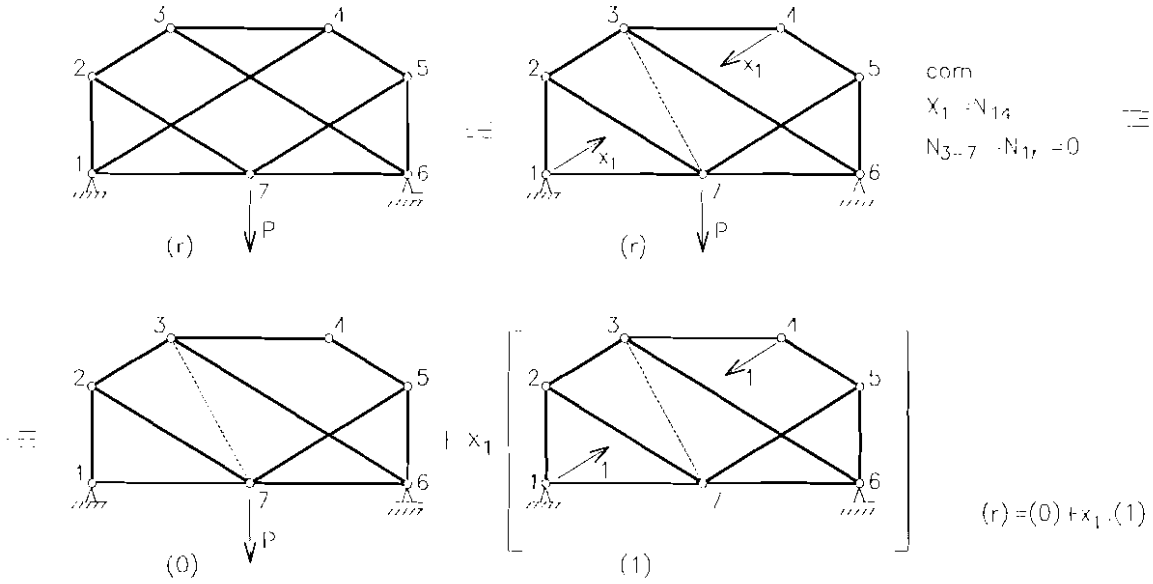


Figura 8.38

$$N_{1r} = N_{10} + X_1 N_{11} = 0 \quad \therefore$$

$$X_1 = -\frac{N_{10}}{N_{11}}$$

O problema (0) e o problema (1) foram resolvidos por equilíbrio de nós e os resultados encontram-se na Fig. 8.39.

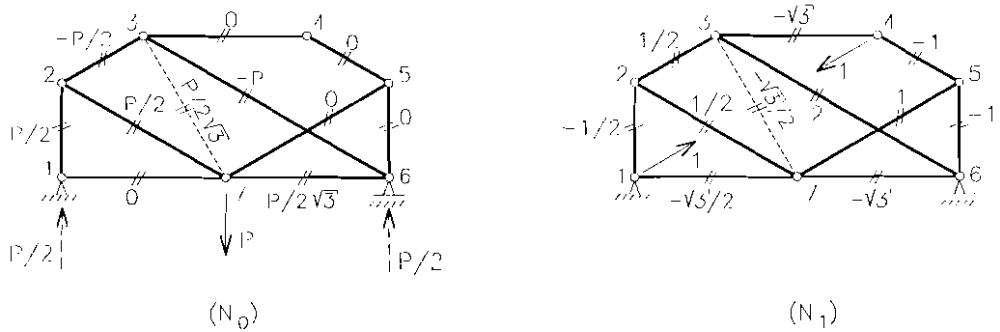


Figura 8.39

As forças nas barras do problema real podem ser determinadas por superposição,

$$N_{ir} = N_{io} + X_1 N_{i1} \qquad \text{com} \qquad X_1 = -\frac{P\sqrt{3}/2}{-\sqrt{3}/2} = P$$

Para simplificar e organizar o cálculo manual, pode-se utilizar a Tabela 8.1.

