MÉTODOS BÁSICOS DA ANÁLISE DE ESTRUTURAS

Luiz Fernando Martha

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio
Departamento de Engenharia Civil
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
CEP 22453-900 – Rio de Janeiro, RJ
Tel.: (21) 3114-1190 – Fax: (21) 3114-1195

E-mail: lfm@tecgraf.puc-rio.br
URL: http://www.tecgraf.puc-rio.br/~lfm

Sumário

1. INTRODUÇÃO....1
1.1. Breve histórico sobre a Engenharia Estrutural....2
1.2. Análise estrutural....3
1.2.1. Modelo estrutural....4
1.2.2. Modelo discreto....6
1.2.3. Modelo computacional....10
1.3. Organização dos capítulos....11

2. CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL....13
2.1. Classificação de estruturas reticuladas....13
2.2. Condições básicas da análise estrutural....18
2.2.1. Condições de equilíbrio....19
2.2.2. Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações....21
2.2.3. Leis constitutivas dos materiais....22
2.3. Métodos básicos da análise estrutural....24
2.3.1. Método das Forças....25
2.3.2. Método dos Deslocamentos....28
2.3.3. Comparação entre o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos....31
2.4. Comportamento linear e superposição de efeitos....32
2.5. Estruturas estaticamente determinadas e indeterminadas....39
2.6. Determinação do grau de hiperestaticidade....44

3. IDEALIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE BARRAS....49
3.1. Relações entre deslocamentos e deformações em barras....49
3.1.1. Deformações axiais....51
3.1.2. Deformações normais por flexão....52
3.1.3. Distorções por efeito cortante....53
3.1.4. Distorções por torção....54
3.2. Relações diferenciais de equilíbrio em barras....55
3.3. Equilíbrio entre tensões e esforços internos....56
3.4. Deslocamentos relativos internos....59
3.4.1. Deslocamento axial relativo interno provocado por esforço normal....59
3.4.2. Rotação relativa interna provocada por momento fletor....60
3.4.3. Deslocamento transversal relativo interno provocado por esforço cortante....61
3.4.4. Rotação relativa interna provocada por momento torçor 61
3.5. Equação de Navier para o comportamento à flexão....62
3.6. Comparação entre vigas isostáticas e hiperestáticas....63
3.7. A essência da análise de estruturas reticuladas....65

4. SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS 69
4.1. Traçado do diagrama de momentos fletores 69
4.2. Energia de deformação e princípio da conservação de energia 73
4.3. Princípio dos trabalhos virtuais 78
4.3.1. Princípio das forças virtuais 79
4.3.2. Princípio dos deslocamentos virtuais 95
4.3.3. Teoremas de reciprocidade 102
4.4. Soluções fundamentais para barras isoladas 104
4.4.1. Funções de forma para configurações deformadas elementares de barras de pórticos planos 105
4.4.2. Coeficientes de rigidez de barra de pórtico plano 108
4.4.3. Coeficientes de rigidez à torção de barra 118
4.4.4. Reações de engastamento de barra para solicitações externas 120

5. MÉTODO DAS FORÇAS 129
5.1. Metodologia de análise pelo Método das Forças 129
5.1.1. Hiperestáticos e Sistema Principal 130
5.1.2. Restabelecimento das condições de compatibilidade 132
5.1.3. Determinação dos esforços internos 136
5.2. Matriz de flexibilidade e vetor dos termos de carga 138
5.3. Escolha do Sistema Principal para uma viga contínua 139
5.3.1. Sistema Principal obtido por eliminação de apoios 140
5.3.2. Sistema Principal obtido por introdução de rótulas internas 150
5.4. Escolha do Sistema Principal para um quadro fechado 154
5.4.1. Sistema Principal obtido por corte de uma seção 155
5.4.2. Sistema Principal obtido por introdução de rótulas 158
5.5. Exemplos de solução pelo Método das Forças 161

6. MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS 193
6.1. Deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico 193
6.2. Metodologia de análise pelo Método dos Deslocamentos 196
6.3. Matriz de rigidez global e vetor dos termos de carga 203
6.4. Convenções de sinais do Método dos Deslocamentos 205
6.5. Exemplo de solução de uma viga contínua 207
6.6. Exemplos de solução de pórticos simples 214
6.6.1. Pórtico com três deslocabilidades 214
6.6.2. Pórtico com articulação interna 219
6.6.3. Pórtico com barra inclinada 225

7. MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS COM RESTRIÇÕES NAS DEFORMAÇÕES 231
7.1. Classificação das simplificações adotadas 232
7.2. Consideração de barras inextensíveis 233
7.2.1. Exemplo de solução de pórtico com barras inextensíveis 236

7.2.2. Regras para determinação de deslocabilidades externas de pórticos planos com barras inextensíveis 244
7.3. Simplificação para articulações completas 251
7.3.1. Pórtico com articulação no topo de uma coluna 252
7.3.2. Pórtico com articulação dupla na viga e coluna 256
7.3.3. Exemplo de solução de pórtico com duas articulações 260
7.4. Consideração de barras infinitamente rígidas 262
7.4.1. Exemplo de solução de pórtico com dois pavimentos 266
7.4.2. Exemplo de barra rígida com giro 268

8. PROCESSO DE CROSS 273
8.1. Interpretação física do Método da Distribuição de Momentos 274
8.2. Distribuição de momentos fletores em um nó 276
8.3. Solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio 280
8.4. Formalização do Processo de Cross 283
8.4.1. Processo de Cross para um pórtico com uma deslocabilidade 283
8.4.2. Processo de Cross para uma viga com duas deslocabilidades 285
8.5. Aplicação do Processo de Cross a quadros planos 289

9. MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA (não incluído, ainda sendo escrito)

10. CARGAS ACIDENTAIS E MÓVEIS; LINHAS DE INFLUÊNCIA 294
10.1. Introdução 294
10.2. Linhas de influência para uma viga biapoiada 295
10.3. Método cinemático para o traçado de LI 296
10.4. Metodologia para cálculo de LI's pelo método cinemático 304
10.5. Linha de influência de esforço cortante em viga biengastada 305
10.6. Linha de influência de momento fletor em viga biengastada 306
10.7. Exemplo de determinação de envoltórias de esforços internos 307

APÊNDICE A – CONVENÇÃO DE SINAIS PARA ESFORÇOS INTERNOS (não incluído, ainda sendo escrito)

APÊNDICE B – ANALOGIA DA VIGA CONJUGADA 313
B.1. Conversão de condições de apoio 314
B.2. Roteiro do processo de Mohr 316
B.3. Cálculo de deslocamentos em vigas isostáticas 316
B.4. Análise de vigas hiperestáticas 318
B.5. Determinação de reações de engastamento de vigas 321
B.6. Dedução de coeficientes de rigidez de barras 323

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 325

1. INTRODUÇÃO

O projeto e a construção de estruturas é uma área da Engenharia Civil na qual muitos engenheiros civis se especializam. Estes são os chamados *engenheiros estruturais*. A Engenharia Estrutural trata do planejamento, projeto, construção e manutenção de sistemas estruturais para transporte, moradia, trabalho e lazer.

Uma estrutura pode ser concebida como um empreendimento por si próprio, como no caso de pontes e estádios de esporte, ou pode ser utilizada como o esqueleto de outro empreendimento, como no caso de edifícios e teatros. Uma estrutura pode ainda ser projetada e construída em aço, concreto, madeira, pedra, materiais não convencionais (materiais que utilizam fibras vegetais, por exemplo), ou novos materiais sintéticos (plásticos, por exemplo). Ela deve resistir a ventos fortes, a solicitações que são impostas durante a sua vida útil e, em muitas partes do mundo, a terremotos.

O *projeto estrutural* tem como objetivo a concepção de uma estrutura que atenda a todas as necessidades para as quais ela será construída, satisfazendo questões de segurança, condições de utilização, condições econômicas, estética, questões ambientais, condições construtivas e restrições legais. O resultado final do projeto estrutural é a especificação de uma estrutura de forma completa, isto é, abrangendo todos os seus aspectos gerais, tais como locação, e todos os detalhes necessários para a sua construção.

Portanto, o projeto estrutural parte de uma concepção geral da estrutura e termina com a documentação que possibilita a sua construção. São inúmeras e muito complexas as etapas de um projeto estrutural. Entre elas está a previsão do comportamento da estrutura de tal forma que ela possa atender satisfatoriamente às condições de segurança e de utilização para as quais ela foi concebida.

A *análise estrutural* é a fase do projeto estrutural em que é feita a idealização do comportamento da estrutura. Esse comportamento pode ser expresso por diversos parâmetros, tais como pelos campos de tensões, deformações e deslocamentos na estrutura. De uma maneira geral, a análise estrutural tem como objetivo a determinação de esforços internos e externos (cargas e reações de apoio), e das correspondentes tensões, bem como a determinação dos deslocamentos e correspondentes deformações da estrutura que está sendo projetada. Essa análise deve ser feita para os possíveis estágios de carregamentos e solicitações que devem ser previamente determinados.

O desenvolvimento das teorias que descrevem o comportamento de estruturas se deu inicialmente para *estruturas reticuladas*, isto é, para estruturas formadas por

barras (elementos estruturais que têm um eixo claramente definido). Estes são os tipos mais comuns de estruturas, tais como a estrutura de uma cobertura ou o esqueleto de um edifício metálico. Mesmo em casos de estruturas nas quais nem todos os elementos estruturais podem ser considerados como barras (como é o caso de edifícios de concreto armado), é comum analisar o comportamento global ou parcial da estrutura utilizando-se um modelo de barras.

Este livro está direcionado para a análise de estruturas reticuladas estaticamente indeterminadas, isto é, para a análise de *estruturas hiperestáticas*. Isso inclui as treliças (estrutura com todas as barras articuladas em suas extremidades), os pórticos ou quadros (planos e espaciais) e as grelhas (estruturas planas com cargas fora do plano). Nele são tratados principalmente os métodos clássicos da análise de estruturas hiperestáticas: o *Método das Forças* e o *Método dos Deslocamentos*. Nesse contexto, a análise considera apenas cargas estáticas e admite-se um comportamento linear para a estrutura (análise para pequenos deslocamentos e materiais elástico-lineares).

Considera-se como pré-requisito para a leitura deste livro conhecimentos de Mecânica Geral (Estática), Análise de Estruturas Isostáticas (estruturas estaticamente determinadas) e Resistência dos Materiais. Parte-se do princípio de que o leitor entende os conceitos básicos de equilíbrio estático, esforços internos, tensões e deformações. Diversos livros-texto abordam esses assuntos. Como sugestão para leitura, recomenda-se na área de Estática os livros de Hibbeler (1999) ou Meriam e Kraige (1999), na área de Análise de Estruturas Isostáticas os livros de Campanari (1985) ou Süssekind (1977-1), e na área de Resistência dos Materiais os livros de Beer e Johnston (1996), Féodosiev (1977), Hibbeler (2000) ou Timoshenko e Gere (1994).

1.1. Breve histórico sobre a Engenharia Estrutural

Timoshenko (1878-1972), um dos pais da Engenharia Estrutural moderna, descreve em seu livro *História da Resistência dos Materiais* (Timoshenko 1983) um histórico do desenvolvimento teórico sobre o comportamento de estruturas. A Engenharia Estrutural vai encontrar raízes, se bem que de uma forma empírica, nos grandes monumentos e pirâmides do antigo Egito e nos templos, estradas, pontes e fortificações da Grécia e da Roma antigas. O início da formalização teórica da Engenharia Estrutural é atribuído à publicação do livro *Duas Ciências,* de Galileu, em 1638, que deu origem a todo o desenvolvimento da ciência desde o século 17 até os dias de hoje. Antes disso, Leonardo da Vinci (1452-1519) já havia escrito algumas notas sobre Estática e Resistência dos Materiais. Durante esses séculos, vários matemáticos e cientistas ilustres deram suas contribuições para formalizar a Engenharia Estrutural tal como se entende hoje. Até o início do século 20 pode-se citar, dentre outros, Jacob Bernoulli (1654-1705), Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Coulomb (1736-1806), Navier (1785-1836), Thomas Young (1773-1829), Saint-Venant

(1797-1886), Kirchhoff (1824-1887), Kelvin (1824-1907), Maxwell (1831-1879) e Mohr (1835-1918).

A formalização da Engenharia Estrutural através de teorias científicas permite que os engenheiros estabeleçam as forças e solicitações que podem atuar com segurança nas estruturas ou em seus componentes. Também permite que os engenheiros determinem os materiais adequados e as dimensões necessárias da estrutura e seus componentes, sem que estes sofram efeitos prejudicais para o seu bom funcionamento.

A Engenharia Estrutural sofreu um grande avanço no final do século 19, com a Revolução Industrial. Novos materiais passaram a ser empregados nas construções, tais como concreto armado, ferro fundido e aço. Também é nessa época que a Engenharia Estrutural teve um grande desenvolvimento no Brasil. Em seu livro *História da Engenharia no Brasil* (Telles 1994-1, Telles 1984-2), Pedro Carlos da Silva Telles descreve, com uma impressionante quantidade de informações históricas, esse desenvolvimento. Durante o século 20, os principais desenvolvimentos se deram nos processos construtivos e nos procedimentos de cálculo. A Engenharia Civil brasileira é detentora de vários recordes mundiais, notadamente na construção de pontes.

1.2. Análise estrutural

Como dito, a análise estrutural é a etapa do projeto estrutural na qual é feita uma previsão do comportamento da estrutura. Todas as teorias físicas e matemáticas resultantes da formalização da Engenharia Estrutural como ciência são utilizadas na análise estrutural.

A análise estrutural moderna trabalha com quatro níveis de abstração[1] para a estrutura que está sendo analisada, tal como indicado na Figura 1.1. O primeiro nível de abstração é o do mundo físico, isto é, esse nível representa a estrutura real tal como é construída. Essa visão de caráter mais geral sobre a análise de estruturas tem por objetivo definir claramente o escopo deste livro.

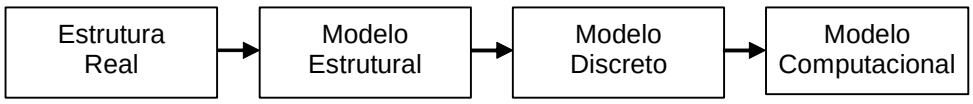


Figura 1.1 – Quatro níveis de abstração para uma estrutura na análise estrutural.

[1] Baseado na concepção do *paradigma dos quatro universos* da modelagem em Computação Gráfica idealizado por Gomes e Velho (1998) e no conceito de análise estrutural de Felippa (2001).

1.2.1. Modelo estrutural

O segundo nível de abstração da análise estrutural é o modelo analítico que é utilizado para representar matematicamente a estrutura que está sendo analisada. Esse modelo é chamado de *modelo estrutural* ou *modelo matemático* e incorpora todas as teorias e hipóteses feitas para descrever o comportamento da estrutura para as diversas solicitações. Essas hipóteses são baseadas em leis físicas, tais como o equilíbrio entre forças e entre tensões, as relações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, e as leis constitutivas dos materiais que compõem a estrutura.

A criação do modelo estrutural de uma estrutura real é uma das tarefas mais importantes da análise estrutural. Essa tarefa pode ser bastante complexa, dependendo do tipo de estrutura e da sua importância. Por exemplo, o modelo estrutural de um prédio residencial de pequeno porte é concebido de uma forma corriqueira. Em geral, o modelo deste tipo de estrutura é formado por um conjunto de linhas que representam as vigas e colunas do prédio e pelas superfícies que representam as lajes de seus pavimentos. Por outro lado, a concepção do modelo estrutural de um prédio que abriga o reator de uma usina atômica é muito mais complexa e pode envolver diversos tipos de elementos estruturais, das mais variadas formas (por exemplo, superfícies para representar paredes estruturais com furos ou a superfície para representar a casca de concreto armado que cobre o prédio).

Na concepção do modelo estrutural é feita uma *idealização* do comportamento da estrutura real em que se adota uma série de hipóteses simplificadoras. Estas estão baseadas em teorias físicas e em resultados experimentais e estatísticos, e podem ser divididas nos seguintes tipos:

- hipóteses sobre a geometria do modelo;
- hipóteses sobre as condições de suporte (ligação com o meio externo, por exemplo, com o solo);
- hipóteses sobre o comportamento dos materiais;
- hipóteses sobre as solicitações que agem sobre a estrutura (cargas de ocupação ou pressão de vento, por exemplo).

No caso de estruturas reticuladas, o modelo estrutural tem características que são bastante específicas. O modelo matemático deste tipo de estrutura usa o fato de os elementos estruturais terem um eixo bem definido e está embasado na Teoria de Vigas de Navier, que rege o comportamento de membros estruturais que trabalham à flexão, acrescida de efeitos axiais e de torção. A Figura 1.2 mostra um exemplo de um modelo estrutural bidimensional para o pórtico de um galpão industrial.

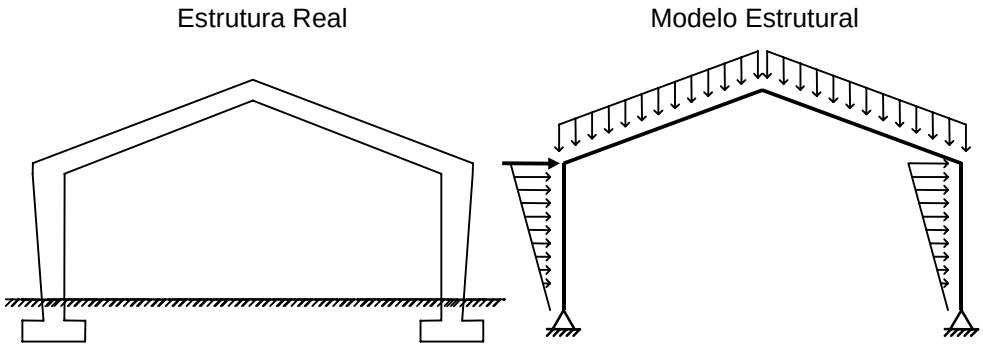


Figura 1.2 – Estrutura real e o seu modelo estrutural.

Observa-se na Figura 1.2 que os elementos estruturais do galpão (vigas e colunas) aparecem representados por linhas. A informação tridimensional das barras fica representada por propriedades globais de suas seções transversais, tais como área e momento de inércia. Portanto, no caso de estruturas reticuladas, a consideração da geometria do modelo é uma tarefa simples: os eixos das barras definem os elementos do modelo estrutural.

Entretanto, a consideração das outras hipóteses simplificadoras que entram na idealização do comportamento da estrutura real pode ser bastante complexa. Por exemplo, a representação das solicitações (cargas permanentes, cargas acidentais, etc.) pode envolver um alto grau de simplificação ou pode ser muito próxima da realidade. O mesmo pode ser dito com respeito à consideração do comportamento dos materiais ou do comportamento das fundações (condições de apoio). No exemplo da Figura 1.2, a ligação da estrutura com o solo foi modelada por apoios que impedem os deslocamentos horizontal e vertical, mas que permitem o giro da base das colunas. Outro tipo de hipótese poderia ter sido feito para os apoios: por que não considerá-los como engastes perfeitos (que impedem também o giro da base)? Nesse mesmo modelo, as cargas verticais representam o peso próprio da estrutura e as cargas horizontais representam o efeito do vento. De quantas maneiras se pode considerar os efeitos do vento ou de outras solicitações?

Questões como essas mostram que existem diversas possibilidades para a concepção do modelo estrutural de uma estrutura. Nessa concepção diversos fatores entram em cena, tais como a experiência do analista estrutural e a complexidade da estrutura e de suas solicitações.

Apesar da importância da concepção do modelo estrutural dentro da análise estrutural, não é o objetivo deste livro abordar esse assunto. Os modelos matemáticos adotados para a idealização do comportamento de estruturas usuais já estão de certa forma consagrados, principalmente no caso de estruturas reticuladas. Esses modelos são descritos em livros de Resistência dos Materiais (Féodosiev 1977; Timoshen-ko & Gere 1994; Beer & Johnston 1996) e Teoria da Elasticidade (Timo-

shenko & Goodier 1980, Malvern 1969, Little 1973, Boresi & Chong 1987, Villaça & Taborda 1998), entre outros.

Também não são tratadas aqui questões que se referem à representação das solicitações reais no modelo estrutural, bem como questões relativas às leis constitutivas dos materiais que compõem a estrutura. Esses assuntos, em geral, são abordados em disciplinas que tratam das etapas de dimensionamento e detalhamento dentro do projeto estrutural, tais como Estruturas de Aço, Estruturas de Concreto ou Estruturas de Madeira.

O foco principal deste livro são as metodologias de análise de estruturas hiperestáticas. No corpo deste volume, o modelo estrutural completo (com materiais, solicitações e apoios definidos) vai ser sempre fornecido como ponto de partida para a análise. Entretanto, para entender os métodos de análise estrutural, é necessário conhecer os modelos matemáticos adotados para estruturas reticuladas. Portanto, os Capítulos 2, 3 e 4 deste livro resumem todas as teorias físicas e matemáticas que são necessárias para descrever os métodos de análise estrutural que são tratados neste volume.

1.2.2. Modelo discreto

O terceiro nível de abstração utilizado na análise estrutural é o do *modelo discreto* (veja a Figura 1.1). Esse modelo é concebido dentro das metodologias de cálculo dos métodos de análise. Portanto, a concepção do modelo discreto de estruturas reticuladas é um dos principais assuntos tratados neste livro.

De uma forma geral, os métodos de análise utilizam um conjunto de variáveis ou parâmetros para representar o comportamento de uma estrutura. Nesse nível de abstração, o comportamento analítico do modelo estrutural é substituído por um comportamento discreto, em que soluções analíticas contínuas são representadas pelos valores discretos dos parâmetros adotados. A passagem do modelo matemático para o modelo discreto é denominada *discretização*.

Os tipos de parâmetros adotados no modelo discreto dependem do método utilizado. No Método das Forças os parâmetros adotados são forças ou momentos e no Método dos Deslocamentos os parâmetros são deslocamentos ou rotações.

Por exemplo, a Figura 1.3 mostra a *discretização* utilizada na solução de um pórtico plano pelo Método das Forças. Nesse método, os parâmetros adotados para *discretizar* a solução são forças ou momentos redundantes para garantir o equilíbrio estático da estrutura. Isto é, são forças e momentos associados a vínculos excedentes de uma estrutura hiperestática. Esses parâmetros são denominados *hiperestáticos*.

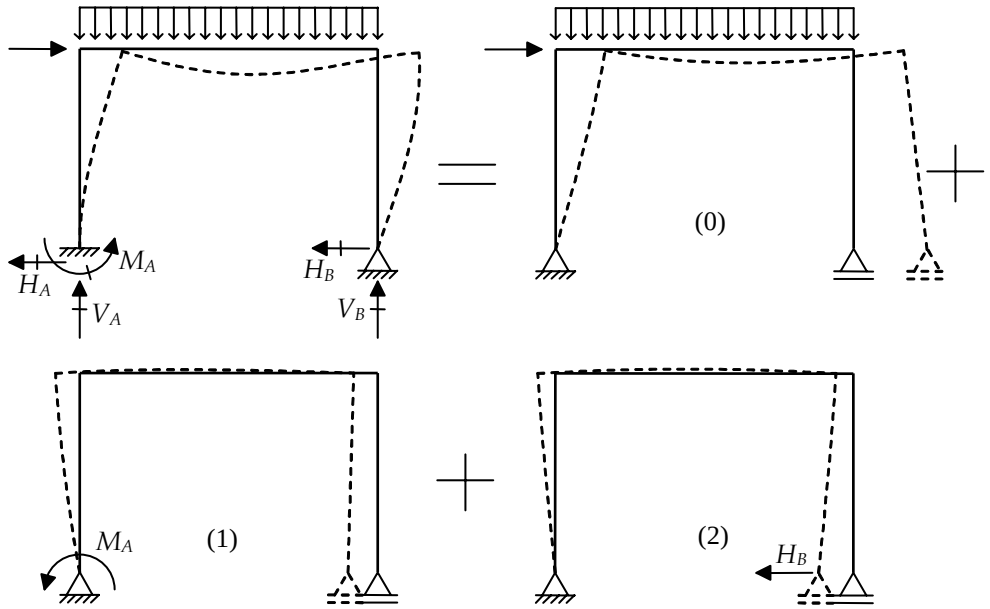


Figura 1.3 – Superposição de soluções básicas no Método das Forças.

No exemplo da Figura 1.3, os hiperestáticos adotados são as reações de apoio M_A (reação momento no apoio da esquerda) e H_B (reação horizontal no apoio da direita). A configuração deformada do pórtico, denominada *elástica* (indicada pela linha tracejada na figura e mostrada em escala ampliada), é obtida pela superposição de soluções básicas dos casos (0), (1) e (2) mostrados na figura. A estrutura utilizada nas soluções básicas é uma estrutura isostática obtida da estrutura original pela eliminação dos vínculos excedentes associados aos hiperestáticos. Cada solução básica isola um determinado efeito ou parâmetro: o efeito da solicitação externa (carregamento) é isolado no caso (0), o efeito do hiperestático M_A é isolado no caso (1) e o efeito do hiperestático H_B é isolado no caso (2). A metodologia de cálculo do Método das Forças determina os valores que os hiperestáticos devem ter para recompor os vínculos eliminados (restrição à rotação no apoio da esquerda e restrição ao deslocamento horizontal do apoio da direita). Dessa forma, a solução do problema fica parametrizada (discretizada) pelos hiperestáticos M_A e H_B. Essa metodologia será apresentada em detalhes no Capítulo 5 deste livro.

Na solução pelo Método dos Deslocamentos para estruturas reticuladas, a solução discreta é representada por valores de deslocamentos e rotações nos nós (pontos de encontro das barras), tal como indicado na Figura 1.4. Esses parâmetros são denominados *deslocabilidades*. No exemplo dessa figura, as deslocabilidades são os deslocamentos horizontais dos nós superiores, Δ_C^x e Δ_D^x, os deslocamentos verticais desses nós, Δ_C^y e Δ_D^y, e as rotações dos nós livres ao giro, θ_B, θ_C e θ_D.

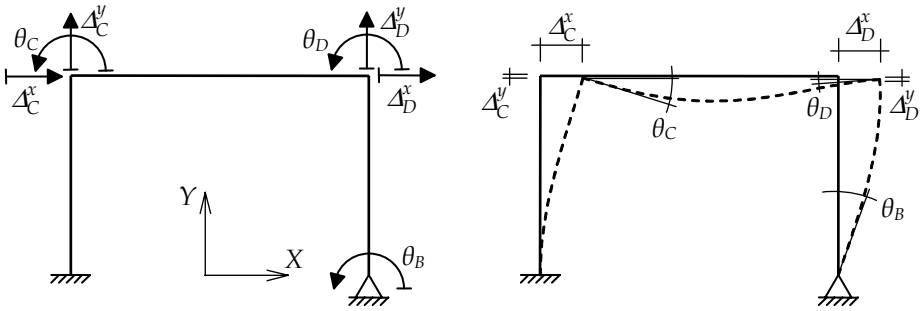


Figura 1.4 – Parâmetros nodais utilizados na discretização pelo Método dos Deslocamentos.

Na Figura 1.4, a configuração deformada da estrutura (elástica mostrada em escala ampliada) representa a solução contínua do modelo matemático. Os valores das deslocabilidades nodais representam a solução discreta do problema. Nesse tipo de metodologia baseada em deslocamentos, a solução contínua pode ser obtida por interpolação dos valores discretos dos deslocamentos e rotações nodais, considerando também o efeito da carga distribuída na barra horizontal. Em geral, para estruturas reticuladas com barras prismáticas, a solução obtida por interpolação é igual à solução analítica do modelo estrutural. Isto ocorre porque as funções de interpolação que definem a configuração deformada contínua são compatíveis com a idealização matemática do comportamento das barras feita pela Resistência dos Materiais. A metodologia de cálculo do Método dos Deslocamentos vai ser detalhada no Capítulo 6.

No caso de estruturas contínuas (que não são compostas por barras), o método comumente utilizado na análise estrutural é uma formulação em deslocamentos do *Método dos Elementos Finitos*[2] (Zienkiewicz & Taylor 2000, Felippa 2001). Nesse método, o modelo discreto é obtido pela subdivisão do domínio da estrutura em subdomínios, chamados de *elementos finitos*, de formas simples (em modelos planos, usualmente triângulos ou quadriláteros), tal como exemplificado na Figura 1.5 para o modelo bidimensional de uma estrutura contínua com um furo. Essa subdivisão é denominada *malha de elementos finitos* e os parâmetros que representam a solução discreta são valores de deslocamentos nos nós (vértices) da malha.

Pode-se observar por esse exemplo que a obtenção do modelo discreto para estruturas contínuas é muito mais complexa do que no caso de modelos de estruturas reticuladas (pórticos, treliças ou grelhas). Para estruturas formadas por barras, os nós (pontos onde valores discretos são definidos) são identificados naturalmente no encontro das barras, enquanto que para modelos contínuos os nós são obtidos pela discretização do domínio da estrutura em uma malha.

---

[2] Muitos outros métodos são utilizados, tais como o Método dos Elementos de Contorno. As notas de aula de Felippa (2001) apresentam uma excelente introdução aos métodos de análise de estruturas contínuas.

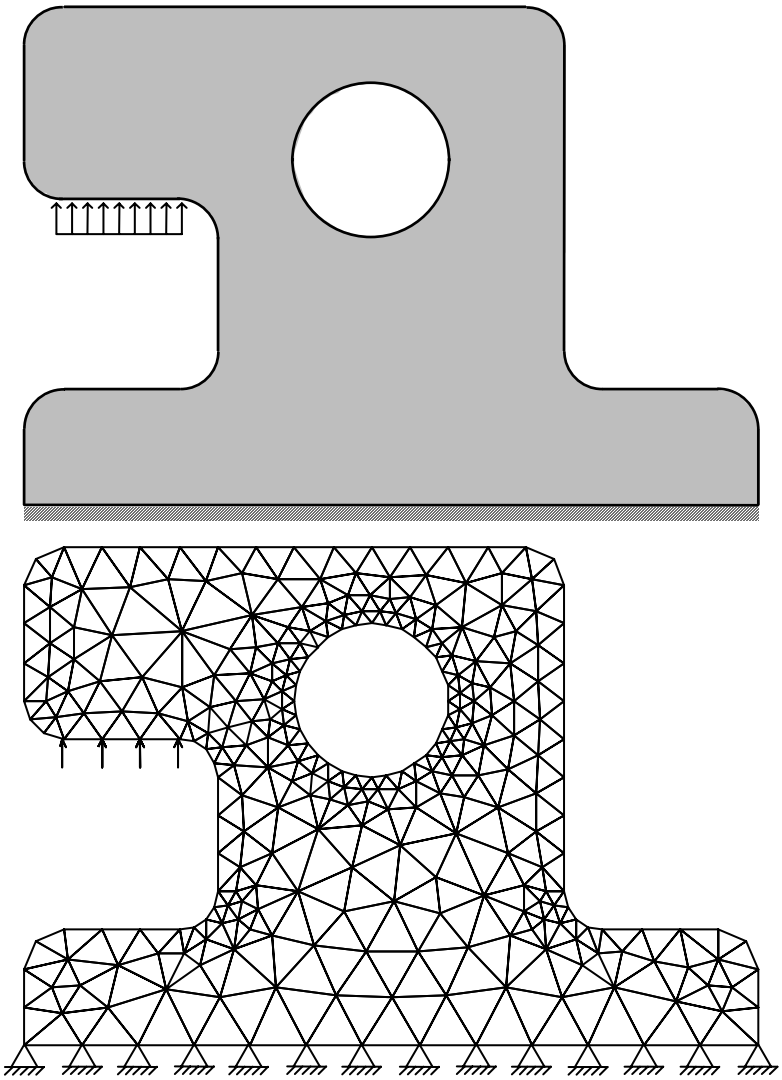


Figura 1.5 – Discretização pelo Método dos Elementos Finitos para uma estrutura contínua.

