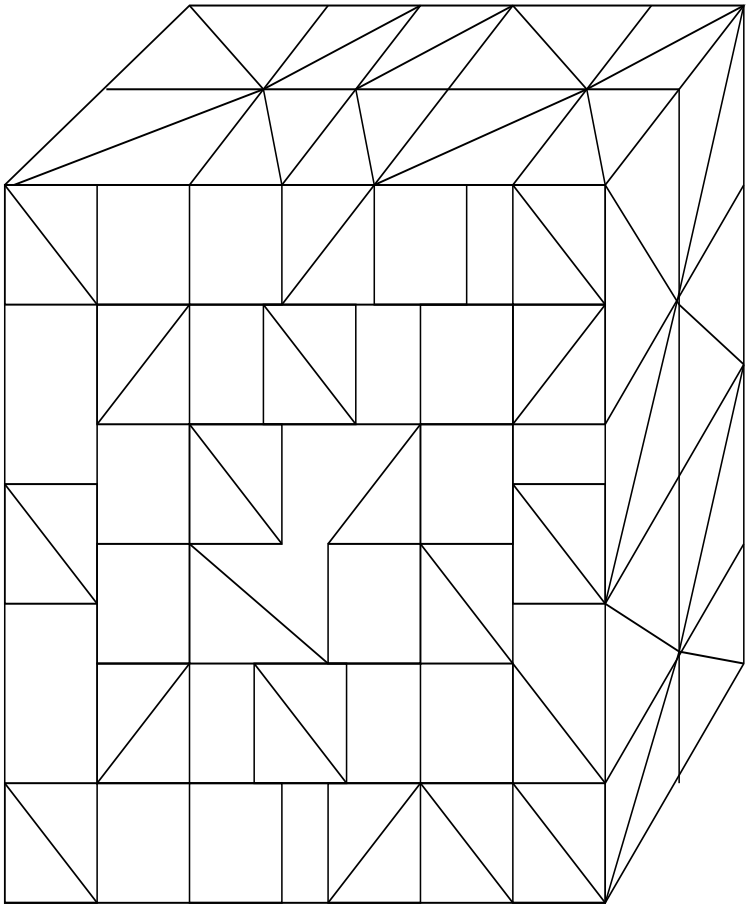
Análise Matricial de Estruturas Reticuladas

Um curso para acadêmicos de Engenharia Civil



Marcus Vinícius Silva Cavalcanti

Anápolis, abril de 2006

Sumário

1 Introdução e Conceitos Básicos p. 4

1.1 Introdução . . . . . p. 4

1.2 Classificação e Tipologia das Estruturas . . . . . p. 5

1.2.1 Estruturas Reticuladas . . . . . p. 5

1.2.2 Estruturas não Reticuladas . . . . . p. 6

1.2.3 Endereçamento de Nós, Barras e Conectividade . . . . . p. 7

1.3 Deslocamentos e Deformações . . . . . p. 8

1.3.1 Deslocamentos e Deformações Associadas . . . . . p. 9

1.3.2 Carregamentos (Ações) . . . . . p. 11

1.3.3 Princípio da Superposição dos Efeitos . . . . . p. 12

1.3.4 Onde os carregamentos provocam deslocamentos . . . . . p. 13

1.4 Equilíbrio e Compatibilidade . . . . . p. 14

1.4.1 Equilíbrio . . . . . p. 14

1.4.2 Compatibilidade . . . . . p. 16

1.5 Indeterminação Estática e Cinemática . . . . . p. 16

1.5.1 Indeterminação Estática . . . . . p. 16

1.5.2 Indeterminação Estática Externa . . . . . p. 16

1.5.3 Indeterminação Estática Interna . . . . . p. 18

1.5.4 Indeterminação Cinemática . . . . . p. 19

1.6 Flexibilidade e Rigidez de Mola . . . . . p. 20

1.7 Flexibilidade e Rigidez de Elementos Estruturais . . . . . p. 22

1.7.1 Coeficientes de Flexibilidade e Rigidez . . . . . p. 22
1.7.2 Matrizes de Flexibilidade e de Rigidez . . . . . p. 26

2 Fundamentos Teóricos dos Métodos da Flexibilidade e Rigidez p. 31
2.1 Introdução ao Método da Flexibilidade - Abordagem Geral . . . . . p. 31
2.2 Introdução ao Método da Flexibilidade - Abordagem Matricial . . . . . p. 34
2.3 Introdução ao Método da Rigidez - Abordagem Geral . . . . . p. 40
2.4 Introdução ao Método da Rigidez - Abordagem Matricial . . . . . p. 44
2.5 Resumo da introdução aos métodos da flexibilidade e da rigidez . . . . . p. 51

Anexos p. 52

Referências p. 55

1 Introdução e Conceitos Básicos

1.1 Introdução

Desde que a tecnologia possibilitou o uso de computadores, os analistas estruturais vem desenvolvendo técnicas numéricas e computacionais para otimizar o processo de análise de estruturas de modo produtivo e seguro.

Métodos consagrados de análise estrutural, tais como o **método das forças** e o **método dos deslocamentos** foram o alvo inicial das técnicas computacionais de análise estrutural. E com base em formulações e equações matemáticas fundamentadas e desenvolvidas no campo da álgebra matricial, nasceu a técnica computacional da análise matricial de estruturas, que posteriormente evoluiu para métodos mais consagrados, tais como diferenças finitas, elementos finitos e de contorno e mais recentemente, elementos discretos e operadores discretos.

Não se pode esquecer que todos esses métodos e técnicas são a implementação numérica de modelos físico-matemáticos de análise estrutural. Isto é, o método é na verdade uma técnica que usa o computador para resolver as equações que foram formuladas pelos modelos teóricos. Normalmente, para a grande maioria dos problemas de análise estrutural, a teoria que serve de base para todos os métodos e técnicas numéricas é a **Teoria da Elasticidade**. É portanto, sempre bom ter em mente, que é inútil e infrutífero tentar estudar um método cumputacional sem o entendimento do modelo teórico que o sustenta. Assim, apesar de neste texto ser feita uma revisão dos conceitos básicos de análise estrutural, os capítulos e tópicos serão desenvolvidos partindo-se da suposição de que o leitor conhece a teoria das estruturas, a mecânica dos sólidos, ou em um contexto geral a **Teoria da Elasticidade**.

Nas subseções seguintes serão apresentados conceitos básicos de análise estrutural que serão utilizados nas explicações e desdobramentos dos próximos capítulos. Trata-se de uma revisão de conceitos já vistos por aqueles que já estudaram a mecânica dos sólidos, também conhecida em muitas academias por teoria das estruturas. Apesar de serem conceitos genéricos, o presente texto

restringirá sua enunciação e aplicação a análise de estruturas reticuladas, objeto de estudo deste trabalho.

1.2 Classificação e Tipologia das Estruturas

Classificar pode ser muitas vezes um processo complexo, e não é nosso objeto de estudo discutir critérios e parâmetros de classificação estrutural que podem variar conforme a necessidade de cada estudo. Para o nosso estudo, adotaremos uma classificação bem simples que divide as estruturas em duas classes:

- Estruturas Reticuladas
- Estruturas não Reticuladas

1.2.1 Estruturas Reticuladas

São todas aquelas constituídas por barras de eixo reto. Existem quatro tipos principais de estruturas reticuladas, que são:

- Treliças
- Vigas
- Pórticos
- Grelhas

As treliças, vigas e pórticos podem ser **planos**, quando todas as barras e carregamentos estão contidos em um mesmo plano ou **espaciais** quando a disposição das barras e/ou carregamentos é tri-dimensional. Já as grelhas são, por construção, estruturas em que os carregamentos são sempre ortogonais ao plano da estrutura.

Para efeito de análise estrutural, as estruturas reticuladas são descritas e caracterizadas pelas suas barras e pelos seus nós. A **enumeração** das barras e nós é essencial para a análise computacional da estrutura. Por esse motivo todas as barras e nós devem ser numerados de forma racional e lógica. Nos capítulos futuros esse processo de **numeração de barras e nós** será estudado mais detalhadamente.

Além de numerar adequadamente nós e barras, deve-se estabelecer **a conectividade da estrutura**, que nada mais é do que listar todas as barras, especificando os números do nó inicial e do nó final de cada barra.

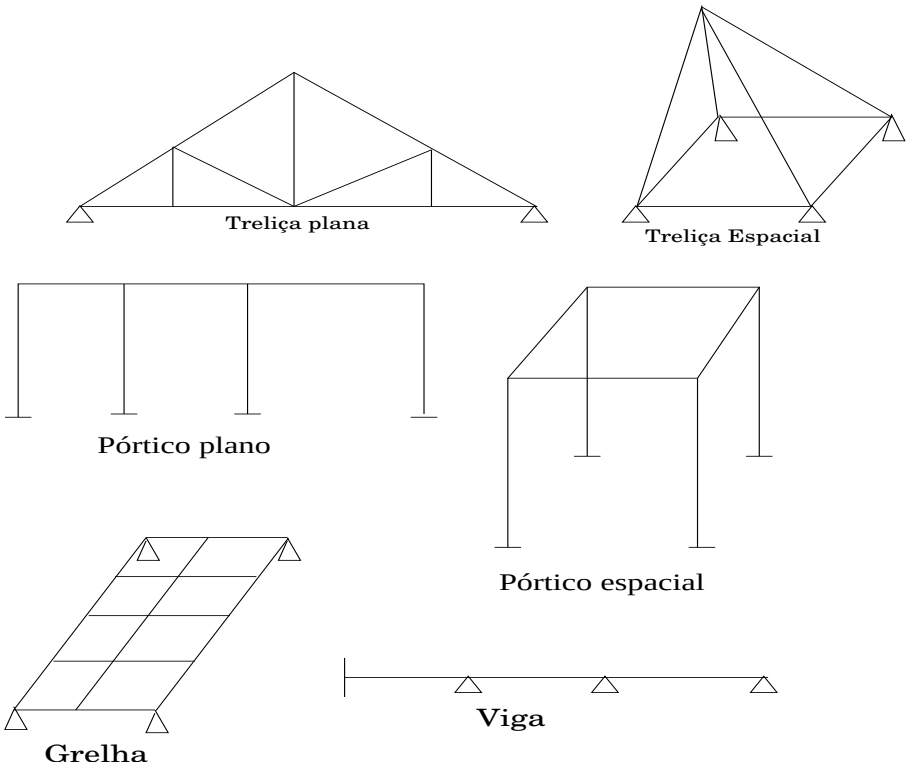


Figura 1: Estruturas Reticuladas

1.2.2 Estruturas não Reticuladas

Estão nessa classificação todas as estruturas que não se enquadram na primeira, sendo principalmente as placas, cascas e membranas.

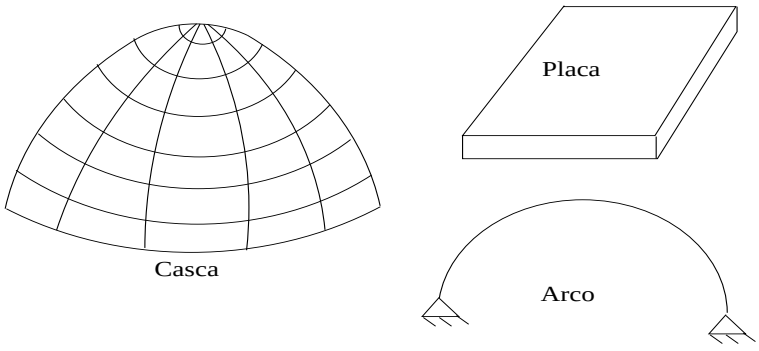


Figura 2: Estruturas não Reticuladas

1.2.3 Endereçamento de Nós, Barras e Conectividade

Um requesito essencial para a análise de estruturas reticuladas é o endereçamento dos nós e das barras. O endereçamento dos nós se faz em relação a um sistema de referêcia ao passo que o endereçamento das barras, que a partir de agora chamaremos de conectividade, se faz em relação ao posicionamento dos nós. Analisando a Figura 3, percebe-se que a mesma possui 12 nós e 21 barras. É essencial antes de qualquer análise saber a posição de cada nó e saber onde começa e onde termina cada barra.

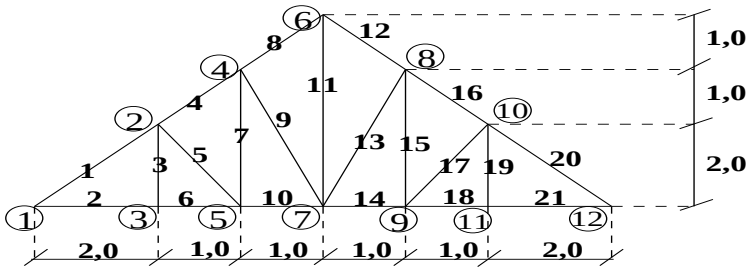


Figura 3: Treliça plana

Considerando um sistema de eixos coordenados $x - y$ com origem no nó 1 da treliça apresentada na Figura 3, teremos a seguinte tabela de endereços:

Tabela 1: Tabela de Coordenadas dos nós da Figura 3

Nó	Coord-X	Coord-Y
1	0,00	0,00
2	2,00	2,00
3	2,00	0,00
4	3,00	3,00
5	3,00	0,00
6	4,00	4,00
7	4,00	0,00
8	5,00	3,00
9	5,00	0,00
10	6,00	2,00
11	6,00	0,00
12	8,00	0,00

Agora que já sabemos as coordenadas dos nós, resta saber a conectividade das barras, ou seja, onde começa e onde termina cada barra. Para a treliça apresentada na Figura 3, temos a seguinte tabela de conectividade:

Tabela 2: Tabela de Conectividade das Barras da Figura 3

Barra	Nó Inicial	Nó Final
1	1	2
2	1	3
3	2	3
4	2	4
5	2	5
6	3	5
7	4	5
8	4	6
9	4	7
10	5	7
11	6	7
12	6	8
13	7	8
14	7	9
15	8	9
16	8	10
17	9	10
18	9	11
19	10	11
20	10	12
21	11	12

1.3 Deslocamentos e Deformações

A história dos delocamentos e das deformações assemelha-se ao dilema do ovo e da galinha. Afinal, quem nasceu primeiro, o deslocamento ou a deformação ?

Algums autores defendem que quando um sólido (não rígido) é solicitado por ações externas, o mesmo se deforma, ou seja, muda de forma e essas deformações é que geram os deslocamentos.

Ao se analisar mais atentamente essa questão pode-se ponderar que deformações não são mensuradas, elas são calculadas. O que se pode medir de fato são os deslocamentos. Basta lembrar do clássico ensaio de tração que todo estudante de engenharia faz assim que começa a estudar resistência dos materiais. Coloca-se a barra na prensa e se aplica força paulatinamente. **O que é de fato medido durante o ensaio** são a força que a prensa aplica (ou transmite) a barra e o comprimento

da mesma, ou em outras palavras, o deslocamento relativo entre as duas extremidades da barra. A partir desses valores **medidos** é possível **calcular a deformação linear**. Assim, sob essa ótica, na análise estrutural o que vem primeiro são os deslocamentos. A partir dos deslocamentos é que se calculam as deformações associadas.