Tabela 8.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*
barra i	N_{io}	N_{i1}	X_1N_{i1}	N_{ir}
1-2	$-\frac{P}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{P}{2}$	$-P$
2-3	$-\frac{P}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{P}{2}$	$-P$
3-4	0	$-\sqrt{3}$	$-P\sqrt{3}$	$-P\sqrt{3}$
4-5	0	-1	$-P$	$-P$
5-6	0	-1	$-P$	$-P$
6-7	$\frac{P\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-P\sqrt{3}$	$-\frac{P\sqrt{3}}{2}$
1-7	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{P\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{P\sqrt{3}}{2}$
2-7	$\frac{P}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{P}{2}$	P
3-7	$\frac{P\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{P\sqrt{3}}{2}$	0
3-6	$-P$	2	2P	P
5-7	0	1	P	P
1-4	0	1	P	P

Montagem dos resultados

A Fig. 8.40, mostra o resultado final

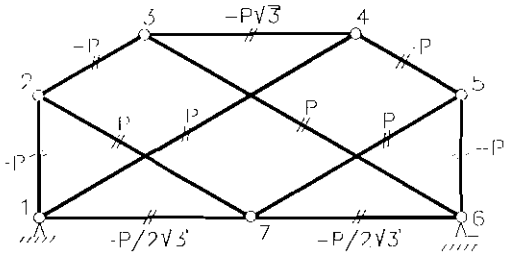


Figura 8.40

8.4 - DETERMINAÇÃO GRÁFICA DOS ESFORÇOS INTERNOS NAS BARRAS DAS TRELIÇAS SIMPLES

8.4.1- Método dos nós

Graficamente o equilíbrio de forças coplanares, aplicadas no mesmo ponto material, é representado pelo fechamento do polígono das forças, Capítulo 1, Seção 1.7. A determinação gráfica das forças internas nas barras de treliças simples pelo método dos nós é baseada na decomposição das forças segundo duas direções conhecidas. Deve-se, portanto, iniciar o cálculo por um nó formado por duas barras. Nas treliças simples sempre existe pelo menos um nó com esta formação, excluídos os nós característicos.

Para melhor percepção do leitor, mostraremos a determinação gráfica pelo método dos nós com um exemplo bastante simples.

Exemplo 1

Seja determinar graficamente pelo método dos nós as forças internas nas barras da treliça simples da Fig. 8.41.

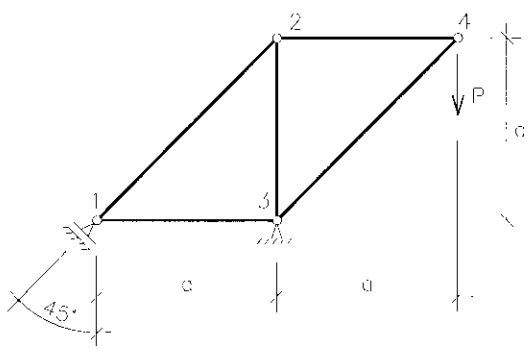


Figura 8.41

Solução

As reações podem ser determinadas analiticamente ou graficamente. No exemplo em questão, serão determinadas graficamente. A condição de equilíbrio requer que a resultante das cargas aplicadas e as reações de apoio sejam concorrentes em um ponto.

A linha de ação da resultante coincide com a linha de ação da carga P, aplicada

no nó 4. A reação R_1, provocada no apoio móvel, tem a sua direção definida pela restrição ao deslocamento imposta pelo vínculo. A linha de ação de R_1, portanto, encontra a linha de ação da resultante no ponto O. A direção de R_3, devido ao apoio fixo, é então determinada pela condição de que a sua linha de ação também passa por O.

As Fig. 8.42.a e b ilustram o procedimento adotado e o cálculo das reações pelo polígono das forças, respectivamente. O módulo da resultante é R = P e como