Uma importante diferença entre os modelos discretos de estruturas reticuladas e de estruturas contínuas é que a discretização de uma malha de elementos finitos introduz simplificações em relação à idealização matemática feita para o comportamento da estrutura. Isto ocorre porque as funções de interpolação que definem a configuração deformada de uma malha de elementos finitos não são, em geral, compatíveis com a idealização matemática do comportamento do meio contínuo feita pela Teoria da Elasticidade. Dessa forma, a solução do modelo discreto de elementos finitos é uma aproximação para a solução analítica da Teoria da Elasti-

cidade, ao passo que a solução do modelo discreto de uma estrutura com barras prismáticas é igual à solução analítica da Resistência dos Materiais.

Conforme comentado, este livro trata apenas de modelos de estruturas reticuladas. Existem diversas referências para o tratamento de estruturas contínuas através do Método dos Elementos Finitos. Pode-se citar os livros de Cook *et al.* (1989), Felippa (2001), Zienkiewicz e Taylor (2000), Assan (1999), e Soriano (2003). Este último se constitui em uma referência em português recente e completa (dentro do contexto da análise de estruturas) sobre o Método dos Elementos Finitos.

1.2.3. Modelo computacional

Desde a década de 1960 o computador tem sido utilizado na análise estrutural, embora inicialmente somente nos institutos de pesquisa e universidades. Nos anos setenta essa utilização passou a ser corriqueira, e nos anos oitenta e noventa, com a criação de programas gráficos interativos, a análise estrutural passou a ser feita com uso de computador em praticamente todos os escritórios de cálculo estrutural e empresas de consultoria.

A análise de estruturas pode ser vista atualmente como uma simulação computacional do comportamento de estruturas. Embora este livro não esteja direcionado diretamente ao desenvolvimento de programas para prever o comportamento de estruturas, é importante ter em mente que não se concebe atualmente executar as tarefas de análise estrutural, mesmo para o caso de estruturas reticuladas, sem o uso de computador e de Computação Gráfica.

Portanto, este livro pode ser considerado como introdutório para a análise de estruturas. As soluções apresentadas para os modelos discretos das formulações do Método das Forças e do Método dos Deslocamentos são obtidas através de resolução manual. O enfoque dado aqui é para o entendimento do comportamento de estruturas reticuladas hiperestáticas e dos fundamentos dos métodos básicos da análise estrutural.

Livros-texto sobre o Método dos Elementos Finitos, como os que são citados acima, abordam de uma certa maneira a implementação computacional do Método da Rigidez Direta (que é uma formalização do Método dos Deslocamentos direcionada para uma implementação computacional) e do Método dos Elementos Finitos. O Método das Forças tem uma metodologia que não é conveniente para ser implementada computacionalmente e, por isso, é pouco utilizado em programas de computador.

Entretanto, diversos outros aspectos estão envolvidos no desenvolvimento de um programa de computador para executar uma análise estrutural. Questões como estruturas de dados e procedimentos de criação do modelo geométrico, geração do modelo discretizado, aplicação de atributos de análise (propriedades de materiais,

carregamentos, condições de suporte, etc.) e visualização dos resultados são fundamentais nesse contexto. Essas questões não são tratadas nos livros de elementos finitos, mas são da área de Modelagem Geométrica e Computação Gráfica.

1.3. Organização dos capítulos

Este capítulo procurou posicionar o leitor dentro da atividade de análise estrutural e direciona para os principais tópicos que são abordados neste livro.

No Capítulo 2 são introduzidos conceitos básicos sobre a análise de estruturas. O capítulo trata principalmente das condições básicas que têm que ser atendidas pelo modelo estrutural, tais como relações de equilíbrio entre forças e entre tensões, as relações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, e as leis constitutivas dos materiais que compõem a estrutura. É feita uma introdução aos métodos clássicos da análise estrutural: Método das Forças e Método dos Deslocamentos. O comportamento linear de estruturas, condição para aplicar superposição de efeitos, também é discutido. Também é feita uma abordagem conceitual entre as diferenças de comportamento de estruturas isostáticas e estruturas hiperestáticas. Finalmente, é apresentado um procedimento geral para determinação do grau de hiperestaticidade de pórticos planos e grelhas.

O Capítulo 3 resume a formalização matemática feita na idealização do comportamento de barras. A Teoria de Vigas de Navier para o comportamento à flexão de barras é apresentada com todas as suas hipóteses e simplificações. As principais relações diferenciais da Resistência dos Materiais que regem o comportamento de barras para efeitos axiais, cisalhantes, de flexão e de torção são apresentadas com vistas à sua utilização no desenvolvimento dos métodos de análise apresentados nos capítulos subseqüentes.

O Capítulo 4 apresenta soluções fundamentais que são utilizadas nas metodologias dos Métodos das Forças e dos Deslocamentos. Tais soluções são obtidas com base no Princípio dos Trabalhos Virtuais. Esse princípio, através de suas duas formulações – Princípio das Forças Virtuais e Princípio dos Deslocamentos Virtuais –, é necessário para deduzir as expressões utilizadas no cálculo de coeficientes dos sistemas de equações resultantes da discretização do problema pelos Métodos das Forças e dos Deslocamentos.

O Método das Forças é apresentado em detalhes no Capítulo 5. O capítulo trata principalmente de aplicações do método para pórticos planos, mas também são considerados exemplos de treliças planas e grelhas. Embora, atualmente, na prática esse método seja pouco utilizado (tem difícil implementação computacional), o método tem o mérito de ser intuitivo e, por isso, em geral é o primeiro método a ser apresentado em livros-texto.

O Capítulo 6 apresenta uma introdução ao Método dos Deslocamentos. O objetivo é descrever os fundamentos do método aplicado a pórticos planos. Nesse capítulo só são tratados pórticos com barras horizontais e verticais, pois a resolução de pórticos com barras inclinadas pela formulação geral do Método dos Deslocamentos é muito trabalhosa para ser feita manualmente.

No Capítulo 7 são introduzidas restrições que são comumente adotadas para as deformações de barras com o objetivo de reduzir o número de parâmetros discretos e, assim, facilitar a resolução manual pelo Método dos Deslocamentos. A apresentação do método com essas restrições pode ser considerada como a forma clássica de apresentação em livros-texto, como por exemplo no de Süssekind (1977-3), que estavam voltados para uma resolução manual. Na verdade, o principal objetivo ao considerar essas restrições a deformações de barras é caracterizar o comportamento de pórticos com respeito aos efeitos de deformações axiais e de deformações transversais por flexão. Por exemplo, a consideração de barras sem deformação axial (chamadas de *barras inextensíveis*.) é uma aproximação razoável para o comportamento de um pórtico. A hipótese de barras inextensíveis possibilita o entendimento do conceito de *contra-ventamento* de pórticos com barras inclinadas, que é muito importante no projeto de estruturas.

O Capítulo 8 descreve um processo de solução iterativa de pórticos pelo Método dos Deslocamentos. Esse processo é denominado Método da Distribuição de Momentos (White *et al.* 1976) ou Processo de Cross (Süssekind 1977-3). Apesar deste processo ter caído em desuso nos últimos anos, ele tem a vantagem de propiciar um entendimento intuitivo do comportamento de vigas e quadros que trabalham fundamentalmente à flexão, além de permitir uma rápida resolução manual.

O Método da Rigidez Direta, que é uma formalização do Método dos Deslocamentos voltada para sua implementação computacional, é apresentado no Capítulo 9. Essa formulação geral do Método dos Deslocamentos é feita para pórticos planos, com barras com qualquer inclinação, com ou sem articulação, e para grelhas.

Finalmente, o Capítulo 10 descreve o procedimento de análise estrutural para cargas acidentais e móveis, isto é, para cargas que não têm atuação constante ou posição fixa sobre a estrutura. Os conceitos de Linhas de Influência e Envoltórias de Esforços são introduzidos. É deduzido o método cinemático para o traçado de linhas de influência, também chamado de Princípio de Müller-Breslau (White *et al.* 1976, Süssekind 1977-1). As soluções de engastamento perfeito deste princípio para barras isoladas são apresentadas. Essas soluções facilitam a determinação de linhas de influência por programas de computador que implementam o Método da Rigidez Direta.

Dois apêndices complementam os capítulos descritos. O primeiro mostra a convenção de sinais adotada para esforços internos em estruturas reticuladas. O segundo apresenta a Analogia da Viga Conjugada como forma alternativa para deduzir as soluções fundamentais de barras introduzidas no Capítulo 4.

2. CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

Este capítulo resume alguns conceitos básicos de análise estrutural para estruturas que são compostas por barras. Esses conceitos foram selecionados de forma a permitir a compreensão dos demais capítulos deste livro, e essa seleção foi baseada em consultas a trabalhos de diversos autores que certamente descrevem esses conceitos em maior profundidade. Os principais livros que serviram como referência para este capítulo foram os de White, Gergely e Sexsmith (1976), Rubinstein (1970), Candreva (1981), Timoshenko e Gere (1994), Tauchert (1974) e West (1989).

São considerados como pré-requisitos para os assuntos tratados neste capítulo a definição de tensões, deformações e esforços internos (esforços normais e cortantes e momentos fletores e torçores) em barras e a análise de estruturas estaticamente determinadas (estruturas isostáticas). Como referências para esses assuntos pode-se citar, além das referências anteriores, os livros dos seguintes autores: Beaufait (1977), Beer e Johnston (1996), Campanari (1985), Felton e Nelson (1997), Fleming (1997), Süssekind (1977-1), Gorfin e Oliveira (1975), Hibbeler (1998) e Meriam (1994).

2.1. Classificação de modelos de estruturas reticuladas

Conforme mencionado no Capítulo 1, este livro está direcionado para a análise de estruturas reticuladas, isto é, de estruturas formadas por barras. Esta seção faz uma classificação dos tipos de modelos de estruturas reticuladas de acordo com o seu arranjo espacial e de suas cargas. Também são definidos sistemas de eixos globais da estrutura e de eixos locais das barras. Para cada tipo de estrutura são caracterizados os tipos de esforços internos e as direções dos seus deslocamentos e rotações.

A Figura 2.1 mostra um exemplo de um *quadro ou pórtico plano.* Um quadro plano é um modelo estrutural plano de uma estrutura tridimensional. Este modelo pode corresponder a uma "fatia" da estrutura, ou pode representar uma simplificação para o comportamento tridimensional. Estruturas deste tipo estão contidas em um plano (neste livro é adotado o plano formado pelos eixos X e Y, como mostra a Figura 2.1) e as cargas também estão contidas no mesmo plano. Isso inclui forças com componentes nas direções dos eixos X e Y e momentos em torno do eixo Z (que sai do plano).

O quadro plano da Figura 2.1 tem um solicitação externa (carregamento) composta por uma força horizontal P (na direção de X) e uma carga uniformemente distribuída vertical q (na direção de Y). Também estão indicados na figura as reações de apoio, que são compostas de forças horizontais e verticais, e por um momento em torno do eixo Z.

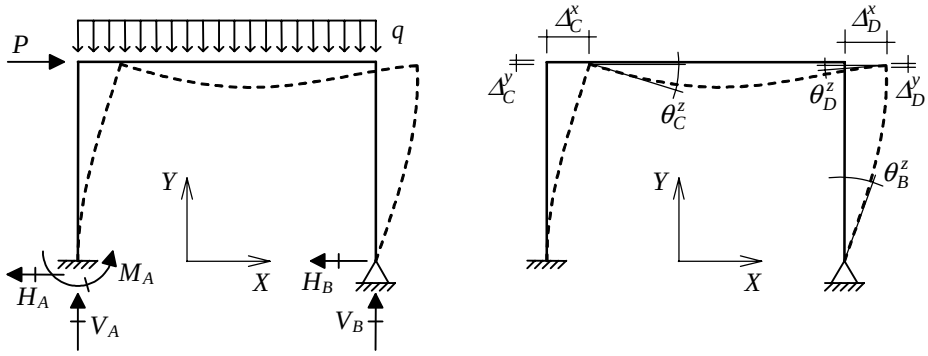


Figura 2.1 – Eixos globais, cargas, reações, deslocamentos e rotações de um quadro plano.

A Figura 2.1 também indica a configuração deformada da estrutura (amplificada de forma exagerada) com as componentes de deslocamentos e rotações do nós (pontos extremos das barras). A simplificação adotada para modelos estruturais de quadros planos é que não existem deslocamentos na direção transversal ao plano (direção Z) e rotações em torno de eixos do plano da estrutura. Portanto, um quadro plano apresenta somente as seguintes componentes de deslocamentos e rotação:

$\Delta^x \rightarrow$ deslocamento na direção do eixo global X;

$\Delta^y \rightarrow$ deslocamento na direção do eixo global Y;

$\theta^z \rightarrow$ rotação em torno do eixo global Z.

As ligações entre as barras de um pórtico plano são consideradas perfeitas (*ligações rígidas*), a menos que algum tipo de liberação, tal como uma articulação, seja indicado. Isto significa que duas barras que se ligam em um nó tem deslocamentos e rotação compatíveis na ligação. Ligações rígidas caracterizam o comportamento de pórticos e provocam a deformação por flexão de suas barras.

Os esforços internos de um quadro plano também estão associados ao comportamento plano da estrutura. Neste tipo de estrutura, existem apenas três esforços internos em um barra de um pórtico plano, definidos nas direções dos eixos locais da barra, tal como indicado na Figura 2.2:

$N \rightarrow$ esforço normal (esforço interno axial) na direção do eixo local x;

$Q = Q^y \rightarrow$ esforço cortante (esforço interno transversal) na direção do eixo local *y*;

$M = M^z \rightarrow$ momento fletor (esforço interno de flexão) em torno do eixo local *z*.

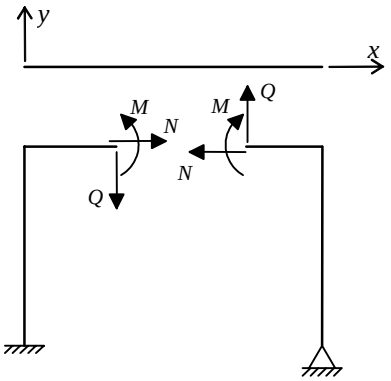


Figura 2.2 – Eixos locais e esforços internos de uma barra de quadro plano.

Esforços internos em uma estrutura caracterizam as ligações internas de tensões, isto é, esforços internos são integrais de tensões ao longo de uma seção transversal de uma barra. Esforços internos representam o efeito de forças e momentos entre duas porções de uma estrutura reticulada resultantes de um corte em uma seção transversal. Os esforços internos correspondentes de cada lado da seção seccionada são iguais e contrários, pois correspondem uma ação e a reação correspondente. A relação entre tensões e esforços internos vai ser discutida no Capítulo 3.

Uma *treliça* é uma estrutura reticulada que tem todas as ligações entre barras articuladas (as barras podem girar independentemente nas ligações). A Figura 2.3 mostra uma treliça plana com suas cargas e reações. Na análise de uma treliça as cargas atuantes são transferidas para os seus nós. A conseqüência disso, em conjunto com a hipótese de ligações articuladas, é que uma treliça apresenta apenas esforços internos axiais (esforços normais de tração ou compressão).

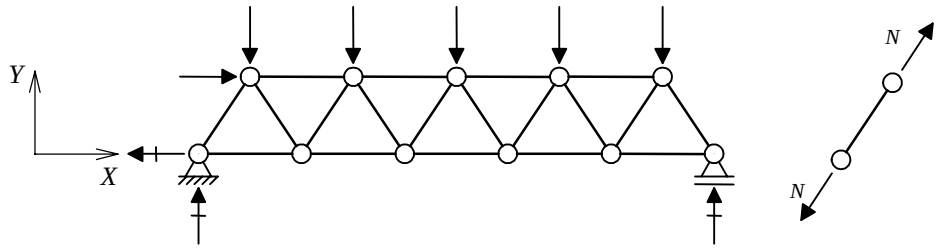


Figura 2.3 – Eixos globais, cargas, reações e esforço interno normal de uma treliça plana.

Muitas vezes, a hipótese de *ligações articuladas* é uma simplificação para o comportamento de uma treliça, pois muitas vezes não existem articulações nos nós. Esta

simplificação se justifica, principalmente, quando os eixos das barras concorrem praticamente em um único ponto em cada ligação. Nesse caso, o comportamento da estrutura de dá fundamentalmente a esforços internos axiais (esforços cortantes e momentos fletores são pequenos na presença de esforços normais).

Um outro tipo de estrutura reticulada é a *grelha*. Grelhas são estruturas planas com cargas na direção perpendicular ao plano, incluindo momentos em torno de eixos do plano. A Figura 2.4 mostra uma grelha com uma carga uniformemente distribuída transversal ao seu plano. Neste livro é adotado que o plano da grelha é formado pelos eixos *X* e *Y*. Os apoios de uma grelha apresentam apenas uma componente de força, que é na direção vertical *Z*, e duas componentes de momento.

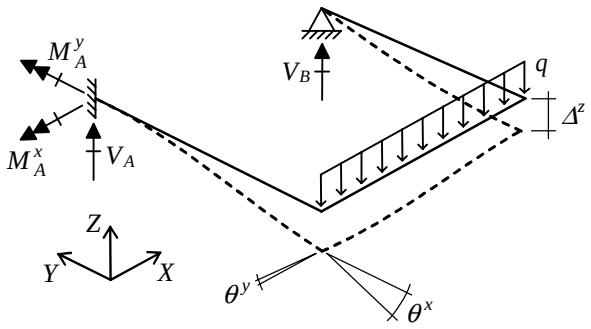


Figura 2.4 – Eixos globais, cargas, reações, deslocamentos e rotações de uma grelha.

Por hipótese, uma grelha não apresenta deslocamentos dentro do seu plano. A Figura 2.4 indica a configuração deformada da grelha (de forma exagerada), que apresenta as seguintes componentes de deslocamento e rotações:

$\Delta^z \rightarrow$ deslocamento na direção do eixo global *Z*;

$\theta^x \rightarrow$ rotação em torno do eixo global *X*;

$\theta^y \rightarrow$ rotação em torno do eixo global *Y*.

Em geral, as ligações entre as barras de uma grelha são rígidas, mas é possível que ocorram articulações. Uma ligação articulada de barras de grelha pode liberar apenas uma componente de rotação, ou pode liberar as duas componentes.

Os esforços internos de uma barra de grelha estão mostrados na Figura 2.5, juntamente com a convenção adotada para os eixos locais de uma barra de grelha. São três os esforços internos:

$Q = Q^z \rightarrow$ esforço cortante (esforço interno transversal) na direção do eixo local *z*;

$M = M^y \rightarrow$ momento fletor (esforço interno de flexão) em torno do eixo local *y*;

$T = T^x \rightarrow$ momento torçor (esforço interno de torção) em torno do eixo local *x*.

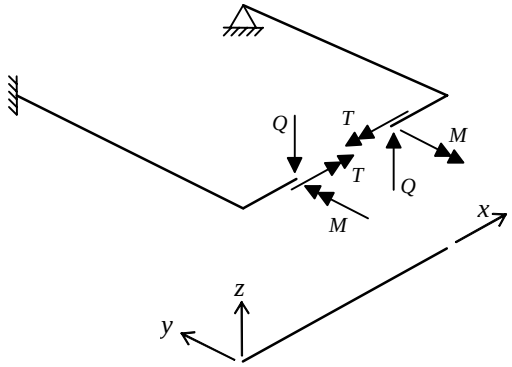


Figura 2.5 – Eixos locais e esforços internos de uma barra de grelha.

É interessante fazer uma comparação entre as componentes de deslocamentos e rotações de quadros planos e grelhas, bem como entre os tipos de esforços internos. A Tabela 2.1 indica as componentes de deslocamentos e rotações que são nulas para quadros planos e grelhas. Observe que quando uma componente é nula para um quadro plano ela não é nula para uma grelha, e vice-versa. A tabela também mostra as diferenças entre os esforços internos de quadros planos e grelhas. Vê-se que os esforços normais são nulos para grelhas. Por outro lado, os quadros planos não apresentam momentos torçores. As barras de um quadro plano e de uma grelha apresentam esforços cortantes, mas eles têm direções distintas em relação aos eixos locais. O mesmo ocorre para momentos fletores.

Tabela 2.1 – Comparação entre quadro plano e grelha.

	Quadro Plano	Grelha
Deslocamento em X	Δ^x	$\Delta^x = 0$
Deslocamento em Y	Δ^y	$\Delta^y = 0$
Deslocamento em Z	$\Delta^z = 0$	Δ^z
Rotação em torno de X	$\theta^x = 0$	θ^x
Rotação em torno de Y	$\theta^y = 0$	θ^y
Rotação em torno de Z	θ^z	$\theta^z = 0$
Esforço normal	$N = N^x$ (x local)	$N = 0$
Esforço cortante	$Q = Q^y$ (y local)	$Q = Q^z$ (z local)
Momento fletor	$M = M^z$ (z local)	$M = M^y$ (y local)
Momento torçor	$T = 0$	$T = T^x$ (x local)

Finalmente, o caso mais geral de estruturas reticuladas é o de *quadros ou pórticos espaciais*. Um exemplo é mostrado na Figura 2.6. Cada ponto de um quadro espacial pode ter três componentes de deslocamento (Δ^x, Δ^y, e Δ^z) e três componentes de rotação (θ^x, θ^y, e θ^z). Existem seis esforços internos em uma barra de pórtico espacial: esforço normal $N = N^x$ (x local), esforço cortante Q^y (y local), esforço cortante Q^z (z local), momento fletor M^y (y local), momento fletor M^z (z local), e momento torçor $T = T^x$ (x local).

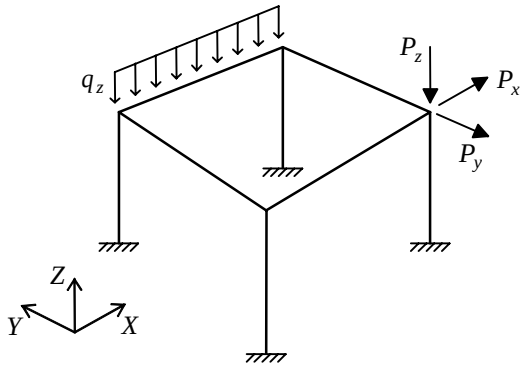


Figura 2.6 – Eixos globais e cargas de um quadro espacial.

2.2. Condições básicas da análise estrutural

No contexto da análise estrutural, o cálculo corresponde à determinação dos esforços internos na estrutura, das reações de apoios, dos deslocamentos e rotações, e das tensões e deformações. As metodologias de cálculo são procedimentos matemáticos que resultam das hipóteses adotadas na concepção do modelo estrutural.

Dessa forma, uma vez concebido o modelo de análise para uma estrutura, as metodologias de cálculo podem ser expressas por um conjunto de equações matemáticas que garantem a satisfação às hipóteses adotadas. Dito de outra maneira, uma vez feitas considerações sobre a geometria da estrutura, sobre as cargas e solicitações, sobre as condições de suporte ou ligação com outros sistemas e sobre as leis constitutivas dos materiais, a análise estrutural passa a ser um procedimento matemático de cálculo que só se altera se as hipóteses e simplificações adotadas forem revistas ou reformuladas.

As condições matemáticas que o modelo estrutural tem que satisfazer para representar adequadamente o comportamento da estrutura real podem ser dividas nos seguintes grupos:

- condições de equilíbrio;
- condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações;

- condições sobre o comportamento dos materiais que compõem a estrutura (leis constitutivas dos materiais).

A imposição destas condições é a base dos métodos da análise estrutural, isto é, as formas como essas condições são impostas definem as metodologias dos chamados Métodos Básicos da Análise de Estruturas, foco principal deste livro.

Esta seção exemplifica as condições básicas que o modelo estrutural tem que atender através de um exemplo simples de três barras articuladas (Timoshenko & Gere 1994), mostrado na Figura 2.7. Existe uma força externa *P* aplicada no nó da estrutura que conecta as três barras. As barras são feitas com um material com módulo de elasticidade *E* e têm seções transversais com área *A*.

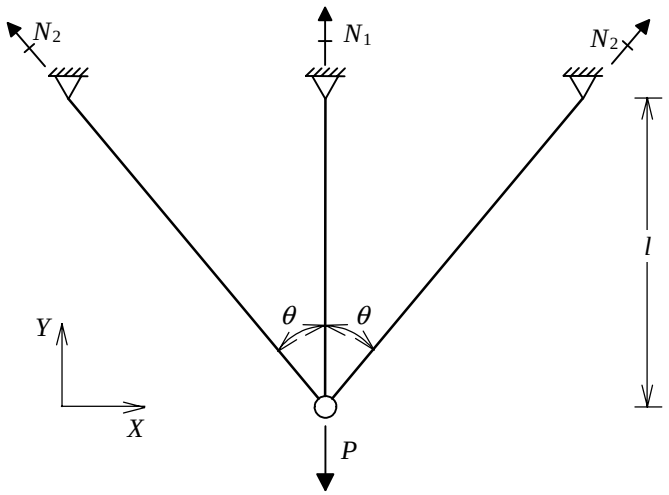


Figura 2.7 – Estrutura com três barras articuladas.

2.2.1. Condições de equilíbrio

No contexto deste livro, no qual não são considerados problemas de vibrações ou de dinâmica de estruturas, *condições de equilíbrio* são condições que garantem o equilíbrio estático de qualquer porção isolada da estrutura ou da estrutura como um todo. No exemplo da Figura 2.7, o equilíbrio tem que ser garantido globalmente, isto é, para a estrutura como um todo, em cada barra isolada e em cada nó isolado.

Nesse exemplo simples, em que só existem esforços internos axiais nas barras (forças normais), as três reações de apoio nos nós superiores convergem em um ponto: o nó inferior. Na verdade, essas reações são os próprios esforços normais nas barras, tal como indicado na Figura 2.7. Além disso, a simetria da estrutura impõe que os esforços normais nas barras inclinadas sejam iguais (isto é, na verdade, uma

imposição de equilíbrio de forças na direção horizontal *X*). Dessa forma, o equilíbrio do nó inferior na direção vertical *Y* garante o equilíbrio global da estrutura:

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow N_1 + 2 \cdot N_2 \cdot \cos\theta = P \,. \tag{2.1}$$

Nessa equação, tem-se:

$N_1 \rightarrow$ esforço normal na barra vertical;

$N_2 \rightarrow$ esforço normal nas barras inclinadas.

Na Equação (2.1), a condição de equilíbrio na direção vertical do nó inferior da estrutura foi escrita considerando a geometria original (indeformada) da estrutura. Isto só é válido quando os deslocamentos que a estrutura vai sofrer são muito pequenos em relação às dimensões da estrutura. Essa hipótese, denominada de *hipótese de pequenos deslocamentos* (White *et al.* 1976, West 1989), será adotada neste livro. A análise de estruturas com essa consideração denomina-se *análise de primeira ordem*. Nem sempre é possível adotar a hipótese de pequenos deslocamentos. Por exemplo, no projeto moderno de estruturas metálicas exige-se que se faça uma análise de segunda ordem (deslocamentos não desprezíveis na imposição das condições de equilíbrio), pelo menos de uma maneira aproximada.

Apesar disso, neste livro só serão consideradas análises com pequenos deslocamentos, e as condições de equilíbrio sempre serão escritas para a configuração (geometria) indeformada da estrutura. Esse ponto será justificado na Seção 2.4 deste capítulo, onde a hipótese de pequenos deslocamentos é abordada em maior profundidade.

Observa-se pela Equação (2.1) que não é possível determinar os valores dos esforços normais N_1 e N_2. Isto é, existem duas incógnitas em termos de esforços e apenas uma equação de equilíbrio (considerando que a equação de equilíbrio na direção horizontal já foi utilizada). As estruturas que não podem ter seus esforços determinados apenas pelas equações de equilíbrio são chamadas de *estruturas hiperestáticas*, como a estrutura do exemplo da Figura 2.7. Existe um caso especial de estruturas que podem ter seus esforços internos e externos (reações de apoio) determinados apenas pelas condições de equilíbrio – são as chamadas *estruturas isostáticas*.

Em geral, as equações de equilíbrio fornecem condições necessárias, mas não suficientes, para a determinação dos esforços no modelo estrutural. Para a determinação dos esforços em estruturas hiperestáticas, é necessário fazer uso das outras condições, que são tratadas nas seções a seguir.

2.2.2. Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações

As *condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações* são condições geométricas que devem ser satisfeitas para garantir que a estrutura, ao se deformar, permaneça contínua (sem vazios ou sobreposição de pontos) e compatível com seus vínculos externos.

Deve-se ressaltar que as condições de compatibilidade não têm relação alguma com as propriedades de resistência dos materiais da estrutura (consideradas nas leis constitutivas dos materiais, tratadas na seção a seguir). As condições de compatibilidade são expressas por relações geométricas impostas no modelo estrutural para garantir a continuidade no domínio da estrutura real. Essas relações consideram as hipóteses geométricas adotadas na concepção do modelo.

As condições de compatibilidade podem ser divididas em dois grupos:

- *Condições de compatibilidade externa*: referem-se aos vínculos externos da estrutura e garantem que os deslocamentos e deformações sejam compatíveis com as hipóteses adotadas com respeito aos suportes ou ligações com outras estruturas.
- *Condições de compatibilidade interna*: garantem que a estrutura permaneça, ao se deformar, contínua no interior dos elementos estruturais (barras) e nas fronteiras entres os elementos estruturais, isto é, que as barras permaneçam ligadas pelos nós que as conectam (incluindo ligação por rotação no caso de não haver articulação entre barras).

No exemplo da Figura 2.7, as condições de compatibilidade externa são garantidas automaticamente quando só se admite uma configuração deformada para a estrutura que tenha deslocamentos nulos nos nós superiores, tal como mostra a Figura 2.8. A configuração deformada está indicada, com deslocamentos ampliados de forma exagerada, pelas linhas tracejadas mostradas nessa figura.

As condições de compatibilidade interna devem garantir que as três barras permaneçam ligadas pelo nó inferior na configuração deformada. Mantendo-se a hipótese de pequenos deslocamentos, pode-se considerar que o ângulo entre as barras após a deformação da estrutura não se altera, tal como indicado na Figura 2.8.

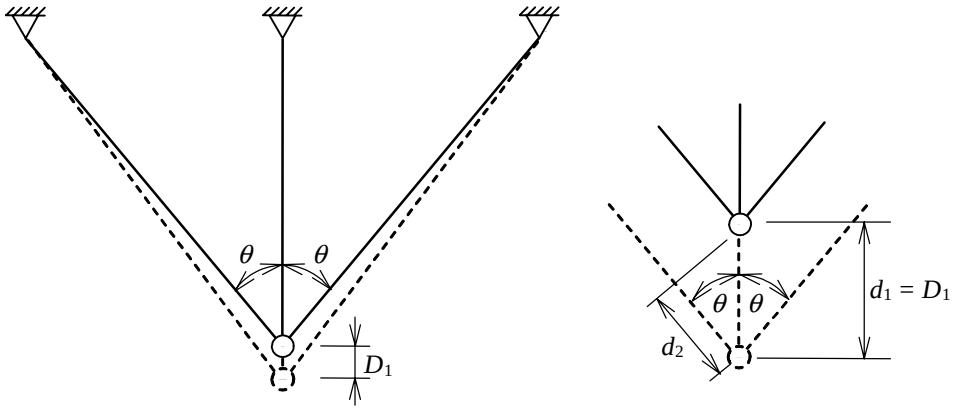


Figura 2.8 – Configuração deformada da estrutura com três barras articuladas.