1.3.1 Deslocamentos e Deformações Associadas

Agora que já verificamos que o deslocamento precede a deformação e que é a partir dos deslocamentos que se obtêm as deformações, podemos estabelecer uma associação entre deslocamentos e deformações.

Dependendo de como a estrutura se desloque, podemos calcular uma deformação associada a esse tipo de deslocamento e a associação mais simples que se pode fazer entre deslocamento e deformação é a medida da deformação linear, obtida a partir de uma relação entre a força aplicada a uma barra reta e o deslocamento axial relativo que se verifica entre as extremidades da mesma.

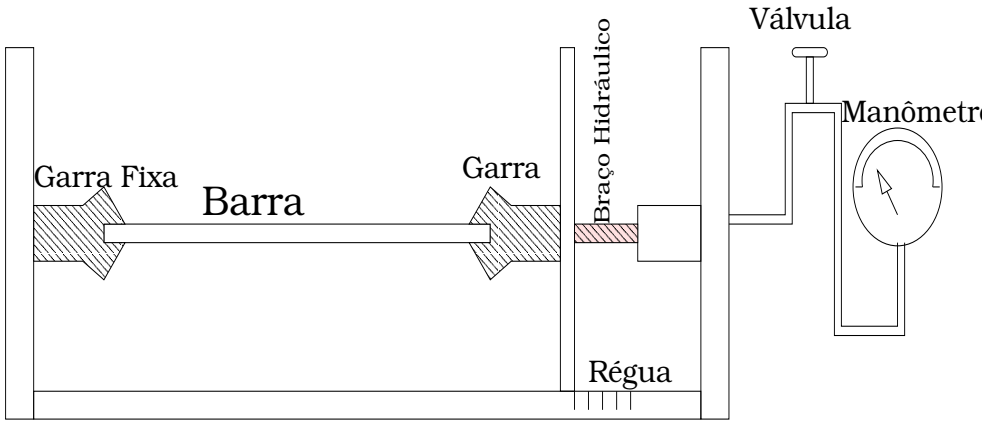


Figura 4: Ensaio de tração

Analisando o desenho esquemático apresentado na Figura 4, percebemos que não é possível medir diretamente nenhuma deformação. O que o ensaio nos fornece diretamente e que podem ser medidos são: a força aplicada a barra e o comprimento da barra para cada situação de carregamento. Medindo-se a seção transversal da barra para cada situação de carregamento pode-se facilmente calcular a tensão na barra, como:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{1.1}$$

Onde F é a força transmitida pela prensa e A é a área da seção transversal da barra.

Medindo-se o comprimento da barra para cada situação de carregamento e subtraindo-se do comprimento original que a barra possuía antes do ensaio, tem-se a medida do deslocamento relativo da barra, que nesse caso iremos chamar de alongamento da barra, que é calculado como sendo:

$$\delta = l_f - l_i \tag{1.2}$$

Onde l_f é o comprimento final da barra, medido para cada situação de carregamento e l_i é o comprimento inicial da barra, medido antes do início do ensaio, quando nenhum carregamento estava aplicado a barra.

Agora, **DEPOIS QUE TODAS AS MEDIDAS FORAM REALIZADAS**, podes-se **CALCULAR A DEFORMAÇÃO ASSOCIADA** através da seguinte equação:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l_i} \tag{1.3}$$

Onde ε é a deformação linear. Uma deformação associada ao deslocamento axial de uma barra submetida apenas a forças normais.

É assim, medindo-se a força F, a área da seção transversal A, e o alongamento δ para vários carregamentos consecutivos e incrementais que se obtém uma relação entre tensão e deformação, que no caso do regime elático é dada por:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.4}$$

Onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e a Equação (1.4) é conhecida como Lei de Hooke.

A deformação linear não é a única que pode ser calculada quando um sólido se desloca devido a ação de forças que o solicitam. Existem outras situaçãoes de carregamento e deslocamento que nos permitem calcular deformações específicas e associadas para cada situação. Podemos por exemplo, calcular a **distorção** que é uma deformação angular associada a deslocamentos angulares que surgem no sólido. A situação esquemática ilustrada na Figura 5 mostra um caso onde uma barra é solicitada a torção e pode-se calcular a deformação associada a essa solicitação.

Existe todo um estudo realizado pela **Mecânica dos Sólidos** que busca relacionar e calcular as deformações que surgem em um sólido quando o mesmo é solicitado por ações externas, e assu-

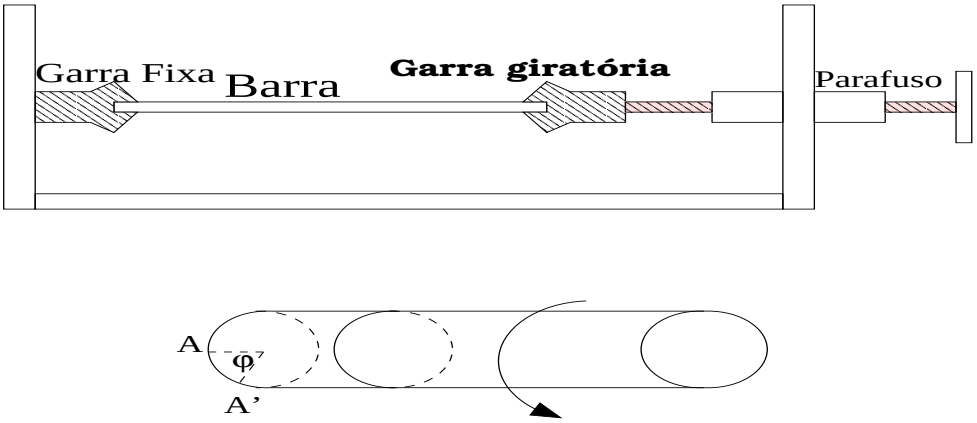


Figura 5: Torção em uma barra

miremos daqui por diante que o leitor esteja familiarizado com as relações entre deformações e carregamentos estabelecidas pela teoria da elasticidade.

Esperamos ainda que antes de prosseguir o leitor tenha compreendido duas idéias principais: a primeira é que os deslocamentos surgem primeiro, e que é a partir da medida deles é que se calculam as deformações. A segunda idéia é a de que existem deformações associadas para cada tipo de configuração e correlação entre os deslocamentos e as ações que os provocaram.

1.3.2 Carregamentos (Ações)

Como já percebemos no tópico anterior, os deslocamentos não surgem do nada e que para todo e qualquer deslocamento deve existir uma causa, e esta causa em análise estrutural é chamada de ação ou, para os mais antigos, de carregamento.

Carregamento ou ação é toda força que solicita a estrutura, tal como seu peso próprio, carga de utilização, sobrecargas, enfim toda e qualquer força que tente provocar o deslocamento da estrutura. As ações podem ser divididas e classificadas de inúmeras formas dependendo da conveniência.

Em análise de estruturas existem duas formas de classificar os carregamentos: A primeira toma por base a velocidade de aplicação da carga, e segundo esse critério as ações podem ser estáticas ou dinâmicas. São ações dinâmicas todas aquelas cargas que são aplicadas a uma velocidade capaz de despertar as forças de inércia do sólido. Quando a velocidade de aplicação for suficientemente lenta, as forças de inércia não são despertadas e o carregamento é classificado como estático. No estudo presente neste texto consideraremos apenas os carregamentos estáticos.

Uma outra forma de classificar os carregamentos tem como critério a sua distribuição, existindo segundo esse critério, cargas concentradas e cargas distribuídas. Essas duas formas de classificação dos carregamentos são suficientes e convenientes para os casos estudados neste trabalho.

1.3.3 Princípio da Superposição dos Efeitos

Para os sólidos que respondem as solicitações na forma do regime elástico, quando os deslocamentos são suficientemente pequenos (cerca de 400 vezes menores que a maior dimensão) é válido afirmar que: O efeito global de um conjunto de ações é igual a soma dos efeitos individuais de cada ação. Este é o princípio da superposição dos efeitos.

A Figura 6 ilustra o princípio da superposição dos efeitos. A estrutura está sujeita a duas ações que atuam ao mesmo tempo. Assim, de acordo com o princípio da superposição dos efeitos, qualquer efeito causado pela atuação combinada das duas ações pode ser calculado a partir da soma dos efeitos das ações atuando isoladamente.

Ponrtanto, se você sabe calcular o deslocamento no meio do vão (por exemplo) devido a ação 1 atuando isoladamente, e também sabe calcular o deslocamento no mesmo ponto (meio do vão) devido a ação 2 atuando isoladamente, o deslocamento no meio do vão causado pelas duas ações atuando ao mesmo tempo será igual a soma dos deslocamentos (no meio do vão) obtidos quando as ações atuavam isoladamente.

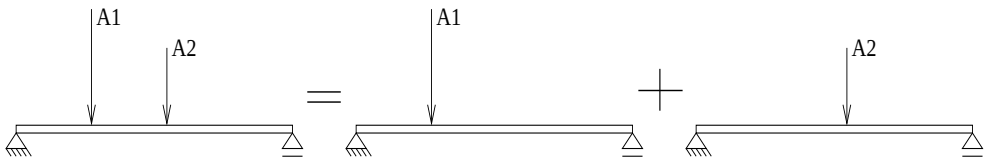


Figura 6: Superposição de Efeitos

Desse modo, por mais complexas que sejam as combinações de carregamento, sempre que for possível aplicar o princípio da suprposição dos efeitos, os carregamentos combinados podem ser divididos em ações individuais, e qualquer efeito global, como deslocamento em um ponto, pode ser obtido a partir da soma dos efeitos individuais das ações atuando isoladamente.

Nas estruturas analisadas ao longo deste texto será considerado válido aplicar o princípio da superposição dos efeitos na análise.

1.3.4 Onde os carregamentos provocam deslocamentos

Quando uma ação externa solicita um sólido na forma do regime elástico, esta ação provoca deslocamentos nos pontos desse sólido. Por mais que possa parecer óbvio, é importante ressaltar que uma ação porvoca deslocamentos em infinitos outros pontos diferentes daquele onde ela própria está aplicada.

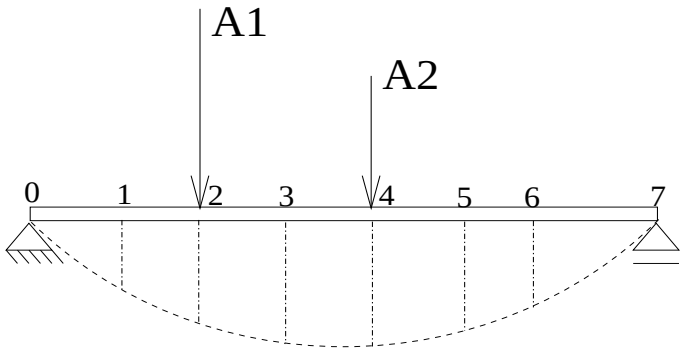


Figura 7: Deslocamentos numa viga

Analisando a viga da Figura 7, vemos que existem duas ações aplicadas a viga, e que essas ações são responsáveis pelo deslocamento de toda a viga. No ponto 1 não existe nenhuma carga aplicada, e o mesmo se deslocou. O deslocamento verificado no ponto 1 é em parte causado pela ação A1 e em parte causado pela ação A2, desse modo podemos expressá-lo matematicamente da seguinte forma:

$$\delta_1 = D_{11} + D_{12} \tag{1.5}$$

Na equação 1.5, temos que:

- δ_1 é o deslocamento total no ponto 1
- D_{11} é a parcela de deslocamento no ponto 1, causada pela a ação 1
- D_{12} é a parcela de deslocamento no ponto 1, causada pela a ação 2

Assim, poderíamos escrever genericamente que:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n} D_{ij} \tag{1.6}$$

Onde:

- n é o número de ações que solicitam a estrutura
- δ_i é o deslocamento total no ponto i
- D_{ij} é uma parcela de deslocamento no ponto i
- O índice i indica a posição onde ocorre o deslocamento
- O índice j indica qual é a ação que contribui para a parcela de deslocamento D_{ij}

Assim, se desejamos representar todos os seis deslocamentos indicados na Figura 7 na forma genérica apresentada pela Equação (1.6), teremos que:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= D_{11} + D_{12} \\
\delta_2 &= D_{21} + D_{22} \\
\delta_3 &= D_{31} + D_{32} \\
\delta_4 &= D_{41} + D_{42} \\
\delta_5 &= D_{51} + D_{52} \\
\delta_6 &= D_{61} + D_{62}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

1.4 Equilíbrio e Compatibilidade

1.4.1 Equilíbrio

Uma estrutura, ou elemento estrutural, está em equilíbrio estático quando a força e o momento resultantes são nulos em qualquer ponto do corpo em análise. Como a análise estrutural se dá no espaço tri-dimensional é sempre possível decompor a força e o momento resultantes nos termos de suas componentes cartesianas, de forma que pode-se matematicamente expressar o equilíbrio da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \\
\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0
\end{aligned} \tag{1.8}$$

A situação apresentada na Figura 8 ilustra uma situação onde se aplicam as Equações (1.8).

As Equações (1.8) expressam as condições de equilíbrio para qualquer sólido no espaço. Existem casos particulares em que as estruturas são idealizadas em modelos planos, assim as Equações (1.8)

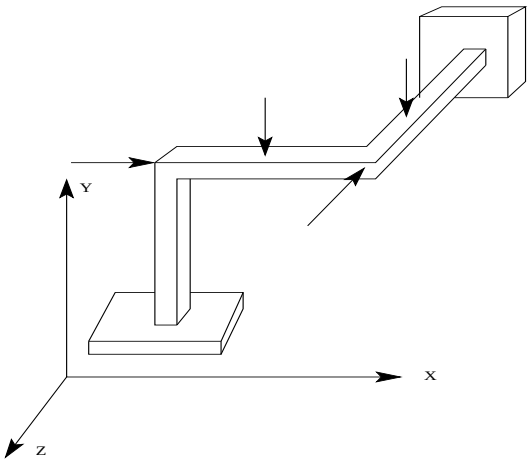


Figura 8: Equilíbrio Espacial

podem ser reduzidas a apenas três equações, sendo duas de translação, relativas aos somatório de forças e uma de rotação, relativa ao somatório de momentos. No caso apresentado na Figura 9 as equações de equilíbrio assumiriam a forma apresentada na Equações (1.9):

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \\ &\sum M_z = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

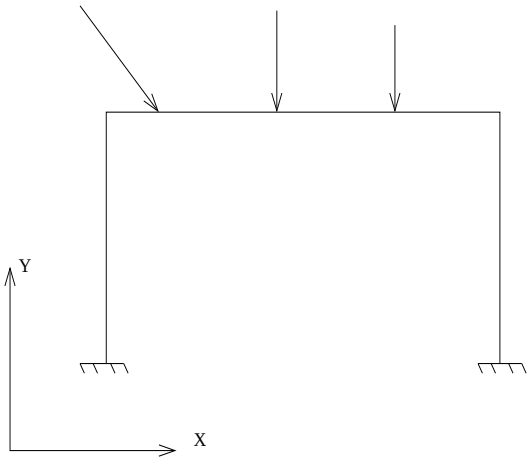


Figura 9: Equilíbrio Plano

Como podemos observar em (1.8) e (1.9), nas equações de equilíbrio, as **forças são as incógnitas** a serem determinadas para a solução do problema.