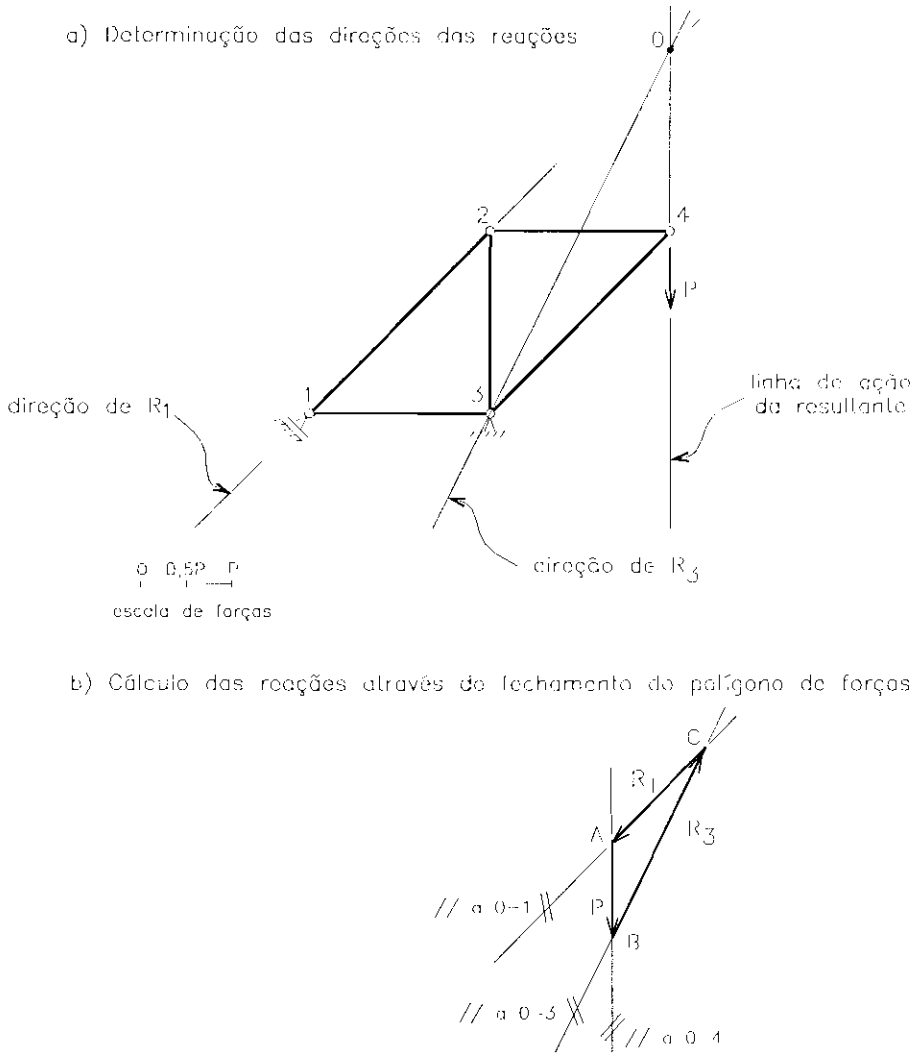


Figura 8.42

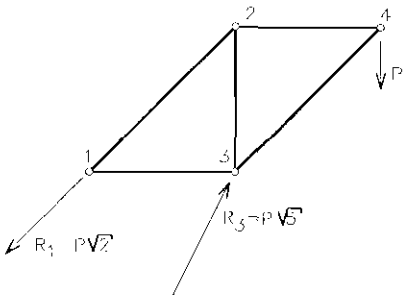


Figura 8.43

primeiro passo no cálculo gráfico deve-se escolher uma escala gráfica para as forças, por exemplo: 15mm = P.

O sentido das reações foi determinado no polígono fechado com a condição de que as forças, em torno do polígono, dirijam-se da sua origem para sua extremidade. A intensidade das reações é determinada medindo-se, no polígono, pela escala. A Fig. 8.43 apresenta os resultados.

As forças internas nas barras da treliça serão calculadas, como já se disse, graficamente. Com o auxílio da Fig. 8.43, iniciaremos pelo nó 4 isolado como um ponto material, submetido às forças internas $N_{2\text{-}4}$ e $N_{3\text{-}4}$ e à carga P. O equilíbrio do nó é condicionado ao fechamento do polígono das forças $N_{2\text{-}4}$, $N_{3\text{-}4}$ e P. Para organizar os desenhos de cada polígono, adotamos o sentido horário como percurso para o traçado das forças em torno do nó. Desta forma, inicia-se com a força P, em seguida traça-se a força $N_{3\text{-}4}$ e finalmente fecha-se o polígono com o traçado da força $N_{2\text{-}4}$, conforme Fig.8.44. As intensidades das forças devem ser medidas com a escala e os sentidos, determinados pela seqüência das forças em torno do polígono — origem para extremidade. Observando-se o sentido das forças como ação das barras sobre o nó, concluímos que a barra 2-4 está tracionada (força $N_{2\text{-}4}$ saindo do nó) e que a barra 3-4 está comprimida (força $N_{3\text{-}4}$ entrando no nó). Repetindo-se as operações anteriores para o nó 2, sobre o qual se conhece a ação da barra 2-4, obtém-se $N_{1\text{-}2}$ e $N_{2\text{-}3}$, repetindo-se em seguida para o nó 3 e finalmente para o nó 1.

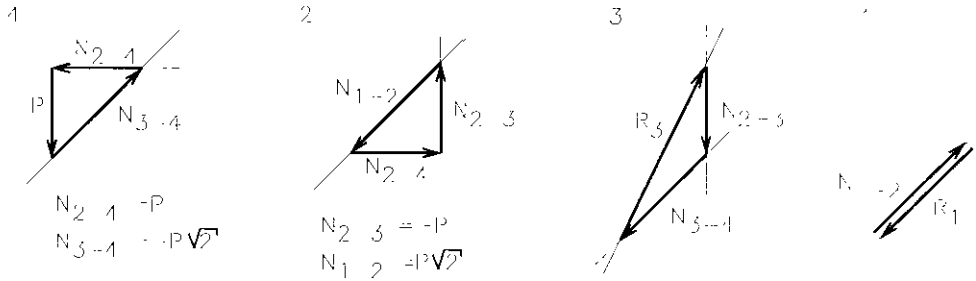


Figura 8.44

Uma conclusão interessante pode ser tirada através do traçado do polígono das forças para o nó 3. Partindo-se da força interna já conhecida na barra 2-3, em seguida traça-se a força N_{3-4}, também já conhecida. Continuando o traçado e obedecendo-se o sentido horário adotado, vem a reação R_3, que tem origem na extremidade de N_{3-4} e extremidade na origem de N_{2-3}, fechando o polígono.