Com base na Figura 2.8 e considerando a simetria da estrutura, pode-se então estabelecer relações de compatibilidade entre os alongamentos das barras da estrutura e o deslocamento vertical do nó inferior:

$d_1 = D_1$;

$d_2 = D_1 \cdot \cos\theta$.

Sendo:

$D_1 \rightarrow$ deslocamento vertical do nó inferior;

$d_1 \rightarrow$ alongamento da barra vertical;

$d_2 \rightarrow$ alongamento das barras inclinadas.

Isto resulta na seguinte equação de compatibilidade entre os alongamentos das barras:

$$d_2 = d_1 \cdot \cos\theta \,. \tag{2.2}$$

A introdução da equação de compatibilidade acrescentou duas novas incógnitas ao problema, d_1 e d_2, sem relacioná-las às incógnitas anteriores, N_1 e N_2. Entretanto, essas quatro incógnitas vão ficar relacionadas através da consideração do comportamento do material que compõe a estrutura, sem que isso introduza novas incógnitas.

2.2.3. Leis constitutivas dos materiais

O modelo matemático do comportamento dos materiais, em um nível macroscópico, é expresso por um conjunto de relações matemáticas entre tensões e deforma-

ções, chamadas de *leis constitutivas* (Féodosiev 1977). Essas relações contêm parâmetros que definem o comportamento dos materiais. A Teoria da Elasticidade (Timoshenko & Goodier 1980) estabelece que as relações da lei constitutiva são equações lineares com parâmetros constantes. Nesse caso, é dito que o material trabalha em regime elástico-linear, em que tensões e deformações são proporcionais. Entretanto, nem sempre é possível adotar um comportamento tão simplificado para os materiais. Por exemplo, procedimentos modernos de projeto de estruturas metálicas ou de concreto armado são baseados no estado de limite último, quando o material não tem mais um comportamento elástico-linear.

Apesar disso, no contexto deste livro só serão considerados materiais idealizados com comportamento elástico-linear e sem limite de resistência. Isto é justificado pelos seguintes motivos:

- De uma maneira geral, as estruturas civis trabalham em regime elástico-linear. Por isso, a maioria das estruturas é analisada adotando-se essa aproximação.
- Mesmo para projetos baseados em regime último, a determinação da distribuição de esforços internos é, em geral, feita a partir de uma análise linear. Isto é, faz-se o dimensionamento local no estado último de resistência, com o uso de coeficientes de majoração de carga e de minoração de resistência, mas com esforços calculados através de uma análise global linear. Esta é uma aproximação razoável na maioria dos casos, mas o correto seria fazer uma análise global considerando o material em regime não linear (que é relativamente complexa quando comparada com uma análise linear).
- Na prática, uma análise não linear é executada computacionalmente de forma incremental, sendo que em cada passo do processo incremental é feita uma análise linear. Como este livro é introdutório para a análise de estruturas, a consideração de um comportamento linear se justifica.
- O foco principal deste livro são os métodos básicos da análise estrutural. A consideração em si de leis constitutivas não lineares é um tema bastante amplo que foge do escopo deste livro.

Portanto, no exemplo da Figura 2.7, o material considerado tem um comportamento elástico-linear. As barras desta estrutura estão submetidas apenas a esforços axiais de tração. As tensões σ_x e deformações ε_x que aparecem nesse caso são normais às seções transversais das barras (na direção do eixo local *x*, na direção axial da barra). A lei constitutiva que relaciona tensões normais e deformações normais é a conhecida Lei de Hooke (Beer & Johnston 1996, Féodosiev 1977) e é dada por

$$\sigma_x = E\varepsilon_x , \tag{2.3}$$

sendo:

$E \rightarrow$ *módulo de elasticidade* (propriedade do material);

$\sigma_x \rightarrow$ tensões normais na direção axial da barra;

$\varepsilon_x \rightarrow$ deformações normais na direção axial da barra.

No contexto de uma análise com pequenos deslocamentos, a tensão normal devida a um esforço axial é dada pela razão entre o valor do esforço e a área da seção transversal, e a deformação normal é a razão entre o alongamento da barra e o seu comprimento original. Assim, para a barra vertical da Figura 2.7 tem-se:

$$\frac{N_1}{A} = E\frac{d_1}{l}, \tag{2.4}$$

e para as barras inclinadas tem-se:

$$\frac{N_2}{A} = E\frac{d_2}{l/\cos\theta}. \tag{2.5}$$

Observa-se que as Equações (2.4) e (2.5) introduziram novas relações entre as incógnitas do problema sem que aparecessem novas variáveis. Dessa maneira, as Equações (2.1), (2.2), (2.4) e (2.5) formam um sistema de quatro equações a quatro incógnitas, N_1, N_2, d_1 e d_2, resultando na solução única do problema.

Vê-se que só foi possível resolver a estrutura hiperestática desse exemplo utilizando todos os três tipos de condições: equilíbrio, compatibilidade e leis constitutivas. A próxima seção discute esse ponto em mais detalhe.

Há casos em que o material é também solicitado ao efeito de cisalhamento. Para materiais trabalhando em regime elástico-linear, a lei constitutiva que relaciona tensões cisalhantes com distorções de cisalhamento é dada por:

$$\tau = G\gamma, \tag{2.6}$$

sendo:

$G \rightarrow$ *módulo de cisalhamento* (propriedade do material);

$\tau \rightarrow$ tensão de cisalhamento;

$\gamma \rightarrow$ distorção de cisalhamento.

2.3. Métodos básicos da análise estrutural

O exemplo simples mostrado na seção anterior ilustra bem a problemática para a análise de uma estrutura hiperestática. Para se resolver (calcular esforços, deslocamentos, etc.) uma estrutura hiperestática é sempre necessário considerar os três grupos de condições básicas da análise estrutural: condições de equilíbrio, condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações e condições sobre o comportamento dos materiais (White *et al.* 1976).

No exemplo, existem infinitos valores de N_1 e N_2 que satisfazem a equação de equilíbrio (2.1). Também existem infinitos valores de d_1 e d_2 que satisfazem a equação de compatibilidade (2.2). Entretanto, existe uma única solução para essas entidades: é aquela que satisfaz simultaneamente equilíbrio, compatibilidade e leis constitutivas.

Observa-se que para esse exemplo a solução da estrutura hiperestática requer a resolução de um sistema de quatro equações a quatro incógnitas. Para estruturas usuais (bem maiores), a formulação do problema dessa maneira acarreta uma complexidade de tal ordem que a solução pode ficar comprometida. Assim, é necessário definir metodologias para a solução de estruturas hiperestáticas. Isto vai resultar nos dois métodos básicos da análise estrutural, que são introduzidos a seguir.

2.3.1. Método das Forças

O primeiro método básico da análise de estruturas é o chamado *Método das Forças*. Nesse método as incógnitas principais do problema são forças e momentos, que podem ser reações de apoio ou esforços internos. Todas as outras incógnitas são expressas em termos das incógnitas principais escolhidas e substituídas em equações de compatibilidade, que são então resolvidas.

O Método das Forças tem como idéia básica determinar, dentro do conjunto de soluções em forças que satisfazem as condições de equilíbrio, qual a solução que faz com que as condições de compatibilidade também sejam satisfeitas.

Na formalização do Método das Forças existe uma seqüência de introdução das condições básicas do problema: primeiro são utilizadas as condições de equilíbrio, em seguida são consideradas as leis constitutivas dos materiais, e finalmente são utilizadas as condições de compatibilidade. O exemplo da Figura 2.7 vai ser usado para ilustrar essa seqüência.

Considere que o esforço normal N_1 na barra central foi adotado como a incógnita principal. O número de incógnitas principais é igual ao número de incógnitas excedentes nas equações de equilíbrio. A escolha de N_1 como principal foi arbitrária (teria sido indiferente escolher N_2). Pela equação de equilíbrio (2.1) pode-se escrever N_2 em função de N_1:

$$N_2 = \frac{P - N_1}{2 \cdot \cos\theta}. \tag{2.7}$$

Pelas Equações (2.4) e (2.5) pode-se expressar d_1 e d_2 em função de N_1 e N_2, respectivamente. Utilizando a Equação (2.7) e substituindo na Equação (2.2), tem-se a equação de compatibilidade expressa em termos da incógnita N_1:

$$\left(\frac{l}{EA} + \frac{l}{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3} \right) \cdot N_1 = \frac{P \cdot l}{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3} . \tag{2.8}$$

Finalmente, a solução desta equação resulta no valor de N_1, e substituindo esse resultado na Equação (2.7) tem-se N_2:

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cdot (\cos\theta)^3} ;$$

$$N_2 = \frac{P \cdot (\cos\theta)^2}{1 + 2 \cdot (\cos\theta)^3} .$$

Deve-se salientar que os valores de N_1 e N_2 independem da área da seção transversal das barras e do módulo de elasticidade porque esses parâmetros são, nesse exemplo, iguais para as três barras, tendo sido cancelados na solução da Equação (2.8).

Na verdade, a solução mostrada acima não corresponde à metodologia utilizada na prática para analisar uma estrutura hiperestática pelo Método das Forças. A metodologia adotada na prática faz uma parametrização (discretização) do problema em termos de variáveis independentes, tal como já sugerido na Seção 1.2.2 do Capítulo 1. No caso do Método das Forças, essas variáveis são as forças (e momentos) associadas aos vínculos excedentes à determinação estática da estrutura. Essas forças e momentos são chamados de *hiperestáticos.*

Para o exemplo das três barras só existe um hiperestático. Uma possível solução parametrizada pelo Método das Forças é obtida pela superposição de soluções básicas dos casos (0) e (1) mostrados na Figura 2.9. O hiperestático escolhido nessa solução é a reação de apoio vertical X_1 (= N_1) e o vínculo associado é a restrição ao deslocamento vertical do apoio central.

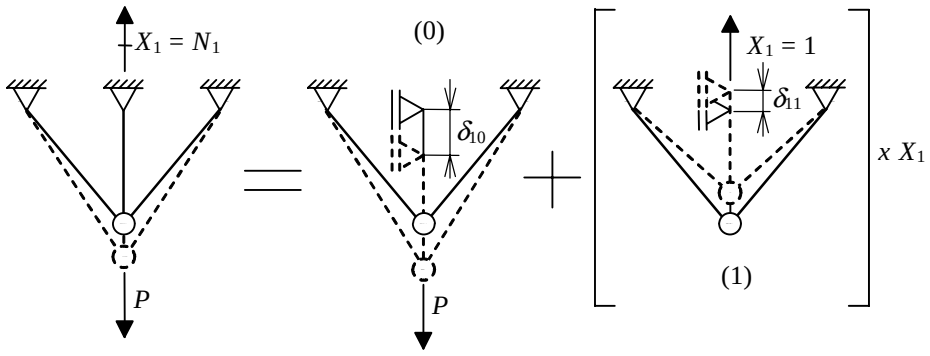


Figura 2.9 – Superposição de soluções básicas do Método das Forças.

Na solução indicada na Figura 2.9, a estrutura utilizada nas soluções básicas é uma estrutura estaticamente determinada (isostática) obtida da estrutura original pela eliminação do vínculo excedente associado ao hiperestático. Essa estrutura isostática auxiliar é chamada de *Sistema Principal* (SP). Cada solução básica isola um determinado efeito ou parâmetro no SP: o efeito da solicitação externa (carregamento) é isolado no caso (0) e o efeito do hiperestático X_1 é isolado no caso (1).

As soluções básicas mostradas na Figura 2.9 violam uma condição de compatibilidade da estrutura original pois o vínculo eliminado libera o deslocamento vertical do apoio central. Por outro lado, as soluções básicas do Método das Forças satisfazem as equações de equilíbrio da estrutura original.

A metodologia de cálculo do Método das Forças determina o valor que o hiperestático deve ter para recompor o vínculo eliminado no SP. Essa condição pode ser expressa matematicamente por uma equação de compatibilidade que superpõe os deslocamentos no vínculo eliminado de cada caso básico:

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \,. \tag{2.9}$$

Nessa equação:

$\delta_{10} \rightarrow$ *termo de carga*: deslocamento vertical no ponto do vínculo eliminado no caso (0);

$\delta_{11} \rightarrow$ *coeficiente de flexibilidade*: deslocamento vertical no ponto do vínculo eliminado devido a um valor unitário do hiperestático aplicado isoladamente.

A Equação (2.9) determina o valor do hiperestático X_1 que faz com que o deslocamento do ponto do vínculo eliminado seja nulo. Dessa forma, o valor correto do esforço normal N_1 (= X_1) é determinado pois a compatibilidade da estrutura original, violada na criação da estrutura auxiliar (SP) utilizada na superposição de casos básicos, é recomposta.

Considerando que deslocamentos verticais são positivos no sentido da força unitária arbitrada para X_1 (para cima), tem-se que os valores do termo de carga e do coeficiente de flexibilidade para esse problema são:

$$\delta_{10} = \frac{-P \cdot l}{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3} \qquad \text{e} \qquad \delta_{11} = \frac{l}{EA} + \frac{l}{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3} \,.$$

Substituindo esses valores na Equação (2.9), pode-se observar que essa equação é exatamente igual à equação de compatibilidade (2.8) encontrada anteriormente.

No Capítulo 5 essa metodologia prática do Método das Forças será formalizada detalhadamente. Essa metodologia está baseada na validade do Princípio da Superposição de Efeitos (veja a Seção 2.4) e serve para resolver qualquer estrutura hiperestática reticulada com comportamento linear.

O Método das Forças é assim denominado pois os hiperestáticos são forças (ou momentos). O método também é denominado *Método da Compatibilidade* (West 1989) pois as equações finais, como no exemplo a Equação (2.9), são equações de compatibilidade escritas em termos dos hiperestáticos.

2.3.2. Método dos Deslocamentos

O segundo método básico da análise de estruturas é o chamado *Método dos Deslocamentos*. Nesse método as incógnitas principais do problema são deslocamentos e rotações. Todas as outras incógnitas são expressas em termos das incógnitas principais escolhidas e substituídas em equações de equilíbrio, que são então resolvidas.

O Método dos Deslocamentos tem como idéia básica determinar, dentro do conjunto de soluções em deslocamentos que satisfazem as condições de compatibilidade, qual a solução que faz com que as condições de equilíbrio também sejam satisfeitas.

Observa-se que o Método dos Deslocamentos ataca a solução de estruturas de maneira inversa ao que é feito pelo Método das Forças. Por isso esses métodos são ditos *duais*. Na formalização do Método dos Deslocamentos a seqüência de introdução das condições básicas também é inversa: primeiro são utilizadas as condições de compatibilidade, em seguida são consideradas as leis constitutivas dos materiais, e finalmente são utilizadas as condições de equilíbrio. O exemplo da Figura 2.7 também vai ser utilizado para mostrar isso.

A incógnita principal escolhida é o alongamento d_1 da barra vertical, que corresponde ao deslocamento vertical D_1 do nó inferior da estrutura (veja a Figura 2.8). O número de incógnitas no Método dos Deslocamentos é igual ao número de incógnitas excedentes nas equações de compatibilidade. No exemplo, existe uma equação de compatibilidade – Equação (2.2) – com duas incógnitas: d_1 e d_2. A escolha de d_1 como principal foi arbitrária.

Utilizando a equação de compatibilidade e as Equações (2.4) e (2.5) da lei constitutiva, pode-se expressar a equação de equilíbrio (2.1) em função da incógnita principal:

$$\left(\frac{EA}{l} + \frac{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3}{l} \right) \cdot d_1 = P \,. \tag{2.10}$$

A solução desta equação fornece o valor de d_1, e substituindo esse resultado na Equação (2.2) tem-se d_2:

$$d_1 = \frac{P}{1 + 2 \cdot (\cos\theta)^3} \cdot \frac{l}{EA} \,;$$

$$d_2 = \frac{P \cdot \cos\theta}{1 + 2 \cdot (\cos\theta)^3} \cdot \frac{l}{EA}.$$

Para encontrar os valores de N_1 e N_2 mostrados anteriormente basta utilizar as Equações (2.4) e (2.5).

Assim como na seção anterior para o Método das Forças, a solução pelo Método dos Deslocamentos apresentada inicialmente nesta seção tem um caráter apenas didático. Na prática é necessário formalizar o método para resolver qualquer tipo de estrutura reticulada. A metodologia adotada na prática faz uma parametrização (discretização) do problema em termos de variáveis independentes, tal como indicado na Seção 1.2.2 do Capítulo 1. No caso do Método dos Deslocamentos, essas variáveis são os parâmetros que definem completamente a configuração deformada da estrutura, que são chamados de *deslocabilidades*.

Para o exemplo das três barras, devido à simetria da estrutura, está sendo considerado que o nó inferior não se desloca lateralmente. Portanto, só existe uma deslocabilidade, que é o deslocamento vertical D_1 do nó inferior. A solução parametrizada pelo Método do Deslocamentos é obtida pela superposição de soluções básicas dos casos (0) e (1) mostrados na Figura 2.10.

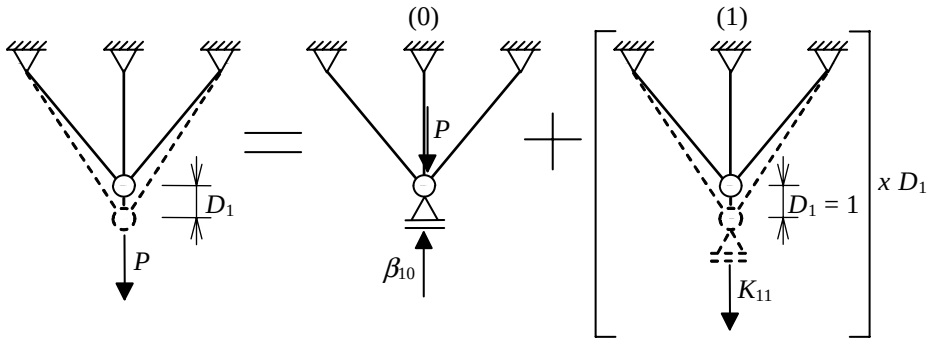


Figura 2.10 – Superposição de soluções básicas do Método dos Deslocamentos.

Na solução indicada na Figura 2.10, a estrutura utilizada nas soluções básicas é uma *estrutura cinematicamente determinada* (estrutura com configuração deformada conhecida) obtida da estrutura original pela adição do vínculo necessário para impedir a deslocabilidade D_1. Essa estrutura cinematicamente determinada auxiliar é chamada de *Sistema Hipergeométrico* (SH). Cada solução básica isola um determinado efeito ou parâmetro no SH: o efeito da solicitação externa (carregamento) é isolado no caso (0) e o efeito da deslocabilidade D_1 é isolado no caso (1).

As soluções básicas mostradas na Figura 2.10 satisfazem as condições de equilíbrio do Sistema Hipergeométrico, mas violam o equilíbrio da estrutura original, que não contém o vínculo adicional que impede a deslocabilidade D_1. Dito de outra maneira, o apoio fictício adicionado no SH introduz uma reação de apoio espúria

que fere o equilíbrio da estrutura original. Deve-se observar que as soluções básicas do Método dos Deslocamentos jamais violam as condições de compatibilidade da estrutura original, isto é, existe continuidade interna (ligação entre as barras) e compatibilidade com os vínculos externos.

A metodologia de cálculo do Método dos Deslocamentos determina o valor que a deslocabilidade D_1 deve ter para recompor o equilíbrio da estrutura original sem o apoio fictício do SH. Essa condição pode ser expressa matematicamente por uma equação de equilíbrio que superpõe as reações no apoio fictício do SH de cada caso básico:

$$\beta_{10} + K_{11} \cdot D_1 = 0 \,. \tag{2.11}$$

Nessa equação:

$\beta_{10} \rightarrow$ *termo de carga*: força (reação) vertical no apoio fictício do caso (0);

$K_{11} \rightarrow$ *coeficiente de rigidez*: força vertical no apoio fictício do SH necessária para impor uma configuração deformada tal que a deslocabilidade D_1 tenha um valor unitário.

A Equação (2.11) determina o valor da deslocabilidade D_1 que faz com que a reação final (na superposição) no apoio fictício do SH seja nula. Dessa forma, o valor correto de D_1 é determinado pois o equilíbrio da estrutura original, violado na criação da estrutura auxiliar (SH) utilizada na superposição de casos básicos, é restabelecido.

Considerando que forças verticais são positivas no sentido do deslocamento unitário arbitrado para D_1 (para baixo), tem-se que os valores do termo de carga e do coeficiente de rigidez para esse problema são:

$$\beta_{10} = -P \qquad \text{e} \qquad K_{11} = \frac{EA}{l} + \frac{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3}{l} \,.$$

Substituindo esses valores na Equação (2.11), pode-se observar que essa equação é exatamente igual à Equação de equilíbrio (2.10) encontrada anteriormente.

No Capítulo 6 essa metodologia prática do Método dos Deslocamentos será formalizada detalhadamente. Assim como para o Método das Forças, essa metodologia está baseada na validade do Princípio da Superposição de Efeitos (veja a Seção 2.4) e serve para resolver qualquer estrutura reticulada com comportamento linear.

O Método dos Deslocamentos é assim denominado pois as incógnitas (deslocabilidades) são deslocamentos (ou rotações). O método também é chamado de *Método do Equilíbrio* (West 1989) pois as equações finais, como no exemplo a Equação (2.11), são equações de equilíbrio tendo como variáveis principais as deslocabilidades.

2.3.3. Comparação entre o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos

Nas duas seções anteriores os dois métodos básicos da análise de estruturas reticuladas foram introduzidos com base em um exemplo simples com três barras articuladas. Como comentado, esses métodos serão apresentados em detalhes em capítulos subseqüentes deste livro. Entretanto, as principais idéias dos dois métodos já foram abordadas e é importante salientar os pontos principais.

Nesta seção é feita uma comparação entre os Métodos das Forças e dos Deslocamentos, mostrando um resumo da metodologia de cada método através da tabela mostrada a seguir, salientando a dualidade entre os dois métodos.

Método das Forças	**Método dos Deslocamentos**
Idéia básica: Determinar, dentro do conjunto de soluções em forças que satisfazem as condições de equilíbrio, qual a solução que faz com que as condições de compatibilidade também sejam satisfeitas.	***Idéia básica:*** Determinar, dentro do conjunto de soluções em deslocamentos que satisfazem as condições de compatibilidade, qual a solução que faz com que as condições de equilíbrio também sejam satisfeitas.
Metodologia: Superpor uma série de soluções estaticamente determinadas (isostáticas) que satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura para obter uma solução final que também satisfaz as condições de compatibilidade.	***Metodologia:*** Superpor uma série de soluções cinematicamente determinadas (configurações deformadas conhecidas) que satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura para obter uma solução final que também satisfaz as condições de equilíbrio.
Incógnitas: Hiperestáticos: forças e momentos associados a vínculos excedentes à determinação estática da estrutura.	***Incógnitas:*** Deslocabilidades: componentes de deslocamentos e rotações nodais que definem a configuração deformada da estrutura.
Número de incógnitas: É o número de incógnitas excedentes das equações de equilíbrio, denominado *grau de hiperestaticidade*.	***Número de incógnitas:*** É o número de incógnitas excedentes das equações de compatibilidade, denominado *grau de hipergeometria*.

Estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas: Sistema Principal (SP): estrutura estaticamente determinada (isostática) obtida da estrutura original pela eliminação dos vínculos excedentes associados aos hiperestáticos. Essa estrutura auxiliar viola condições de compatibilidade da estrutura original.	***Estrutura auxiliar utilizada nas soluções básicas:*** Sistema Hipergeométrico (SH): estrutura cinematicamente determinada (estrutura com configuração deformada conhecida) obtida da estrutura original pela adição dos vínculos necessários para impedir as deslocabilidades. Essa estrutura auxiliar viola condições de equilíbrio da estrutura original.
Equações finais: São equações de compatibilidade expressas em termos dos hiperestáticos. Essas equações recompõem as condições de compatibilidade violadas nas soluções básicas.	***Equações finais:*** São equações de equilíbrio expressas em termos das deslocabilidades. Essas equações recompõem as condições de equilíbrio violadas nas soluções básicas.
Termos de carga das equações finais: Deslocamentos e rotações nos pontos dos vínculos liberados no SP devidos à solicitação externa (carregamento).	***Termos de carga das equações finais:*** Forças e momentos (reações) nos vínculos adicionados no SH devidos à solicitação externa (carregamento)
Coeficientes das equações finais: Coeficientes de flexibilidade: deslocamentos e rotações nos pontos dos vínculos liberados no SP devidos a hiperestáticos com valores unitários atuando isoladamente.	***Coeficientes das equações finais:*** Coeficientes de rigidez: forças e momentos nos vínculos adicionados no SH para impor configurações deformadas com deslocabilidades isoladas com valores unitários.

2.4. Comportamento linear e superposição de efeitos

Como visto nas seções anteriores, na formalização dos métodos básicos da análise estrutural o *Princípio da Superposição de Efeitos* (White *et al.* 1976, West 1989, Felton & Nelson 1996) é adotado. Esse princípio prescreve que a superposição dos campos de deslocamentos provocados por vários sistemas de forças atuando isoladamente é igual ao campo de deslocamentos provocado pelos mesmos sistemas de forças atuando concomitantemente. A Figura 2.11 exemplifica esse princípio mostrando que a combinação linear de duas forças resulta nos mesmos deslocamentos

da combinação linear dos deslocamentos provocados pelas forças atuando isoladamente.

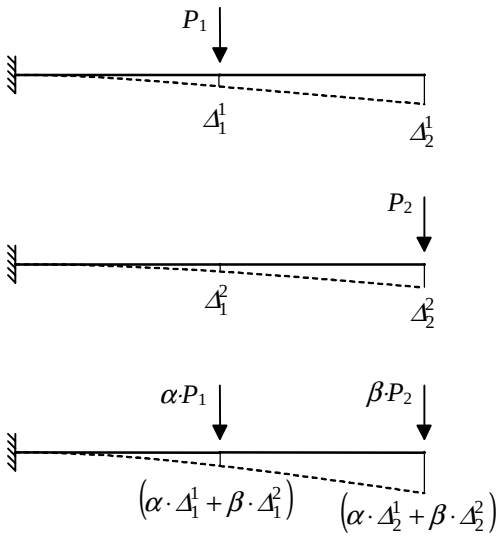


Figura 2.11 – Combinação linear de duas forças e os correspondentes deslocamentos.

Para que se possa utilizar esse princípio é necessário que a estrutura tenha um comportamento linear. O comportamento linear de uma estrutura está baseado em duas condições. A primeira é que o material trabalhe no regime elástico-linear. A segunda condição é que seja válida a hipótese de pequenos deslocamentos.

Conforme abordado na Seção 2.2.1, os deslocamentos podem ser considerados pequenos quando as equações de equilíbrio escritas para a geometria indeformada da estrutura fornecem resultados praticamente iguais aos obtidos pelas mesmas equações de equilíbrio escritas para a geometria deformada da estrutura (White *et al.* 1976).

Exceto em casos particulares, as estruturas civis têm deslocamentos pequenos em comparação aos tamanhos característicos dos seus membros (comprimento da barra ou altura da seção transversal, por exemplo). Um contra-exemplo, para o qual não é possível adotar a hipótese de pequenos deslocamentos, é mostrado na Figura 2.12 (White *et al.* 1976). Essa estrutura tem duas barras e três rótulas alinhadas, e o estado de equilíbrio estável só pode ser alcançado para a estrutura na configuração deformada. Cabos, que são estruturas muito flexíveis, são um outro exemplo de estruturas cujo equilíbrio é alcançado na geometria final, considerando os seus deslocamentos sobrepostos à geometria inicial indeformada. Essas estruturas não serão tratadas neste livro, e serão classificadas como *instáveis*.

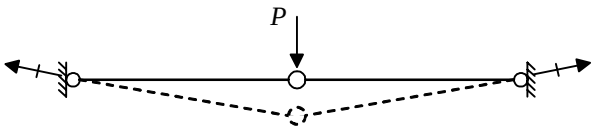


Figura 2.12 – Exemplo de uma estrutura para a qual não se pode adotar pequenos deslocamentos.

Existem exemplos clássicos de estruturas instáveis, tais como as mostradas na Figura 2.13 (White *et al.* 1976). O pórtico da Figura 2.13-a apresenta três componentes de reação de apoio que são verticais, não existindo nenhum vínculo que impeça o movimento horizontal do pórtico. A estrutura da Figura 2.13-b tem três reações concorrentes em um ponto. Portanto, na configuração indeformada, não é possível equilibrar o momento de forças atuantes, tal como a carga *P*, em relação ao ponto de convergência das reações de apoio. Nesse caso, talvez o equilíbrio pudesse ser alcançado na configuração deformada da estrutura, quando as reações deixariam de concorrer em um ponto. Mesmo assim, essa estrutura sempre apresentaria um estado de instabilidade eminente.

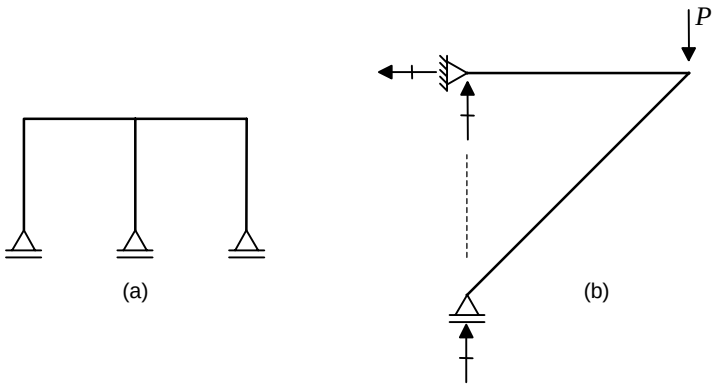


Figura 2.13 – Exemplos de estruturas instáveis pela configuração dos apoios externos.

A dependência do comportamento linear com a hipótese de pequenos deslocamentos pode ser entendida a partir do exemplo da Figura 2.14. Nessa estrutura, o deslocamento vertical da extremidade inferior do balanço, δa, depende das características geométricas das barras, assim como dos valores das forças *V* e *H* e das propriedades do material da estrutura.

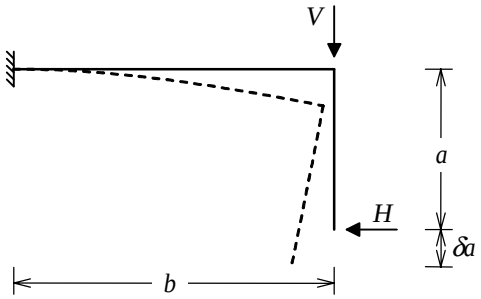


Figura 2.14 – Configuração deformada de um pórtico em forma de "L".

Considerando que a estrutura da Figura 2.14 tem um material elástico-linear e seções transversais pré-definidas, e que as forças estão sempre atuando nos mesmos pontos, o comportamento da estrutura, no que diz respeito aos seus deslocamentos, depende apenas das características geométricas da estrutura (*a* e *b*) e dos valores das cargas (*V* e *H*), que podem variar. Duas situações podem ser consideradas:

- Deslocamento δa com um valor que não pode ser desprezado em relação às dimensões *a* e *b*, de tal maneira que as condições de equilíbrio devem ser escritas para a geometria deformada. Nesse caso, $\delta a = \delta a(V, H, a+\delta a, b)$, ou seja, a determinação de δa depende do conhecimento do seu próprio valor. Isto caracteriza o que se define como *não-linearidade geométrica* (White *et al.* 1976).
- Deslocamento δa com um valor muito menor do que as dimensões *a* e *b*, de tal maneira que as condições de equilíbrio podem ser escritas para a geometria original indeformada. Nesse caso pode-se dizer que $\delta a = \delta a(V, H, a, b)$, ou seja, não existe dependência de δa em relação a si próprio. Como todas as outras propriedades são lineares, o comportamento da estrutura é linear. Isto é, δa varia linearmente em função dos valores das cargas.