1.4.2 Compatibilidade

Para que a análise estrutural esteja completa também é necessário atender às condições de compatibilidade da estrutura. Atender às condições de compatibilidade nada mais é do que apresentar, ao final da análise, deslocamentos previamente esperados em determinados pontos da estrutura.

Na viga da Figura 7, sabemos que no ponto 0 não podem existir translações verticais e nem horizontais e também sabemos que o ângulo de giro da barra naquele ponto é diferente de zero. Do mesmo modo sabemos que no ponto 7 não pode existir translação vertical e que tanto a translação horizontal quanto o giro são não nulos. Portanto, para a simples viga apresentada na Figura 7 existem seis condições de compatibilidade que devem ser observadas, três para cada nó. Desse modo, uma abordagem teórica que use os deslocamentos para determinar o equilíbrio da estrutura (método da rigidez) deve obedecer as condições de compatibilidade impostas a estrutura.

Nas equações de compatibilidade, as **incógnitas são os deslocamentos** a serem determinados para a solução do problema.

1.5 Indeterminação Estática e Cinemática

1.5.1 Indeterminação Estática

Como já vimos na seção [1.4] uma estrutura está em equilíbrio estático quando os somatórios dos momentos e das forças é nulo em qualquer ponto do corpo, condição matematicamente traduzida nas Equações 1.8. Vimos ainda que nestas equações as forças são as incógnitas a serem determinadas. **Toda vez que esse número de forças incónitas a serem determinadas for maior que o número de equações de equilíbrio disponíveis, a estrutura será estaticamente indeterminada**.

Essa situação de um número maior de forças incógnitas superior ao número de equações de equilíbrio pode ocorrer de duas formas: através de uma indeterminação estática externa ou via indeterminação estática interna, como veremos a seguir.

1.5.2 Indeterminação Estática Externa

A indeterminação estática externa configura-se quando o número de forças incógnitas aplicadas externamete a estrutura é superior ao número de equações de equilíbrio para resolver a estrutura. Do ponto de vista prático e usual, as **reações de apoio é que são as forças incónitas aplicadas**

externamente a estrutura, e sob este prisma pode-se dizer que **toda vez que o número de reações de apoio exceder o número de equações de equilíbrio a estrutura será externamente estaticamente indeterminada**.

Ainda importa saber o quanto uma estrutura pode ser externamente estaticamente indeterminada, e isso se faz através do cálculo do grau de indeterminação estática externa (G_e). Que pode ser expresso matematicamente expresso da seguinte forma:

$$G_e = NRA - NEE \tag{1.10}$$

Onde NRA é o número de reações de apoio e NEE é o número de equações de equilíbrio. Lembrando que no plano $NEE = 3$ e no espaço $NEE = 6$.

Na Figura 10 são apresentados alguns casos de estruturas externamente estaticamente indeterminadas. Também apresenta-se nessa figura o cálculo do grau de indeterminação estática externa G_e.

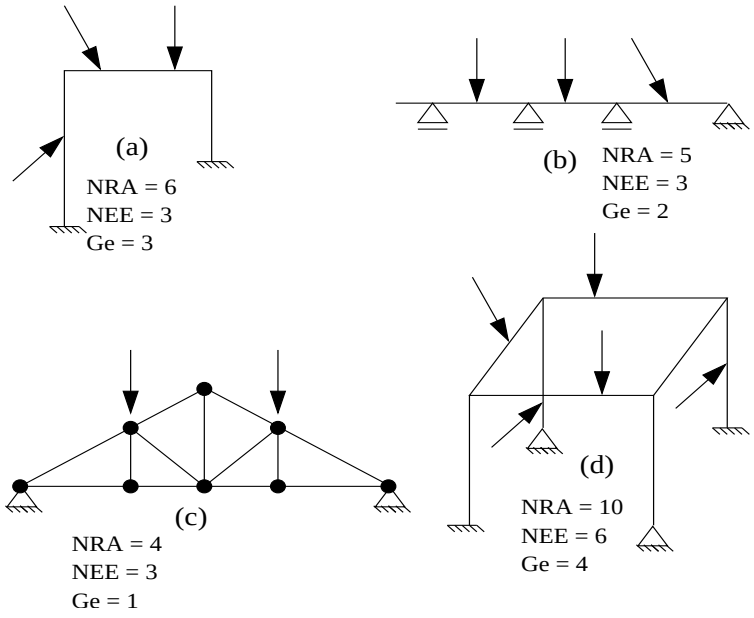


Figura 10: Estruturas exteriormente estaticamente indeterminadas

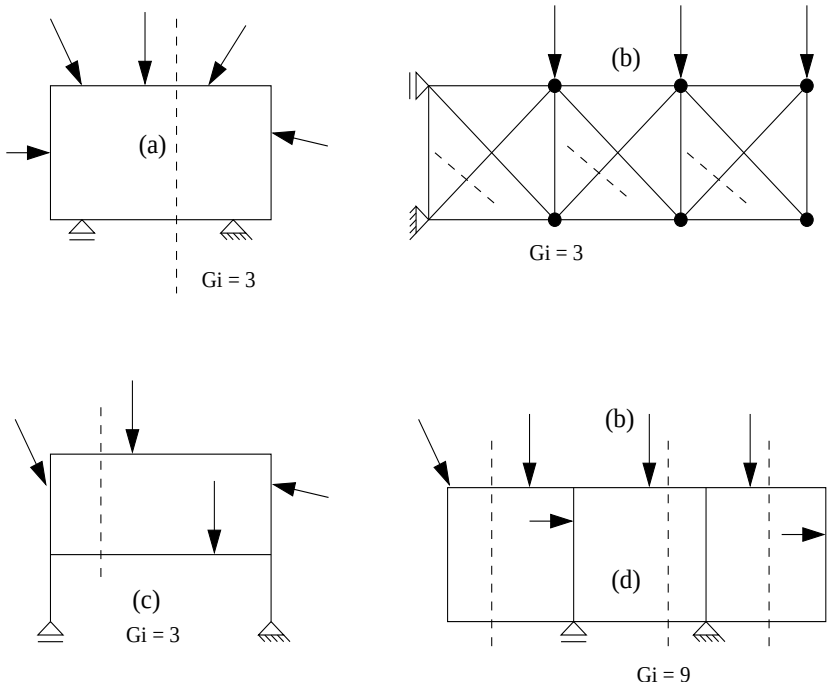


Figura 11: Estruturas internamente estaticamente indeterminadas

1.5.3 Indeterminação Estática Interna

Uma estrutura será internamente estaticamente indeterminada quando não for possível calcular as forças que atuam internamente na estrutura, mesmo nos casos onde seja possível calcular as reações de apoio. Do ponto de vista prático, as forças internas que atuam na estrutura são os esforços internos (momento fletor, esforço cortante, esforço normal,etc).

Esta situação onde não se consegue calcular os esforços internos da estrutura ocorre quando os elementos estruturais se fecham em uma célula impossobilitando calcular o equilíbrio de uma seção transversal através da divisão da estrutura em carregamentos a esquerda e a direita de uma seção, tal como ocorre nos exemplos apresentados na Figura 11.

O cálculo do grau de indeterminação estática interna G_i não é tão simples quando o cálculo de G_e. De modo simplificado calcula-se G_i da seguinte forma:

$$G_i = NRC \times NEI \tag{1.11}$$

Onde NRC é igual ao número de células fechadas onde não se pode dividir a estrutura em esquerda e direita, e NEI é o número de esforços internos presentes na célula.

No exemplo da Figura 11-(a) existe uma célula e três esforços internos na célula, uma vez que em barras de pórticos planos podem existir momento fletor, esforço normal e esforço cortante. Portanto, neste caso $G_i = 3$. No caso da Figura 11-(d) existem três células e três esforços em cada célula, logo, $G_i = 9$.

O grau de indeterminação estática total é igual a soma dos graus de indeterminação estática exterior e interior, e quanto maior for esse número, maior será o esforço computacional para calcular as forças incógnitas, maior será o esforço computacional do método da flexibilidade.

1.5.4 Indeterminação Cinemática

Como já vimos na seção [1.4], quando uma estrutura é submetida a uma ação, esta se desloca. Sabemos ainda que alguns nós da estrutura têm seus deslocamentos previamente determinados, como por exemplo nos apoios. Esses deslocamentos previamente **determinados** são as condições de equilíbrio cinemático da estrutura, que também chamamos de condições de contorno.

Além dos nós onde esses deslocamentos são conhecidos, a estrutura pode possuir outros nós onde não se conhece os valores dos deslocamentos. Nesses pontos, os deslocamentos são indeterminados, e a quantidade desses deslocamentos indeterminados é o grau de indeterminação cinemática da estrutura.

Como exemplo, podemos analisar a estrutura da Figura 11-d. Nesta estrutura existem 8 nós. Como se trata de uma estrutura plana, em cada um desses nós existem três possibilidades de deslocamento (translação em x, translação em y e rotação em z), totalizando um total de 24 deslocamentos possíveis. Desses 24 deslocamentos possíveis 3 são determinados, que são as translações nos dois apoios. Assim esta estrutura possui 19 indeterminações cinemáticas.

Já no caso da estrutura na Figura 11-d existem 8 nós com 6 possibilidades de movimento (estrutura espacial), totalizando 48 possibilidades de deslocamento. Dessas 48 possíveis, analisando os apoios, percebemos que 10 deslocamentos são determinados (2 apoios do 2^o gênero e 2 engastes), fazendo com que a estrutura possua 38 indeterminações cinemáticas.

Em análise estrutural, também costuma-se chamar o número de indeterminação cinemática de **graus de liberdade** da estrutura.

1.6 Flexibilidade e Rigidez de Mola

As equações de flexibilidade e rigidez exprimem as relações entre ações e deslocamentos em uma estrutura. O entendimento de como essas equações são formuladas é fundamental para a análise matricial via métodos da flexibilidade ou da rigidez.

Os conceitos de flexibilidade e rigidez podem ser ilustrados com o auxílio da mola apresentada na Figura 12, onde a mesma é tracionada pela ação A, e devido a solicitação dessa mesma ação, a mola distende-se do comprimento L até o comprimento $\delta + L$, sendo a ação A a responsável pelo alongamento (deslocamento) δ.

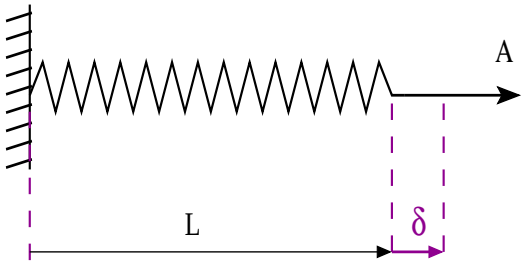


Figura 12: Mola sujeita a tração

Qualquer estudante de Engenharia vai lembrar de como se calcula a constante elástica da mola usando a Lei de Hooke. Para isso basta descobrir qual é a força que provoca um deslocamento unitário na mola, com a velha e boa fórmula:

$$F = Kx \tag{1.12}$$

Onde x é o deslocamento que a força F provoca e K é a constante elática da mola. Portanto, na Equação (1.12) K é a força que é capaz de provocar um deslocamento unitário na mola, ou seja, quando $x = 1$. Quanto mais alto for o valor de K maior será a força necessária para distender ou comprimir a mola, ou em outras palavras mais rígida será a mola.

Em análise de estruturas o princípio é o mesmo. Entretanto, apenas com finalidade didática e também com o objetivo de mater sempre uma mesma simbologia matemática tanto nos casos mais simples quanto nos mais complexos, utilizaremos as mesmas notações que estamos usando para forças (A_i) e deslocamentos (δ_i e D_{ij}) desde o princípio deste trabalho. Desse modo, a Equação (1.12) é reescrita do seguinte modo:

$$A = S\delta \tag{1.13}$$

Onde:

- δ é o deslocamento provocado pela ação A.
- S é a força necessária para provocar um deslocamento unitário ($\delta = 1$)

Assim, quanto maior for o valor de S mais difícil será deslocar a mola, ou seja, mais rígida será a mola, e por esse motivo S é conhecido como sendo a *RIGIDEZ* da mola.

Uma outra forma de relacionar ações e deslocamentos pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta = FA \tag{1.14}$$

Onde:

- δ é o deslocamento provocado pela ação A. (de novo e sempre)
- F é o deslocamento que surge na mola quando aplica-se uma ação unitária na mesma $A = 1$

Deste modo, quanto maior for o valor de F mais fácil será deslocar a mola, ou seja, mais flexível será a mesma, e por esse motivo, F é conhecido como sendo a *FLEXIBILIDADE* da mola.

Quando estamos determinado o valor de S a pergunta a ser respondida é a seguinte: **qual é a força necessária para provocar um deslocamento unitário na mola**, ao passo que na determinação do valor de F a pergunta a ser respondida consiste em dizer **qual é o valor do deslocamento que é provocado por uma ação unitária na mola**.

Analisando as Equações (1.13) e (1.14) percebemos que F e S são grandezas inversamente proporcionais, ou em outras palavras, a *RIGIDEZ* é o inverso da *FLEXIBILIDADE*, o que é matematicamente expresso pelas Equações (1.15).

$$F = \frac{1}{S} = S^{-1} \qquad \text{e} \qquad S = \frac{1}{F} = F^{-1} \tag{1.15}$$

1.7 Flexibilidade e Rigidez de Elementos Estruturais

1.7.1 Coefi cientes de Flexibilidade e Rigidez

Os princípios descritos para a mola são válidos para toda e qualquer estrutura que se desloca em regime linear elástico quando solicitada por uma única ação, o que nos permite distender os conceitos de flexibilidade e rigidez de mola para os conceitos de flexibilidade e rigidez de elementos estruturais, e por conseqüinte, de estruturas. Vejamos o caso da estrutura apresentada na Figura 13.

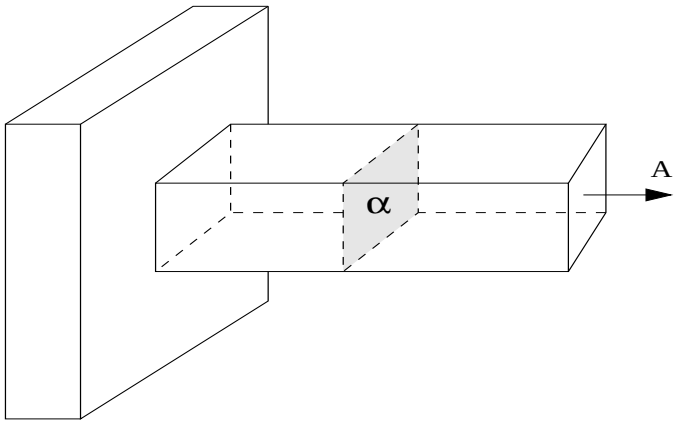


Figura 13: Barra sujeita a tração

No caso da Figura 13 temos uma barra engastada em uma extremidade e solicitada em outra extremidade por uma ação *A*, posicionada na mesma direção do eixo longitudinal da viga. Sabemos, da Resistência dos Materiais, que para o caso da barra da Figura 13, o deslocamento axial δ e dado por:

$$\delta = \frac{AL}{E\alpha} \tag{1.16}$$

Onde:

- δ é o deslocamento provocado pela ação *A*;
- *L* é o comprimento da barra;
- *E* é o módulo de elasticiade longitudinal do material que constitui a barra, e
- α é a área da seção transversal da barra.