A força interna na barra 1-3 completa o polígono, tendo origem na extremidade de R_3 e extremidade na origem de N_{2-3}, portanto, com origem e extremidade no mesmo ponto. Isto significa que a força N_{1-3} é nula, fato que pode ser confirmado pela análise do nó 1. Duas forças colineares, R_1 e N_{1-2}, de mesma intensidade e sentidos contrários, e uma terceira, N_{1-3}, configuram um nó característico, já visto na Seção 8.2, item b. Os polígonos das forças, para cada nó equilibrado, estão representados na Fig. 8.44.

Os resultados podem ser apresentados em tabela ou sobre o esquema da treliça, conforme apresentado na Fig. 8.45.

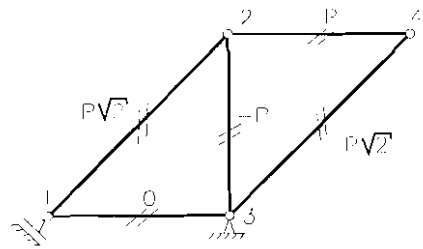


Figura 8.45

8.4.2 - Plano Cremona ou diagrama de Maxwell

Este método é, certamente, a mais utilizada solução gráfica para determinação de esforços em barras de treliças simples. Autores com influência européia usam a denominação método de Cremona, plano Cremona ou simplesmente Cremona; autores com influência americana usam a denominação diagrama de Maxwell. Historicamente foi Maxwell o primeiro a apresentá-la em publicação, sob o título *On reciprocal figures and diagrams of forces,* em 1864.

L. Cremona, professor do Instituto Politécnico de Milão, apresentou, posteriormente, em 1872, o método sob o título *Le figure reciproche nella statica grafica.* No Brasil, o método é mais conhecido como plano Cremona, designação que adotaremos nesta publicação.

Na realidade, o plano Cremona nada mais é que o método do equilíbrio dos nós, calculado graficamente de forma organizada. Observando-se os polígonos fechados da Fig. 8.44 percebe-se que as forças internas de cada barra comparecem duas vezes em lados de polígonos diferentes, o que permite a sua superposição, pelos lados comuns, como na Fig. 8.46.a. Na figura superposta aparece, além dos polígonos das forças internas, o polígono fechado das forças externas.

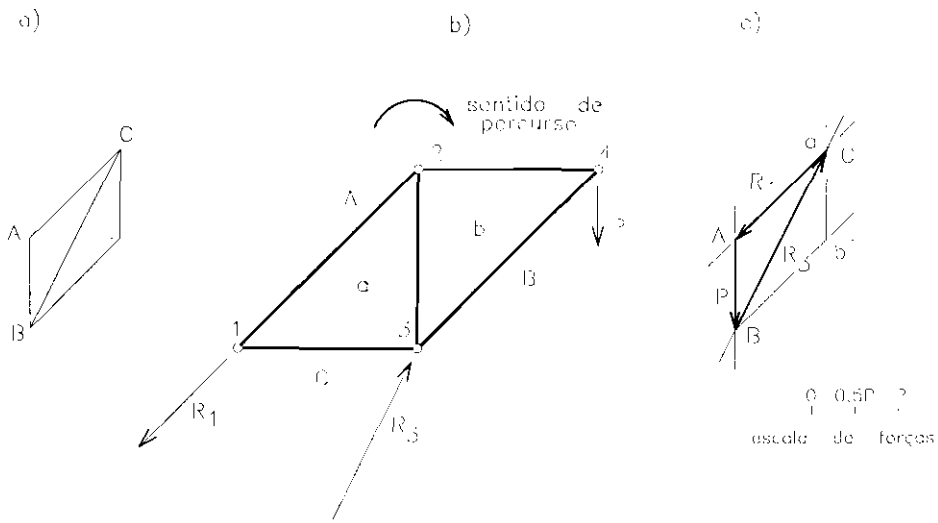


Figura 8.46

Esse é o fundamento do método, tendo sido proposto por Maxwell e Cremona com observações de reciprocidade entre a figura da treliça e a figura dos polígonos superpostos. O plano Cremona é, portanto, uma figura traçada organizadamente na qual as forças internas aparecem apenas uma vez, simplificando sobremaneira o cálculo gráfico dos esforços.