No caso em que os deslocamentos não são pequenos, a determinação de δa em geral não tem solução analítica simples. Nesse caso, o valor de δa pode ser determinado através de algum processo iterativo. Por exemplo, partindo-se de um valor inicial que poderia ser nulo, determina-se o valor seguinte considerando um comportamento linear. Com os valores de deslocamentos calculados no passo anterior, atualiza-se a geometria da estrutura e determina-se o valor seguinte de δa. Esse processo se repete até que o valor determinado em um passo não difira significativamente do valor do passo anterior. Esse processo pode não convergir, e nesse caso a estrutura é instável.

Um exemplo isostático simples (White *et al.* 1976) é mostrado na Figura 2.15 para ilustrar o efeito da não-linearidade geométrica. A configuração deformada da estrutura está indicada pelas linhas tracejadas da figura. Na configuração indeformada o ângulo entre as barras e o eixo vertical é θ, e na configuração deformada o

ângulo é α. Nesse exemplo os deslocamentos não são considerados pequenos e a equação de equilíbrio que relaciona a força aplicada P com o esforço normal N nas barras é escrita na configuração final (deformada) da estrutura, tal como expresso na Equação (2.12).

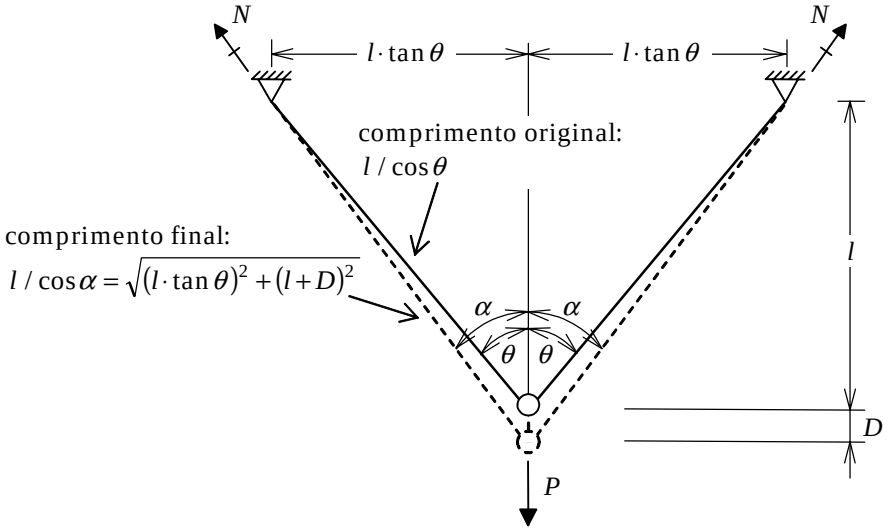


Figura 2.15 – Estrutura isostática com grandes deslocamentos.

$$P = 2 \cdot N \cdot \cos\alpha = 2 \cdot N \cdot \frac{l + D}{\sqrt{(l \cdot \tan\theta)^2 + (l + D)^2}} . \tag{2.12}$$

Com base na Figura 2.15, pode-se relacionar o alongamento d das barras com o deslocamento vertical D do nó central. O alongamento das barras é a diferença entre o comprimento final (deformado) das barras e o comprimento original (indeformado), resultando na seguinte relação de compatibilidade:

$$d = \sqrt{(l \cdot \tan\theta)^2 + (l + D)^2} - l / \cos\theta . \tag{2.13}$$

Para obter a resposta do problema em termos de deslocamentos, é necessário considerar a relação tensão-deformação do material. Considerando a deformação nas barras como a razão entre o alongamento e o comprimento original da barra, ela resulta em uma expressão que relaciona o esforço normal das barras com o seu alongamento:

$$N = \frac{EA}{(l / \cos\theta)} \cdot d \tag{2.14}$$

Substituindo o alongamento *d* dado pela Equação (2.13) na Equação (2.14), e depois substituindo o esforço normal *N* na Equação (2.12), isso resulta em uma expressão que relaciona a força aplicada *P* com o deslocamento vertical *D*:

$$P = 2 \cdot \frac{EA \cdot \cos\theta}{l} \cdot \left(\sqrt{(l \cdot \tan\theta)^2 + (l+D)^2} - l/\cos\theta \right) \cdot \frac{l+D}{\sqrt{(l \cdot \tan\theta)^2 + (l+D)^2}}.$$

Simplificando essa expressão, tem-se:

$$P = 2 \cdot EA \cdot (l+D) \cdot \left(\frac{\cos\theta}{l} - \frac{1}{\sqrt{(l \cdot \tan\theta)^2 + (l+D)^2}} \right). \tag{2.15}$$

A relação entre a força *P* e o deslocamento *D* da Equação (2.15) é mostrada na Figura 2.16 para alguns valores do ângulo θ da configuração indeformada da estrutura. Os valores da força aplicada foram normalizados pela razão *P/EA* e os valores dos deslocamentos foram normalizados pela razão *D/l*.

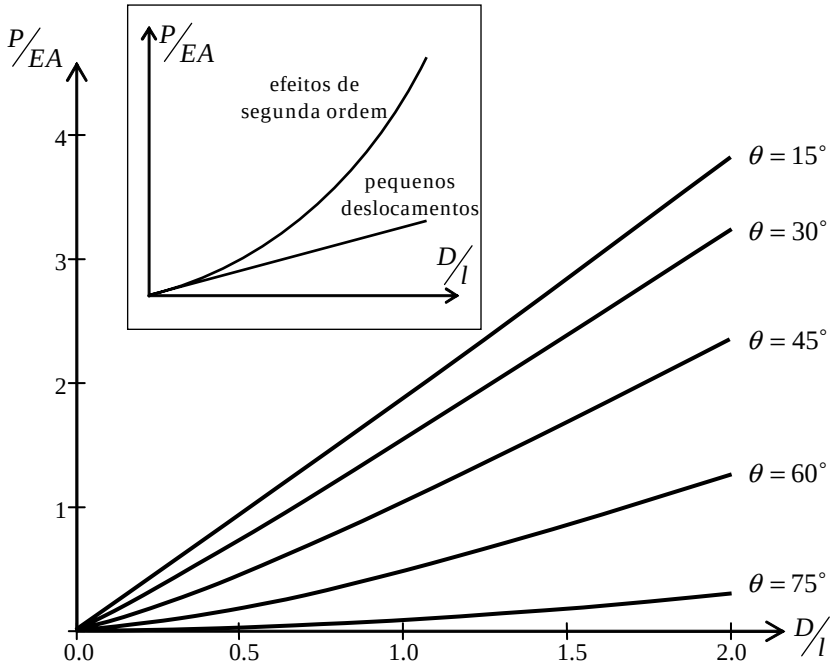


Figura 2.16 – Curvas carga-deslocamento para estrutura isostática com grandes deslocamentos.

Com base na Figura 2.16 pode-se observar a natureza não linear da resposta da estrutura para grandes deslocamentos. A curva carga-deslocamento para o caso da estrutura achatada (ângulo θ grande) é a que apresenta maior grau de não-linearidade, enquanto a curva para o caso da estrutura alongada (ângulo θ peque-

no) é praticamente linear. Nota-se também que a estrutura mais alongada é a mais rígida (valor de carga mais alto para um dado valor de deslocamento).

É interessante comparar a resposta não linear dada pela Equação (2.15) com a resposta linear da estrutura da Figura 2.15 para pequenos deslocamentos. A resposta linear é obtida igualando os ângulos θ e α, e considerando $d = D \cdot \cos\theta$, tal como na Equação (2.2). Isto resulta na seguinte relação carga-deslocamento:

$$P_{linear} = \frac{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3}{l} \cdot D \,. \tag{2.16}$$

Pode-se comparar a Equação (2.16) com a derivada da resposta não linear avaliada para $D = 0$:

$$\frac{dP(0)}{dD} = \frac{2 \cdot EA \cdot (\cos\theta)^3}{l} \,. \tag{2.17}$$

Vê-se que o coeficiente angular da resposta linear é igual à derivada da curva carga-deslocamento não linear para $D = 0$, tal com indica o detalhe da Figura 2.16. Isso mostra que a resposta linear é uma aproximação da resposta não linear para pequenos deslocamentos.

Esse estudo do comportamento não linear de uma estrutura indica que a solução para grandes deslocamentos pode ser relativamente complexa, mesmo para o caso de uma estrutura bastante simples como a da Figura 2.15. De uma certa maneira, o comportamento de todas as estruturas é não linear para o caso de uma análise exata que envolveria a consideração dos deslocamentos da estrutura nas equações de equilíbrio (equilíbrio imposto na configuração deformada). Entretanto (e felizmente), para os casos mais freqüentes de estruturas civis, os deslocamentos são tão pequenos (para cargas usuais) que podem ser desconsiderados quando se formulam as condições de equilíbrio.

Neste livro só serão consideradas estruturas para as quais pode-se adotar a hipótese de pequenos deslocamentos (equações de equilíbrio sempre escritas para a forma indeformada da estrutura). Essa hipótese é básica, juntamente com o comportamento linear dos materiais, para a utilização do princípio da superposição de efeitos (White *et al.* 1976).

Como dito anteriormente, esse princípio é aplicado nos métodos básicos da análise de estruturas, que são métodos lineares. Deve-se observar que métodos lineares de análise também são adotados em cada passo de um processo iterativo de análise não linear.

2.5. Estruturas estaticamente determinadas e indeterminadas

Foi visto na Seção 2.2.1 que existe um caso especial de estruturas que podem ter seus esforços internos e externos (reações de apoio) determinados apenas por condições de equilíbrio. Essas estruturas são definidas como *estruturas estaticamente determinadas* ou *estruturas isostáticas*. As estruturas que não podem ter seus esforços internos e externos determinados apenas pelas condições de equilíbrio são definidas como *estruturas estaticamente indeterminadas* (*estruturas hiperestáticas*). Esta seção faz uma comparação entre o comportamento das estruturas isostáticas e hiperestáticas, mostrando suas vantagens e desvantagens, e justificando as razões das últimas aparecerem mais freqüentemente.

Essa comparação é feita utilizando um pórtico plano (White *et al.* 1976, West 1989), mostrado na Figura 2.17, que aparece em duas versões. Na primeira (Figura 2.17-a), as condições de suporte são tais que se pode determinar as reações de apoio utilizando somente condições de equilíbrio. Como o pórtico é um quadro aberto (não existe um ciclo fechado de barras), pode-se determinar os esforços internos em qualquer seção a partir apenas destas condições, e, portanto, a estrutura é isostática. A segunda versão do pórtico (Figura 2.17-b) apresenta um vínculo externo excedente em relação à estabilidade estática, isto é, existem quatro componentes de reação de apoio para três equações de equilíbrio global da estrutura. Essas equações de equilíbrio global expressam as condições de somatório das forças horizontais nulo, somatório das forças verticais nulo e somatório dos momentos em relação a um ponto do plano nulo. A próxima seção apresenta um procedimento geral para determinação do grau de hiperestaticidade, isto é, do número de vínculos excedentes em relação à estabilidade estática, de pórticos planos e grelhas.

A Figura 2.17 mostra as reações de apoio nos dois pórticos. Devido à simetria dos quadros, as reações verticais têm valores iguais à metade da carga vertical aplicada (P). O pórtico isostático tem reação horizontal do apoio da esquerda nula, pois este é o único apoio que restringe o deslocamento horizontal do quadro e não existem forças horizontais aplicadas. Já o pórtico hiperestático tem os valores das reações horizontais iguais, sendo as reações com sentidos inversos para garantir o equilíbrio na direção horizontal. O valor destas reações (H) é indefinido quando se consideram somente as condições de equilíbrio.

Intuitivamente é fácil de se verificar que os sentidos das reações horizontais da estrutura hiperestática são "para dentro" do pórtico. Na Figura 2.17-a, a configuração deformada da estrutura isostática, mostrada de forma exagerada (linha tracejada), indica uma tendência das barras verticais se afastarem relativamente. Na estrutura hiperestática a barra vertical da direita tem seu movimento horizontal restrito na base. Como a tendência é de "abrir" o pórtico, a reação associada a essa restrição vai "fechar" o pórtico, isto é, com sentido "para dentro".

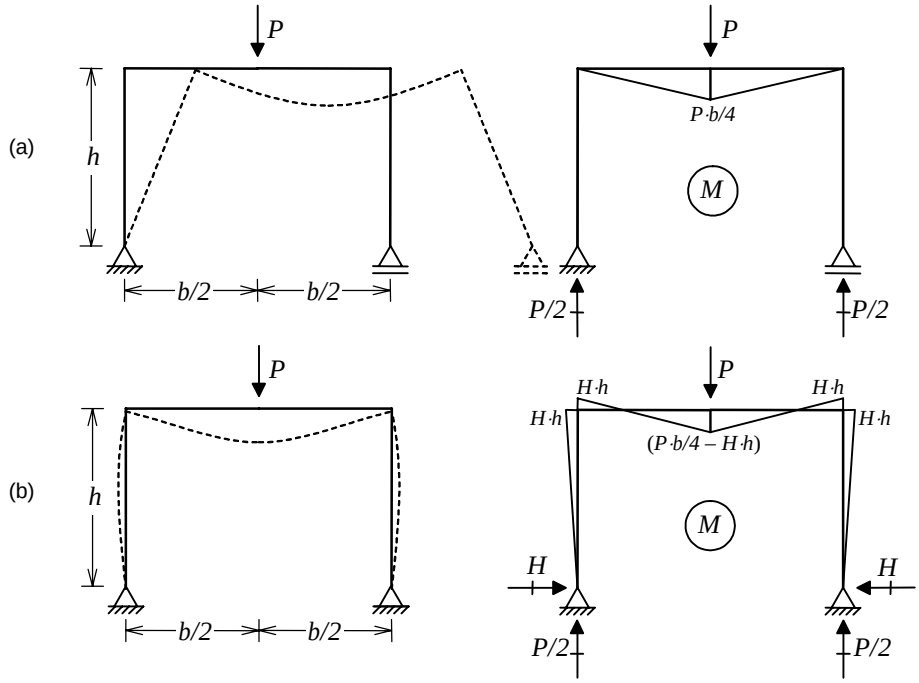


Figura 2.17 – Quadros isostático (a) e hiperestático (b), configurações deformadas, reações de apoio e diagramas de momentos fletores.[1]

Esse exemplo ilustra bem uma característica da estrutura hiperestática: existem infinitas soluções que satisfazem as condições de equilíbrio (nesse caso existem infinitos valores possíveis para a reação horizontal H). Como visto na Seção 2.3, para determinar o valor de H, as condições de compatibilidade e as leis constitutivas dos materiais também são necessárias. Isto torna a resolução da estrutura hiperestática mais complexa.

Apesar dessa desvantagem da estrutura hiperestática, a maioria das estruturas é estaticamente indeterminada. Isto se deve aos seguintes motivos (White *et al.* 1976):

1. Algumas formas estruturais são intrinsecamente hiperestáticas, tais como o esqueleto de um edifício (conjunto de lajes, vigas e pilares), a casca de uma cobertura ou uma treliça espacial.
2. Os esforços internos em uma estrutura hiperestática têm, em geral, uma distribuição mais otimizada ao longo da estrutura. Isto pode levar a menores

[1] A convenção adotada neste livro para o traçado do diagrama de momentos fletores é tal que o digrama é sempre desenhado do lado da fibra tracionada da seção transversal da barra.

valores para os esforços máximos. No caso das estruturas da Figura 2.17, o máximo valor de momento fletor ocorre para o meio da barra horizontal (viga) da estrutura isostática, embora essa estrutura não apresente momentos fletores nas barras verticais (colunas). A viga da estrutura hiperestática apresenta máximo momento menor do que na viga da estrutura isostática, mas as colunas são requisitadas à flexão.

3. Na estrutura hiperestática há um controle maior dos esforços internos por parte do analista estrutural. Isto pode ser entendido com auxílio da Figura 2.18. O quadro hiperestático dessa figura apresenta três situações para a rigidez relativa entre a viga e as colunas. Na Figura 2.18-a, as colunas são muito mais rígidas do que a viga, fazendo com que as rotações das extremidades da viga sejam muito pequenas, se aproximando do caso de uma viga com extremidades engastadas. Na Figura 2.18-c, por outro lado, a viga é muito mais rígida do que as colunas, a ponto destas não oferecerem impedimento às rotações das extremidades da viga, que se aproxima do comportamento de uma viga simplesmente apoiada. A Figura 2.18-b apresenta um caso intermediário. Observa-se como os diagramas de momentos fletores da viga podem ser alterados, de um comportamento bi-engastado para um bi-apoiado, com a variação da rigidez relativa entre os elementos estruturais. Observa-se também que as reações de apoio horizontais do pórtico têm valores distintos para cada uma das situações. Isto só é possível no caso de estruturas hiperestáticas. O analista estrutural pode explorar essa característica da estrutura hiperestática minimizando ao máximo, dentro do possível, os esforços internos na estrutura. Isto não pode ser feito para uma estrutura isostática. No quadro da Figura 2.17-a, as reações de apoio e o diagrama de momentos fletores independem dos parâmetros de rigidez relativos entre viga e colunas. Na estrutura isostática, as reações só dependem da geometria da estrutura e do valor da carga. O diagrama de momentos fletores só depende dos valores da carga e reações, e da geometria da estrutura.

4. Em uma estrutura hiperestática os vínculos excedentes podem induzir uma segurança adicional. Se uma parte de uma estrutura hiperestática por algum motivo perder sua capacidade resistiva, a estrutura como um todo ainda pode ter estabilidade. Isto porque a estrutura hiperestática pode ter uma capacidade de redistribuição de esforços, o que não ocorre para estruturas isostáticas. Dois exemplos dessa capacidade estão mostrados na Figura 2.19. Se a diagonal comprimida D_1 da treliça hiperestática da Figura 2.19-a perder a estabilidade por flambagem, a outra diagonal D_2, que trabalha à tração, ainda tem condições de dar estabilidade à estrutura. O aparecimento de uma rótula plástica na extremidade da direita da viga da Figura 2.19-b, onde aparece o diagrama de momentos fletores com momento de plastificação M_p, não acarretaria a destruição da estrutura, pois ela se comportaria como uma viga simplesmente apoiada, ainda estável.

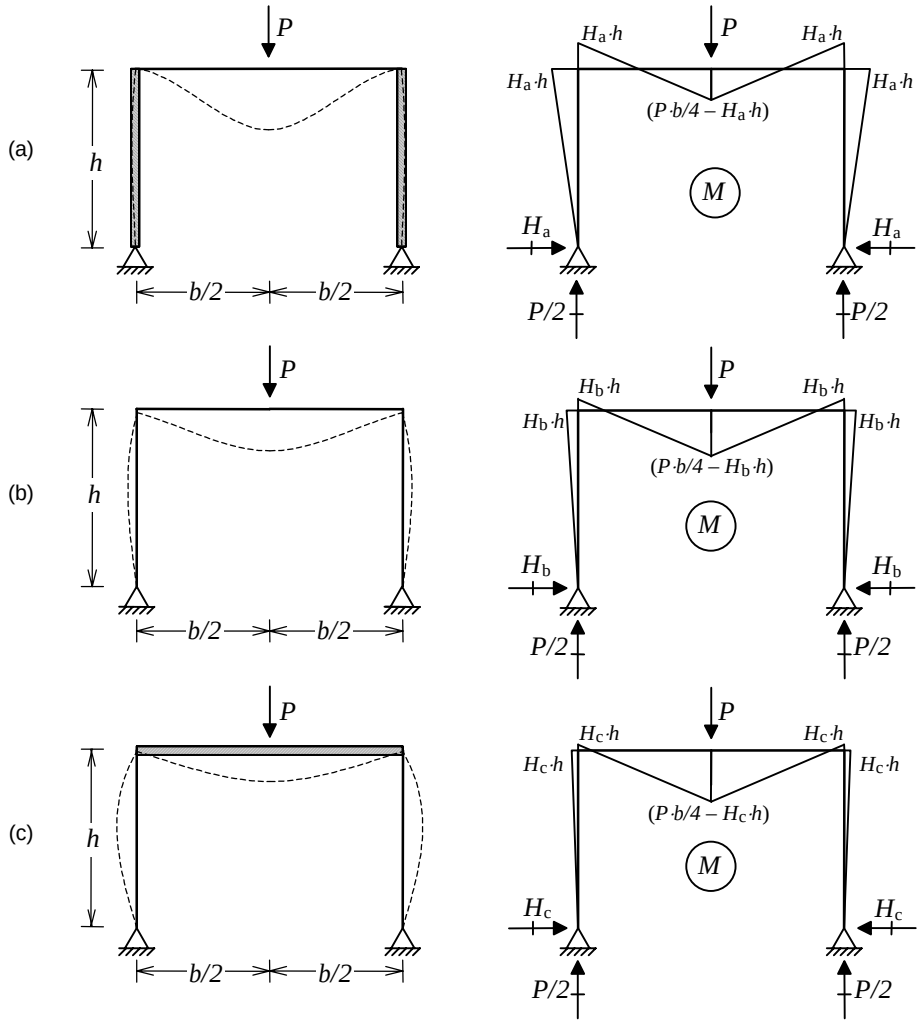


Figura 2.18 – Variação do diagrama de momentos fletores em um quadro hiperestático em função da rigidez relativa entre viga e colunas.

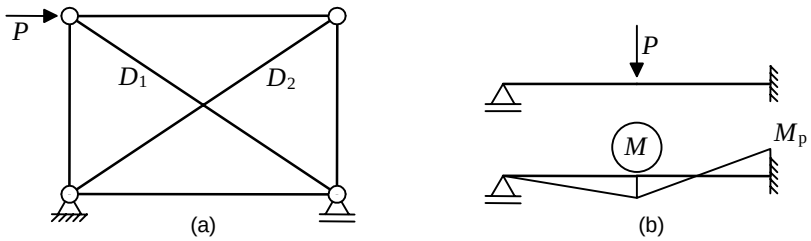


Figura 2.19 – Estruturas hiperestáticas que podem apresentar uma segurança adicional.

Pode-se concluir que as estruturas isostáticas deveriam ser evitadas por não oferecerem capacidade de redistribuição de esforços. Até certo ponto isto é verdade, mas existem algumas vantagens da estrutura isostática. Essas vantagens são decorrência da própria característica da estrutura isostática de ter seus esforços internos definidos única e exclusivamente pelas cargas aplicadas e pela geometria da estrutura, não existindo dependência quanto às propriedades dos materiais e de rigidez das barras.

Do ponto de vista físico, uma estrutura isostática tem o número exato de vínculos (externos e internos) para que tenha estabilidade. Retirando-se um destes vínculos, a estrutura se torna instável, e é definida como *hipostática*. Adicionando-se um vínculo qualquer a mais, este não seria o necessário para dar estabilidade à estrutura, e ela se torna hiperestática.

Pode-se observar que pequenas variações na geometria da estrutura isostática (mantendo-se válida a hipótese de pequenos deslocamentos), por não alterarem as equações de equilíbrio, não introduzem esforços adicionais.

Dessa forma, se os vínculos externos de uma estrutura isostática sofrerem pequenos deslocamentos (recalques de apoio), só introduzirão movimentos de corpo rígido das barras, não causando deformações internas e por conseguinte não havendo esforços internos. Para estruturas hiperestáticas, entretanto, um movimento de apoio pode induzir deformações nas barras da estrutura, provocando esforços. A Figura 2.20 exemplifica essa diferença de comportamento para uma viga biapoiada e outra apoiada e engastada.

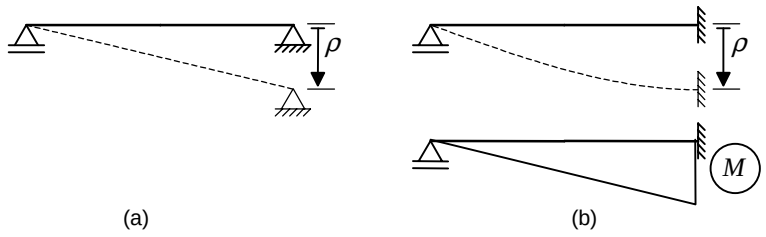


Figura 2.20 – Recalque de apoio em viga isostática e em viga hiperestática.

As vigas da Figura 2.20 sofrem um recalque vertical (ρ) no apoio da direita que pode ser considerado pequeno em relação ao comprimento da viga (o recalque está desenhado exageradamente fora de escala). Vê-se na Figura 2.20-a que a viga isostática não se deforma, tendo apenas um movimento de corpo rígido sem o aparecimento de esforços internos. Já a viga hiperestática da Figura 2.20-b tem deformações que induzem momentos fletores na estrutura.

Recalques de apoio são solicitações que devem ser consideradas em estruturas hiperestáticas, podendo acarretar esforços internos dimensionantes. O fato de não

aparecerem esforços internos em estruturas isostáticas devidos a movimentos de apoio pode ser considerado uma vantagem deste tipo de estrutura.

De forma análoga, deformações provenientes de variações de temperatura provocam deslocamentos sem que apareçam esforços internos em estruturas isostáticas. Intuitivamente isto pode ser entendido se for observado que a estrutura isostática tem o número estrito de vínculos para impedir seus movimentos, não impedindo, por exemplo, uma pequena variação de comprimento de uma barra devido a aquecimento. Assim como os recalques de apoio, as variações de temperatura em membros de uma estrutura hiperestática podem induzir esforços que devem ser considerados.

Outra vantagem da estrutura isostática é que ela se acomoda a pequenas modificações impostas em sua montagem ou construção, sem que apareçam esforços. Por exemplo, se uma barra de uma treliça isostática tiver sido fabricada com uma pequena imperfeição em seu comprimento, as outras barras da estrutura se acomodam perfeitamente à nova geometria (que pode ser considerada para fins de equilíbrio praticamente igual à geometria de projeto porque as imperfeições são pequenas). Isto pode ser entendido intuitivamente se for considerado que a treliça isostática sem a barra imperfeita se constitui em um *mecanismo* instável do ponto de vista estático. A geometria do restante da treliça pode ser alterada sem resistência pois o mecanismo se comporta como uma *cadeia cinemática*. Portanto, as outras barras facilmente se acomodam ao comprimento modificado da barra fabricada com imperfeição.

2.6. Determinação do grau de hiperestaticidade

Existem várias formas de se determinar o grau de hiperestaticidade de uma estrutura. Esta seção apresenta um procedimento geral para a determinação do grau de hiperestaticidade para pórticos planos e comenta sobre a determinação para grelhas. O grau de hiperestaticidade (g) pode ser definido da seguinte maneira:

g = (*nº de incógnitas do problema estático*) – (*nº de equações de equilíbrio*).

As incógnitas do problema estático dependem dos vínculos de apoio da estrutura e da existência de ciclos fechados (aqui chamados de *anéis*). Cada componente de reação de apoio é uma incógnita, isto é, aumenta em uma unidade o grau de hiperestaticidade.

Por outro lado, cada anel de um quadro plano aumenta em três unidades o grau de hiperestaticidade. Isto pode ser entendido com base na Figura 2.21. Considerando um carregamento arbitrário solicitando a estrutura, as três componentes de reação de apoio da estrutura H_A, V_A e V_B (veja Figura 2.21-a) podem ser determinadas pelas três equações do equilíbrio global da estrutura no plano:

$\sum F_x = 0 \rightarrow$ somatório de forças na direção horizontal igual a zero;

$\sum F_y = 0 \rightarrow$ somatório de forças na direção vertical igual a zero;

$\sum M_o = 0 \rightarrow$ somatório de momentos em relação a um ponto qualquer igual a zero.

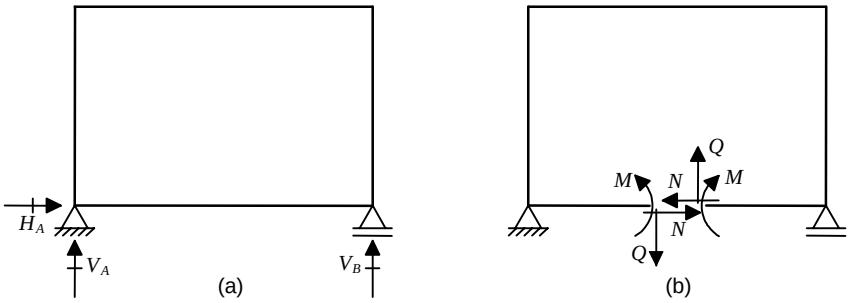


Figura 2.21 – Pórtico plano externamente isostático e com hiperestaticidade interna devida a um anel.

Apesar de ser possível determinar as reações de apoio do quadro da Figura 2.21 utilizando apenas equações de equilíbrio, não é possível determinar os esforços internos nas barras da estrutura só com base em equilíbrio. Isto porque ao se seccionar a estrutura em qualquer seção de uma barra não se divide a estrutura em duas porções. Portanto, não se pode isolar dois trechos da estrutura de cada lado da seção, o que é necessário para determinar os valores dos três esforços internos por equilíbrio. É possível dividir a estrutura em duas porções se outra seção for seccionada. Entretanto, apareceriam mais três outras incógnitas, que seriam os esforços internos na outra seção. Dessa forma, observa-se que um anel introduz três incógnitas para o problema do equilíbrio estático.

Pode-se resumir o número de incógnitas do problema estático de quadros planos como:

(*n° de incógnitas do problema estático*) = (*n° de componentes de reação de apoio*) + 3 · (*n° de anéis*).

Com respeito ao número de equações de equilíbrio, deve-se considerar as três equações que garantem o equilíbrio global da estrutura e as equações provenientes de liberações de continuidade interna na estrutura. Neste livro estão sendo consideradas apenas liberações de continuidade de rotação, que são provocadas por rótulas (articulações internas) na estrutura. Dessa forma,

(*n° de equações de equilíbrio*) = (*3 equações do equilíbrio global*) + (*n° de equações vindas de articulações internas*).

Considerando que a equação do equilíbrio global de momentos em qualquer ponto da estrutura já está contabilizada nas equações globais, cada rótula simples (na qual convergem apenas duas barras, veja Figura 2.22-a) introduz apenas uma condição de equilíbrio, que impõe que o momento fletor na seção da rótula seja nulo. Embora o momento fletor tenha que ser nulo de cada lado da rótula, a imposição

de momento fletor nulo apenas por um lado da rótula já garante que o momento fletor entrando pelo outro lado também seja nulo, posto que o equilíbrio global de momentos no ponto da rótula já foi considerado.

Para o caso de articulações com três barras convergindo, tal como no quadro da Figura 2.22-b, são duas as equações adicionais de equilíbrio a serem consideradas: o momento fletor deve ser imposto nulo entrando por duas das barras adjacentes, sendo que não é necessário impor momento fletor nulo entrando pela terceira barra pois o equilíbrio global de momentos já garante esta condição. Esta conclusão pode ser generalizada da seguinte maneira:

- O número adicional (em relação às equações de equilíbrio global) de equações de equilíbrio (momento fletor nulo) introduzido por uma articulação completa na qual convergem n barras é igual a $n - 1$.