Se fizermos $A = 1$ na Equação (1.16) teremos **o valor do deslocamento** δ, **provocado por uma ação unitária**, ou em outros termos, **a flexibilidade da barra** quando submetida a ações normais aplicadas no eixo da mesma. Assim, a flexibilidade F de uma barra prismática submetida a uma ação normal aplicada no seu eixo longitudinal é descrita através da Equação (1.17).

$$F = \frac{L}{E\alpha} \tag{1.17}$$

Como já sabemos que a rigidez é o inverso da flexibilidade podemos também obter o valor da rigides S para a barra da Figura 13, conforme expresso na Equação (1.18).

$$S = F^{-1} = \left(\frac{L}{E\alpha}\right)^{-1} = \frac{E\alpha}{L} \tag{1.18}$$

Uma vez que obtivemos F e S podemos agora relacionar as ações e os deslocamentos para o caso da Figura 13 em termos de sua rigidez ou de sua flexibilidade ao deslocamento longitudinal provocado por uma ação normal, na forma das Equações (1.19)

$$\begin{aligned} \delta &= F A \\ A &= S \delta \end{aligned} \tag{1.19}$$

As Equações (1.19) são as iguais as Equações (1.13) e (1.14), só que neste caso, os valores de F e A foram obtidos para uma situação estrutural específica. Veremos mais adiante que F e A são respectivamente chamados de *coeficiente de flexibilidade* e *coeficiente de rigidez*, e que sua determinação depende de técnicas específicas para cada tipo de situação estrutural. Veremos ainda mais adiante, várias formas de se obter esses valores utilizando o *princípio dos trabalhos virtuais* e a *técnica da carga virtual unitária*

Vejamos agora o caso da viga engastada apresentada no esquema estrutural da Figura 14

Agora, ao invés de tracionar a barra, a ação na extremidade provoca a flexão da barra. Neste caso, o deslocamento vertical δ indicado na Figura 14 pode ser obtido via técnica da carga virtual unitária, utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, sendo expresso por:

$$\delta = \frac{1}{EI}\int M\overline{M}ds \tag{1.20}$$

Onde:

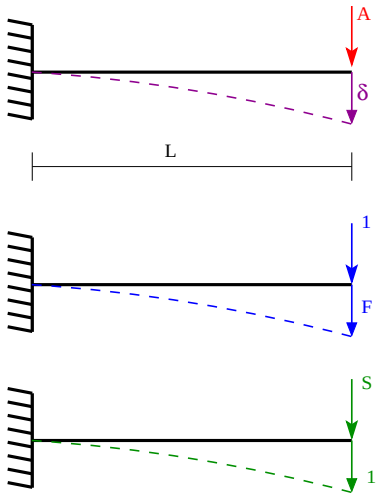


Figura 14: Viga em balanço com ação na extremidade

- E é o módulo de elasticidade longitudinal do material que constitui a barra
- I é o momento de inércia da seção transversal em relação a sua linha neutra
- M é a expressão que define o valor dos momentos fletores reais
- $\overline{M}$ é a expressão que define o valor dos momentos fletores virtuais

Admitindo um sistema de coordenadas com origem na extremidade onde a ação A está aplicada, teremos as seguintes expressões de momento:

$$M(x) = -A \cdot x \quad (0 \leq x \leq L)$$
$$\overline{M}(x) = -1 \cdot x \quad (0 \leq x \leq L)$$

Multiplicando $M(x)$ por $\overline{M}(x)$, teremos que:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^L A\, x^2 dx = \frac{AL^3}{3EI}$$

Desse modo, obtivemos o valor do deslocamento vertical δ na extremidade da viga provocado pela a ação A.

$$\delta = \frac{AL^3}{3EI} \tag{1.21}$$

Agora, para o caso da viga na Figura 14, se quisermos saber **qual é o deslocamento δ provocado**

por uma ação unitária na extremidade onde atua a ação A, basta fazer $A = 1$ na equação 1.21, e ficaremos com:

$$\delta = \frac{1\,L^3}{3EI} \Longrightarrow \delta = \frac{L^3}{3EI}$$

E como **o valor do deslocamento** δ **provocado por uma ação unitária** é definido como sendo a **flexibilidade** F, temos que para o caso do deslocaemento δ indicado na Figura 14, a flexibilidade (F) é dada por:

$$F = \frac{L^3}{3EI} \tag{1.22}$$

Sabendo o valor da flexibilidade expressa na Equação (1.22), podemos relacionar ação e deslocamento na forma expressa na Equação (1.23):

$$\delta = F\,A \tag{1.23}$$

Agora, se quisermos saber **qual é a força necessária para provocar um deslocamento unitário** basta fazer $\delta = 1$ na Equação 1.21, e ficaremos com:

$$1 = \frac{AL^3}{3EI} \Longrightarrow A = \frac{3EI}{L^3}$$

E como **o valor da força** A **que provoca um deslocamento unitário** é definido como sendo a **rigidez** (S), temos que para o caso do deslocaemento δ indicado na Figura 14, a rigidez (S) é dada por:

$$S = \frac{3EI}{L^3} \tag{1.24}$$

Sabendo o valor da rigidez expressa na Equação (1.24), podemos relacionar ação e deslocamento na forma expressa na Equação (1.25):

$$A = S\,\delta \tag{1.25}$$

As Equações (1.25) e (1.23) são respectivamente iguais as Equações (1.13) e (1.14), com a di-

ferença que desta vez, para o caso específico da barra apresentada na Figura 14, obtivemos os coeficientes de flexibilidade e de rigidez utilizando o princípio dos trabalhos virtuais.

1.7.2 Matrizes de Flexibilidade e de Rigidez

Até agora, nos exemplos que apresentamos, para cada estrutura existia apenas um deslocamento em análise e portanto, apenas um único coeficiente de flexibilidade e um único coeficiente de rigidez, situação que serviu para explicar os conceitos de flexibilidade e de rigidez, mas que em casos práticos não será aplicada, uma vez que na análise de estruturas usuais o número de deslocamentos e ações é consideravelmenet elevado. Nestes casos, ao invés de trabalharmos com coeficientes únicos, iremos utilizar **matrizes de coeficientes**, matrizes essas que são nominadas de **matriz de rigidez** e **matriz de flexibilidade**.

Os casos que veremos na presente seção ilustram apenas a utilização das matrizes de flexibilidade e rigidez nas equações que correlacionam ações com deslocamentos, ainda não discutiremos a obtenção dos coeficientes de flexibilidade e de rigidez.

Para ilustrar a obtenção das citadas matrizes, analisemos o caso da viga de dois vãos sujeita a três ações, conforme apresentado na Figura 15. Digamos que para esse caso desejemos obter os três deslocamentos δ_1, δ_2 e δ_3 indicados na figura, considerados positivos nos mesmos sentidos das ações aplicadas nos pontos 1, 2 e 3.

Sabemos que cada deslocamento é composto de parcelas de deslocamento correspondentes as ações aplicadas na estrutura, de forma que:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= D_{11} + D_{12} + D13 \\ \delta_2 &= D_{21} + D_{22} + D23 \\ \delta_3 &= D_{31} + D_{32} + D33 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Sabemos ainda que se for possível aplicar o princípio dos trabalhos virtuais, as parcelas de deslocamento D_{ij} podem ser calculados considerando as ações atuando isoladamente na estrutura. Assim, podemos expressar a parcela de deslocamento D_{ij}, considerando apenas a ação j. No caso específico apresentado na Figura 15, podemos expressar D_{11} calculando o deslocamento no ponto 1 considerando apenas a ação A_1 atuando isoladamente. Assim, se soubermos **qual é o deslocamento que provocado por uma ação unitária no ponto 1** acharemos um **coeficiente de flexibilidade** que correlaciona o deslocamento δ_1 com a ação A_1 dado por:

$$D_{11} = F_{11}\, A_1 \tag{1.27}$$

Pelo mesmo raciocínio que nos permitiu escrever a Equação (1.27), podemos escrever que:

$$\begin{aligned} D_{12} &= F_{12}\, A_2 \\ D_{13} &= F_{13}\, A_3 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Nas Equações (1.27) e (1.28), os coeficientes F_{11}, F_{12} e F_{13} são obtidos através do cálculo do deslocamento no ponto 1 causado pelas ações A_1, A_2 e A_3 atuando isoladamente. Para ser mais específico, o coeficiente F_{11} é o deslocamento vertical no ponto 1 provocado pela ação A_1, ao passo que F_{12} é o deslocamento vertical no mesmo ponto 1 agora causado pela ação A_2, e finalmente F_{13} é o deslocamento vertical no mesmo ponto 1 causado provocado pela ação A_3. Como já sabemos que **o deslocamento provocado por uma ação unitária** é a **flexibilidade**, obtemos os coeficientes de flexibilidade F_{ij} onde o índice i indica o ponto onde o deslocamento é considerado, e o índice j indica o ponto onde a ação unitária foi aplicada. Na Figura 15 esse processo é graficamente apresentado.

Aplicando o mesmo raciocício com o qual obtivemos as Equações (1.27) e (1.28), podemos escrever que:

$$\begin{aligned} D_{21} &= F_{21}\, A_1 \\ D_{22} &= F_{22}\, A_2 \\ D_{23} &= F_{23}\, A_3 \end{aligned} \tag{1.29}$$

De modo análogo, teremos que:

$$\begin{aligned} D_{31} &= F_{31}\, A_1 \\ D_{32} &= F_{32}\, A_2 \\ D_{33} &= F_{33}\, A_3 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Assim, usando as Equações (1.27), (1.28), (1.29) e (1.30), podemos correlacionar todos as ações A com os deslocamentos δ, do seguinte modo:

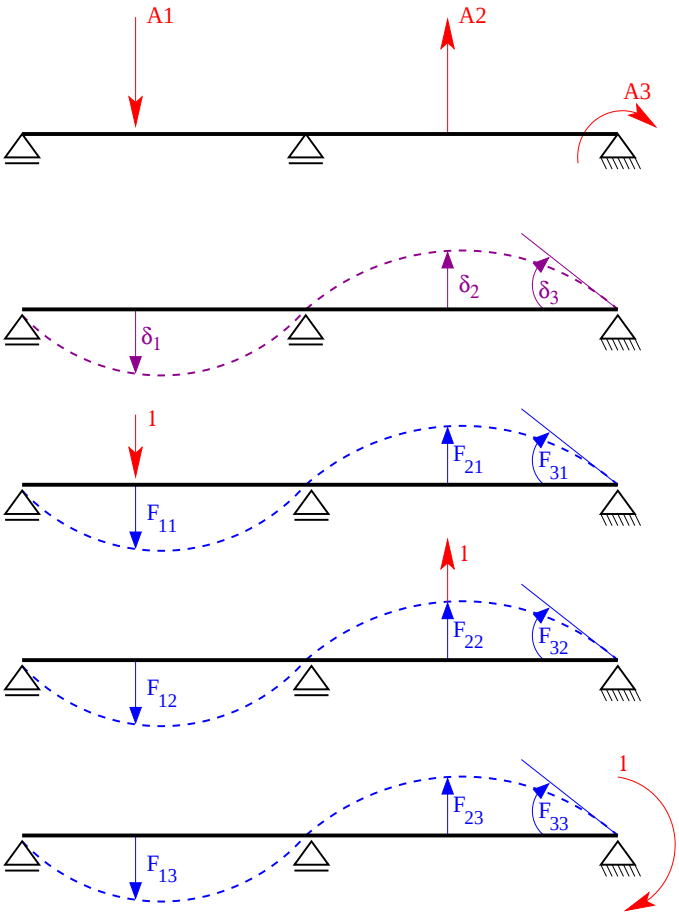


Figura 15: Coeficientes de flexibilidade para viga com dois vãos

$$\begin{aligned}\delta_1 &= F_{11}\,A_1 + F_{12}\,A_2 + F_{13}\,A_3\\ \delta_2 &= F_{21}\,A_1 + F_{22}\,A_2 + F_{23}\,A_3\\ \delta_3 &= F_{31}\,A_1 + F_{32}\,A_2 + F_{33}\,A_3\end{aligned} \tag{1.31}$$

As equações (1.31) podem ser matricialmente expressas na forma da Equação (1.32).

$$\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_{11} & F_{12} & F_{13}\\ F_{21} & F_{22} & F_{23}\\ F_{31} & F_{32} & F_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{bmatrix} \tag{1.32}$$

Em termos genéricos para uma estrutura qualquer, temos que:

$$[\delta] = [F][A] \tag{1.33}$$

Onde:

- $[\delta]$ é a **matriz** de deslocamentos;
- $[F]$ é a **matriz** de flexibilidade, e
- $[A]$ é a **matriz** das ações.

A Equação (1.33) expressa os deslocamentos em função das ações, utilizando para isso a matriz de flexibilidade $[F]$. Porém, se a partir da mesma Equação (1.33) quisermos expressar as ações em função dos deslocamentos, chegaremos a Equação (1.34):

$$[A] = [F]^{-1}[\delta] \tag{1.34}$$

Onde $[F]^{-1}$ é a matriz de flexibilidade invertida, de forma que para as mesmas ações e deslocamentos apresentados na Figura 15, podemos dizer que $[S] = [F]^{-1}$, e então escrevermos a Equação (1.35).

$$[A] = [S][\delta] \tag{1.35}$$

Na Equação (1.35) as ações são expressas em função dos deslocamentos e a matriz $[S]$ é uma matriz de rigidez para a estrutura apresentada, matriz essa que pode ser obtida a partir da inversão da matriz $[F]$ ou diretamente através da identificação de valores de carregamento que provocam deslocamentos unitários nas mesmas direções e sentidos indicados pelos deslocamentos δ_1, δ_2 e δ_3 da Figura 15. Tal processo é graficamente ilustrado na Figura 16.

Analisando o processo físico ilustrado na Figura 16 vemos que o que se procura agora é **quais são as ações que provocam deslocamentos unitários**, ou seja, quais os coeficientes de rigidez. Se analisamos o ponto 1 especificamente, e perguntamos **quais as ações que provocam um deslocamento unitário** na mesma direção e sentido de δ_1, fazendo com que δ_2 e δ_3 sejam nulos, obteremos os coeficientes S_{11}, S_{21} e S_{31}, e assim suscessivamente, até obtermos a matriz de rigidez $[S]$, em raciocío semelhante ao desenvolvido na obtenção dos coeficientes de flexibilidade da matriz $[F]$. Os deslocamentos δ_2 e δ_3 são nulos no caso desses três coeficientes, por que a pergunta que tentamos responder é quais são as ações que provocam deslocamento unitário apenas no ponto 1. Quando repetirmos a mesma investigação para os pontos 2 e 3, acharemos os demais coeficientes de rigidez que compõe a matriz de rigidez.