Notação de Bow

O grande impulso na aceitação e utilização do método foi dado por Bow, quando desenvolveu um sistema de notações que será explicado a seguir.

Cada zona entre as forças externas, cargas e reações incluídas, será denominada por letras maiúsculas. As zonas entre as forças internas às barras da treliça serão denominadas por letras minúsculas. A notação adotada é apresentada na treliça do exemplo anteriormente resolvido, Fig. 8.46.b.

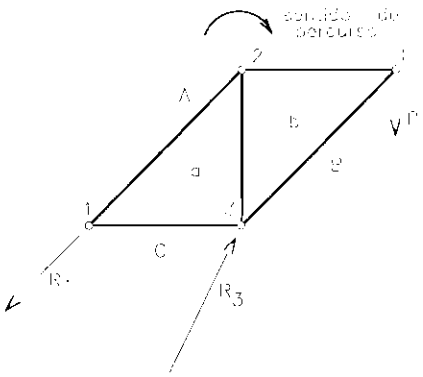


Figura 8.46.b

Adotando-se um sentido de percurso, externo e em torno dos nós, por exemplo horário, cada força passará a ter a seguinte denominação: a força externa P será denominada A-B, a reação R_3 será B-C e a reação R_1 será denominada C-A. As forças internas serão relacionadas pelos nós, assim a força na barra 1-3 será a-C quando relacionada ao nó 1 e C-a quando relacionada ao nó 3.

Podemos, agora, descrever o método, utilizando a treliça da Fig. 8.46.b. O Cremona é iniciado traçando-se o polígono das forças externas e adotando-se uma escala para representar graficamente as forças. A seguir, partindo-se de um nó formado por duas barras, por exemplo o nó 4, traça-se o polígono fechado, que representa o equilíbrio das forças que concorrem no nó. Percorrendo-se o nó no sentido horário, a partir da força P representada pelo segmento A-B, traça-se uma paralela à força interna B-b, a partir do ponto B. O polígono é fechado pela paralela à força b-A, traçada a partir de A e que intercepta a anterior no ponto b. O polígono fechado relativo ao equilíbrio do nó 4 é, então, A-B-b-A. Passa-se em seguida ao nó 2, onde já se conhece a força A-b. Traçando-se uma paralela à força b-a a partir do ponto b e uma paralela à força a-A a partir de A, elas devem se interceptar no ponto a, que no caso do exemplo coincide com o ponto C. O polígono das forças, para o nó 2, é, então, A-b-a-A. Os polígonos de forças referentes aos nós 3 e 1 já estão traçados no Cremona e são,

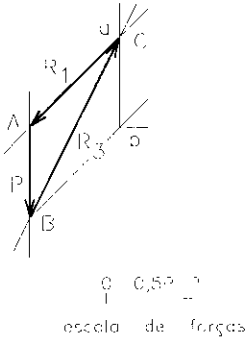


Figura 8.46.c

respectivamente, B-C-a-b-B e C-A-a-C. As intensidades das forças são determinadas na figura por cálculo ou medidas pela escala e seus sentidos determinados como ação das barras sobre os nós. No exemplo resolvido, a força interna na barra 2-4 é, segundo a notação de Bow, A-b em relação ao nó 2, ou b-A em relação ao nó 4.

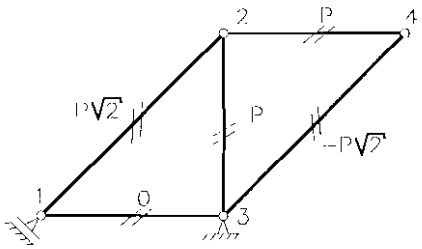


Figura 8.45

No Cremona, tanto o sentido A-b afasta-se do nó 2 quanto o sentido b-A afasta-se do nó 4. A força interna na barra 2-4 é portanto de tração. Para a barra 3-4, a força interna em relação ao nó 4 é B-b. Na figura do plano Cremona, o sentido B-b aproxima-se do nó 4, portanto a barra está comprimida. Repetindo-se o procedimento são determinados os sentidos das forças internas restantes: $N_{2\text{-}3}$ (compressão) e $N_{1\text{-}2}$ (tração).

A força na barra 1-3, designada por a-C ou C-a, tem os pontos a e C coincidentes no Cremona, o que indica força nula. Resultados representados na Fig. 8.45.

Exemplo 2

Determinar graficamente, pelo plano Cremona, as forças nas barras da treliça da Fig. 8.47.