Nesse contexto, uma *articulação completa* é aquela em que *todas* as seções de barras adjacentes são articuladas. A Figura 2.22-c mostra um pórtico com um nó no qual convergem três barras, sendo que apenas uma delas é articulada. Neste caso, a rótula introduz apenas uma equação adicional de equilíbrio.

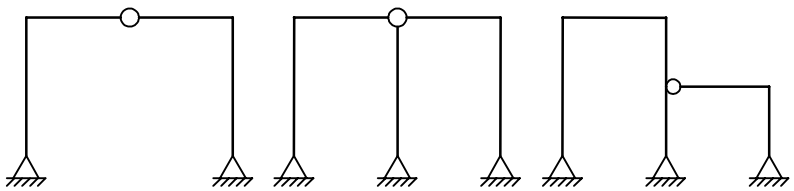


Figura 2.22 – Pórticos planos com articulações internas:
(a) rótula simples (duas barras convergindo na articulação);
(b) rótula com três barras convergindo;
(c) nó com três barras convergindo, mas apenas uma barra articulada.

Resumindo, o grau de hiperestaticidade de um pórtico plano pode ser definido como:

g = [(*nº de componentes de reação de apoio*) + 3 · (*nº de anéis*)] –
[3 + (*nº de equações vindas de articulações internas*)].

O grau de hiperestaticidade das estruturas mostradas na Figura 2.22 podem ser determinados com base na metodologia apresentada acima. Todos os apoios das estruturas impedem os deslocamentos nos pontos do apoio, mas não impedem as rotações da seção do apoio. Este tipo de apoio é definido como do *2º gênero*, e apresenta duas componentes de reações de apoio, uma na direção horizontal e outra na vertical. O pórtico da Figura 2.22-a é isostático pois $g = [(4) + 3 \cdot (0)] - [3 + (1)] = 0$. O quadro hiperestático da Figura 2.22-b tem $g = [(6) + 3 \cdot (0)] - [3 + (2)] = 1$. E a estrutura da Figura 2.22-c tem $g = [(6) + 3 \cdot (0)] - [3 + (1)] = 2$.

A Figura 2.23 mostra alguns exemplos de cálculo do grau de hiperestacidade de pórticos planos. Os números de componentes de reação de cada apoio estão indicados na figura.

Observe, no exemplo da Figura 2.23-e, que a barra horizontal inferior poderia ter sido considerada como um tirante pois trabalha somente a esforço axial (se não tiver carregamento). A determinação de g considerando o tirante teria quatro incógnitas (três reações e o esforço normal no tirante) e quatro equações (três do equilíbrio global e uma da rótula superior), resultando em $g = 0$. O exemplo demonstra que a metodologia apresentada para determinação do grau de hiperestaticidade de pórticos planos é geral.

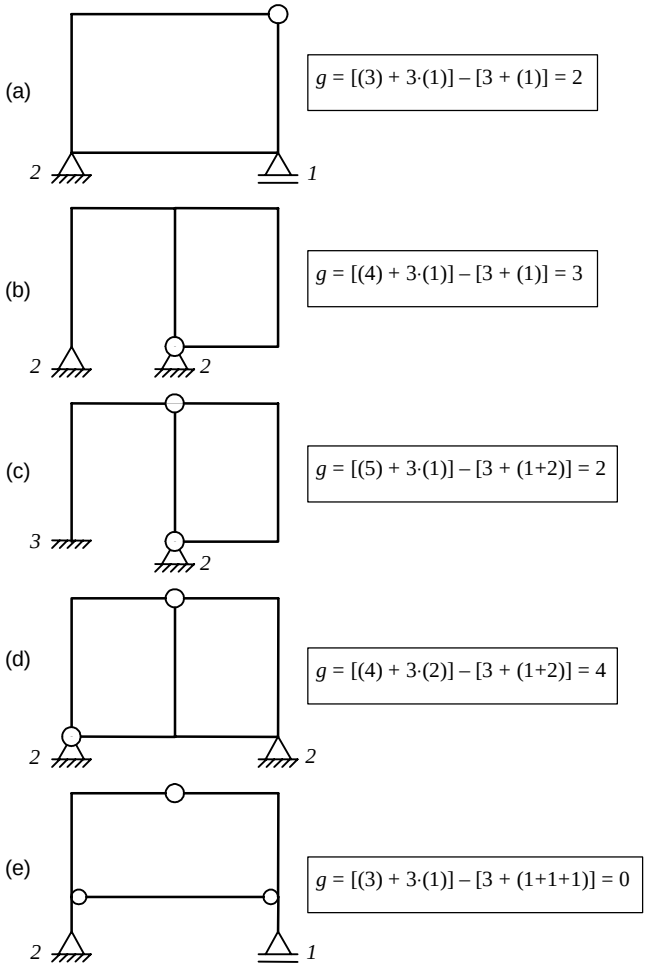


Figura 2.23 – Exemplos de determinação do grau de hiperestaticidade de quadros planos.

A determinação do grau de hiperestaticidade para grelhas é análoga ao procedimento adotado para pórticos planos. Como visto na Seção 2.1, grelhas são estruturas planas com carregamento transversal ao plano. Portanto, considerando que o plano da grelha contém os eixos *X* e *Y*, são três equações globais de equilíbrio:

$\sum F_z = 0 \rightarrow$ somatório de forças na direção do eixo vertical *Z* igual a zero;

$\sum M_x = 0 \rightarrow$ somatório de momentos em torno do eixo *X* igual a zero;

$\sum M_y = 0 \rightarrow$ somatório de momentos em torno do eixo *Y* igual a zero.

Como uma barra de grelha tem três esforços internos (esforço cortante, momento fletor e momento torçor – veja a Seção 2.1), um circuito fechado de barras (anel) aumenta, como nos quadros planos, em três unidades o grau de hiperestaticidade. Por outro lado, a presença de articulações (rótulas) em grelhas pode acrescentar mais do que uma equação de equilíbrio por rótula. Isto porque, como um ponto de uma grelha tem duas componentes de rotação, uma ligação articulada de grelha pode liberar apenas uma componente, ou pode liberar as duas componentes de rotação.

A Figura 2.24 mostra a determinação do grau de hiperestaticidade para uma grelha sem um circuito fechado de barras e sem articulações. No exemplo, as únicas incógnitas do problema do equilíbrio estático são as quatro componentes de reação de apoio. Como só estão disponíveis as três equações globais de equilíbrio, o grau de hiperestaticidade é $g = 1$.

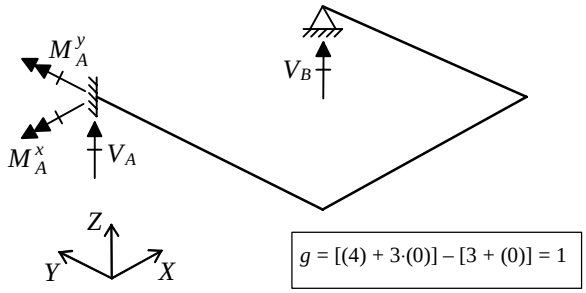


Figura 2.24 – Exemplo de determinação do grau de hiperestaticidade de grelha.

É interessante observar que, para grelhas, não há distinção quanto ao número de componentes de reação entre os apoios do 1° e do 2° gênero. O apoio do 1° gênero está associado a apenas uma componente de reação em qualquer situação (quadros planos, grelhas ou quadros espaciais). O apoio do 2° gênero para um quadro plano apresenta duas componentes de reação, para um quadro espacial apresenta três componentes, e para grelhas apresenta apenas uma componente. A direção da reação do apoio do 2° gênero para grelhas é a mesma da reação do apoio do 1° gênero, posto que em grelhas só existem reações força na direção *Z*.

3. IDEALIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE BARRAS

Como discutido no Capítulo 1, a análise estrutural de estruturas reticuladas está fundamentada na concepção de um modelo matemático, aqui chamado de modelo estrutural, que adota hipóteses sobre o comportamento das barras. No Capítulo 2 foram abordados conceitos básicos para a análise de estruturas reticuladas, isto é, estruturas cujos elementos estruturais podem ser considerados como barras (peças estruturais que têm uma dimensão bem maior do que as outras duas).

Este capítulo resume os principais conceitos matemáticos envolvidos na idealização do comportamento de barras no modelo estrutural adotado. Esses conceitos são básicos para a análise de estruturas reticuladas e podem ser encontrados em vários livros-texto sobre o assunto. O resumo aqui mostrado está baseado nos trabalhos dos seguintes autores: Féodosiev (1977), Beer & Johnston (1996), Timoshenko & Gere (1994), White *et al.* (1976) e West (1989).

Ao final deste capítulo é feita uma comparação entre o comportamento de estruturas isostáticas e hiperestáticas com base no modelo matemático adotado.

3.1. Relações entre deslocamentos e deformações em barras

Como visto na Seção 2.2.2 do Capítulo 2, o modelo estrutural tem como premissa uma condição de continuidade dos campos de deslocamentos e deformações no interior das barras. Além disso, esses dois campos têm que ser compatíveis entre si, isto é, os deslocamentos e deformações de uma barra devem estar associados. Nos métodos de análise essa condição de continuidade é forçada quase que automaticamente quando só se admitem deformações contínuas para as barras. Esta seção resume as hipóteses básicas do modelo estrutural que garantem continuidade e compatibilidade entre deformações e deslocamentos no interior de uma barra.

O modelo estrutural adotado está baseado na Teoria de Vigas de Navier para barras submetidas à flexão acrescida da consideração de efeitos axiais provocados por esforços normais à seção transversal da barra. O modelo também considera o efeito de torção para grelhas (estruturas planas com cargas fora do plano) e estruturas espaciais. Além disso, em geral não são consideradas deformações provocadas pelos esforços cortantes (cisalhamento) em barras. Essa hipótese é comumente adotada para flexão de barras longas (barras cujo comprimento é muito maior do que a altura da seção transversal).

Outra hipótese simplificadora que está sendo adotada aqui é o desacoplamento dos efeitos axiais, de cisalhamento, de flexão e de torção. Isto significa que esses efeitos podem ser considerados em separado e superpostos, resultando nas mesmas respostas dos efeitos atuando em conjunto. Essa hipótese é consistente com a hipótese de pequenos deslocamentos mencionada na Seção 2.4 do Capítulo 2, que também está sendo adotada.

Para definir as relações entre deslocamentos e deformações em uma barra, é adotado um sistema de coordenadas locais para a barra, tal como indicado na Figura 3.1.

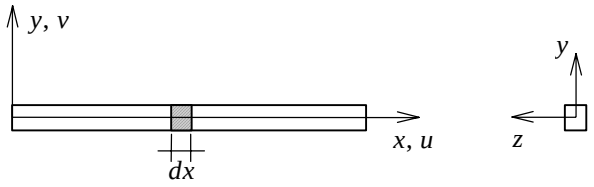


Figura 3.1 – Sistema de eixos locais de uma barra.

Na Figura 3.1, o eixo axial da barra, x, passa pelo centro de gravidade das seções transversais e os outros eixos são transversais à barra. Em modelos de quadros planos, o eixo y pertence ao plano da estrutura e o eixo z sai fora do plano. Com base nesse sistema de coordenadas, são definidos os deslocamentos e rotações que os pontos do eixo de uma barra de um pórtico plano podem ter:

$u(x) \rightarrow$ deslocamento axial (na direção de x);

$v(x) \rightarrow$ deslocamento transversal (na direção de y);

$\theta(x) \rightarrow$ rotação da seção transversal por flexão (em torno do eixo z).

No caso de grelhas ou pórticos espaciais, também aparece:

$\varphi(x) \rightarrow$ rotação por torção (em torno do eixo x).

Os deslocamentos axiais $u(x)$ e transversais $v(x)$ de uma barra definem uma curva chamada *elástica*. Os sentidos positivos do deslocamento transversal $v(x)$ (positivo na direção do eixo local y) e da rotação por flexão $\theta(x)$ (positiva no sentido anti-horário) estão indicados na Figura 3.2, onde a elástica está indicada pela linha tracejada desenhada em uma escala ampliada exageradamente. Considerando que os deslocamentos são pequenos, pode-se aproximar a rotação da seção transversal pela tangente da elástica. Dessa forma, pode-se associar o deslocamento transversal à rotação da seção transversal em uma equação que também é considerada uma equação de compatibilidade:

$$\theta = \frac{dv}{dx}. \tag{3.1}$$

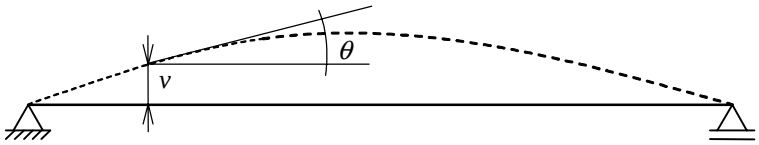


Figura 3.2 – Elástica de uma viga biapoiada com deslocamento transversal e rotação indicados com seus sentidos positivos.

3.1.1. Deformações axiais

As deformações normais à seção transversal da barra provocadas por esforços axiais são chamadas de deformações axiais. Esforços axiais são esforços cuja resultante passa pelo centro de gravidade da seção transversal. Portanto, na deformação axial todos os pontos de uma seção transversal têm sempre os mesmos deslocamentos axiais. Uma conseqüência disso é que as seções transversais de uma viga submetida a uma deformação axial permanecem planas ao se deformarem, tal como indica a Figura 3.3. Essa condição garante a continuidade de deslocamentos no interior da viga.

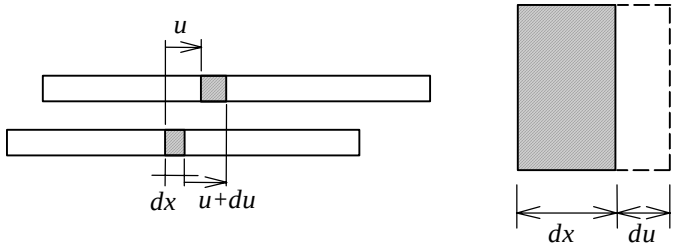


Figura 3.3 – Deslocamento axial relativo de um elemento infinitesimal de barra.

A deformação axial é obtida com base no deslocamento axial relativo, *du*, entre duas seções que distam *dx* entre si (veja a Figura 3.3). A deformação é igual à razão entre a variação de comprimento do elemento infinitesimal e o seu comprimento inicial:

$$\varepsilon_x^a = \frac{du}{dx}. \tag{3.2}$$

Nessa equação:

$dx \rightarrow$ comprimento original de um elemento infinitesimal de barra;

$du \rightarrow$ deslocamento axial relativo de um elemento infinitesimal de barra;

$\varepsilon_x^a \rightarrow$ deformação normal na direção longitudinal devida ao efeito axial.

3.1.2. Deformações normais por flexão

A Teoria de Vigas de Navier (1785-1836) está fundamentada em duas hipóteses básicas. A primeira delas é a *hipótese de manutenção das seções transversais planas* quando a viga se deforma, proposta originalmente por Jacob Bernoulli (1654-1705). A segunda hipótese despreza deformações provocadas por efeitos de cisalhamento (esforços cortantes). De acordo com essas hipóteses, as seções transversais de uma viga que se deforma à flexão permanecem planas e normais ao eixo deformado da viga. Observe que essa condição garante uma continuidade de deslocamentos no interior de uma barra que sofre flexão, pois cada seção transversal permanece encaixada com as suas adjacentes.

A manutenção das seções transversais planas e normais ao eixo deformado da barra introduz uma condição de compatibilidade que relaciona deformações normais por flexão com a rotação da seção transversal. Considere a rotação relativa por flexão, $d\theta$, de um elemento infinitesimal de barra mostrada na Figura 3.4.

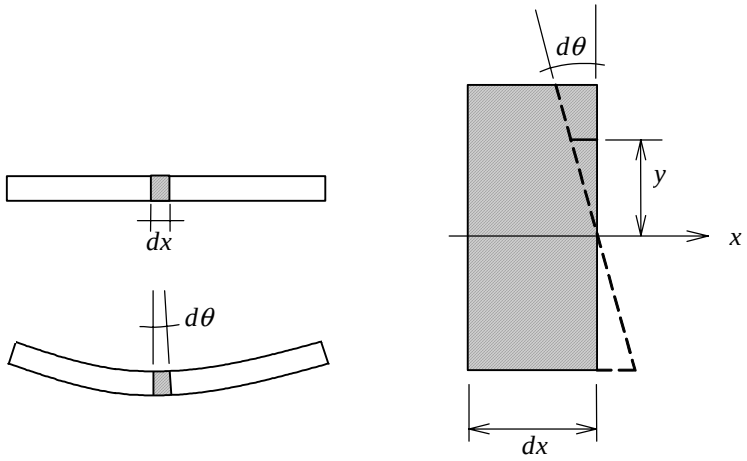


Figura 3.4 – Rotação relativa por flexão de um elemento infinitesimal de barra.

Cada fibra do elemento infinitesimal é definida por uma coordenada y. Quando se consideram pequenos deslocamentos, o encurtamento de uma fibra genérica é $d\theta \cdot y$. A deformação normal por flexão é dada pela razão entre o encurtamento da fibra e o seu comprimento inicial, dx:

$$\varepsilon_x^f = -\frac{d\theta}{dx} \cdot y \,. \tag{3.3}$$

Nessa equação:

$d\theta \rightarrow$ rotação relativa por flexão de um elemento infinitesimal de barra;

$\varepsilon_x^f \rightarrow$ deformação normal na direção longitudinal devida ao efeito de flexão.

Na Equação (3.3) o sinal negativo aparece pois uma fibra superior (y positivo) sofre deformação por encurtamento (negativa) quando $d\theta$ é positiva (anti-horária). O sinal da equação considera uma deformação positiva (alongamento) para uma fibra inferior (y negativo), com $d\theta$ positiva.

Considerando a relação entre o deslocamento transversal $v(x)$ e a rotação da seção transversal $\theta(x)$ dada pela Equação (3.1), pode-se escrever:

$$\varepsilon_x^f = -\frac{d^2 v}{dx^2} \cdot y \,. \tag{3.4}$$

A Equação (3.4) é uma relação de compatibilidade entre o deslocamento transversal de uma barra e as suas deformações normais por flexão.

3.1.3. Distorções por efeito cortante

O efeito cortante em uma barra também provoca o empenamento da seção transversal, tal como mostrado na Figura 3.5, e a distribuição de distorções de cisalhamento não é uniforme ao longo da seção.

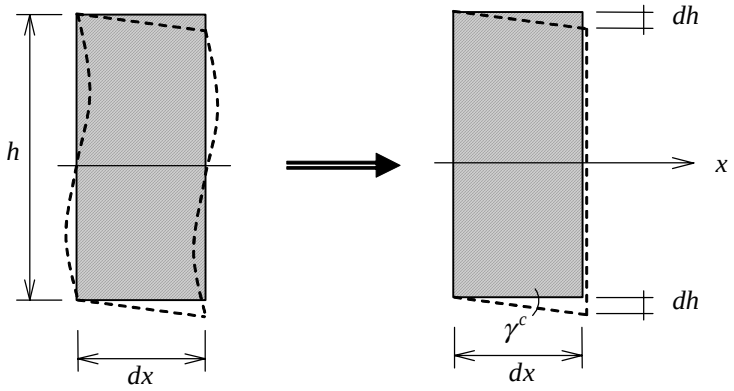


Figura 3.5 – Deslocamento transversal relativo por efeito cortante em um elemento infinitesimal de barra.

Esse efeito é considerado aproximadamente ao se adotar uma distorção de cisalhamento média na seção transversal (Timoshenko & Gere 1994, Féodosiev 1977). A distorção de cisalhamento por efeito cortante é representada de forma integral através do deslocamento transversal relativo (veja a Figura 3.5):

$$\gamma^c = \frac{dh}{dx} \,, \tag{3.5}$$

sendo que:

$\gamma^c \rightarrow$ distorção de cisalhamento por efeito cortante (efeito integral na seção transversal);

$dh \rightarrow$ deslocamento transversal relativo em um elemento infinitesimal de barra.

Entretanto, conforme dito anteriormente, para barras usuais (com comprimento muito maior do que a altura *h* da seção transversal) as deflexões provocadas por efeitos cortantes são desprezadas na presença das deflexões provocadas por efeitos de flexão.

3.1.4. Distorções por torção

Uma barra submetida a uma solicitação de torção apresenta distorções de cisalhamento (Féodosiev 1977). No caso de seções transversais com simetria radial (círculos ou anéis circulares), tal como mostrado na Figura 3.6, as distorções são proporcionais ao raio *r* do ponto na seção, não ocorrendo o empenamento da seção (Timoshenko & Gere 1994). Isto é, nesses casos é válida a hipótese de manutenção das seções planas .

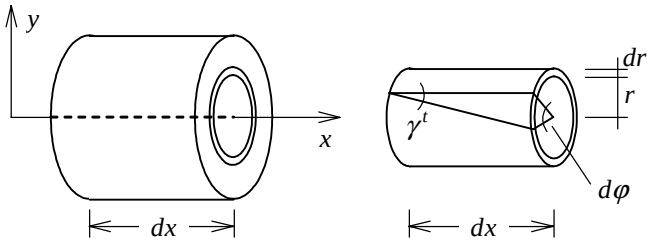


Figura 3.6 – Distorção por torção em um elemento infinitesimal de barra com seção circular.

A relação entre a rotação relativa por torção $d\varphi$ em um elemento infinitesimal de barra e a correspondente distorção de cisalhamento pode ser obtida observando na Figura 3.6 que $\gamma^t \cdot dx = r \cdot d\varphi$. Dessa forma, tem-se:

$$\gamma^t = \frac{d\varphi}{dx} \cdot r \,. \tag{3.6}$$

Nessa equação:

$\gamma^t \rightarrow$ distorção de cisalhamento por efeito de torção (seção com simetria radial);

$d\varphi \rightarrow$ rotação relativa por torção de um elemento infinitesimal de barra;

$r \rightarrow$ raio que define a posição de um ponto no interior da seção circular.

No caso de uma seção transversal que não apresenta uma simetria radial, ocorre um empenamento quando a barra é solicitada à torção. Nesse caso, a distorção não depende somente do giro relativo entre seções mas também de efeitos locais. Para

considerar a distorção por torção de forma integral no nível da seção transversal, é feita uma aproximação, considerando-se ainda a manutenção das seções planas (Féodosiev 1977). Isto vai ser visto na Seção 3.4.4.

3.2. Relações diferenciais de equilíbrio em barras

O modelo matemático adotado para a representação do comportamento de estruturas reticuladas considera que as condições de equilíbrio devem ser satisfeitas para a estrutura como um todo, para cada barra ou nó isolado, ou para qualquer porção isolada na estrutura. Isto inclui o equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra. Nesta seção são mostradas as equações que resultam do equilíbrio considerado em um nível infinitesimal para uma barra. Conforme mencionado anteriormente, esse modelo matemático está baseado na Teoria de Vigas de Navier para barras submetidas à flexão, acrescida da consideração de efeitos axiais.

Para deduzir as relações de equilíbrio para um elemento infinitesimal de barra, é necessário definir uma convenção para direções positivas de cargas distribuídas e esforços internos. A convenção adotada neste livro está indicada na Figura 3.7.

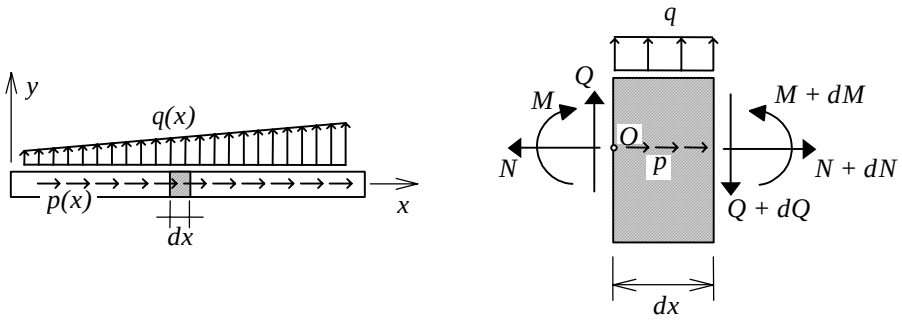


Figura 3.7 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra e direções positivas adotadas para cargas distribuídas e esforços internos.

Na Figura 3.7, as seguintes entidades são mostradas:

$p(x) \rightarrow$ taxa de carregamento distribuído longitudinal ao eixo da barra;

$q(x) \rightarrow$ taxa de carregamento distribuído transversal ao eixo da barra;

$N(x) \rightarrow$ esforço normal (esforço interno axial);

$Q(x) \rightarrow$ esforço cortante (esforço interno transversal);

$M(x) \rightarrow$ momento fletor (esforço interno de flexão).

Observa-se que os esforços normais são positivos quando são de tração ("saindo" da seção transversal) e os momentos fletores são positivos quando tracionam as fibras inferiores (com y negativo).

O equilíbrio de forças no elemento infinitesimal nas direções horizontal e vertical, considerando as direções positivas mostradas na Figura 3.7, resulta em:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \frac{dN}{dx} = -p(x)\,; \tag{3.7}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dx} = q(x)\,. \tag{3.8}$$

O equilíbrio de momentos em relação ao ponto O dentro do elemento infinitesimal (Figura 3.7), desprezando os termos de ordem superior, fornece a seguinte relação:

$$\sum M_O = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} = Q(x)\,. \tag{3.9}$$

As Equações (3.8) e (3.9) podem ser combinadas, resultando em uma relação de equilíbrio entre o momento fletor em uma seção e a taxa de carregamento transversal distribuído:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x)\,. \tag{3.10}$$

3.3. Equilíbrio entre tensões e esforços internos

A formulação geral do modelo matemático para o comportamento de barras também considera relações de equilíbrio, no nível da seção transversal da barra, que associam tensões com esforços internos.

Foi visto nas Seções 3.1.1 e 3.1.2 que os efeitos axiais e de flexão provocam deformações normais na direção longitudinal da barra. Como conseqüência, aparecem tensões normais longitudinais σ_x devidas a esses dois efeitos, tal como indica a Figura 3.8.

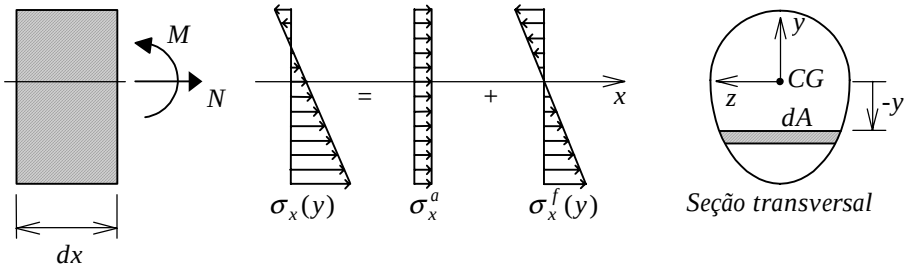


Figura 3.8 – Decomposição das tensões normais longitudinais em parcelas devidas aos efeitos axial e de flexão.

As tensões indicadas na Figura 3.8 são:

$\sigma_x^a \rightarrow$ tensão normal na direção longitudinal da barra devida ao efeito axial;

$\sigma_x^f \rightarrow$ tensão normal na direção longitudinal da barra devida ao efeito de flexão.

Essas tensões devem estar em equilíbrio com os esforço normal e momento fletor na seção transversal. Isto é, as resultantes das tensões normais longitudinais, integradas ao longo da seção transversal, devem ser iguais ao esforço normal e ao momento fletor na seção transversal.

Na Figura 3.8 é considerado um caso de flexão composta reta. A flexão é composta quando é combinada com o efeito axial; é reta quando ocorre em torno de um dos eixos principais da seção transversal (no caso o eixo *z*), tendo como conseqüência que cada fibra identificada por uma ordenada *y* tem um valor constante de tensão normal. Também é mostrado na Figura 3.8 que as tensões normais longitudinais variam linearmente ao longo da altura da seção transversal. Essa distribuição linear se deve a dois fatores. Primeiro, conforme mostrado nas Seções 3.1.1 e 3.1.2, pela hipótese da manutenção das seções planas, as deformações normais longitudinais variam linearmente ao longo da altura da seção. O segundo fator é a consideração de um comportamento linear para o material.

Pela Figura 3.8, vê-se que, para o efeito axial, as tensões são constantes ao longo da seção transversal e, para o efeito de flexão pura, as tensões normais são nulas na fibra do centro de gravidade (*CG*) da seção. Dessa forma, as relações de equilíbrio entre as tensões normais longitudinais e o esforço normal e o momento fletor são:

$$N = \int_A \sigma_x^a dA \rightarrow N = \sigma_x^a \cdot A \; ; \tag{3.11}$$

$$M = \int_A \sigma_x^f (-y) dA \; . \tag{3.12}$$

Na equação (3.11) tem-se:

$A \rightarrow$ área da seção transversal.

O sinal negativo que aparece na Equação (3.12) se deve à convenção de sinais adotada: uma tensão normal positiva (tração) em uma fibra inferior (*y* negativo) provoca um momento fletor positivo (tal como mostrado na Figura 3.8).

Analogamente, as tensões cisalhantes devidas ao efeito cortante devem estar em equilíbrio com o esforço cortante. As tensões cisalhantes nesse caso estão na direção do eixo transversal *y*. Como mencionado na Seção 3.1.3, o efeito cortante é em geral desprezado para a determinação de deformações. Quando é considerado, isto é feito de uma forma aproximada, considerando uma tensão cisalhante média ao longo da seção e uma *área efetiva para cisalhamento* (Timoshenko & Gere 1994, Féodosiev 1977):

$$Q = \int_A \tau_y^c dA \rightarrow Q = \tau_y^m \cdot \frac{A}{\chi}, \tag{3.13}$$

sendo:

$\tau_y^c \rightarrow$ componente da tensão de cisalhamento pontual na direção *y*;

$\tau_y^m \rightarrow$ tensão de cisalhamento média por efeito cortante (direção *y*);

$\chi \rightarrow$ fator de forma que define a área efetiva para cisalhamento.

O fator de forma χ considera a distribuição não uniforme de tensões de cisalhamento na seção transversal devida ao esforço cortante. Esse fator tem valor 1.2 para seções retangulares, $10/9$ para uma seção circular e aproximadamente 1.0 para uma grande variedade de perfis com forma "I" (White *et al.* 1976).

Finalmente, deve ser considerado o equilíbrio entre o momento torçor na seção transversal da barra e as correspondentes tensões de cisalhamento. A Figura 3.9 mostra a convenção de sinais para o momento torçor: a seta dupla indica um momento em torno do eixo *x*, que é positivo quando "saindo" da seção transversal.

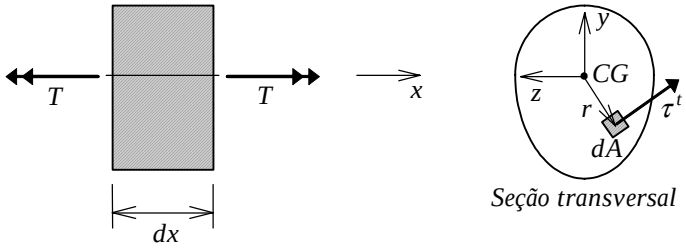


Figura 3.9 – Momento torçor em um elemento infinitesimal de barra e correspondente tensão de cisalhamento.