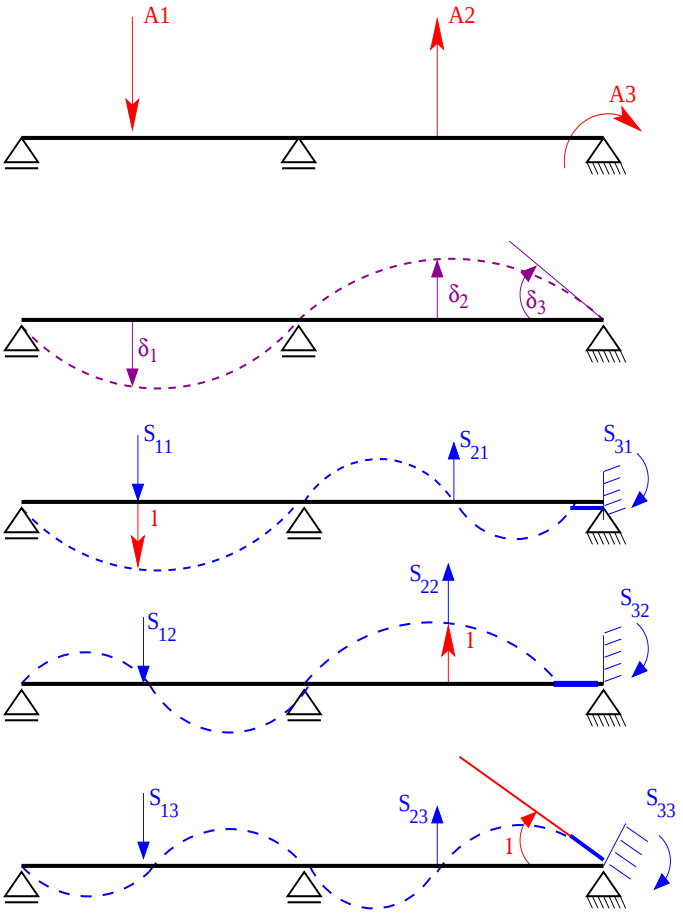


Figura 16: Coeficientes de rigidez para viga com dois vãos

Determinar os valores dos coeficientes de rigidez e flexibilidade de uma estrutura genérica é uma tarefa muito difícil. O que usualmente se faz é determinar esses coeficientes para certos tipos de estruturas de forma específica e isolada, construindo-se assim uma tabela de valores desses coeficientes para situações previamente determinadas. De posse desses valores previamente conhecidos, divide-se a astrutura global de forma que os coeficientes de flexibilidade e de rigidez da estrutura global possam ser obtidos a partir das combinações dos coeficientes conhecidos à priori.

2 *Fundamentos Teóricos dos Métodos da Flexibilidade e Rigidez*

Veremos neste capítulo os fundamentos teóricos dos métodos da rigidez e da flexibilidade. Apesar de estes fundamentos poderem ser aplicáveis a análise estrutural em geral, os veremos especificamente aplicados a estruturas reticuladas, o que por outro lado cobre um número razoável de elementos estruturais usualmente utilizados na Engenharia de Estruturas.

A formulação dos métodos será desenvolvida em álgebra matricial, o que permite escrever equações generalizadas para qualquer tipo de estrutura, com a vantagem adicional da abordagem matricial ser facilmente assimilável em algoritimos computacionais, permitindo o uso de computadores na análise, o que é a maior vantagem desses métodos, uma vez que o computador é capaz de analisar um grande número de estruturas em tempo reduzido, aumentando consideravelmente a produtividade do analista estrutural.

2.1 Introdução ao Método da Flexibilidade - Abordagem Geral

Inicialmente veremos os fundamentos teóricos do método da flexibilidade, que pode ser utilizado na solução de qualquer método estaticamente indeterminado, ou seja, toda vez que existirem mais forças incógnitas do que equações de equilíbrio disponíveis para a solução do problema.

Para enteder o mecanismo de funcionamento do método, vamos inicialmente analisar a viga apresentada na Figura 17-(a).

Com a finalidade de poupar tempo e também evitando reinventar a roda, adotaremos a nomeclatura semelhante a utilizada por (GERE; WEAVER, 1981) na denominação de ações, reações, deslocamentos e matrizes em geral. Assim que os termos forem surgindo na solução do problemas, iremos nominando os termos que se fizerem necessários.

Observando a estrutura apresentada na Figura 17-(a), vemos que trata-se de uma estrutura plana com quatro reações de apoio possíveis. A partir de agora, convencionaremos representar as reações de apoio, através de um traço cortando a força ou binário que a constitui, isso diferenciará as ações das reações.

Como a viga da Figura 17-(a) é uma estrutura plana, significa que existem três equações de equilíbrio possíveis para resolver o problema, ao passo que a mesma estrutura apresenta quatro reações de apoio incógnitas, o que torna a estrutura estaticamente indeterminada do primeiro grau, e dizemos então que a estrutura possui um redundante estático, que pode ser obtido a partir da *quebra* de qualquer um dos vínculos (restrição ao deslocamento nos apoios) da estrutura.

Na solução via método da flexibilidade, quebra-se um dos vínculos nos apoios, e para manter a compatibilidade da estrutura acrescenta-se o redundante estático equivalente ao vínculo rompido, que é a própria reação de apoio do vínculo que foi rompido. Qualquer um dos vínculos pode ser rompido, mas no caso dos quatro vínculos apresentados na Figura 17-(a), optou-se por romper o vínculo que impedia o deslocamento vertical no ponto B da viga, fazendo com que a estrutura assuma a forma apresentada na Figura 17-(b).

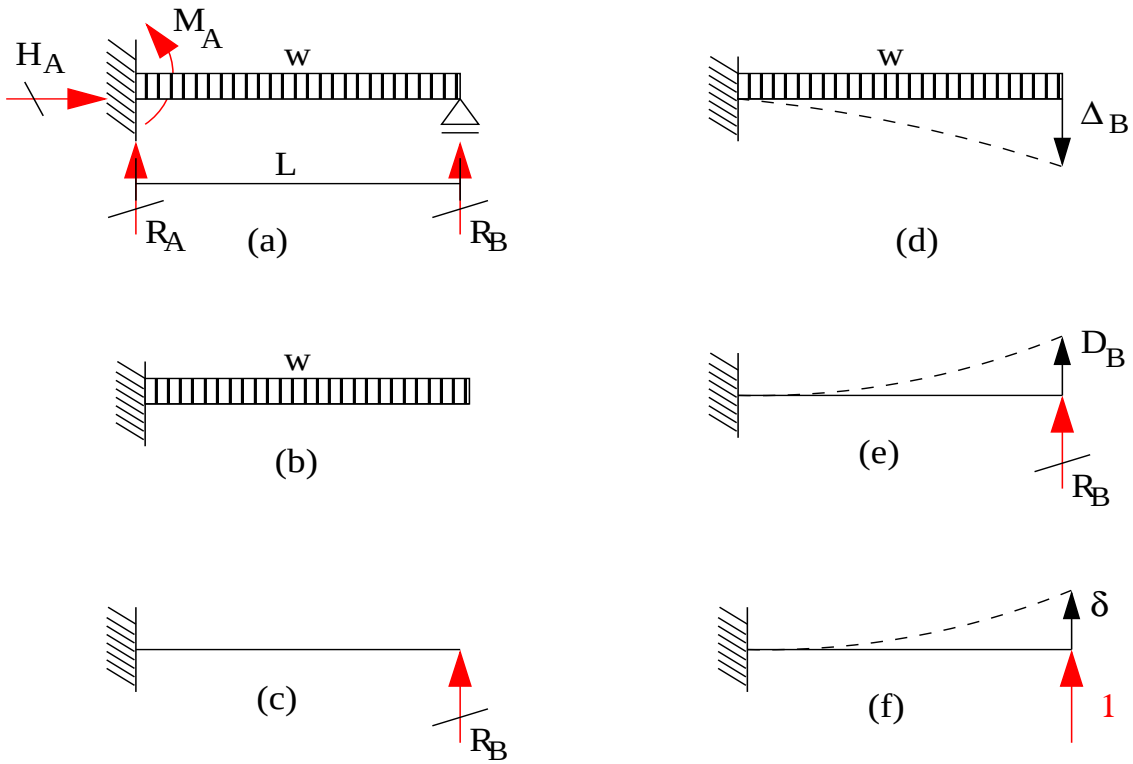


Figura 17: Exemplo de aplicação do Método da Flexibilidade

Como a viga da Figura 17-(a) era estaticamente indeterminada do primeiro grau, ao se romper um

vínculo obteve-se a estrutura estaticamente determinada (isostática) apresentada na Figura 17-(b). Porém, ao se romper um vínculo é mandatório que se aplique o redundante estático na estrutura na mesma direção e sentido da reação do apoio rompido, aplica-se o redndante R_B como o indicado na Figura 17-(c).

Desse modo, podemos representar os efeitos globais da viga da Figura 17-(a) como sendo a soma dos efeitos isolados das vigas das Figuras 17-(b) e 17-(c).

Agora, para determinar o valor da redundante R_B, calcularemos o deslocamento em B, para os casos das vigas das Figuras 17-(b) e 17-(c). O cálculo desses deslocamentos é geralmente realizado através do método da carga virtual unitária, tal qual foi realizado na seção 1.7.1. Aplicando a mesma técnica, obtemos o valor de $\Delta_B = \dfrac{wL^4}{8EI}$ (positivo no sentido indicado na Figura 17-(d)). Da mesma forma, para a viga da Figura 17-(b) obtemos o valor de $D_B = \dfrac{R_B L^3}{3EI}$, positivo no sentido indicado pela Figura 17-(e).

Agora, convencionaremos que o sentido da redundante será sempre positivo, e também que os deslocamentos no sentido da redundante serão sempre positivos. Após adotar essa convenção escrevemos a equação de compatibilidade do nó B da estrutura da viga original, apresentada na Figura 17-(a). Sabemos portanto que o deslocamento vertical do nó B da Figura 17-(a) é nulo, o que nos permite escrever a Equação (2.1):

$$D_B - \Delta_B = 0 \Rightarrow D_B = \frac{R_B L^3}{3EI} - \frac{wL^4}{8EI} = 0 \tag{2.1}$$

Isolando o valor de R_B na Equação (2.1), teremos o valor do redundante estático dado por:

$$R_B = \frac{3}{8}wL \tag{2.2}$$

Como a estrutura é estaticamente indeterminda do primeiro grau, ao se obter o valor de um redundante estático (R_B), pode-se agora obter as demais reações de apoio através das três equações de equilíbrio disponíveis para a viga plana.

A Equação (2.1) que permitiu a solução do problema é chamada de equação de compatibilidade, uma vez que determina os valores de deslocamentos em nós da estrutura. É esta equação que exprime a **condição de compatibilidade** de que o deslocamento vertical do nó B deve ser nulo, e a partir dessa equação é que obtemos o valor de um redundate estático que nos dá a solução do

problema, uma vez que conhecido o valor de um redundante, as demais reações incógnitas podem ser obtidas através das três equações de equilíbrio disponíveis para estruturas planas.

Podemos ainda desenvolver uma solução mais sistemática que nos permita chegar no mesmo valor de R_B. Esta sistematização nos permitirá expressar as equações de equilíbrio e compatibilidade em termos gerais e matriciais, caminhando assim no sentido da generelização matricial que utilizaremos na análise das estruturas.

Um primeiro passo a ser dado no sentido dessa sistematização, é descobrir qual é o deslocamento δ no mesmo sentido e direção da redundante estática, quando aplicamos no lugar da redundante uma carga unitária, como indicado na Figura 17-(f). Desse modo, podemos expressar o valor do deslocamento D_B, causado por R_B como sendo o produto da força redundante R_B pelo deslocamento causado por uma força unitária, assim teríamos que $D_B = \delta R_B$. Com essa nova abordagem, a Equação de compatibilidade (2.1) pode ser reescrita na forma da Equação (2.3):

$$-\Delta_B + \delta R_B = 0 \tag{2.3}$$

Na Equação (2.3) Δ_B é o deslocamento no ponto B, causado pela Ação w na estrutura liberada. É tomado negativo porque é contrário ao sentido da redundante no ponto B. Enquanto δ, representa um coeficiente de flexibilidade, uma vez que é o deslocamento provocado por uma ação unitária no ponto B, e numa forma mais geral denotamos pelo símbolo F. O termo nulo a direita da igualdade é a condição de compatibilidade que determina qual deve ser o deslocamento do nó B, que em numa forma mais geral denotamos por δ_B, assim, podemos reescrever mais uma vez a Equação (2.3) na forma generalizada apresentada pela Equação (2.4):

$$\delta_B = \Delta_B + F\ R_B \tag{2.4}$$

2.2 Introdução ao Método da Flexibilidade - Abordagem Matricial

Agora vejamos o caso apresentado na Figura 18:

No caso da viga apresentada na Figura 18-(a) temos uma estrutura estaticamente indeterminada do segundo grau, e neste caso, a solução do problema via método da flexibilidade requer que sejam rompidos dois vínculos da viga. No caso específico da viga da Figura 18-(a) foram rompidos

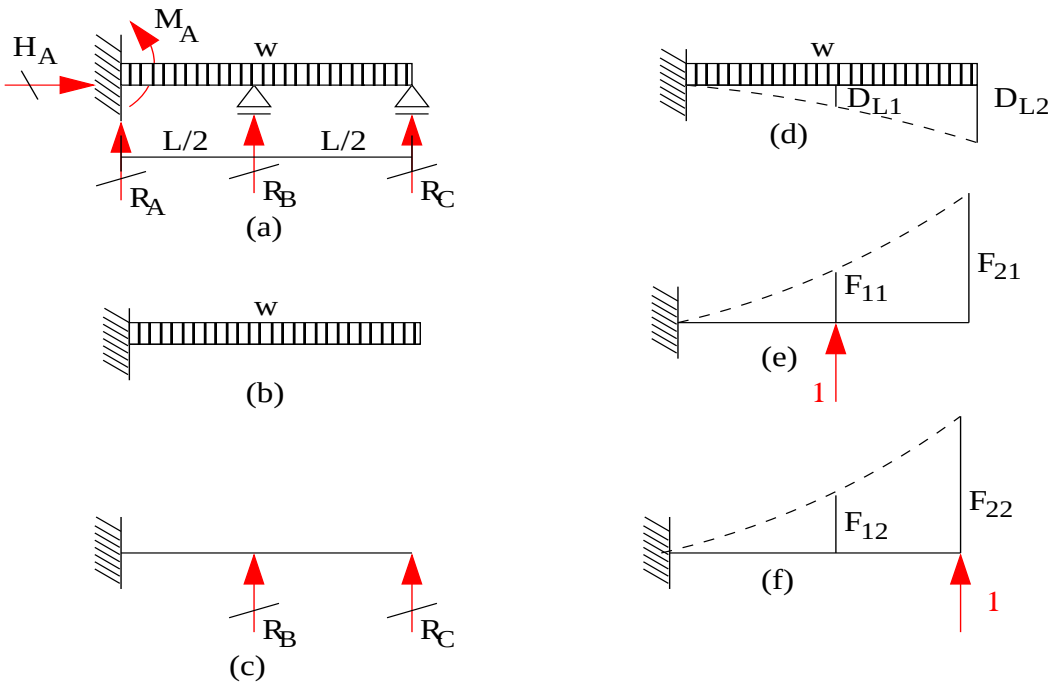


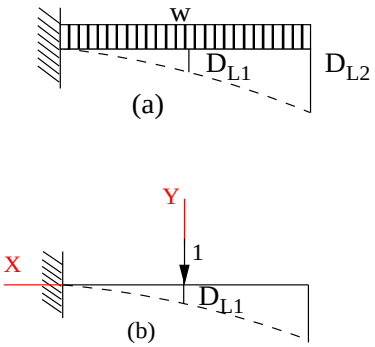
Figura 18: Método da Flexibilidade - Viga com dois redundantes

os vínculos dos apoios B e C. Como determina o método da flexibilidade, foram colocados os **redundantes estáticos** R_B e R_C no locais onde os vínculos foram rompidos, resultando no esquema estrutural da Figura 18-(c).