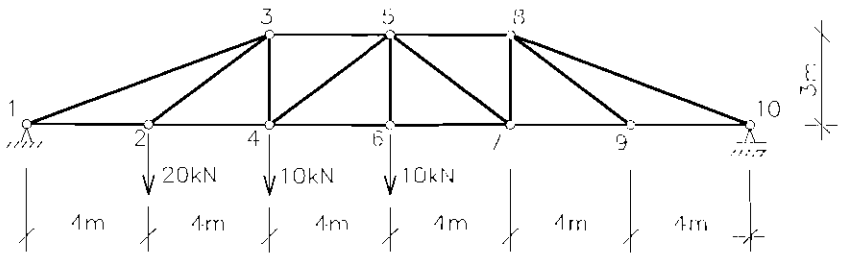


Figura 8.47

As reações de apoio foram determinadas analiticamente e estão representadas na Fig. 8.48.a, na página seguinte.

Traçado do Cremona

Adotando-se o sentido horário como sentido de percurso externo e em torno dos nós, as zonas entre as forças, externas e internas, são denominadas, seqüencialmente, por letras maiúsculas e minúsculas, respectivamente. Em seguida adota-se uma escala gráfica de forças e inicia-se o traçado pelo polígono das forças externas, na seqüência em que são encontradas. Somente estas forças terão o sentido indicado por setas. O desenho propriamente dito é iniciado por um nó formado apenas por duas barras, fechando-se o polígono das forças desenhando-se seqüencialmente no sentido de percurso preestabelecido em torno do nó. A operação é repetida para os nós adjacentes que tenham apenas duas forças incógnitas, até que todos os polígonos de equilíbrio estejam fechados.

Exemplo 2

Determinar graficamente, pelo plano Cremona, as forças nas barras da treliça da Fig. 8.47.

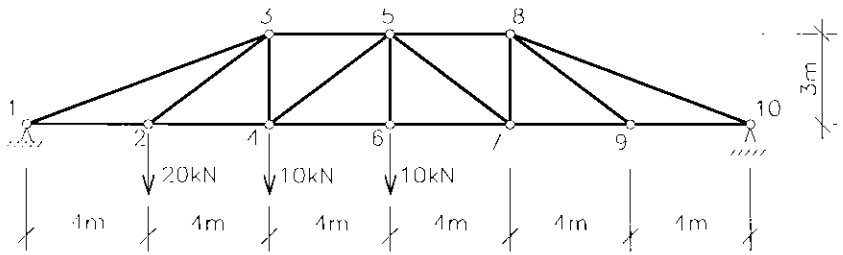


Figura 8.47

As reações de apoio foram determinadas analiticamente e estão representadas na Fig. 8.48.a, na página seguinte.

Traçado do Cremona

Adotando-se o sentido horário como sentido de percurso externo e em torno dos nós, as zonas entre as forças, externas e internas, são denominadas, seqüencialmente, por letras maiúsculas e minúsculas, respectivamente. Em seguida adota-se uma escala gráfica de forças e inicia-se o traçado pelo polígono das forças externas, na seqüência em que são encontradas. Somente estas forças terão o sentido indicado por setas. O desenho propriamente dito é iniciado por um nó formado apenas por duas barras, fechando-se o polígono das forças desenhando-se seqüencialmente no sentido de percurso preestabelecido em torno do nó. A operação é repetida para os nós adjacentes que tenham apenas duas forças incógnitas, até que todos os polígonos de equilíbrio estejam fechados.