O efeito de torção, como visto na Seção 3.1.4, provoca distorções de cisalhamento, com correspondentes tensões cisalhantes. Para o caso de seções com simetria radial (círculos e anéis), as tensões cisalhantes por efeito de torção são tangenciais (perpendiculares ao raio). No caso geral, entretanto, a distribuição de tensões cisalhantes por torção depende da forma da seção transversal. O equilíbrio entre essas tensões e o momento torçor na seção transversal estabelece que o produto vetorial do vetor raio *r* pelo vetor tensão cisalhante τ^t em um ponto da seção (veja a Figura 3.9), integrado ao longo da seção, deve ser igual ao momento torçor:

$$T = \int_A \left| \vec{r} \times \vec{\tau}^t \right| dA, \tag{3.14}$$

sendo:

$T \rightarrow$ momento torçor (esforço interno de torção);

$r \rightarrow$ raio de um ponto (distância ao centro de gravidade da seção transversal);

$\tau^t \rightarrow$ tensão de cisalhamento pontual por efeito de torção.

3.4. Deslocamentos relativos internos

A seção anterior mostrou que os esforços internos (esforço normal, esforço cortante, momento fletor e momento torçor) em uma seção transversal representam resultantes de tensões internas integradas ao longo da seção. O modelo matemático adotado para o comportamento de barras permite que as deformações tenham representações integrais no nível de seção transversal. Essas representações têm um significado físico e são chamadas de *deslocamentos relativos internos*.

Na verdade, os deslocamentos relativos internos já foram introduzidos na Seção 3.1 e são resumidos abaixo:

$du \rightarrow$ deslocamento axial relativo interno em um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.3);

$d\theta \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão em um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.4);

$dh \rightarrow$ deslocamento transversal relativo interno em um elemento infinitesimal de barra (figura 3.5);

$d\varphi \rightarrow$ rotação relativa interna por torção em um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.6).

Com base nas relações entre deformações e deslocamentos em barras (Seção 3.1), nas relações das leis constitutivas do material (Seção 2.2.3) e nas relações de equilíbrio em tensões na seção transversal e esforços internos (Seção 3.3), é possível estabelecer relações entre os deslocamentos relativos internos e os esforços internos.

3.4.1. Deslocamento axial relativo interno provocado por esforço normal

Para o efeito axial, usando as Equações (3.11), (2.3) e (3.2), tem-se que o deslocamento relativo interno provocado por um esforço normal atuando em um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.10) é igual a:

$$N = \sigma_x^a \cdot A = E \cdot \varepsilon_x^a \cdot A = E \cdot \frac{du}{dx} \cdot A \rightarrow du = \frac{N}{EA} dx \,. \tag{3.15}$$

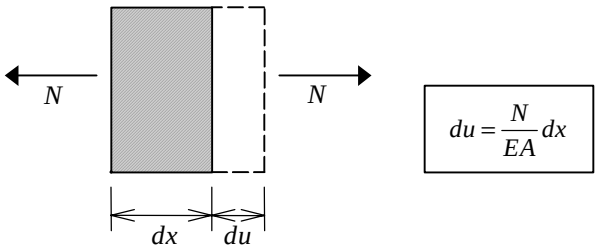


Figura 3.10 – Deslocamento axial relativo de um elemento infinitesimal de barra provocado por esforço normal.

3.4.2. Rotação relativa interna provocada por momento fletor

Para o efeito de flexão, usando as Equações (3.12), (2.3) e (3.3), tem-se que a rotação relativa interna provocada por um momento fletor atuando em um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.11) é igual a

$$M = \int_A \sigma_x^f (-y) dA = \int_A E \varepsilon_x^f (-y) dA = \int_A E\left(-\frac{d\theta}{dx} y\right)(-y) dA \rightarrow d\theta = \frac{M}{EI} dx\,, \qquad (3.16)$$

sendo:

$I = \int_A y^2 dA \rightarrow$ momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z.

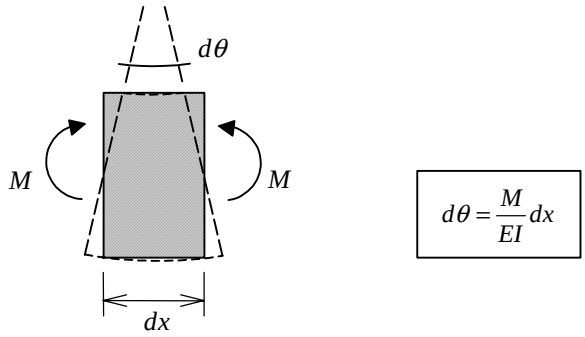


Figura 3.11 – Rotação relativa interna por flexão de um elemento infinitesimal de barra provocada por momento fletor.

3.4.3. Deslocamento transversal relativo interno provocado por esforço cortante

O deslocamento transversal relativo interno provocado por um esforço cortante (Figura 3.12) é considerado de forma aproximada de acordo com as Equações (3.13), (2.6) e (3.5):

$$Q = \tau_y^m \cdot \frac{A}{\chi} = G \cdot \gamma^c \cdot \frac{A}{\chi} = G \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \frac{A}{\chi} \rightarrow dh = \chi \frac{Q}{GA} dx \,. \tag{3.17}$$

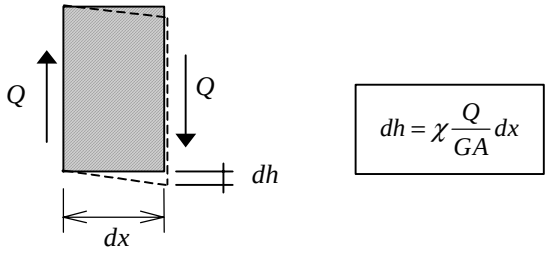


Figura 3.12 – Deslocamento transversal relativo de um elemento infinitesimal de barra provocado por esforço cortante.

3.4.4. Rotação relativa interna provocada por momento torçor

Para o efeito de torção, no caso de seções transversais circulares ou anelares, a rotação relativa interna provocada por um momento torçor pode ser obtida com base nas Equações (3.14), (2.6) e (3.6):

$$T = \int_A \tau^t \cdot r dA = \int_A G\gamma^t \cdot r dA = \int_A G \frac{d\varphi}{dx} r \cdot r dA \rightarrow d\varphi = \frac{T}{GJ_p} dx \,, \tag{3.18}$$

sendo:

$J_p = \int_A r^2 dA \rightarrow$ momento polar de inércia da seção transversal circular ou anelar.

Para seções transversais sem simetria radial (caso geral), ocorre um empenamento da seção quando solicitada à torção. Como dito na Seção 3.1.4, é feita uma aproximação de forma a considerar o efeito de torção de forma integral para a seção transversal. Isto resulta em uma propriedade da seção transversal equivalente ao momento polar de inércia, chamada de *momento de inércia à torção*, que depende da forma da seção. A rotação relativa interna provocada por um momento torçor em um elemento infinitesimal de barra (Figura 3.13), considerando essa propriedade da seção transversal, é:

$$d\varphi = \frac{T}{GJ_t} dx \,, \tag{3.19}$$

sendo:

$J_t \rightarrow$ momento de inércia à torção da seção transversal.

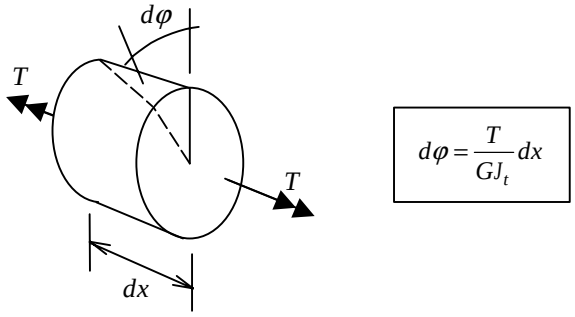


Figura 3.13 – Rotação relativa interna por torção de um elemento infinitesimal de barra provocada por momento torçor.

Livros-texto da área definem as expressões para o momento de inércia à torção em função do tipo de seção transversal. Pode-se citar, por exemplo, o livro de Süssekind (1977-2) e o de Féodosiev (1977).

3.5. Equação de Navier para o comportamento à flexão

O comportamento de vigas à flexão foi formalizado no início do século 19 por Navier. As relações diferenciais de equilíbrio e compatibilidade mostradas neste capítulo para o comportamento à flexão de vigas fazem parte dessa formalização, a chamada *Teoria de Vigas de Navier*.

Essa teoria, que despreza deformações devidas ao efeito cortante, estabelece uma equação diferencial que relaciona os deslocamentos transversais $v(x)$ de uma viga com a taxa de carregamento distribuído transversalmente $q(x)$. Para se chegar nessa equação, primeiro é obtida uma relação entre o momento fletor na seção e a segunda derivada do deslocamento transversal em relação a x. Isto é deduzido utilizando as Equações (3.12), (2.3) e (3.4), sendo $I(x)$ o momento de inércia da seção:

$$M = \int_A \sigma_x^f (-y) dA = \int_A E\varepsilon_x^f (-y) dA = \int_A E\left(-\frac{d^2 v}{dx^2} y\right)(-y) dA \rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)} . \tag{3.20}$$

Essa equação relaciona o momento fletor em uma seção transversal da viga com a curvatura da viga, que pode ser aproximada por d^2v/dx^2 no caso de pequenos deslocamentos (Timoshenko & Gere 1994, White *et al.* 1976).

Combinando-se a Equação (3.20) com a Equação (3.10), chega-se a:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2v}{dx^2}\right] = q(x)\,. \tag{3.21}$$

No caso em que a barra é prismática (momento de inércia I da seção transversal constante ao longo da barra), tem-se:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}\,. \tag{3.22}$$

A Equação (3.21), ou a sua outra versão (3.22) para inércia constante, é chamada de *Equação de Navier*. Essa equação engloba, no nível de um elemento infinitesimal de barra, todas as condições que o modelo estrutural tem que atender. A Equação (3.4) considera condições de compatibilidade, a Equação (2.3) considera a lei constitutiva do material, a Equação (3.10) considera condições de equilíbrio entre carregamento transversal distribuído, esforço cortante e momento fletor, e a Equação (3.12) considera o equilíbrio entre tensões normais e momento fletor.

Pode-se ainda considerar a relação que existe entre o deslocamento transversal e o esforço cortante em uma barra, que é obtida pelas Equações (3.9) e (3.20), considerando EI constante:

$$\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{Q(x)}{EI}\,. \tag{3.23}$$

3.6. Comparação entre vigas isostáticas e hiperestáticas

Na Seção 2.5 do Capítulo 2 foi feita uma comparação entre o comportamento de estruturas isostáticas e hiperestáticas. Nesta seção esse estudo é aprofundado para vigas isostáticas e vigas hiperestáticas com base na Equação de Navier.

Considere, por exemplo, as vigas isostáticas mostradas na Figura 3.14. A análise do equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra resultou na Equação (3.10), que relaciona o momento fletor $M(x)$ em uma seção da barra com a taxa de carregamento transversal distribuído $q(x)$. Essa equação integrada duas vezes em relação a x ao longo da viga fornece:

$$M(x) = \iint q(x)dx^2 + B_1 x + B_0\,. \tag{3.24}$$

As constantes de integração B_0 e B_1 ficam definidas pelas condições de contorno em termos de forças ou momentos nas extremidades das vigas. A viga biapoiada da Figura 3.14-a tem duas condições de contorno conhecidas em momentos (momentos fletores nulos nas extremidades): $M(0) = 0$ e $M(l) = 0$. E a viga engastada e livre da Figura 3.14-b tem uma condição de contorno em momento (momento fletor nu-

lo na extremidade livre) e outra em força (esforço cortante nulo na extremidade livre): $M(l) = 0$ e $Q(l) = 0$.

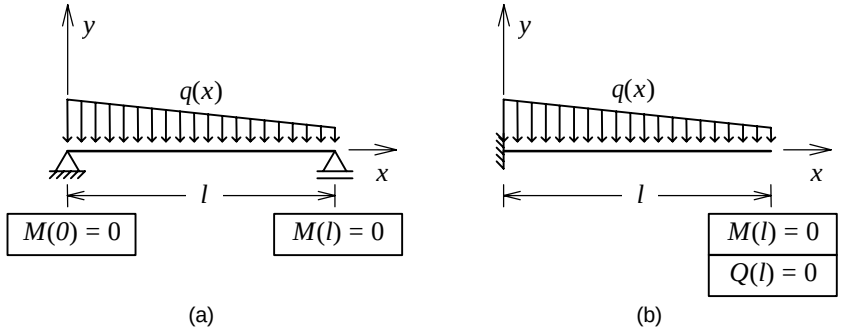


Figura 3.14 – Duas vigas isostáticas e suas duas condições de contorno conhecidas em termos de forças ou momentos.

Como pela Equação (3.9) $dM / dx = Q(x)$, pode-se concluir que as duas vigas isostáticas da Figura 3.14 têm condições de contorno suficientes para a determinação das constantes de integração B_0 e B_1. Assim, os momentos fletores e os esforços cortantes ficam definidos nas vigas isostáticas utilizando somente condições de equilíbrio.

No caso de vigas hiperestáticas, tal como as mostradas na Figura 3.15, não existem duas condições de equilíbrio em forças ou momentos disponíveis para a determinação das constantes B_0 e B_1 da Equação (3.24). Portanto, utilizando somente equilíbrio não é possível resolver o problema.

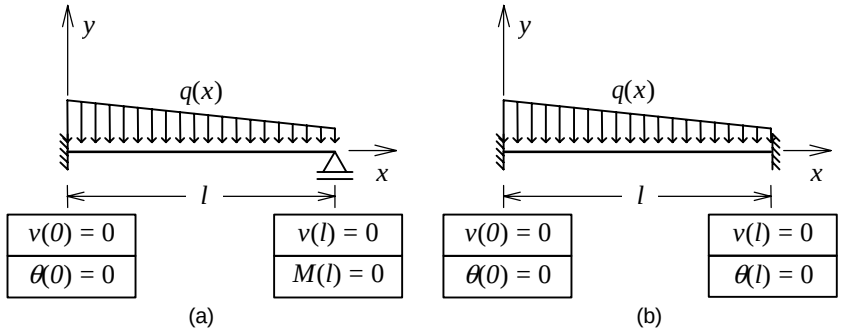


Figura 3.15 – Duas vigas hiperestáticas e suas quatro condições de contorno conhecidas.

Entretanto, como dito na Seção 2.3 do Capítulo 2, as condições de compatibilidade e leis constitutivas devem ser consideradas para resolver as vigas hiperestáticas. Essas outras condições estão incluídas na Equação de Navier (3.22). Considerando que essas vigas têm módulo de elasticidade E e momento de inércia I da seção

transversal constantes, a Equação de Navier integrada quatro vezes em relação a x ao longo da viga fornece:

$$v(x) = \iiint\int \frac{q(x)}{EI} dx^4 + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 . \tag{3.25}$$

Considerando as Equações (3.1) e (3.20), observa-se que existem para as vigas da Figura 3.15 quatro condições de contorno em termos de deslocamentos transversais $v(x)$ ou de uma de suas derivadas $dv/dx = \theta(x)$ e $d^2v/dx^2 = M(x)/EI$. Portanto, é possível determinar as quatro constantes de integração da Equação (3.25). Uma vez integrada essa equação e com o conhecimento das constantes de integração, os esforços internos (momentos fletores e esforços cortantes) podem ser encontrados pelas Equações (3.20) e (3.23).

Na verdade, os métodos básicos da análise estrutural não resolvem vigas hiperestáticas dessa maneira, que é relativamente complexa. A indicação da solução dessa forma foi feita apenas para demonstrar que, conforme mencionado na Seção 2.3, para resolver uma estrutura hiperestática é sempre necessário considerar, além do equilíbrio, as condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações e a lei constitutiva do material.

3.7. A essência da análise de estruturas reticuladas

A seção anterior fez uma comparação entre vigas isostáticas e hiperestáticas simples (apenas um vão) com respeito às condições que o modelo estrutural tem que atender. Esse estudo pode ser generalizado para quadros planos (ou para qualquer estrutura reticulada), o que é feito nesta seção. Para tanto, algumas definições, baseadas no livro de White *et al.* (1976), vão ser feitas a seguir.

Considere uma estrutura reticulada (isostática ou hiperestática) submetida a um conjunto de cargas F:

$F \rightarrow$ sistema de forças externas (solicitações e reações de apoio) atuando sobre uma estrutura.

Essas forças externas geram um conjunto de forças internas f:

$f \rightarrow$ esforços internos (N, M, Q) associados (em equilíbrio) com F.

As forças externas F e os esforços internos f formam um campo denominado:

$(F, f) \rightarrow$ campo de forças externas F e esforços internos f em equilíbrio.

O campo de forças (F, f) caracteriza o comportamento de uma estrutura quanto às condições de equilíbrio. Como visto no Capítulo 2 (Seções 2.3 e 2.5), no caso de uma estrutura hiperestática, para um dado sistema de forças externas F, existem infinitas distribuições de esforços internos que satisfazem as condições de equilí-

brio. No caso de uma estrutura isostática só existe uma possível distribuição de esforços internos que satisfaz o equilíbrio.

Isto pode ser exemplificado para as estruturas mostradas na Figura 3.16 com base no que foi exposto na Seção 2.5. O sistema de forças externas F nessas estruturas é formado pela carga P aplicada e pelas correspondentes reações de apoio. Os esforços internos são os correspondentes diagramas de esforço normal, esforço cortante e momento fletor. Na figura só estão mostrados diagramas de momentos fletores.

O quadro isostático da Figura 3.16-a só tem um possível diagrama de momentos fletores que satisfaz as condições de equilíbrio. Entretanto, o quadro hiperestático da Figura 3.16-b tem infinitos possíveis valores para as reações de apoio horizontais H, isto é, existem infinitos diagramas de momentos fletores válidos satisfazendo o equilíbrio.

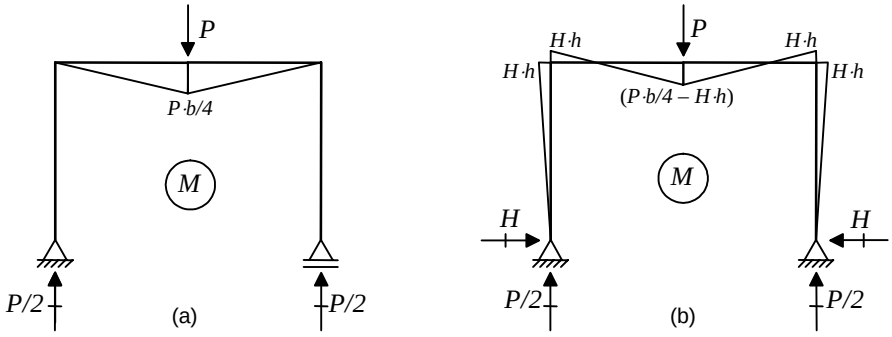


Figura 3.16 – Quadros isostático (a) e hiperestático (b), reações de apoio e diagramas de momentos fletores.

Pode-se resumir isso da seguinte maneira:

- Uma estrutura estaticamente indeterminada tem infinitos campos de forças (F, f) que satisfazem as condições de equilíbrio. Uma estrutura estaticamente determinada só tem um possível campo de forças (F, f).

Por outro lado, para caracterizar uma estrutura quanto às condições de compatibilidade, as seguintes entidades são definidas:

$D \rightarrow$ campo de deslocamentos externos (elástica) de uma estrutura;

$d \rightarrow$ campo de deslocamentos relativos internos (du, $d\theta$, dh) compatíveis com D.

Os deslocamentos relativos internos d caracterizam as deformações internas de uma estrutura para um elemento infinitesimal de barra, tal como indica a Seção 3.4. Os deslocamentos relativos internos podem ser interpretados como *deformações internas generalizadas,* definidas no nível de seção transversal.

Os deslocamentos externos D e os deslocamentos relativos internos d formam um campo denominado:

$(D, d) \rightarrow$ configuração deformada com deslocamentos externos D e deslocamentos relativos internos d compatíveis.

Por definição, para uma dada estrutura, não existe nenhuma relação de causa-efeito entre um campo de forças (F, f) e uma configuração deformada (D, d). Isto é, forças e deslocamentos não estão associados. As únicas restrições são: (F, f) tem que satisfazer equilíbrio e (D, d) tem que satisfazer compatibilidade.

As estruturas, em geral, têm infinitas configurações deformadas (D, d) válidas, isto é, que satisfazem as condições de compatibilidade. Quando isto ocorre, a configuração deformada é dita *cinematicamente indeterminada.*

Por exemplo, a Figura 3.17 mostra configurações deformadas de um quadro isostático e de um quadro hiperestático. Nos dois casos, qualquer configuração deformada que satisfaça as condições de compatibilidade com respeito aos vínculos externos e às condições de continuidade interna é válida. Não é difícil identificar que existem infinitas configurações deformadas válidas.

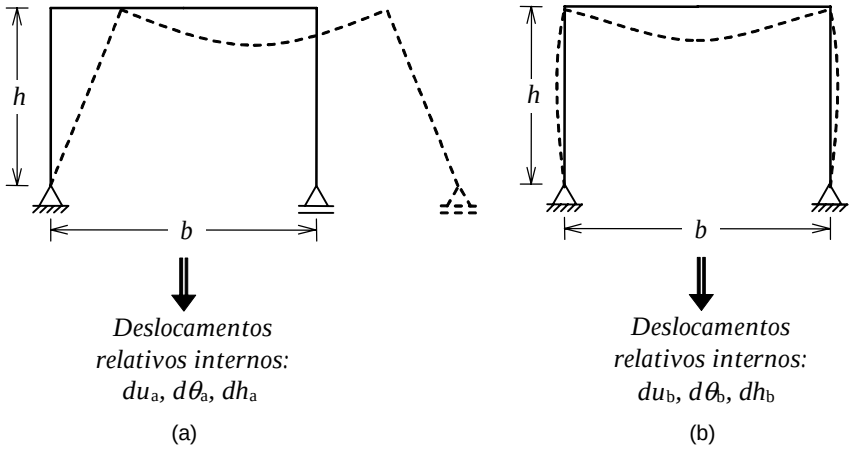


Figura 3.17 – Quadros isostático (a) e hiperestático (b) e configurações deformadas.

Não se deve confundir uma configuração deformada cinematicamente determinada com uma estrutura estaticamente determinada. As configurações deformadas de estruturas isostáticas, como a da Figura 3.17-a, são sempre cinematicamente indeterminadas.

Existem casos particulares de estruturas que só têm uma configuração deformada (D, d) possível. Nesse caso, a configuração deformada é dita *cinematicamente determinada.* Um exemplo desse tipo de configuração deformada é o Sistema Hipergeométrico (estrutura auxiliar utilizada na metodologia do Método dos Deslocamentos) mostrado na Seção 2.3.2 do Capítulo 2. Geralmente, uma configuração deformada cinematicamente determinada não corresponde a uma estrutura real, mas a uma abstração sobre o comportamento de uma estrutura durante o processo de

análise, como no caso de um Sistema Hipergeométrico (isto será visto em detalhe no Capítulo 6, sobre o Método dos Deslocamentos).

Com base nas definições anteriores, pode-se fazer a seguinte afirmação com respeito a uma estrutura hiperestática:

- Uma estrutura hiperestática tem infinitos campos de forças (F, f) que satisfazem o equilíbrio e infinitas configurações deformadas (D, d) que satisfazem a compatibilidade. No entanto, só existe uma solução para o problema: é aquela que satisfaz simultaneamente equilíbrio e compatibilidade.

No caso de uma estrutura isostática, como só existe um possível campo de forças (F, f) que satisfaz o equilíbrio, este também está associado a uma solução que satisfaz a compatibilidade. Pode-se fazer a seguinte afirmação sobre uma estrutura isostática:

- Uma estrutura isostática só tem um campo de forças (F, f) que satisfaz o equilíbrio; e a correspondente configuração deformada (D, d) satisfaz automaticamente a compatibilidade.

Intuitivamente isto pode ser entendido se for considerado que uma estrutura isostática tem o número exato de vínculos para ser estável. Como visto na Seção 2.5, essa característica faz com que a estrutura isostática se acomode a modificações de posição de vínculos externos ou a mudanças de vínculos internos sem exercer nenhuma resistência. Assim sendo, a estrutura isostática sempre satisfaz automaticamente as condições de compatibilidade.

Os dois métodos básicos da análise estrutural, foco principal deste livro, diferem quanto à estratégia adotada para chegar à solução da estrutura, que deve satisfazer simultaneamente condições de equilíbrio e condições de compatibilidade:

- O Método das Forças, também chamado de Método da Compatibilidade, tem como estratégia procurar, dentre todos os campos de forças (F, f) que satisfazem o equilíbrio, aquele que também faz com que a compatibilidade fique satisfeita.
- O Método dos Deslocamentos, também chamado de Método do Equilíbrio, tem como estratégia procurar, dentre todas as configurações deformadas (D, d) que satisfazem a compatibilidade, aquela que também faz com que o equilíbrio fique satisfeito.

Pode-se observar que não faz sentido procurar a solução de uma estrutura isostática pelo Método das Forças pois só existe um campo de forças (F, f) válido.

Por outro lado, o Método dos Deslocamentos resolve uma estrutura isostática da mesma maneira que resolve uma estrutura hiperestática, pois, em geral, todas as estruturas são cinematicamente indeterminadas (infinitas configurações deformadas válidas).

4. SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Como visto no Capítulo 2 (Seção 2.3), os métodos de análise de estruturas têm como metodologia a superposição de casos básicos. No Método das Forças os casos básicos são soluções estaticamente determinadas (isostáticas) e no Método dos Deslocamentos são soluções cinematicamente determinadas (configurações deformadas conhecidas). Essas soluções, chamadas de *soluções fundamentais*, formam a base da resolução dos métodos de análise.

Este capítulo apresenta algumas soluções fundamentais da análise de estruturas. O objetivo aqui é dar subsídios para os métodos de análise tratados neste livro. Resumidamente, o que é necessário para a resolução de uma estrutura pelo Método das Forças é a determinação de deslocamentos e rotações em estruturas isostáticas. E, para o Método dos Deslocamentos, é necessária a determinação de forças e momentos que impõem uma configuração deformada conhecida para uma estrutura.

A dedução dessas soluções fundamentais é feita com base no Princípio dos Trabalhos Virtuais, através de suas duas formulações – Princípio das Forças Virtuais e Princípio dos Deslocamentos Virtuais. Esta apresentação está fortemente calcada nos livros de White *et al.* (1976) e Tauchert (1974).

4.1. Traçado do diagrama de momentos fletores

Conforme mencionado nos capítulos anteriores, para o entendimento dos métodos de análise tratados neste livro é necessário um conhecimento adequado da resolução de estruturas estaticamente determinadas e do traçado de diagramas de esforços internos (esforços axiais, esforços cortantes, momentos fletores e momentos torçores). Duas boas referências para esses assuntos são os livros de Süssekind (1977-1) e Campanari (1985). Nesta seção apenas são salientados alguns aspectos importantes no traçado do diagrama de momentos fletores.

Primeiro, o diagrama de momentos fletores não é indicado com sinal. A convenção adotada é que o diagrama é traçado sempre do lado da fibra tracionada da barra.

Outro ponto importante é que esse traçado é feito convenientemente por superposição de efeitos em cada barra, sempre partindo dos valores dos momentos fletores nas extremidades da barra. Considere, como exemplo, a viga biapoiada com balanços mostrada na Figura 4.1. Nessa figura estão mostrados as cargas, as reações de apoio e os diagramas de esforços cortantes e de momentos fletores.

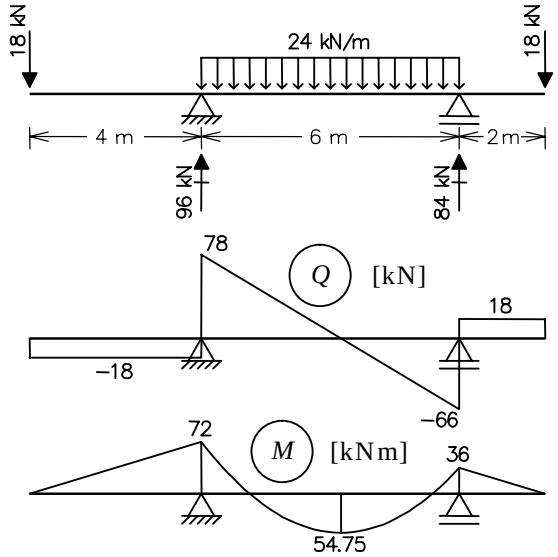


Figura 4.1 – Viga biapoiada com balanços.

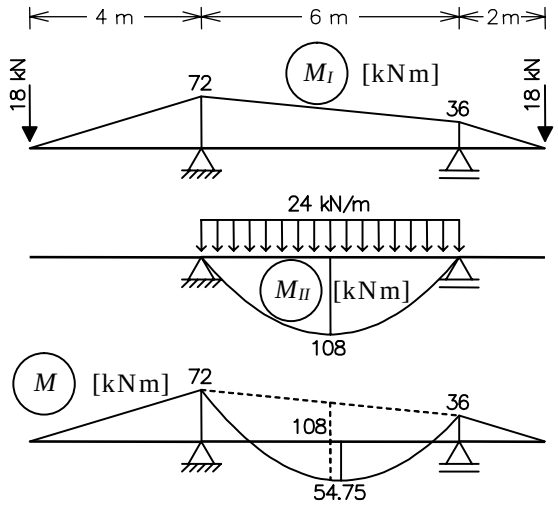


Figura 4.2 – Superposição de efeitos para compor o diagrama de momentos fletores da Figura 4.1.

A Figura 4.2 ilustra a superposição que é utilizada para compor o diagrama de momentos fletores. Considere a barra central entre apoios. O diagrama final (M) nessa barra é obtido pela superposição de um diagrama reto (M_I), que é o traçado que une os valores dos momentos fletores nas extremidades da barra com um diagrama parabólico (M_{II}), que corresponde ao carregamento atuando no interior da

barra considerada como biapoiada. O diagrama M_I é sempre uma linha reta pois corresponde a uma situação em que a barra está descarregada. Isso porque $d^2M/dx^2 = 0$ (pela Equação (3.10) do Capítulo 3, com carregamento distribuído transversal nulo).

O procedimento de superposição de efeitos mostrado na Figura 4.2 é conhecido como *pendurar o diagrama de viga biapoiada para o carregamento que atua no interior da barra*. Dessa forma, o traçado do diagrama de momentos fletores em cada barra é feito em duas etapas. Primeiro determinam-se os momentos fletores nas extremidades da barra. Se a barra não tiver cargas transversais no seu interior, o diagrama final é obtido simplesmente unindo os valores extremos por uma linha reta (é o que acontece nos balanços da viga da Figura 4.1). Em um segundo passo, se a barra tiver carregamento no seu interior, o diagrama de viga biapoiada para o carregamento é "pendurado" (superposto transversalmente) a partir da linha reta que une os valores extremos.

Esse procedimento também é aplicado para pórticos, como o que está mostrado na Figura 4.3. Observa-se nessa figura que o traçado do diagrama de momentos fletores na barra horizontal é feito da mesma maneira que para a barra central da viga da Figura 4.2. Depois de calculadas as reações de apoio, determinam-se os valores dos momentos fletores nos nós do pórtico. Nesse caso, os momentos fletores tracionam as fibras de fora e, por isso, os diagramas nos nós são desenhados no lado externo do quadro (esta é a convenção utilizada). Nota-se também que os valores dos momentos fletores em cada nó são iguais para as barras adjacentes. Este é sempre o caso quando se têm duas barras chegando em um nó e não existe uma carga momento concentrado atuando no nó. Para as barras verticais, que não têm carga no interior, o diagrama final é reto. Para a barra horizontal, o diagrama é obtido "pendurando", a partir da linha reta, a parábola do segundo grau que corresponde ao diagrama de viga biapoiada do carregamento uniformemente distribuído.