O próximo passo é calcular os deslocamentos na estrutura liberada nos pontos onde atuam os redundantes. Em primeiro lugar, calculam-se os deslocamentos devido a ação do carregamento que solicita a estrutura (o carregamento distribuído *w*). Em seguida calculam-se os deslocamentos devido a ação dos redundates R_B e R_C.

A partir de agora, chamaremos os deslocamentos Δ devido aos carregamento de D_L. O subíndice L indica apenas que é um deslocamento devido ao carregamento (em inglês *load*), não sendo propriamente um subíndice, mais um indicador. Os D_{Li} terão os subíndeces i, que indicam a posição i onde o deslocamento está sendo calculado.

Para o caso apresentado na Figura 18-(d), podemos calcular D_{L1} e D_{L2} através da técnica da carga virtual unitária do modo ilustrado nas Figuras 19 e 20.



$$D_{L_1} = \frac{1}{EI}\int M(\bar{M})ds$$

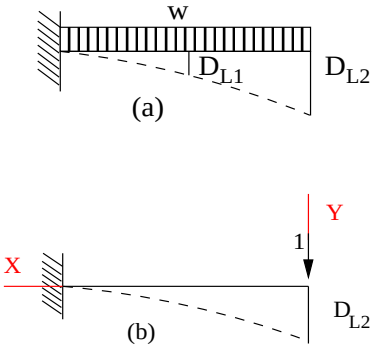
$$M(x) = -\frac{wL^2}{8} - \frac{wx^2}{2} \qquad p/(0 \leq x \leq L/2)$$

$$\overline{M}(x) = -x \qquad p/(0 \leq x \leq L/2)$$

$$D_{L1} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{wL^2x}{8} + \frac{wx^3}{2}\right)dx$$

$$D_{L1} = \frac{3wL^4}{128EI}$$

Figura 19: Deslocamento DL1 na estrutura liberada devido as cargas



$$D_{L_2} = \frac{1}{EI}\int M(\bar{M})ds$$

$$M(x) = -\frac{wx^2}{2} \qquad p/(0 \leq x \leq L)$$

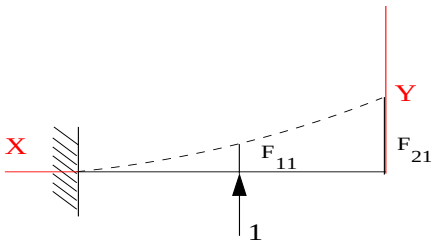
$$\overline{M}(x) = -x \qquad p/(0 \leq x \leq L)$$

$$D_{L_2} = \frac{1}{EI}\int_0^{L}\frac{wx^3}{2}dx$$

$$D_{L_2} = \frac{wL^4}{8EI}$$

Figura 20: Deslocamento DL2 na estrutura liberada devido as cargas

Agora que já calculamos os valores dos deslocamentos devido aos carregamentos atuando na estrutura liberada, falta calcular os deslocamentos devido a ação dos redundates atuando na estrutura liberada. Só que desta vez, calcularemos as flexibilidades nos pontos 1 e 2 de tal sorte que poderemos expressar os deslocamentos devido aos redundantes em função de suas respectivas flexibilidades. Os cálculos das flexibilidades, está ilustrado nas Figuras 21 e 22.



$$F_{11} = \frac{1}{EI}\int M\bar{(}M)ds$$

$$M(x) = x \qquad p/(0 \leq x \leq L/2)$$

$$\overline{M}(x) = x \qquad p/(0 \leq x \leq L/2)$$

$$F_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} x^2 dx$$

$$F_{11} = \frac{L^3}{24EI}$$

$$F_{21} = \frac{1}{EI}\int M\bar{(}M)ds$$

$$M(x) = x \qquad p/(0 \leq x \leq L/2)$$

$$\overline{M}(x) = \frac{L}{2} + x \qquad p/(0 \leq x \leq L/2)$$

$$F_{21} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} \left(\frac{Lx}{2} + x^2\right) dx$$

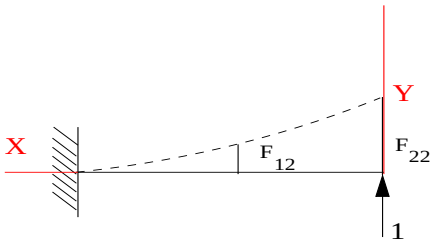
$$F_{21} = \frac{5L^3}{48EI}$$

Figura 21: Flexibilidades F_{11} e F_{21} na estrutura liberada

Agora que já sabemos as flexibilidades nos pontos 1 e 2, podemos calcular os deslocamentos na estrutura liberada devido a ação das redundantes estáticas. Uma vez que já foram calculadas as flexibilidades, podemos expressar os deslocamentos na forma da Equação (2.5):

$$\begin{aligned} D_{11} &= F_{11}R_B \\ D_{12} &= F_{12}R_C \\ D_{21} &= F_{21}R_B \\ D_{22} &= F_{22}R_C \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora que já sabemos quais os valores dos deslocamentos causados pelo carregamento e pelas redundates, podemos escrever as equações de Equilíbrio para os nós B e C (que chameremos de 1 e 2), na forma da Equação (2.6):



$$F_{12} = \frac{1}{EI}\int M(\bar{M})ds$$

$$M(x) = \frac{L}{2} + x \qquad p/(0 \leq x \leq L/2)$$

$$\overline{M}(x) = x \qquad p/(0 \leq x \leq L/2)$$

$$F_{12} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} \frac{Lx}{2} + x^2 dx$$

$$F_{12} = \frac{5L^3}{48EI}$$

$$F_{22} = \frac{1}{EI}\int M(\bar{M})ds$$

$$M(x) = x \qquad p/(0 \leq x \leq L)$$

$$\overline{M}(x) = x \qquad p/(0 \leq x \leq L)$$

$$F_{22} = \frac{1}{EI}\int_0^{L} x^2 dx$$

$$F_{22} = \frac{L^3}{3EI}$$

Figura 22: Flexibilidades F_{12} e F_{22} na estrutura liberada

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{3wL^4}{128EI} + F_{11}R_B + F_{12}R_C \\ \delta_2 &= -\frac{wL^4}{8EI} + F_{21}R_B + F_{22}R_C \end{aligned} \tag{2.6}$$

A Equação (2.6) pode ser matricialmente expressa na forma da Equação (2.7):

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{L1} \\ -D_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_B \\ R_C \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Adotando a nomeclatura semelhante a utilizada por Gere e Weaver (1981), nominaremos os deslocamentos gerais como D; os deslocamentos devido as cargas de D_L, e as forças redundates denotadas por Q. Desse modo a Equação (2.7), é reescrita em temos gerais na forma da Equação (2.8):

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{L1} \\ -D_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Substituindo os valores já calculados para a Equação (2.8), obteremos a Equação (2.9):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3wL^4}{128EI} \\ -\frac{wL^4}{8EI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L^3}{24EI} & \frac{5L^3}{48EI} \\ \frac{5L^3}{48EI} & \frac{L^3}{3EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_B \\ R_C \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Agora, se desejamos obter os valores das redundantes $[Q]$, isolamos esse termo da Equação (2.9), obtendo a Equação (2.10):

$$\begin{bmatrix} R_B \\ R_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L^3}{24EI} & \frac{5L^3}{48EI} \\ \frac{5L^3}{48EI} & \frac{L^3}{3EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3wL^4}{128EI} \\ \frac{wL^4}{8EI} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

De modo, que se desejamos obter os valores das redundantes, precisaremos inverter a matriz de flexibilidade, conforme indicado na Equação (2.11):

$$\begin{bmatrix} R_B \\ R_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{24EI} & \frac{5L^3}{48EI} \\ \frac{5L^3}{48EI} & \frac{L^3}{3EI} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{3wL^4}{128EI} \\ \frac{wL^4}{8EI} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Utilizando a técnica algébrica descrita em Boldrini et al. (1980), podemos obter a inversa da matriz de flexibilidade, dada pela Equação (2.12):

$$[F]^{-1} = \frac{48EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Assim, podemos reescrever a Equação (2.11) na forma da Equação (2.13):

$$\begin{bmatrix} R_B \\ R_C \end{bmatrix} = \frac{48EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \frac{wL^4}{128EI} \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Resolvendo (2.13), chegamos aos valores dos redundantes expressos na Equação (2.14)

$$\begin{bmatrix} R_B \\ R_C \end{bmatrix} = \frac{3wL}{56} \begin{bmatrix} -32 \\ 17 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

2.3 Introdução ao Método da Rigidez - Abordagem Geral

Como já vimos, a formulação físca do método da rigidez é inversa a adotada no método da flexibilidade, entretanto, como será mostrado nas próximas seções, a formulação metemática é idêndica. **No método da flexibilidade** as incógnitas a serem calculadas eram as redundantes estáticas, significando que **o número de íncógnitas a calcular era igual ao grau de indeterminação estática**. Já no método da rigidez, as incónitas a se calcular são os deslocamentos nodais desconhecidos, significando que **o número de incógnitas a se calcular é igual ao grau de indeterminação cinemática da estrutura**.

Uma característica particular do método da rigidez é o uso intensivo de ações de extrmidade em membros restringidos que podem ser obtidas utilizando o método da rigidez, e depois de tabelados, aplicados ao método da rigidez. Nesse texto usaremos as tabelas deduzidas por Gere e Weaver (1981), que estão apresentadas nos anexos 1 e 2.

Para ilustrar uma abordagem generalizada do método da rigidez analisaremos a viga cujo esquema estrutural está apresentado na Figura 23(a), que para fins de comparação será igual ao caso apresentado na viga da Figura 17(a).

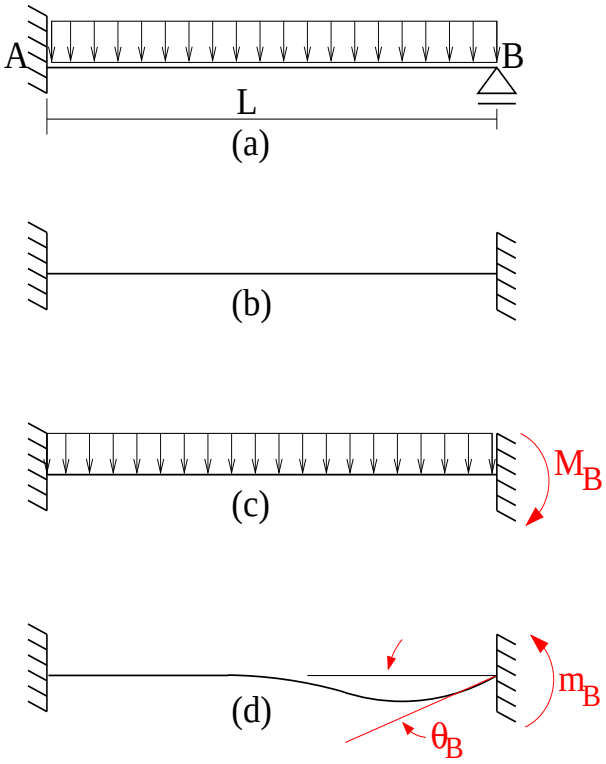


Figura 23: Método da Rigidez - abordagem geral

Com a finalidade de simplificar a análise, e uma vez que os resultados práticos assim o permitem, **será desprezado o deslocamento axial da viga**. Considerando essa simplificação, o primeiro passo da análise consiste em determinar qual o grau de indeterminação cinemática da estrutura. No caso específico da viga apresentada na Figira 23(a), existem duas possibilidades de movimento em cada nó (translação vertical e rotação em A e B), totalizando quatro possibilidades de movimento. Dessas quatro possibilidades, três são conhecidas, que são os deslocamentos nulos (translação vertical e rotação) do nó A e a translação vertical nula do nó B. Desse modo, apenas um deslocamento é desconhecido (rotação do nó B), sendo portando a estrutura cinematicamente indeterminada do primeiro grau.

Quando a análise era realizada pelo método da flexibilidade, logo após identificar os redundantes estáticos, procedia-se a "liberação" das restrições onde se encontravam tais redundantes. Agora, com o método da rigidez faremos exatamente o contrário, ou seja, procederemos a "restrição" dos deslocamentos nos pontos onde se encontram os redundantes cinemáticos. Aplicando esse procedimento a viga da Figura 23(a), obteremos a estrutura restringida apresentada na Figura 23(b).

Ainda traçando um paralelo com a análise realizada via método da flexibilidade, onde logo após a "liberação" da estrutura aplicava-se consecutivamente os carregamentos reais e os redundates a fim de se obterem os deslocamentos cada uma dessas duas situações (viga liberada sujeita aos carregamentos e viga liberada sujeita aos redundates) provocava nos nós analizados; No método da rigidez adotaremos estratégia semelhante, ou seja, analisaremos a estrutura restringida sujeita aos carregamentos reais, conforme mostrado na Figura 23(c) e aos redundantes, que agora são redundantes cinemáticos, conforme mostrado na Figura 23(d).

A diferença é que agora investigaremos quais as ações de extrmidade que surgem na viga restringida quando a mesma é sujeita aos carregamentos e aos redundantes. Para isso feremos uso das tabelas apresentadas nos Anexos 1 e 2 deste trabalho.

ANÁLISE DA ESTRUTURA RESTRINGIDA SUJEITA AOS CARREGAMENTOS REAIS - Figura 23(c)

Ao se retringir a rotação do nó B, surge um momento M_B na extrmidade direita da viga, momento esse que não existe na viga real, posto que o apoio em B permite rotação. Agora no entanto, estamos interessados em descobrir qual seria o momento reativo em B se a viga sujeita aos carregamentos reais (carga distribuída) fosse engastada nesse apoio, e observando o **Anexo 1**, percebemos que se trata do caso 4 da tabela, e portanto temos o momento expresso na Equação (2.15):

$$M_B = \frac{wL^2}{12} \tag{2.15}$$

O sinal positivo do momento na Equação (2.15), indica que o momento tem o mesmo sentido que o indicado na Figura 23(c), ou seja, o momento está no sentido horário.