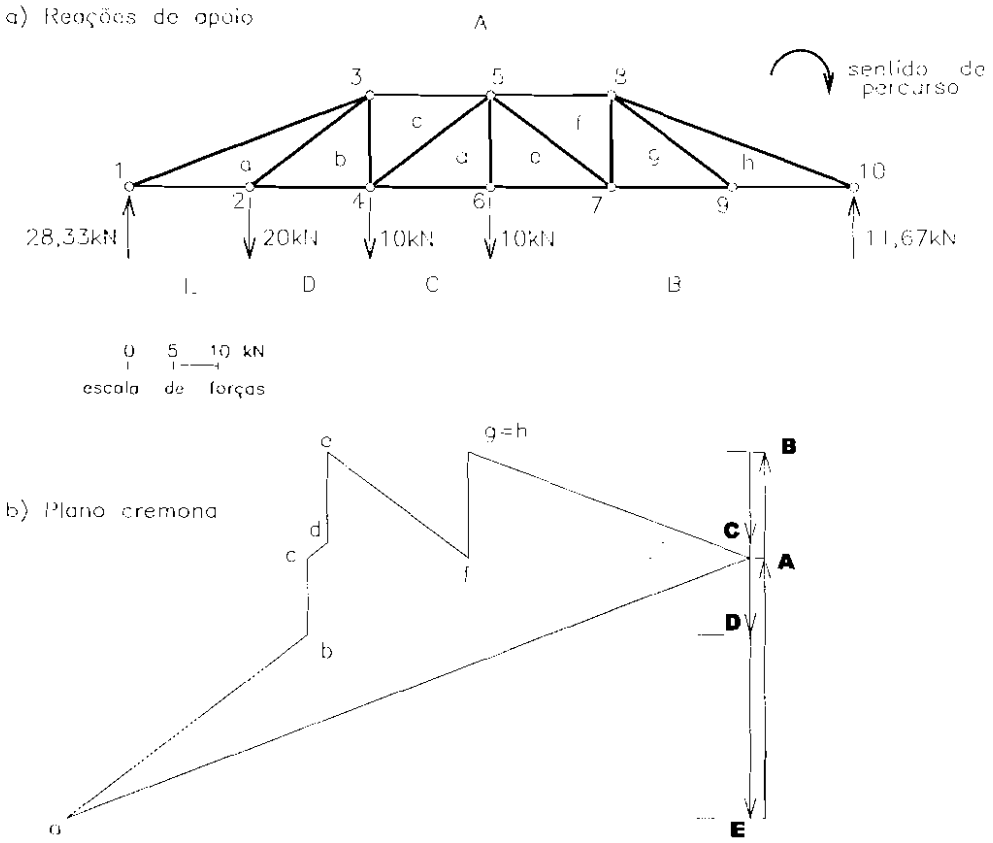


Figura 8.48

O Cremona na Fig. 8.48.b foi iniciado desenhando-se, em escala, a força correspondente à reação no apoio direito, com origem em A e extremidade em B. Em seguida, desenha-se as forças B-C, C-D, D-E, fechando-se o polígono com a reação no apoio esquerdo, com origem em E e extremidade em A.

Começando o equilíbrio dos nós pelo nó 1, determinam-se as forças nas barras 1-3 e 1-2 (A-a e a-E, na notação de Bow, respectivamente) traçando-se, a partir de A, uma paralela à barra 1-3 e, a partir de E, uma paralela à barra 1-2.

O ponto de interseção é o ponto a, que corresponde à zona a na treliça. Em seguida, para o nó 2, a partir do ponto a, traça-se uma paralela à barra 2-3 (a-b) e, a partir de D, uma paralela à barra 2-4 (b-D), a qual intercepta a anterior no ponto b. O ponto c, que corresponde ao equilíbrio do nó 3, é encontrado pela interseção das paralelas às barras 3-5 (A-c), a partir de A, e 3-4 (c-b), a partir do ponto b.

O ponto d, correspondente ao nó 4, é determinado pelas paralelas às barras 4-5 (c-d), a partir do ponto c, e 4-6 (d-C), a partir do ponto C. Os outros pontos, que correspondem às zonas e, f, g e h, na treliça, são determinados de maneira análoga. Os pontos g e h são coincidentes, indicando força interna nula na barra 8-9 (h-g).

O estado das forças internas — tração ou compressão — é determinado como ação da barra sobre o nó, utilizando-se a notação de Bow e o sentido obtido no Cremona.

Analisando-se o nó 1, na Fig. 8.48.a, a força na barra 1-3 é A-a, na notação de Bow. No Cremona, o sentido A-a aproxima-se do nó e o estado da força é, portanto, de compressão. Analogamente, a força na barra 1-2 é a-E, com sentido de se afastar do nó, o que corresponde a estado de tração na barra.

O ponto d, correspondente ao nó 4, é determinado pelas paralelas às barras 4-5 (c-d), a partir do ponto c, e 4-6 (d-C), a partir do ponto C. Os outros pontos, que correspondem às zonas e, f, g e h, na treliça, são determinados de maneira análoga. Os pontos g e h são coincidentes, indicando força interna nula na barra 8-9 (h-g).

O estado das forças internas — tração ou compressão — é determinado como ação da barra sobre o nó, utilizando-se a notação de Bow e o sentido obtido no Cremona.

Analisando-se o nó 1, na Fig. 8.48.a, a força na barra 1-3 é A-a, na notação de Bow. No Cremona, o sentido A-a aproxima-se do nó e o estado da força é, portanto, de compressão. Analogamente, a força na barra 1-2 é a-E, com sentido de se afastar do nó, o que corresponde a estado de tração na barra.

A intensidade das forças internas foi medida pela escala, na figura do Cremona, e o estado de cada uma, determinado como descrito acima. Para melhor visualização, os resultados foram reunidos na Tabela 8.2 e mostrados na Fig. 8.49.