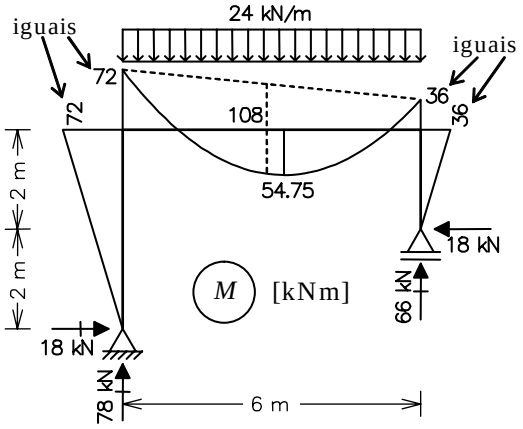


Figura 4.3 – Traçado de diagrama de momentos fletores em um pórtico plano.

A Figura 4.4 mostra diagramas de momentos fletores de viga biapoiada para cargas usuais: carga uniformemente distribuída, carga concentrada no centro da viga e carga concentrada em uma posição qualquer na viga.

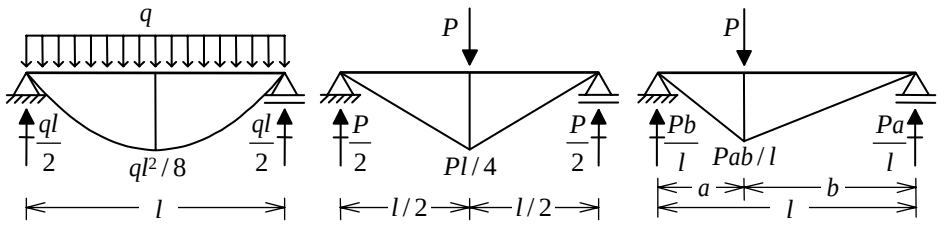


Figura 4.4 – Diagramas de momentos fletores para vigas biapoiadas.

Outro aspecto interessante é a obtenção do diagrama de esforços cortantes a partir do diagrama de momentos fletores. Esse procedimento é feito isolando-se cada barra da estrutura, tal como mostrado na Figura 4.5 para a barra horizontal do pórtico da Figura 4.3. A barra é considerada como uma viga biapoiada com cargas momentos aplicadas nas extremidades para representar o efeito do restante da estrutura sobre ela. Os valores dos esforços cortantes nas extremidades das barras são determinados calculando-se as reações de apoio da viga biapoiada por superposição de casos. O caso *I* corresponde às cargas momentos nas extremidades da barra e o caso *II* ao carregamento atuando no interior da barra.

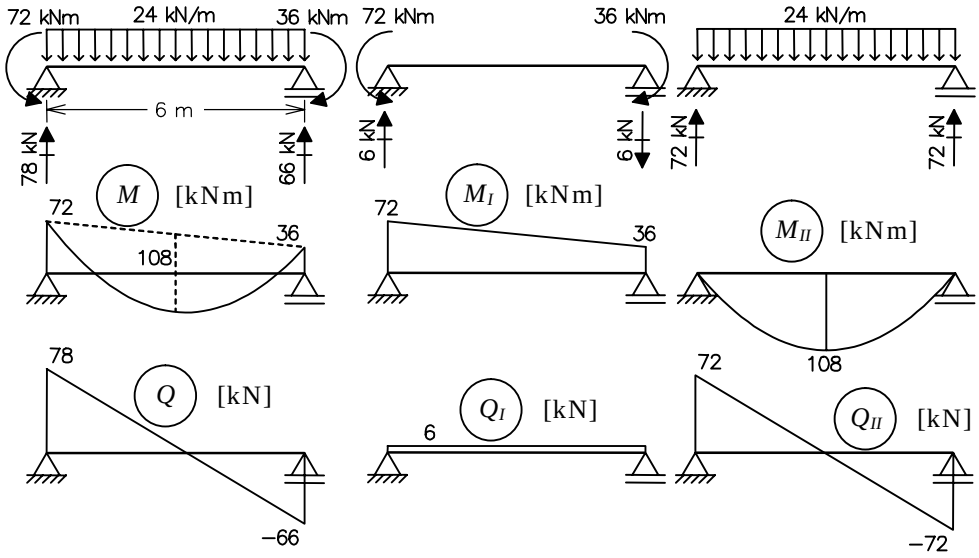


Figura 4.5 – Traçado do diagrama de esforços cortantes a partir do diagrama de momentos fletores.

O cálculo das reações de apoio (esforços cortantes) nas extremidades, V_{esq} (na esquerda) e V_{dir} (na direita), do exemplo da Figura 4.5 é mostrado abaixo:

$$V_{esq} = +(72-36) \div 6 + (24 \cdot 6) \div 2 = +6 + 72 = 78 \text{ kN};$$

$$V_{dir} = -(72-36) \div 6 + (24 \cdot 6) \div 2 = -6 + 72 = 66 \text{ kN}.$$

Esse procedimento mostra a importância da obtenção do diagrama de momentos fletores, pois isso possibilita a obtenção do diagrama de esforços cortantes.

Deve-se também ressaltar que, embora os exemplos utilizados nesta seção tenham sido isostáticos, os mesmos procedimentos se aplicam para estruturas hiperestáticas. Dessa forma, uma vez que se tenham determinado os valores dos momentos fletores nas extremidades de qualquer barra e que se conheça o carregamento atuando no seu interior, podem-se traçar os diagramas de momentos fletores e de esforços cortantes na barra.

O traçado de diagramas de momentos fletores é muito importante também dentro da metodologia do Método das Forças. Conforme será visto na Seção 4.3.1, esses diagramas são utilizados nos cálculos de deslocamentos e rotações em estruturas isostáticas, que correspondem a soluções fundamentais utilizadas por esse método.

4.2. Energia de deformação e princípio da conservação de energia

O princípio geral da conservação de energia é muito importante em vários métodos da análise de estruturas. Esse princípio, que é expresso como um balanço de energia (ou trabalho), se aplica tanto para estruturas rígidas quanto deformáveis. Quando uma estrutura rígida em equilíbrio é submetida a um campo de deslocamentos arbitrário, a soma algébrica do trabalho produzido por todas as forças aplicadas pelos respectivos deslocamentos deve resultar em um valor nulo. Em estruturas deformáveis, existe um termo adicional de energia devido ao trabalho produzido pelas tensões internas com as correspondentes deformações. A integral dessa componente pontual (infinitesimal) de trabalho ao longo do volume da estrutura é denominada *energia de deformação interna* e deve ser levada em conta no balanço de energia. Uma estrutura deformável deve ser vista como um sistema elástico, tal como uma mola linear. A diferença é que uma estrutura é um sistema elástico contínuo, no qual cada ponto armazena uma parcela da energia total de deformação.

A Figura 4.6 mostra um elemento infinitesimal de volume de uma estrutura submetido a uma deformação normal na direção x. A energia de deformação por unidade de volume, U_0, armazenada nesse elemento é a área abaixo da curva tensão-deformação, tal como indicado na figura. No caso do material com comportamento linear, a relação tensão-deformação é dada pela Equação (2.3) do Capítulo 2 e a energia de deformação por unidade de volume tem a seguinte expressão:

$$U_0 = \int \sigma_x \cdot d\varepsilon_x = \frac{1}{2}\sigma_x \cdot \varepsilon_x \,. \tag{4.1}$$

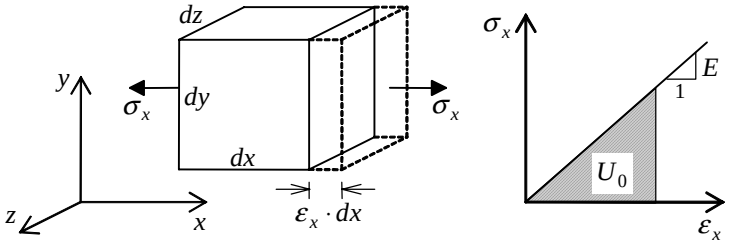


Figura 4.6 – Elemento infinitesimal de volume submetido a uma deformação normal.

A energia de deformação por unidade de volume pode ser generalizada para as outras componentes de deformação. No caso de uma barra de um pórtico plano, a energia de deformação por unidade de volume é composta por (veja a definição das deformações e das tensões na Seção 3.1 do Capítulo 3):

$$U_0 = U_0^a + U_0^f + U_0^c = \frac{1}{2}\sigma_x^a \cdot \varepsilon_x^a + \frac{1}{2}\sigma_x^f \cdot \varepsilon_x^f + \frac{1}{2}\tau_y^c \cdot \gamma^c \,. \tag{4.2}$$

Sendo:

$U_0^a = \frac{1}{2}\sigma_x^a \cdot \varepsilon_x^a \rightarrow$ energia de deformação por unidade de volume para o efeito axial;

$U_0^f = \frac{1}{2}\sigma_x^f \cdot \varepsilon_x^f \rightarrow$ energia de deformação por unidade de volume para o efeito de flexão;

$U_0^c = \frac{1}{2}\tau_y^c \cdot \gamma^c \rightarrow$ energia de deformação por unidade de volume para o efeito cortante.

No caso de grelhas e quadros espaciais, o efeito de torção também deve ser considerado. Para uma seção com simetria radial, tem-se:

$U_0^t = \frac{1}{2}\tau^t \cdot \gamma^t \rightarrow$ energia de deformação por unidade de volume para o efeito de torção.

Para seções sem simetria radial, a energia de deformação é computada de uma forma integral ao longo de uma seção transversal, como será mostrado adiante.

A energia de deformação interna total é obtida pela integração da energia U_0 ao longo de todo o volume da estrutura. Para pórticos planos, tem-se:

$$U = \int_V U_0 \cdot dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma_x^a \cdot \varepsilon_x^a \cdot dV + \frac{1}{2}\int_V \sigma_x^f \cdot \varepsilon_x^f \cdot dV + \frac{1}{2}\int_V \sigma_y^c \cdot \gamma^c \cdot dV \,. \tag{4.3}$$

No modelo matemático de estruturas reticuladas, as barras são representadas pelos eixos que passam pelos centros de gravidade das seções transversais. Nesse modelo, a energia de deformação também tem uma representação integral no nível de seção transversal, resultando em uma energia de deformação por unidade de comprimento de barra. A obtenção das expressões dessa energia é feita separando a integral de volume da Equação (4.3) em uma integral de área (ao longo da seção transversal) e uma integral de linha (ao longo do comprimento das barras):

$$U = \int_{estrutura} \left[\int_A U_0^a dA + \int_A U_0^f dA + \int_A U_0^c dA \right] \cdot dx = \int_{estrutura} dU^a + \int_{estrutura} dU^f + \int_{estrutura} dU^c \,. \quad (4.4)$$

Sendo:

$U \rightarrow$ energia de deformação elástica total armazenada na estrutura;

$dU^a \rightarrow$ energia de deformação para o efeito axial armazenada em um elemento infinitesimal de barra;

$dU^f \rightarrow$ energia de deformação para o efeito de flexão armazenada em um elemento infinitesimal de barra;

$dU^c \rightarrow$ energia de deformação para o efeito cortante armazenada em um elemento infinitesimal de barra.

A expressão para dU^a é obtida com base nas Equações (3.2) e (3.11) do Capítulo 3:

$$dU^a = \frac{1}{2} \int_A \sigma_x^a \cdot \frac{du}{dx} \cdot dA \cdot dx = \frac{1}{2} N \cdot du \,, \quad (4.5)$$

sendo N o esforço normal na seção transversal e du o deslocamento axial relativo interno dado pela Equação (3.15) (veja a Figura 3.10).

A expressão para dU^f é obtida com base nas Equações (3.3) e (3.12):

$$dU^f = \frac{1}{2} \int_A \sigma_x^f \cdot \left(-\frac{d\theta}{dx} \cdot y \right) \cdot dA \cdot dx = \frac{1}{2} M \cdot d\theta \,, \quad (4.6)$$

sendo M o momento fletor na seção transversal e $d\theta$ a rotação relativa interna por flexão dada pela Equação (3.16) (veja a Figura 3.11).

A expressão para dU^c é obtida com base nas Equações (3.5) e (3.13) :

$$dU^c = \frac{1}{2} \int_A \tau_y^c \cdot \frac{dh}{dx} \cdot dA \cdot dx = \frac{1}{2} Q \cdot dh \,, \quad (4.7)$$

sendo Q o esforço cortante na seção transversal e dh o deslocamento transversal relativo interno dado pela Equação (3.17) (veja a Figura 3.12).

No caso de grelhas e pórticos espaciais, o efeito de torção deve ser considerado:

$dU^t \rightarrow$ energia de deformação para o efeito de torção armazenada em um elemento infinitesimal de barra.

A expressão para dU^t, para seções transversais com simetria radial, é obtida com base nas Equações (3.6) e (3.18). Para uma seção genérica sem simetria radial, dU^t é obtida de forma integral na seção transversal (consulte a Seção 3.4.4), resultando em:

$$dU^t = \frac{1}{2} T \cdot d\varphi \,, \tag{4.8}$$

sendo T o momento torçor na seção transversal e $d\varphi$ a rotação relativa interna por torção dada pela Equação (3.19) (veja a Figura 3.13).

A energia de deformação interna U é utilizada no princípio geral da conservação de energia. A aplicação desse princípio no contexto da análise estrutural tratada neste livro requer a definição das seguintes premissas:

- O carregamento é aplicado lentamente, de tal forma que não provoca vibrações na estrutura (não existe energia cinética).
- O único tipo de energia armazenada pela estrutura é a energia de deformação elástica, não existindo perda de energia na forma de calor, ruído, etc.
- A estrutura tem um comportamento linear-elástico, isto é, o material da estrutura trabalha em um regime elástico e linear (não existe plastificação em nenhum ponto) e os deslocamentos da estrutura são pequenos o suficiente para se escrever as equações de equilíbrio na configuração indeformada da estrutura.

Considerando essas hipóteses, o princípio da conservação de energia se reduz a:

$$W_E = U \,, \tag{4.9}$$

sendo:

$W_E \rightarrow$ trabalho realizado pelas forças externas quando a estrutura se deforma.

Isto é, o trabalho mecânico realizado pelas cargas aplicadas em uma estrutura é igual à energia de deformação interna armazenada na estrutura. Se as cargas forem removidas lentamente, o trabalho mecânico vai ser recomposto, da mesma forma que ocorre na compressão e descompressão de uma mola.

A aplicação direta desse princípio é ilustrada abaixo na determinação do deslocamento no ponto central da viga mostrada na Figura 4.7, submetida a uma força vertical P_1 aplicada no meio do vão. Deseja-se calcular o deslocamento vertical D_1 no ponto de aplicação da carga. É desprezada a energia de deformação por cisa-

lhamento em presença da energia de deformação por flexão. O diagrama de momentos fletores da viga para esse carregamento também está mostrado na figura.

O trabalho realizado pela força externa é a área abaixo da curva que relaciona a carga com o deslocamento do seu ponto de aplicação, tal como indicado na Figura 4.7. As reações de apoio da viga, que também são forças externas, não produzem trabalho pois os deslocamentos correspondentes são nulos (restrições de apoio).

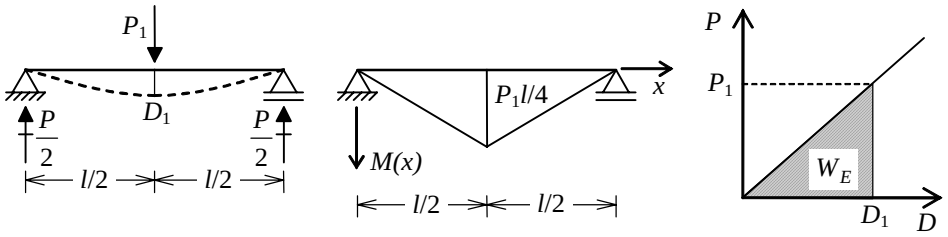


Figura 4.7 – Viga biapoiada com uma carga central.

Portanto, considerando um comportamento linear para a estrutura, o trabalho total das forças externas para esse exemplo é:

$$W_E = \frac{1}{2} P_1 \cdot D_1 .$$

Como não existem esforços axiais nessa estrutura e a energia de deformação por cisalhamento é desprezada, a energia de deformação elástica é função apenas do efeito de flexão. Considerando as Equações (4.4), (4.6) e (3.16), tem-se:

$$U = \int_{estrutura} dU^f = \frac{1}{2} \int_0^l M \cdot d\theta = \frac{1}{2} \int_0^l M \cdot \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx .$$

Igualando o trabalho externo com a energia de deformação interna, chega-se a:

$$\frac{1}{2} P_1 \cdot D_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx .$$

Finalmente, o deslocamento vertical do ponto central é dado por:

$$D_1 = \frac{1}{P_1} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \Rightarrow D_1 = \frac{P_1 \cdot l^3}{48EI} .$$

Observa-se que a utilização do princípio da conservação de energia possibilitou o cálculo do deslocamento vertical do ponto central dessa viga. Entretanto, este princípio não permite o cálculo de deslocamento de uma forma genérica. Considere, por exemplo, que se deseja aplicar uma outra carga na estrutura ou determinar o deslocamento em outro ponto. Nesses casos, o princípio da conservação de energia não fornece meios para o cálculo desejado. Isso porque uma única equação

$W_E = U$ não é suficiente para a determinação de mais de um deslocamento desconhecido. A solução para isso é a generalização desse princípio para o Princípio dos Trabalhos Virtuais, conforme vai ser mostrado na seção a seguir.

4.3. Princípio dos trabalhos virtuais

O princípio da conservação de energia é bastante intuitivo mas tem uma aplicação muito limitada para o cálculo de deslocamentos em estruturas. Basicamente, como visto na seção anterior, este princípio só permite calcular deslocamentos para o caso de solicitação de uma força concentrada, e o deslocamento calculado tem que ser no ponto de aplicação e na direção da força. Analogamente, também é possível calcular a rotação na direção de um momento concentrado aplicado.

Esse princípio pode ter seu enfoque modificado de forma a eliminar as limitações notadas acima. Considere um sistema de forças (F_A, f_A) em equilíbrio e uma configuração deformada (D_B, d_B) compatível tal como definidos na Seção 3.7 do Capítulo 3. Isto é, F_A é um sistema de forças externas (solicitações e reações de apoio) atuando sobre uma estrutura, f_A são esforços internos (N_A, M_A, Q_A) em equilíbrio com F_A, D_B é um campo de deslocamentos externos (elástica) de uma estrutura e d_B é um campo de deslocamentos relativos internos (du_B, $d\theta_B$, dh_B) compatíveis com D_B.

A generalização que é feita em relação ao princípio de conservação de energia é que, agora, não existe qualquer ligação entre o sistema de forças e a configuração deformada, a não ser que atuam em uma mesma estrutura. Isto é, não existe relação causa-efeito entre (F_A, f_A) e (D_B, d_B). O balanço entre o trabalho externo e a energia de deformação interna combinando esses dois sistemas independentes resulta no *Princípio dos Trabalhos Virtuais* (PTV):

$$\overline{W_E} = \overline{U} \rightarrow \sum \overbrace{F_A}^{\text{em equilíbrio}} \cdot \underbrace{D_B}_{\text{compatíveis}} = \int f_A \cdot d_B \qquad (4.10)$$

Sendo:

$\overline{W_E} = \sum F_A \cdot D_B \rightarrow$ trabalho virtual das forças externas F_A com os correspondentes deslocamentos (externos) D_B;

$\overline{U} = \int f_A \cdot d_B \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos f_A com os correspondentes deslocamentos relativos internos d_B.

No caso de pórticos planos, a energia de deformação interna virtual pode ser desmembrada em parcelas que consideram os efeitos axial, de flexão e cortante:

$$\overline{U} = \int N_A \cdot du_B + \int M_A \cdot d\theta_B + \int Q_A \cdot dh_B \,. \tag{4.11}$$

Deve-se salientar que nas Equações (4.10) e (4.11) o termo "½" não aparece nem na expressão do trabalho externo virtual nem na expressão da energia de deformação interna virtual. Esse termo aparecia nas expressões do princípio da conservação de energia mostrado na Seção 4.2 porque forças e deslocamentos estavam associados (causa e efeito). No trabalho externo virtual, as forças não são a causa ou efeito dos deslocamentos, assim como na energia interna virtual os esforços internos não são a causa ou efeito dos deslocamentos relativos internos. Devido justamente a essa independência entre forças e deslocamentos, o termo *virtual* se aplica. Em outras palavras, o trabalho $\overline{W_E}$ e a energia de deformação $\overline{U}$ são ditos *virtuais* porque eles são meras abstrações de cálculo.

O PTV só é válido se o sistema de forças (F_A, f_A) realmente satisfizer as condições de equilíbrio e se a configuração deformada (D_B, d_B) realmente satisfizer as condições de compatibilidade.

Portanto, esse princípio pode ser utilizado para impor condições de compatibilidade a uma configuração deformada (D, d) qualquer. Basta que se escolha arbitrariamente um sistema de forças $(\overline{F}, \overline{f})$, denominado virtual, do qual se saiba que satisfaz as condições de equilíbrio. Esta versão do PTV é chamada de Princípio das Forças Virtuais e vai ser apresentada na próxima seção.

De maneira análoga, o PTV pode ser utilizado para impor condições de equilíbrio a um sistema de forças (F, f) qualquer. Basta que se escolha arbitrariamente uma configuração deformada $(\overline{D}, \overline{d})$, denominada virtual, da qual se saiba que satisfaz as condições de compatibilidade. Esta versão do PTV é chamada de Princípio dos Deslocamentos Virtuais e será apresentada na Seção 4.3.2.

4.3.1. Princípio das forças virtuais

Em muitas situações na análise de estruturas é necessário impor condições de compatibilidade a uma configuração deformada. Por exemplo, quando se calcula uma componente de deslocamento em um ponto de uma estrutura, o que se deseja é o valor do deslocamento que é compatível com a configuração deformada da estrutura, que é provocada por alguma solicitação. No contexto deste livro, o cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas é a principal solução fundamental utilizada dentro da metodologia do Método das Forças, tal como introduzido na Seção 2.3.1 do Capítulo 2.

O *Princípio das Forças Virtuais* (PFV) é uma das principais ferramentas para a determinação de deslocamentos em estruturas. Esse princípio diz que:

- Dada uma configuração deformada real (D, d) e um sistema de forças ($\overline{F}$, $\overline{f}$) arbitrário (virtual) em equilíbrio, a igualdade $\overline{W_E} = \overline{U}$ estabelece uma condição de compatibilidade para a configuração deformada real.

Sendo que:

$\overline{W_E} = \sum \overline{F} \cdot D \rightarrow$ trabalho das forças externas virtuais $\overline{F}$ com os correspondentes deslocamentos externos reais D;

$\overline{U} = \int \overline{f} \cdot d \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos virtuais $\overline{f}$ com os correspondentes deslocamentos relativos internos reais d.

O PFV utiliza um sistema auxiliar, chamado *sistema virtual*, que é completamente independente do *sistema real*, sendo este a estrutura da qual se quer calcular um deslocamento ou rotação (ou estabelecer uma condição de compatibilidade). O sistema virtual trabalha com a mesma estrutura, mas com cargas diferentes. As cargas do sistema virtual são compostas de uma força (ou momento) escolhida arbitrariamente na direção do deslocamento (ou rotação) que se deseja calcular e de suas correspondentes reações de apoio. As cargas do sistema virtual não existem na realidade (por isso, são ditas *virtuais*) e são meras abstrações para cálculo.

Considere a viga biapoiada mostrada na Figura 4.8 com uma carga concentrada P_1 no centro (sistema real). Deseja-se determinar o valor do deslocamento D_2 em um ponto qualquer definido por uma distância a ao apoio da esquerda. O sistema virtual é definido arbitrariamente com um força $\overline{P_2}$ aplicada nesse ponto e com a mesma direção do deslocamento. Nessa figura estão indicados os diagramas de momentos fletores M e $\overline{M}$ dos sistemas real e virtual.

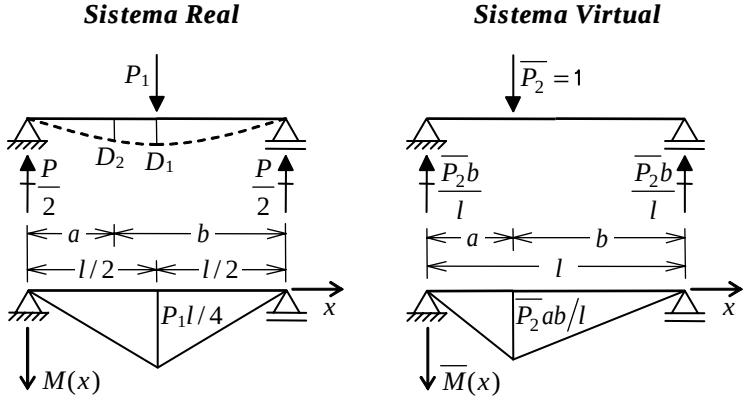


Figura 4.8 – Cálculo de deslocamento genérico em viga biapoiada com uma carga central.

O PFV aplicado à viga da Figura 4.8 resulta em (desprezando deformações provenientes do efeito cortante):

$$\overline{W_E} = \overline{U} \rightarrow \overline{P_2} \cdot D_2 = \int_0^l \overline{M} \cdot d\theta \,,$$

sendo $d\theta$ a rotação relativa interna do sistema real. Pela Equação (3.16), tem-se:

$$D_2 = \frac{1}{\overline{P_2}} \cdot \int_0^l \frac{\overline{M}(x) M(x)}{EI} dx \,.$$

Portanto, o PFV permite o cálculo de deslocamentos e rotações de forma generalizada. As cargas da estrutura real podem ser quaisquer e podem-se calcular deslocamentos e rotações em qualquer ponto e em qualquer direção.

Nesse exemplo, a magnitude da força virtual $\overline{P_2}$ é irrelevante, haja vista que o valor dessa força vai se cancelar na expressão acima pois o diagrama de momentos fletores virtuais $\overline{M}$ é uma função linear de $\overline{P_2}$. Entretanto, usualmente adota-se um valor unitário para a carga virtual.

Observa-se que a aplicação do PFV para o cálculo de deslocamentos em estruturas que trabalham à flexão resulta no cálculo de uma integral que combina diagramas de momentos fletores nos sistemas real e virtual. A Tabela 4.1 mostra expressões para avaliar essa integral para diagramas usuais em uma barra.

Tabela 4.1 – Combinação de diagramas de momentos fletores em barra.

$\int_0^l \overline{M} M dx$		$\overline{M_A}$	$\overline{M_B}$	$\overline{M_C}$
	M_A	$\overline{M_A} M_A l$	$\frac{1}{2}\overline{M_B} M_A l$	$\frac{1}{2}\overline{M_C} M_A l$
M_B, M_C, M_D	M_B	$\frac{1}{2}\overline{M_A} M_B l$	$\frac{1}{3}\overline{M_B} M_B l$	$\frac{1}{6}\overline{M_C} M_B l$
	M_C	$\frac{1}{2}\overline{M_A} M_C l$	$\frac{1}{6}\overline{M_B} M_C l$	$\frac{1}{3}\overline{M_C} M_C l$
	M_D	$\frac{2}{3}\overline{M_A} M_D l$	$\frac{1}{3}\overline{M_B} M_D l$	$\frac{1}{3}\overline{M_C} M_D l$

A expressão geral do PFV para o cálculo de um deslocamento genérico de um ponto de um pórtico plano é obtida das Equações (4.10) e (4.11):

$$\overline{W_E} = \overline{U} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{\overline{P}} \left[\int_{estrutura} \overline{N} \cdot du \;+\; \int_{estrutura} \overline{M} \cdot d\theta \;+\; \int_{estrutura} \overline{Q} \cdot dh \right]. \tag{4.12}$$

Em que:

$\Delta \rightarrow$ deslocamento genérico a ser calculado no sistema real;

$du \rightarrow$ deslocamento axial relativo interno no sistema real;

$d\theta \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão no sistema real;

$dh \rightarrow$ deslocamento transversal relativo interno no sistema real;

$\overline{P} \rightarrow$ carga virtual genérica associada ao deslocamento a ser calculado;

$\overline{N} \rightarrow$ esforço normal no sistema virtual provocado por $\overline{P}$;

$\overline{M} \rightarrow$ momento fletor no sistema virtual provocado por $\overline{P}$;

$\overline{Q} \rightarrow$ esforço cortante no sistema virtual provocado por $\overline{P}$.

No caso de uma grelha (estrutura plana com cargas fora do plano), o efeito de torção também deve ser considerado, resultando na seguinte expressão para o cálculo de um deslocamento genérico pelo PFV:

$$\overline{W_E} = \overline{U} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{\overline{P}} \left[\int_{estrutura} \overline{M} \cdot d\theta \;+\; \int_{estrutura} \overline{T} \cdot d\varphi \;+\; \int_{estrutura} \overline{Q} \cdot dh \right]. \tag{4.13}$$

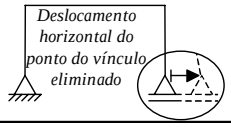
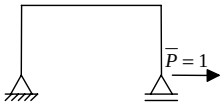
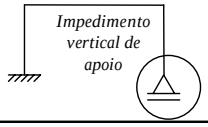
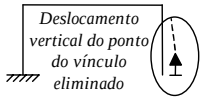
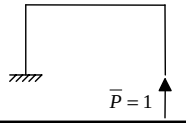
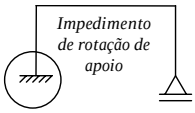
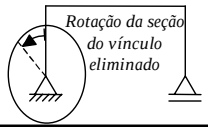
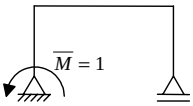
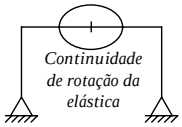
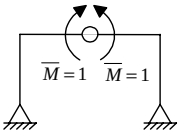
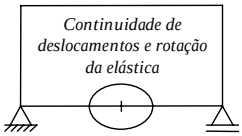
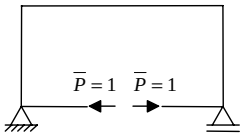
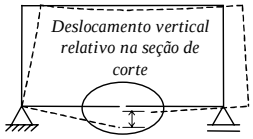
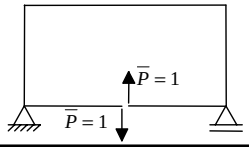
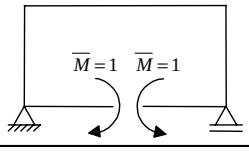
Sendo:

$d\varphi \rightarrow$ rotação relativa interna por torção no sistema real;

$\overline{T} \rightarrow$ momento torçor no sistema virtual provocado por $\overline{P}$.

A Tabela 4.2 mostra alguns tipos de cargas virtuais utilizadas dentro do contexto do PFV para calcular deslocamentos e rotações em pontos de um pórtico plano. As cargas virtuais mostradas nessa tabela são utilizadas, dentro da metodologia de cálculo do Método das Forças, para determinar deslocamentos ou rotações nas direções de vínculos eliminados de estruturas hiperestáticas. Como visto na Seção 2.3.1 do Capítulo 2, o Método das Forças utiliza uma estrutura auxiliar isostática, chamada Sistema Principal, que é obtida da estrutura original (hiperestática) pela eliminação de vínculos. Esses vínculos podem ser impedimentos de apoio ou vínculos de continuidade interna, e os deslocamentos e rotações são sempre calculados nas direções dos vínculos eliminados. O próximo capítulo aborda essa metodologia em detalhes.

Tabela 4.2 – Cargas virtuais utilizadas para calcular deslocamentos e rotações em vínculos eliminados de estruturas hiperestáticas.