ANÁLISE DA ESTRUTURA RESTRINGIDA SUJEITA AOS DESLOCAMENTOS REDUNDANTES - Figura 23(d)

Uma vez que o momento reativo em B não existe na viga real, e que o mesmo somente surgiu devido a restrição do movimento no ponto onde ocorre o redundante cinemático, é necessário aplicar um momento no mesmo ponto B, momento esse devido ao deslocamento redundante aplicado na estrutura restringida. O valor desse momento pode ser obtido no caso 3 da tabela do anexo 2. Assim chegaremos ao momento expresso na Equação (2.16):

$$m_B = \frac{4EI}{L}\theta_B \tag{2.16}$$

O sinal positivo de m_B na Equação (2.16), indica que o mesmo tem o mesmo sentido arbitrado na Figura 23(d), ou seja, m_B está no sentido anti-horário. Note que no caso de $\theta_B = 1$, m_B será um coeficiente de rigidez $S_B = \frac{4EI}{L}$, de modo que $m_B = S_B\theta_B$. Ainda na Equação (2.16) E é o módulo de elasticidade do materiail que constitui a viga e I é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo que passa pela linha neutra da mesma seção transversal.

SUPERPOSIÇÃO DOS EFEITOS - EQUILÍBRIO DO NÓ B

Agora que já obtivemos **as ações de extremidade** devidas aos carregamentos e aos deslocamentos redundantes, podemos proceder o equilíbrio do nó B, a partir do princípio da superposição dos efeitos que nos permite afirmar que o esquema estrutural da viga da Figura 23(a) pode ser obtido a partir da superposição dos efeitos das vigas mostradas na Figuras 23(c) e na Figura 23(d). Antes porém, devemos adotar uma convenção de sinais afim de que a equação de superposição seja adequadamente escrita. Adotando a conveção de que os momentos anti-horários são os positivos, podemos expressar o momento em B na forma da Equação (2.17):

$$\mathcal{M}_B = M_B + m_B \tag{2.17}$$

Onde:

- $\mathcal{M}_B$ é o momento em B na estrutura real (zero neste caso);
- M_B é o momento em B causado pelos carregamentos na estrutura restringida, e
- m_B é o momento em B causado pelos redundantes cinemáticos na estrutura restringida

Observando a convenção de sinais para os momentos, e sabendo que neste caso o momnento em B deve ser nulo, podemos reescrever a Equação (2.17) na forma da Equação (2.18):

$$\frac{4EI}{L}\theta_B - \frac{wL^2}{12} = 0 \tag{2.18}$$

A partir da solução da Equação (2.18), podemos obter o valor de θ_B, expresso na Equação (2.19):

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI} \tag{2.19}$$

A solução da Equação de superposição (2.17) é o cerne do método da rigidez. Após determinados os valores dos deslocamentos incógnitos pode-se obter as reações de apoio e esforços internos nas extremidades das barras, utilizando a mesma técnica de superposição que foi aplicada na determinação dos próprios deslocamentos. Assim, no caso específico da viga da Figura 23(a), pode-se determinar a reação em B como sendo a soma dos efeitos das reações em B obtidas na estruntura restringida sujeita respectivamente aos carregamentos e aos deslocamentos redundantes, de tal sorte que a reação vertical em B (R_B) pode ser expressa na forma da Equação (2.20):

$$\mathcal{R}_B = R_B + r_B \tag{2.20}$$

Onde:

- $\mathcal{R}_B$ é a reação vertical em B na estrutura real (zero neste caso);
- R_B é a reação vertical em B causado pelos carregamentos na estrutura restringida, e
- r_B é a reação vertical em B causado pelos redundantes cinemáticos na estrutura restringida

Consultando as mesmas tabelas dos anexos 1 e 2, obtemos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{wL}{2} \\ r_B &= -\frac{6EI}{L^2}\theta_B \end{aligned} \tag{2.21}$$

Uma vez que já obtivemos o valor de θ_B na Equação (2.19), basta subistituir esse valor e os valores das Equações (2.21) na Equação (2.20), que teremos a seguinte relação:

$$\mathcal{R}_B = \frac{wL}{2} - \left(\frac{6EI}{L^2} \cdot \frac{wL^3}{48EI}\right) \tag{2.22}$$

Resolvendo a Equação (2.22), chegamos ao valor da reação vertical em B, dada pela Equação (2.23):

$$\mathcal{R}_B = \frac{wL}{2} - \frac{wl}{8} \Rightarrow \boxed{\mathcal{R}_B = \frac{3}{8}wl} \tag{2.23}$$

Como já era esperado, o valor da reação vertical em B, calculado pelo método da rigidez e expresso pela Equação (2.23) é o mesmo valor obtido pelo método da flexibilidade e expresso pela Equação (2.2).

2.4 Introdução ao Método da Rigidez - Abordagem Matricial

A viga da Figura 23 representa um caso simples de apenas um grau de indeterminação cinemática, didaticamente válido para ilustrar o método da rigidez, entretanto ao se analisar uma estrutura mais complexa, com um número maior de indeterminações cinemáticas é necessário um procedimento mais sistematizado e facilmente generalizável. Para ilustrar esse procedimento mais sistematizado analisaremos o caso apresentado na Figura 24.

O primeiro passo da análise da viga apresentada na Figura 24(a) é o cálculo do grau de indeterminação cinemática e a identificação dos deslocamentos incógnitos. Desconsiderando os deslocamentos axiais, a viga da Figura 24(a) pode ter até 6 deslocamento nodais (translação vertical e rotação dos nós A, B e C). Desses seis deslocamentos possíveis, 4 são conhecidos (dois do nó A, um do nó B e um do nó C), desse modo, a estrutura é cinematicamente indeterminada do segundo grau e os deslocamentos desconhecidos são as rotações dos nós B e C, que nominaremos respectivamente de D_1 e D_2, conforme o indicado na Figura 24(a).

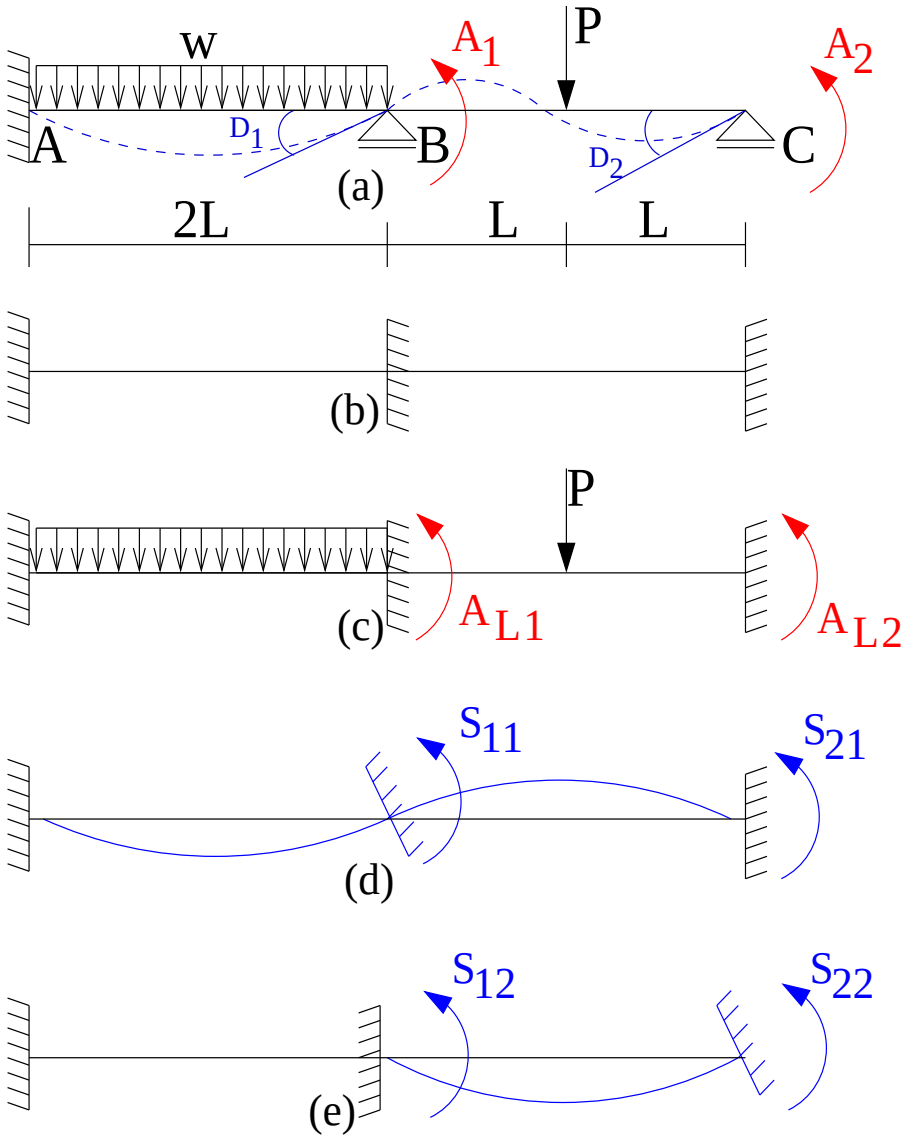


Figura 24: Método da Rigidez - abordagem matricial

O segundo passo da análise é obter a estrutura restringida, colocando engastes nos pontos onde a estrutura apresenta os deslocamentos incógnitos D_1 e D_2, ou seja, nos pontos B e C. Desse modo obtém-se a estrutura restringida apresentada na Figura 24(b).

Em seguida da detreminação da estrutura restringida, calcula-se as ações de extrmidade na estrutura restringida devidas ao carregamento real, para tanto, utilizam-se os valores pré-tabelados do anexo 1, casos 1 e 4. [1] Essas ações de extremidade estão graficamente indicadas na Figura 24(b) e serão nomidadas por A_{L1} e A_{L2}.

Utilizando os valores tabelados no Anexo 1, e lembrando que para o nó B contribuem 2 barras ao

[1] É importante perceber que para esse problema o o valor de L na tabela é igual a 2L (vão correspondente no problema)

mesmo tempo (barra AB e barra BC), teremos que:

$$\begin{aligned} A_{L1} &= -\frac{w(2L)^2}{12} + \frac{P(L)(L)^2}{2L^2} = \frac{PL}{4} - \frac{wL^2}{3} \\ A_{L2} &= \frac{PL}{4} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Agora que já sabemos os valores das ações de extremidade devidas aos carregamentos reais, devemos calcular os valores dessas mesmas ações de extremidade agora devidas a ação dos deslocamentos incógnitos. Para que a solução fique mais genérica e mais matricialmente tratável calcularemos primeiramente os valores das **ações de extrmidade devido a deslocamentos unitários** nos memsmo pontos e sentidos dos deslocamentos D_1 e D_2, de modo que as ações de extremidade devida aos deslocamentos serão expressas na forma $[S][D]$. Utilizando a segunda tabela do anexo 1 e lembrando que concorrem duas barras no ponto B (barras AB e BC), teremos:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{4EI}{2L} + \frac{4EI}{2L} \Rightarrow \boxed{S_{11} = \frac{4EI}{L}} \\ S_{21} &= \frac{2EI}{2L} \Rightarrow \boxed{S_{21} = \frac{EI}{L}} \\ S_{12} &= \frac{2EI}{2L} \Rightarrow \boxed{S_{12} = \frac{EI}{L}} \\ S_{22} &= \frac{4EI}{2L} \Rightarrow \boxed{S_{22} = \frac{2EI}{L}} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Agora que já obtivemos os valores das ações de extremidade devido a deslocamentos unitários podemos expressar essas mesmas ações em função dos deslocamentos incónitos na forma matricial $[S][D]$, e logo em seguida escrevermos a equação de equilíbrio, também conhecida como equeção de superposição para os nós B e C, da seguinte forma:

$$[A] = [A_L] + [S][D] \tag{2.26}$$

Onde:

- $[A]$ é a matriz das ações nodais globais (todas nulas no caso da viga da Figura 24(b));
- $[A_L]$ é a matriz das ações de extremidade devida a ação dos carregamentos na estrutura res-

tringida;

- $[S]$ é a matriz de rigidez (matriz das ações de extremidade devida a deslocamentos unitários na estrutura restringida), e
- D é a matriz dos deslocamentos incógnitos.

Também costuma-se nominar $[A]$, $[A_L]$ e D por vetores.

Para o caso da viga da Figura 24(b) a Equação (2.26) é expressa como:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{L1} \\ A_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Substituindo os valores já obtidos nas Equações (2.24) e (2.25) na Equação (2.27), teremos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{PL}{4} - \frac{wL^2}{3}\right) \\ \frac{PL}{4} \end{bmatrix} + \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Isolando a matriz do termos independentes ($[A_L]$) da Equação (2.28), teremos que:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{wL^2}{3} - \frac{PL}{4}\right) \\ -\frac{PL}{4} \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Neste ponto da análise chega-se a um sistema de equações onde a matriz (ou vetor) $[D]$ é o vetor das incógnitas a serem determinadas. Reescrevendo a Equação (2.29) de outra forma, fica mais fácil visualizar a expressão matricial de um sistema de equações, conforme mostrado na Equação (2.30):

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{wL^2}{3} - \frac{PL}{4}\right) \\ -\frac{PL}{4} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Existem várias formas de se resolver a Equação (2.30), que em termos práticos resolvida numericamente, através de um método numérico específico para a solução de sistemas de euqações lineares. No caso específico do método da rigidez, onde a matriz de rigidez S **é sempre uma matriz quadrada e simétrica**, a decomposição de Cholesky (1924) é um método numericamente veloz e eficiente.

Em capítulos posteriores aprofundaremos os estudos em alguns métodos numéricos necessários para a montagem e a solução de sistemas de equações como os da Equação (2.30). Por ora, continuemos a solução imaginando que ela será realizada sem a ajuda de um computador digital. Para isso será necessário obter a inversa da matriz de rigidez $[S]^{-1}$. Uma das formas de se inverter uma matriz quadrada é apresentada por Boldrini et al. (1980), e seguindo esta metodologia obteremos a inversa da matriz de rigidez apresentada na Equação (2.30) como sendo a matriz $[S]^{-1}$ (2.31):

$$[S]^{-1} = \frac{L}{7EI}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Uma vez que se tem a inversa da matriz de rigidez $[S^{-1}]$, pode-se resolver a Equação (2.30), chegando-se a expressão da Equação (2.32):

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \frac{L}{7EI}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{wL^2}{3} - \frac{PL}{4}\right) \\ -\frac{PL}{4} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

O vetor $[D]$ da Equação (2.32) contém os deslocamentos que solucionam o problema, expressos por:

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \frac{L}{7EI}\begin{bmatrix} \left(\frac{2wL^2}{3} - \frac{PL}{4}\right) \\ \left(-\frac{wL^2}{3} - \frac{3PL}{4}\right) \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Agora que os deslocamentos foram encontrados, é possível calcular as reações de apoio e esforços internos nas extremidades dos membros. Existem basicamente dois caminhos para se proceder os cálculos restantes: um deles visa a otimização para solução via método numérico e computador digital, outra possibilita a solução analítica do problema.

Em termos práticos, é óbvio que para os problemas mais complexos adota-se a solução via computador digital, e nos próximos capítulos veremos essa abordagem de maneira mais aprofundada. Entretanto, antes de adentrar-mos na seara da programação em computadores digitais é necessário compreender a mecânica dos processos de cálculo do método da rigidez, visto que essa compreenção é essencial para que futuramente possamos realmente entender o uso dos algoritimos de programação na solução computacional das análises matriciais de estruturas reticuladas.