Tabela 8.2

BANZO SUPERIOR			BANZO INFERIOR		
Barra	**Notação de Bow**	**Esforço axial (kN)**	**Barra**	**Notação de Bow**	**Esforço axial (kN)**
1-3	A-a/a-A	–80,68	1-2	a-E/E-a	75,55
3-5	A-c/c-A	–48,88	2-4	b-D/D-b	48,88
5-8	A-f/f-A	–31,09	4-6	d-C/C-d	46,65
8-10	A-h/h-A	–33,21	6-7	e-B/B-e	46,65
			7-9	g-B/B-g	31,09
			9-10	h-B/B-h	31,09
DIAGONAIS			**MONTANTES**		
Barra	**Notação de Bow**	**Esforço axial (kN)**	**Barra**	**Notação de Bow**	**Esforço axial (kN)**
2-3	a-b/b-a	33,33	3-4	c-b/b-c	8,33
4-5	c-d/d-c	2,78	5-6	e-d/d-e	10,00
5-7	f-e/e-f	–19,45	7-8	f-g/g-f	11,67
8-9	h-g/g-h	0,00			

Montagem dos resultados

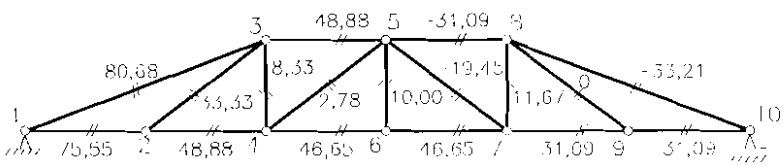


Figura 8.49

BIBLIOGRAFIA

AMARAL, O.C. *Estruturas isostáticas.* 3ª ed. Belo Horizonte, UFMG – Imprensa Universitária, 1977.

BEER, F.P.; JOHNSTON JR., E.R. *Mecânica vetorial para engenheiros: estática.* 5ª ed. São Paulo, Makron, 1991.

CAMPANARI, F.A. *Teoria das estruturas.* Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1985. V. 1.

COURANT, R. *Cálculo diferencial e integral.* Porto Alegre, Globo, 1958. V. 2.

DARKOV, A.; KOUZNÉTSOV, V. *Cours de mécanique des constructions.* Moscou, Mir, 1968.

ENGEL, H. *Sistemas de estruturas.* São Paulo, Hemus, 1981.

FÉODOSSIEV, V. *Résistance des matériaux.* Moscou, Mir.

FONSECA, A. *Curso de mecânica: estática.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1969. V. 1.

FONSECA, A.; MOREIRA, D.F. *Problemas e exercícios de estática das construções.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1960.

HIBBELER, R.C. *Mecânica: estática.* Rio de Janeiro, Campus, 1986. V. 1.

HIRSCHFELD, K. *Estática en la construcción.* 3ª ed. Barcelona, Reverté, 1975.

LANGENDONCK, T. *Vigas simples isostáticas de alma cheia.* Rio de Janeiro, Científica, 1955.

MORGAN, W. *The elements of structure.* 2ª ed. London, Pitman, 1977.

MORI, D.D. et alii. *Exercícios propostos de resistência dos materiais.* 2ª ed. São Carlos, Serviço Gráfico da EESC, 1978. Fasc. 1.

POPOV, E.P. *Introdução à mecânica dos sólidos.* São Paulo, Edgard Blücher, 1992.

ROCHA, A.M. *Teoria e prática das estruturas.* Rio de Janeiro, Científica, 1973. V. 1.

SÁLES, J.J.; MALITE, M.; GONÇALVES, R.M. *SET 403 – Sistemas estruturais: elementos estruturais.* São Carlos, Serviço Gráfico da EESC, 1994.

SCHIEL, F. *Introdução à resistência de materiais.* São Paulo, HARBRA, 1984.

SCHREYER, K.; RAMM, H.; WAGNER, W. *Estatica de las estructuras.* Madrid, Blume, 1969. V. 1.

SOUZA, J.C.A.O.; ANTUNES, H.M.C.C. *Cargas móveis em estruturas lineares.* São Carlos, Serviço Gráfico da EESC, 1994.

SOUZA, J.C.A.O.; ANTUNES, H.M.C.C. *Processos gerais da hiperestática clássica.* 2ª ed. São Carlos, Serviço Gráfico da EESC, 1995.

SÜSSEKIND, J.C. *Curso de análise estrutural.* 3ª ed. Porto Alegre, Globo, 1979. V. 1.

TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D.H. *Mecânica técnica: estática.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1959.

TIMOSHENKO, S.P. *History of strength of materials.* New York, Dover, 1983.

TIMOSHENKO, S.P.; YOUNG, D.H. *Teoria das estruturas.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1957.

Impressão:
Suprema Gráfica e Editora Ltda.
Tel. (016) 271-3329 - São Carlos - SP