Na solução via método da rigidez, primeiramente são calculados os deslocamentos, e a partir destes pode-se achar as reações de apoio e esforços internos nas barras, conforme vimos de maneira

genérica na Seção 2.3. Agora, que já sasbemos os valores dos deslocamentos, podemos calcular as reações de apoio conforme o especificado na Equação (2.34):

$$A_R = A_{RL} + A_{RD} \cdot D \tag{2.34}$$

Onde:

- A_R é o vetor que contém as reações de apoio da estrutura real
- A_{RL} é o vetor das reações de apoio da estrutura restringida sujeita as cargas
- A_{RD} é o vetor das reações de apoio da estrutura restringida sujeita aos deslocamentos
- D é o vetor dos deslocamentos já calculados

Os valores de A_{RL} e A_{RD} são obtidos usando as mesmas tabelas do anexo 1.

De modo análogo ao da Equação (2.34), podemos calcular as ações de extrmidade dos membros na forma expressa pela Equação (2.35):

$$A_M = A_{ML} + A_{MD} \cdot D \tag{2.35}$$

Onde:

- A_M é o vetor que contém as ações de extremidade da estrutura real
- A_{ML} é o vetor das ações de extremidade da estrutura restringida sujeita as cargas
- A_{MD} é o vetor das ações de extremidade da estrutura restringida sujeita aos deslocamentos
- D é o vetor dos deslocamentos já calculados.

Os valores de A_{ML} e A_{MD} também são obtidos usando as mesmas tabelas do anexo 1.

Calculemos as reações de apoio para o exemplo da viga da Figura 24, utilizando a Equação (2.34). O esquema estrutural da Figura 25 indica como obter cada uma das parcelas da Equação (2.34)

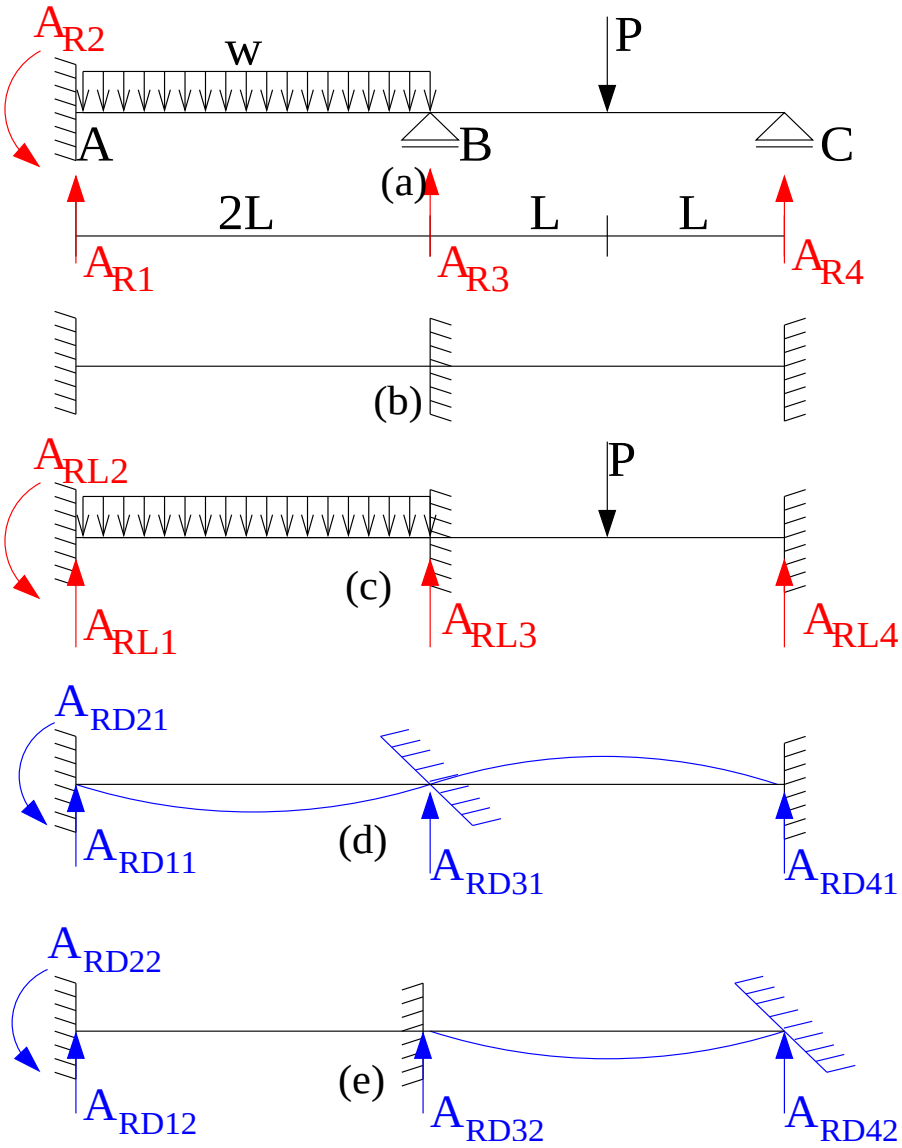


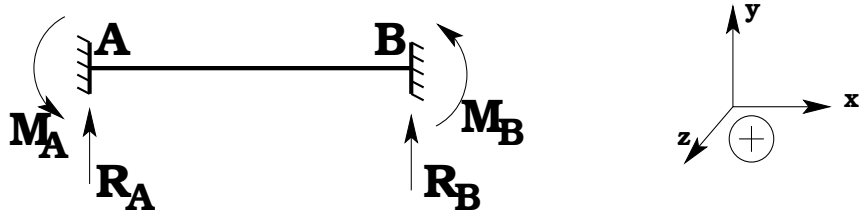
Figura 25: Método da Rigidez - abordagem matricial

2.5 Resumo da introdução aos métodos da flexibilidade e da rigidez

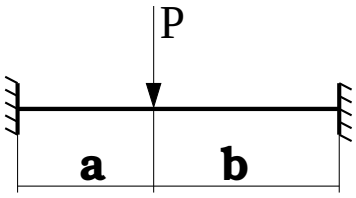
Método da Flexibilidade	Método da Rigidez
Caracterização do problema	Caracterização do problema
Cálculo do grau de indeterminação estática	Cálculo do grau de indeterminação cinemática
Identificar possíveis redundantes estáticas	Identificação das redundates cinemáticas
Escolha da estrutura liberada	Determinação da estrutura restringida
Cálculo de deslocamentos na estrutura liberada devido a ação dos carregamentos reais	Cálculo de ações de extremidade na estrutura restringida devido a ação dos carregamentos reais
Cálculo de deslocamentos na estrutura liberada devido a ação dos redundantes estáticos	Cálculo de ações de extremidade na estrutura restringida devido a ação dos redundantes cinemáticos
Montagem da equação de compatibilidade	Montagem da equação de equilíbrio
Solução da equação de compatibilidade	Solução da Equação de Equilíbrio
Cálculo de demais deslocamentos, reações, etc	Cálculo de demais esforços iternos, reações, etc

Anexos

Anexo 1: Ações de extremidade devidas aos carregamentos (GERE; WEAVER, 1981)



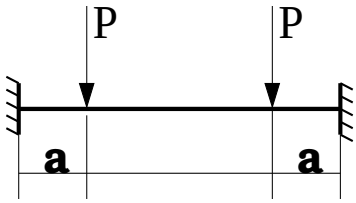
1



$M_A = \frac{Pab^2}{L^2} \quad M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$

$R_A = \frac{Pb^2}{L}(3a+b) \quad R_B = \frac{Pa^2}{L}(a+3b)$

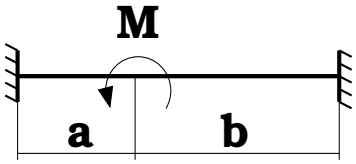
2



$M_A = -M_B = \frac{Pa}{L}(L-a)$

$R_A = R_B = P$

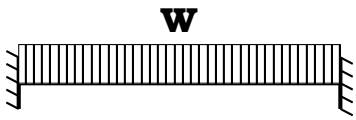
3



$M_A = \frac{Mb}{L^2}(2a-b) \quad M_B = \frac{Ma}{L^2}(2b-a)$

$R_A = -R_B = \frac{6Mab}{L^3}$

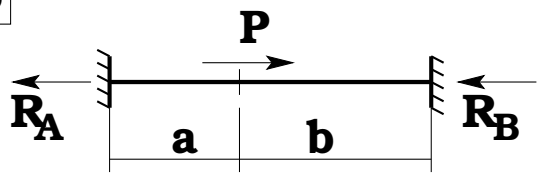
4



$M_A = -M_B = \frac{wL^2}{12}$

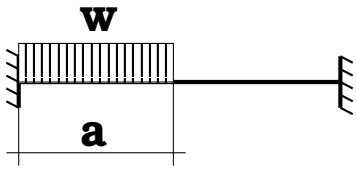
$R_A = R_B = \frac{wL}{2}$

5



$R_A = \frac{Pb}{L} \quad R_B = \frac{Pa}{L}$

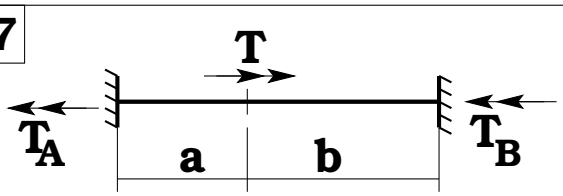
6



$M_A = \frac{wa^2}{12L^2}(6L^2 - 8aL + 3a^2) \quad M_B = -\frac{wa^3}{12L^2}(4L-3a)$

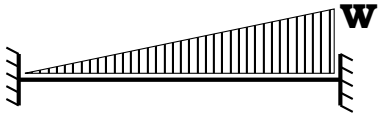
$R_A = \frac{wa}{2L^3}(2L^3 - 2a^2L + a^3) \quad R_B = \frac{wa^3}{2L^3}(2L-a)$

7



$T_A = \frac{Tb}{L} \quad T_B = \frac{Ta}{L}$

8

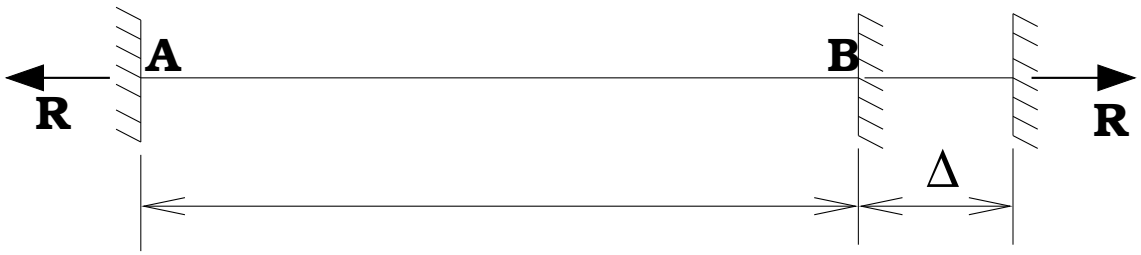


$M_A = \frac{wL^2}{30} \quad M_B = -\frac{wL^2}{20}$

$R_A = \frac{3wL}{20} \quad R_B = \frac{7wL}{20}$

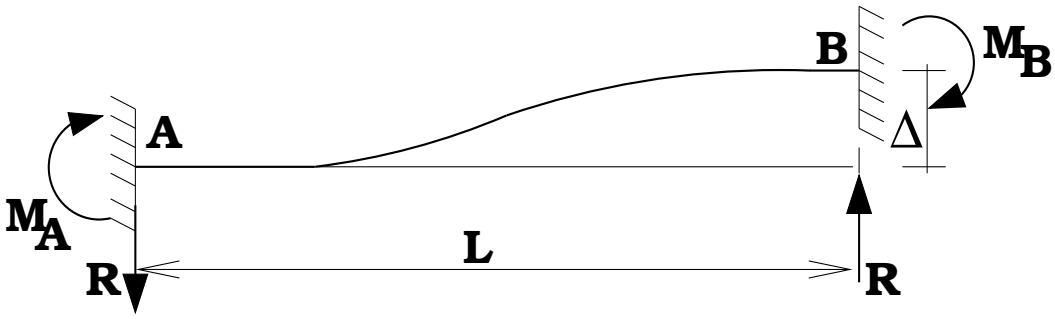
Anexo 2: Ações de extremidade devidas aos deslocamentos (GERE; WEAVER, 1981)

1



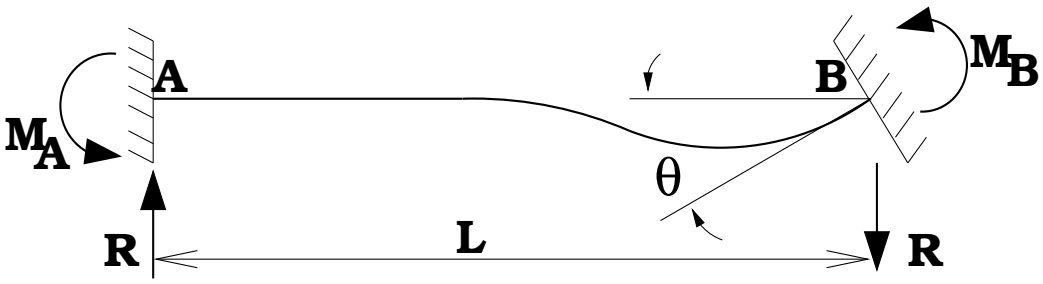
$$R = \frac{EA\Delta}{L}$$

2



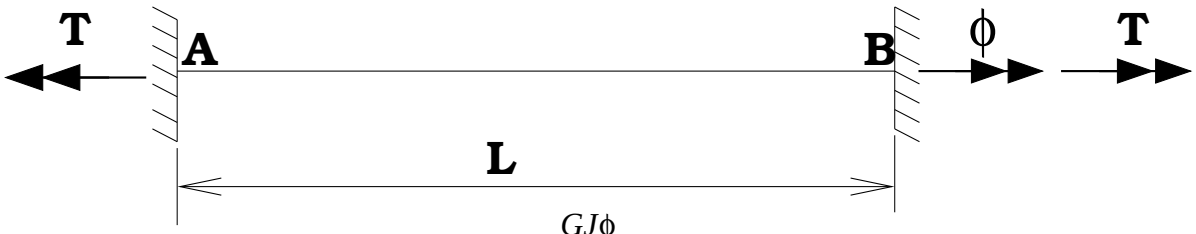
$$M_A = M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2} \qquad R = \frac{12EI\Delta}{L^3}$$

3



$$M_A = \frac{2EI\theta}{L} \qquad M_B = \frac{4EI\theta}{L} \qquad R = \frac{6EI\theta}{L^2}$$

4



$$T = \frac{GJ\phi}{L}$$

$G =$ módulo de elasticidade transversal
$J =$ momento de inércia polar da seção transversal

Referências

BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. São Paulo - SP: Harbra Ltda., 1980.

CHOLESKY, A. L. Note sur une methode de resolution des equation normales provenant de l'application de la methode des moindres carrés a un systeme d'equations lineaires en nombre inferieure a celui des inconnues. application de la methode a la resolution d'un systeme defini d'equations lineaires. *Bulletin Geodesique*, v. 7:1, p. 67–77, 1924.

GERE, J. M.; WEAVER, W. J. *Analysis of Framed Structures*. Travessa do Ouvidor, 11 - Rio de Janeiro-RJ: EDITORA GUANABARA S.A, 1981.