Vínculo eliminado	***Deslocamento ou rotação associado(a)***	***Carga virtual***
		
		
		
		
		
		
		

Os deslocamentos relativos internos no sistema real dependem da solicitação externa que atua sobre a estrutura. Os deslocamentos relativos internos foram definidos na Seção 3.4 do Capítulo 3 para o caso de solicitações de carregamentos externos. Entretanto, existem outros tipos de solicitações que também provocam deformações em estruturas.

As seções a seguir mostram aplicações do PFV para o cálculo de deslocamentos (e rotações) em estruturas isostáticas devidos a diferentes tipos de solicitações: carregamento externo, variação de temperatura e recalque de apoio. Na seqüência também é mostrada uma aplicação do PFV para a verificação do atendimento a condições de compatibilidade de estruturas hiperestáticas.

4.3.1.1. Deslocamentos provocados por carregamento externo

As solicitações externas mais comuns em uma estrutura são carregamentos aplicados, tais como peso próprio, cargas de ocupação, cargas móveis, cargas de vento, etc. A expressão geral do PFV para o cálculo de um deslocamento genérico devido a solicitações desse tipo em um quadro plano é obtida substituindo as Equações (3.15), (3.16) e (3.17) dos deslocamentos relativos internos reais na Equação (4.12):

$$\Delta = \frac{1}{\overline{P}} \left[\int_{estrutura} \frac{\overline{N} \cdot N}{EA} dx \;+\; \int_{estrutura} \frac{\overline{M} \cdot M}{EI} dx \;+\; \int_{estrutura} \chi \frac{\overline{Q} \cdot Q}{GA} dx \right]. \tag{4.14}$$

Sendo:

$N \rightarrow$ esforço normal no sistema real provocado pelo carregamento externo;

$M \rightarrow$ momento fletor no sistema real provocado pelo carregamento externo;

$Q \rightarrow$ esforço cortante no sistema real provocado pelo carregamento externo.

No caso de uma grelha, utilizando a Equação (3.19), a expressão do PFV resulta em:

$$\Delta = \frac{1}{\overline{P}} \left[\int_{estrutura} \frac{\overline{M} \cdot M}{EI} dx \;+\; \int_{estrutura} \frac{\overline{T} \cdot T}{GJ_t} dx \;+\; \int_{estrutura} \chi \frac{\overline{Q} \cdot Q}{GA} dx \right]. \tag{4.15}$$

Sendo:

$T \rightarrow$ momento torçor no sistema real provocado pelo carregamento externo.

A última integral que considera o efeito de cisalhamento (cortante) nas Equações (4.14) e (4.15) tem valor pequeno em comparação com os outros termos no caso de barras longas (altura da seção transversal menor que aproximadamente ¼ do vão da barra). Nesse caso a integral é desprezada.

A estrutura da Figura 4.3 vai ser utilizada para exemplificar o cálculo de deslocamento em um pórtico plano. Considere que se deseja calcular o deslocamento horizontal do apoio da direita. A Figura 4.9 mostra os sistemas real e virtual utilizados, com a configuração deformada real (onde o deslocamento desejado Δ está indicado) e o diagrama de momentos fletores virtual $\overline{M}$. O diagrama de momentos fletores real M está indicado na Figura 4.3. O material adotado é um aço com módulo de elasticidade $E = 2{,}05 \cdot 10^8$ kN / m^2. Para as colunas é adotada a seção transversal CS 200x52.3, com área $A_c = 6{,}7 \cdot 10^{-3}$ m^2 e momento de inércia $I_c = 4{,}8 \cdot 10^{-5}$ m^4. A seção transversal da viga é a VS 300x43.0 , com área $A_v = 5{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^2 e momento de inércia $I_v = 8{,}8 \cdot 10^{-5}$ m^4.

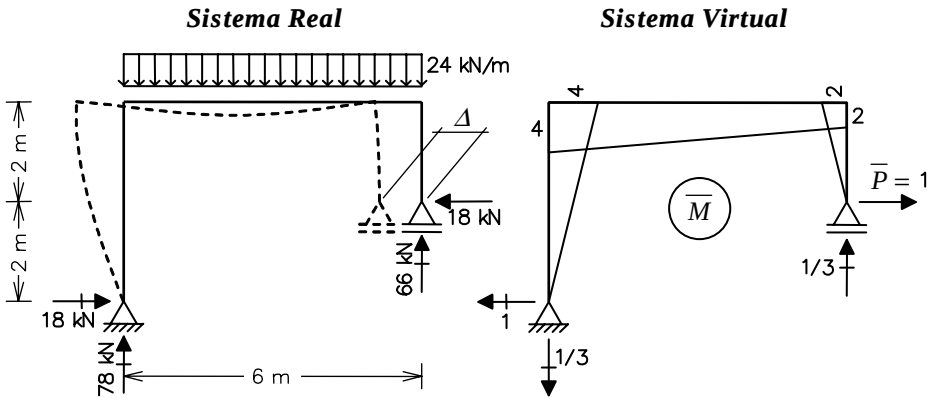


Figura 4.9 – Cálculo de deslocamento devido a um carregamento externo pelo PFV.

A energia de deformação interna virtual para o cálculo do deslocamento da estrutura da Figura 4.9 é composta de duas parcelas, uma provocada pelos efeitos axiais e outra pelos efeitos de flexão. O cálculo da parcela associada aos efeitos axiais é mostrado abaixo, sendo que a integral ao longo da estrutura é decomposta em um somatório de integrais ao longo das três barras:

$$\int_{estrutura} \frac{\overline{N} \cdot N}{EA} dx = \sum_{barras} \left[\int_{barra} \frac{\overline{N} \cdot N}{EA} dx \right] = \sum_{barras} \left[\frac{\overline{N} \cdot N}{EA} \cdot l \right]_{barra} . \qquad (4.16)$$

Nessa expressão, os esforços normais reais N e virtuais $\overline{N}$ são obtidos diretamente das reações de apoio indicados na Figura 4.9 e l é o comprimento de uma barra. Dessa forma, tem-se:

$$\int_{estrutura} \frac{\overline{N} \cdot N}{EA} dx = \left[\frac{(+1) \cdot (-18)}{EA_v} \cdot 6 \right] + \left[\frac{(+1/3) \cdot (-78)}{EA_c} \cdot 4 \right] + \left[\frac{(-1/3) \cdot (-66)}{EA_c} \cdot 2 \right] . \qquad (4.17)$$

O cálculo da parcela de energia de deformação virtual por flexão também é decomposto em um somatório de integrais computadas em cada barra:

$$\int_{estrutura} \frac{\overline{M} \cdot M}{EI} dx = \sum_{barras} \left[\int_{barra} \frac{\overline{M} \cdot M}{EI} dx \right]. \tag{4.18}$$

A integral ao longo de cada barra na Equação (4.18) é calculada com base na Tabela 4.1. O cálculo para a viga é explicado na Figura 4.10. O diagrama de momentos fletores real é desmembrado em dois triângulos e uma parábola com máximo no centro, e o diagrama de momentos fletores virtuais é desmembrado em dois triângulos. Com base na Tabela 4.1, essas parcelas são combinadas em separado para avaliar a integral. Esse exemplo ilustra a utilização da tabela de combinação de diagrama de momentos. Observa-se que os sinais da integral são positivos quando as parcelas dos diagramas tracionam fibras do mesmo lado da barra, e são negativos quando tracionam fibras opostas.

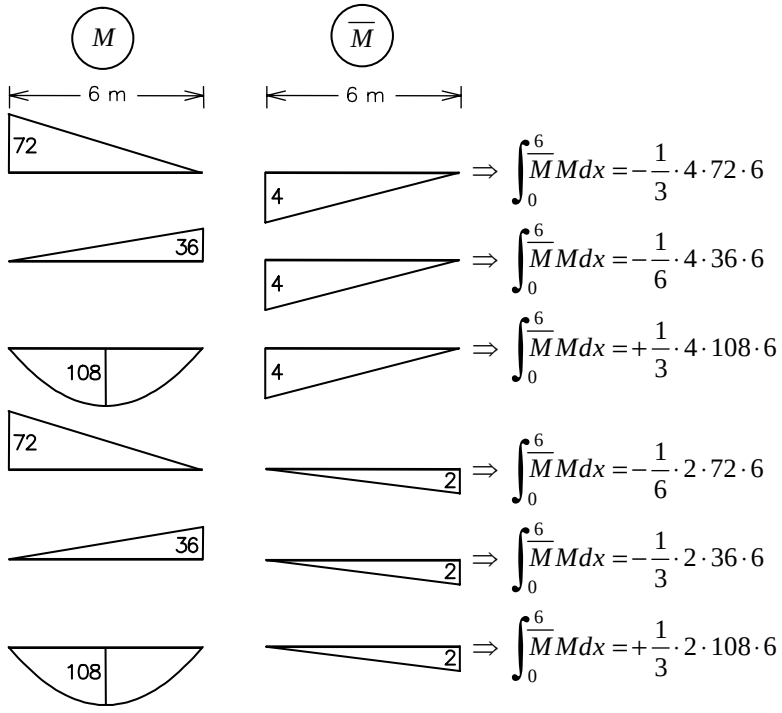


Figura 4.10 – Combinação de diagramas de momentos fletores real e virtual para a viga da estrutura da Figura 4.9.

As parcelas de contribuição para a energia de deformação virtual por flexão indicadas na Figura 4.10 são somadas às parcelas de contribuição das colunas, resultando em:

$$\int_{estrutura} \frac{\overline{M} \cdot M}{EI} dx = -\frac{1}{3EI_v} \cdot 4 \cdot 72 \cdot 6 - \frac{1}{6EI_v} \cdot 4 \cdot 36 \cdot 6 + \frac{1}{3EI_v} \cdot 4 \cdot 108 \cdot 6$$
$$-\frac{1}{6EI_v} \cdot 2 \cdot 72 \cdot 6 - \frac{1}{3EI_v} \cdot 2 \cdot 36 \cdot 6 + \frac{1}{3EI_v} \cdot 2 \cdot 108 \cdot 6 - \frac{1}{3EI_c} \cdot 4 \cdot 72 \cdot 4 - \frac{1}{3EI_c} \cdot 2 \cdot 36 \cdot 2 \quad (4.19)$$

Com base nas Equações (4.14), (4.17) e (4.19), e nos valores dos parâmetros E, A_v, I_v, A_c e I_c, o deslocamento desejado da estrutura da Figura 4.9 pode ser calculado:

$$\Delta = \frac{1}{\overline{P}} \left[\int_{estrutura} \frac{\overline{N} \cdot N}{EA} dx + \int_{estrutura} \frac{\overline{M} \cdot M}{EI} dx \right] = -1{,}40 \cdot 10^{-4} - 2{,}79 \cdot 10^{-2} = -2{,}81 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

O sinal negativo do deslocamento calculado significa que o seu sentido, da direita para a esquerda, é contrário ao sentido da carga virtual $\overline{P}$ aplicada.

Observa-se que a contribuição da parcela de energia de deformação devida ao efeito axial ($-1{,}40 \cdot 10^{-4}$ m) é muito menor em módulo do que a contribuição da parcela devida ao efeito de flexão ($-2{,}79 \cdot 10^{-2}$ m). Isto é usual para pórticos que trabalham à flexão e, em geral, no cálculo manual a contribuição da energia de deformação axial é desprezada. Deve-se ressaltar que as cargas, dimensões e parâmetros de material e seções transversais adotados para esse exemplo são realistas.

4.3.1.2. Deslocamentos provocados por variação de temperatura

Como visto na Seção 2.5 do Capítulo 2, variações de temperatura não provocam esforços em uma estrutura isostática. Isto porque a estrutura isostática tem o número exato de vínculos para ser estável e, portanto, sempre se ajusta a pequenas modificações no comprimento (dilatação ou encurtamento) de suas barras provocados por variações de temperatura. Em outras palavras, pode-se imaginar que uma estrutura isostática não oferece resistência para acomodar uma barra que sofreu uma pequena modificação em seu comprimento devido a uma variação de temperatura, já que a estrutura isostática sem aquela barra se configura em um mecanismo. Isto significa que a variação de temperatura provoca deslocamentos sem que apareçam esforços em uma estrutura isostática.

Entretanto, variações de temperatura em estruturas hiperestáticas provocam deformações e esforços internos na estrutura. Muitas vezes essas solicitações são de grande importância em estruturas hiperestáticas.

Os efeitos de variação de temperatura em estruturas hiperestáticas serão considerados no próximo capítulo. Esta seção mostra como se aplica o Princípio das Forças Virtuais para o cálculo de deslocamentos provocados por variação de temperatura em uma estrutura isostática.

Para se aplicar o PFV é necessário determinar os deslocamentos relativos internos devidos à variação de temperatura (real):

$du^T \rightarrow$ deslocamento axial relativo interno devido à variação de temperatura;

$d\theta^T \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão devido à variação de temperatura;

$dh^T \rightarrow$ deslocamento transversal relativo interno devido à variação de temperatura.

Considere inicialmente um exemplo simples de uma viga biapoiada que sofre um aquecimento uniforme de temperatura T [°C], tal como indicado na Figura 4.11. O material tem um coeficiente de dilatação térmica α [/ °C].

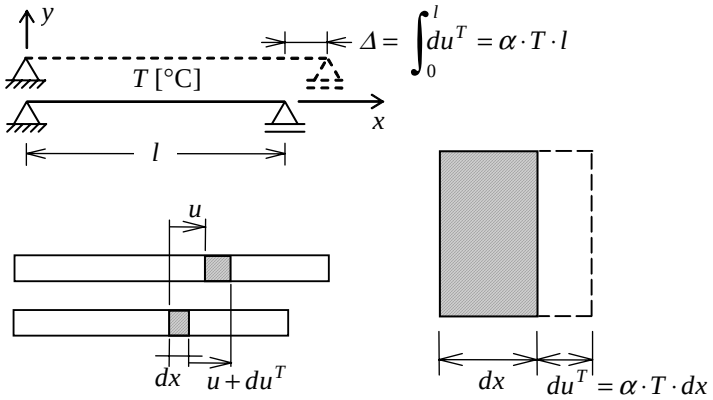


Figura 4.11 – Viga biapoiada com variação uniforme de temperatura.

Nesse caso, a variação de comprimento de um elemento infinitesimal de barra (de comprimento inicial dx) é:

$$du^T = \alpha \cdot T \cdot dx \, .$$

Agora considere o caso de uma viga que sofre um aquecimento $+T$ [°C] nas fibras inferiores e um resfriamento $-T$ [°C] nas fibras superiores, tal como indicado na Figura 4.12. A viga tem uma seção transversal tal que o centro de gravidade (por onde passa o eixo longitudinal x) se situa no meio da altura h da seção. Para pequenos deslocamentos, um ângulo em radianos pode ser aproximado à sua tangente. Portanto, com base na Figura 4.12, a rotação relativa interna por flexão devido a essa variação transversal de temperatura é:

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot 2T}{h} dx \, .$$

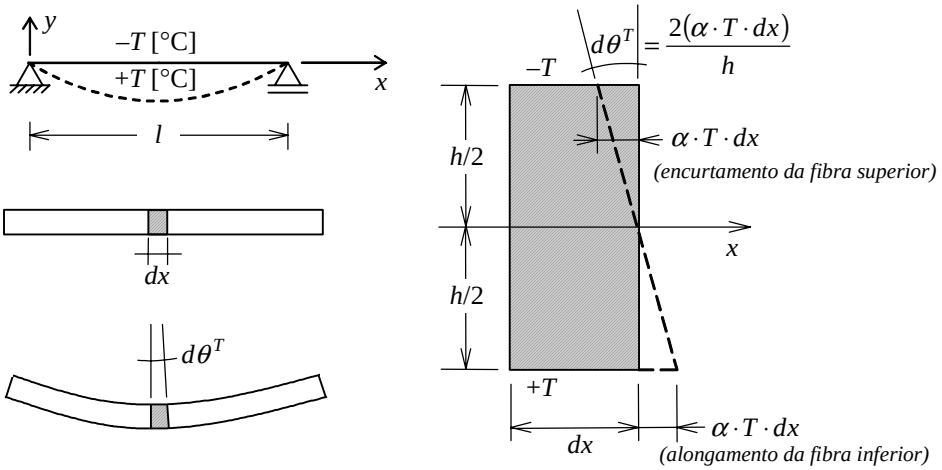


Figura 4.12 – Viga biapoiada com variação transversal de temperatura.

No caso geral, indicado na Figura 4.13, as fibras superiores e inferiores da barra sofrem variações diferentes de temperatura e o centro de gravidade se situa em uma posição qualquer ao longo da altura da seção transversal, definida pela sua distância $\bar{y}$ em relação à base da seção. Para a definição dos deslocamentos relativos internos devidos a uma variação genérica de temperatura, as seguintes hipóteses serão adotadas:

- Não existe deslocamento transversal relativo devido à variação de temperatura ($dh^T = 0$).
- A temperatura varia linearmente ao longo da altura da seção transversal (da fibra inferior para a superior). A variação de temperatura da fibra inferior é T_i e a da fibra superior é T_s. A conseqüência desta hipótese é que a seção transversal da barra vai permanecer plana com a variação de temperatura (considerando um material homogêneo).
- O deslocamento axial relativo interno devido à variação de temperatura (du^T) corresponde ao alongamento ou encurtamento da fibra que passa pelo centro de gravidade da seção transversal. A variação de temperatura nessa fibra (T_{CG}) é obtida por interpolação linear de T_i e T_s.

Com base na Figura 4.13, os deslocamentos relativos internos para uma variação genérica de temperatura são:

$$du^T = \alpha \cdot T_{CG} \cdot dx\,; \tag{4.20}$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h} dx\,. \tag{4.21}$$

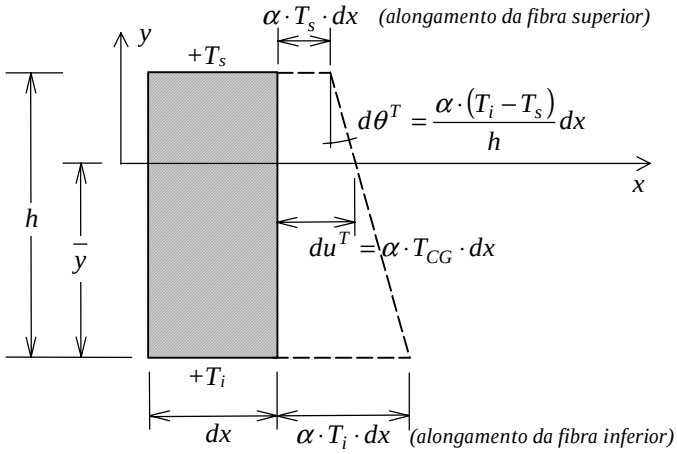


Figura 4.13 – Deformação de um elemento infinitesimal de barra por variação de temperatura.

O sinal da rotação relativa interna da Equação (4.21) depende dos valores de T_i e T_s. Conforme está indicando na Figura 4.13, quando T_i é maior que T_s (no sentido algébrico), $d\theta^T$ tem o sentido anti-horário e é convencionada positiva. O sinal vai ser negativo quando a rotação for no sentido horário.

A expressão geral do PFV para o cálculo de um deslocamento genérico devido a uma variação de temperatura genérica em um quadro plano é obtida substituindo as Equações (4.20) e (4.21) dos deslocamentos relativos internos reais (com $dh^T = 0$) na Equação (4.12):

$$\Delta = \frac{1}{\overline{P}} \left[\int_{estrutura} \overline{N} \cdot \alpha \cdot T_{CG} \cdot dx \quad + \int_{estrutura} \frac{\overline{M} \cdot \alpha \cdot (T_i - T_s)}{h} dx \right]. \tag{4.22}$$

Sendo:

$\alpha \rightarrow$ coeficiente de dilatação térmica do material;

$h \rightarrow$ altura da seção transversal de uma barra;

$T_i \rightarrow$ variação de temperatura na fibra inferior de uma barra;

$T_s \rightarrow$ variação de temperatura na fibra superior de uma barra;

$T_{CG} \rightarrow$ variação de temperatura na fibra do centro de gravidade de uma barra.

As integrais ao longo da estrutura da Equação (4.22) são decompostas em um somatório de integrais ao longo das barras. Considerando que as barras são prismáticas e que a variação de temperatura nas fibras superiores e inferiores de cada barra é uniforme, essa equação pode ser simplificada para:

$$\Delta = \frac{1}{\overline{P}} \cdot \left[\sum_{barras} \left[\alpha \cdot T_{CG} \cdot \int \overline{N} \cdot dx \right]_{barra} + \sum_{barras} \left[\frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h} \cdot \int \overline{M} \cdot dx \right]_{barra} \right]. \qquad (4.23)$$

Observa-se na Equação (4.23) que as integrais que aparecem correspondem às áreas dos diagramas de esforço normal e momento fletor do sistema virtual calculadas em cada barra.

Para exemplificar o cálculo de deslocamento pelo PFV devido a uma variação de temperatura, a mesma estrutura das Figuras 4.3 e 4.9 vai ser utilizada. Considere que a estrutura sofre um aquecimento interno de 20°C, tal como indicado na Figura 4.14, e que também se deseja calcular o deslocamento horizontal do apoio da direita. Portanto, o mesmo sistema virtual adotado na Figura 4.9 será adotado aqui. O material tem um coeficiente de dilatação térmica α = 0,000012 / °C. A altura da seção transversal das colunas é h_c = 0,20 m e a altura da seção transversal da viga é h_v = 0,30 m. Tanto para a viga quanto para as colunas, o centro de gravidade da seção transversal se situa no meio da altura.

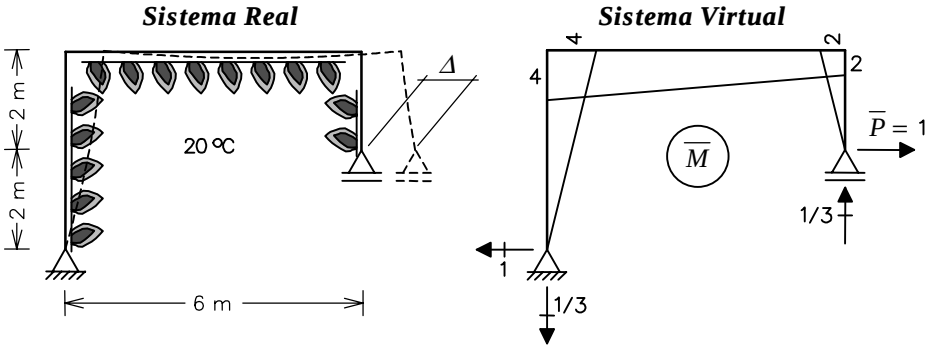


Figura 4.14 – Cálculo de deslocamento devido a uma variação de temperatura pelo PFV.

Os esforços normais virtuais nas barras do exemplo da Figura 4.14 são obtidos a partir das reações de apoio indicadas na figura, sendo que a viga tem $\overline{N}$ = +1, a coluna da esquerda tem $\overline{N}$ = +1/3 e a coluna da direita tem $\overline{N}$ = –1/3. A aplicação da Equação (4.23) para o cálculo do deslocamento desse exemplo resulta em:

$$\begin{aligned} \Delta = & \left[\alpha \cdot T_{CG} \cdot (+6) + \alpha \cdot T_{CG} \cdot \left(+\frac{4}{3} \right) + \alpha \cdot T_{CG} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right] \\ & + \left[\frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h_v} \cdot (+18) + \frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h_c} \cdot (+8) + \frac{\alpha \cdot (T_i - T_s)}{h_c} \cdot (+2) \right]. \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Adotou-se, como convenção, que os sinais dos momentos fletores são positivos quando tracionam as fibras interiores do quadro, resultando em áreas positivas.

Para o cálculo do deslocamento pela Equação (4.24), as fibras interiores do quadro estão sendo consideradas como fibras inferiores das barras. Portanto, T_i = +20°C, T_s = 0°C e T_{CG} = +10°C. Utilizando h_v = 0,30 m e h_c = 0,20 m na Equação (4.24), resulta no deslocamento horizontal do apoio da direita:

$$\Delta = \left[+0{,}08 \cdot 10^{-2}\right] + \left[+2{,}64 \cdot 10^{-2}\right] = +2{,}72 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

O sinal positivo indica que o deslocamento é da esquerda para a direita, pois este foi o sentido da carga virtual aplicada.

4.3.1.3. Deslocamentos provocados por recalques de apoio

Recalques de apoio, em geral, são solicitações acidentais. Entretanto, as fundações de uma estrutura podem apresentar pequenos movimentos que devem ser considerados no projeto. Como visto no Capítulo 2 (Seção 2.5), recalques de apoio, quando pequenos em relação às dimensões da estrutura, não provocam esforços em uma estrutura isostática. Isto porque a estrutura isostática tem o número exato de vínculos para ser estável e, portanto, sempre se ajusta a um pequeno movimento de apoio. Em outras palavras, pode-se imaginar que ao se movimentar um apoio a estrutura isostática perde um vínculo, transformando-se em um mecanismo (uma cadeia cinemática). Assim, a estrutura se acomoda como um corpo rígido (sem deformações) para a nova posição do apoio. Portanto, recalques de apoio provocam deslocamentos em uma estrutura isostática sem que ocorram deformações ou esforços.

Por outro lado, movimentos diferenciados de apoios de estruturas hiperestáticas provocam deformações e esforços internos na estrutura. Assim como no caso de variações de temperatura, os recalques de apoio podem provocar solicitações que são de grande importância em estruturas hiperestáticas.

Os efeitos de recalques de apoio em estruturas hiperestáticas serão considerados no próximo capítulo. Esta seção mostra como se aplica o Princípio das Forças Virtuais para o cálculo de um deslocamento provocado por um recalque de apoio de uma estrutura isostática.

O mesmo pórtico plano adotado nas seções anteriores é considerado como exemplo para o cálculo de deslocamento, tal como mostrado na Figura 4.15. No exemplo, o apoio da esquerda da estrutura sofre um recalque vertical (para baixo) ρ = 0,06 m.

Observa-se através da elástica indicada (com amplitude exagerada) na Figura 4.15 que o quadro isostático sofreu um movimento de corpo rígido devido ao recalque. Isto é, as barras permanecem retas (sem deformação). Portanto, a energia de deformação interna virtual é nula:

$$\overline{U} = 0 .$$

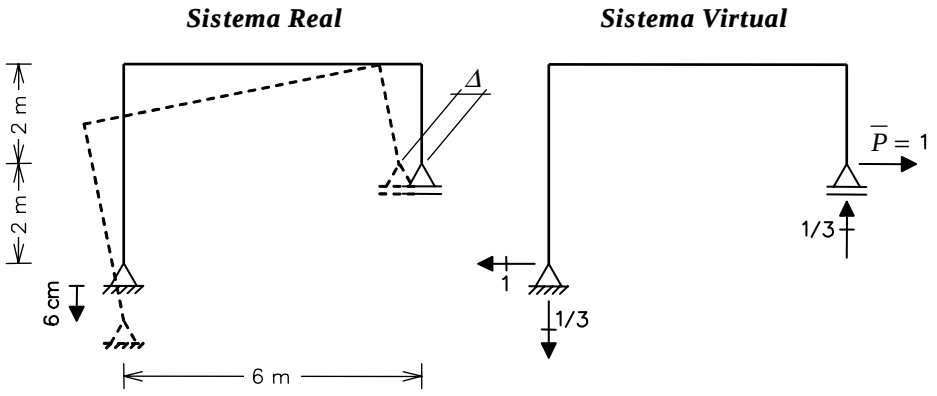


Figura 4.15 – Cálculo de deslocamento devido a um recalque de apoio pelo PFV.

Por outro lado, o trabalho virtual das forças externas agora recebe a contribuição da reação de apoio do sistema virtual com o correspondente deslocamento (recalque) de apoio real:

$$\overline{W_E} = \overline{P} \cdot \Delta + (-1/3) \cdot (-\rho).$$

Nessa expressão foi considerado que a reação vertical virtual no apoio da esquerda é negativa pois tem o sentido de cima para baixo, assim como o recalque (real) é negativo porque é para baixo.

A imposição da expressão do PFV ($\overline{W_E} = \overline{U}$) resulta no valor do deslocamento desejado, no qual o sinal negativo indica que o deslocamento é da direita para a esquerda:

$$\overline{W_E} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{1}{\overline{P}}\left[-(-1/3) \cdot (-\rho)\right] \rightarrow \Delta = -2{,}00 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

A expressão geral do PFV para o cálculo de um deslocamento genérico devido a recalques de apoio em um quadro isostático é obtida considerando que $\overline{U} = 0$:

$$\Delta = -\frac{1}{\overline{P}} \sum_{recalques} \left[\overline{R} \cdot \rho\right]. \tag{4.25}$$

Sendo:

$\rho \rightarrow$ recalque de apoio genérico na estrutura real;

$\overline{R} \rightarrow$ reação de apoio no sistema virtual correspondente ao recalque real ρ .

Os sinais das reações e recalques na Equação (4.25) devem ser consistentes.

4.3.1.4. Verificação de atendimento à condição de compatibilidade

Embora os exemplos mostrados nas seções anteriores tenham tratado de estruturas isostáticas, o PFV também pode ser aplicado para estruturas hiperestáticas. Nesse caso, a estrutura do sistema virtual não necessariamente precisa ter os mesmos vínculos da estrutura real, pois a única restrição quanto ao sistema de forças virtuais é que satisfaça condições de equilíbrio. Por exemplo, considere a viga engastada e apoiada da Figura 4.16.

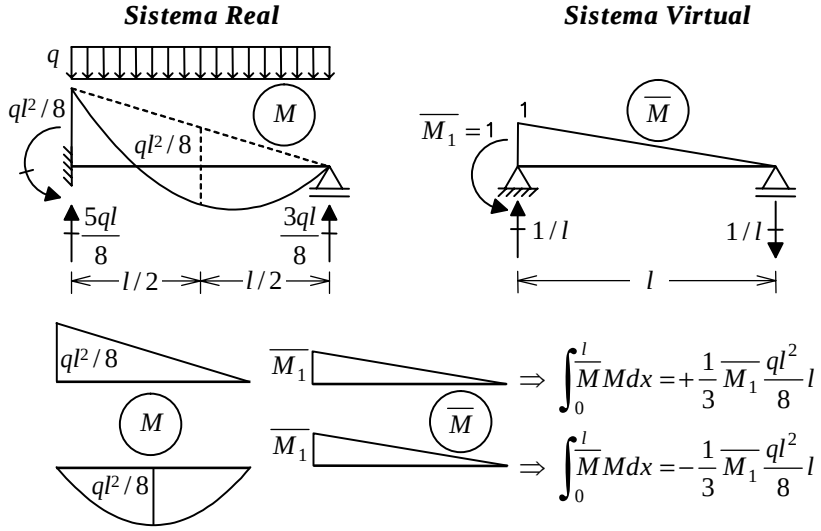


Figura 4.16 – Sistema virtual para verificação de correção de diagrama de momentos fletores de uma viga engastada e apoiada.

Na Figura 4.16, a estrutura real é hiperestática e a estrutura virtual é uma estrutura isostática obtida da estrutura real pela eliminação de um vínculo (restrição à rotação θ_1 na extremidade esquerda). Nesse caso, tendo-se disponível o diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática real, o cálculo da rotação na direção do vínculo eliminado deve resultar em um valor nulo. Isto é na verdade uma verificação da correção do diagrama: *o diagrama correto é aquele que faz com que a condição de compatibilidade no vínculo liberado no sistema virtual seja satisfeita.* De fato, o cálculo da rotação θ_1 pelo PFV resulta em um valor nulo:

$$\theta_1 = \frac{1}{\overline{M_1}} \cdot \int_0^l \frac{\overline{M}(x) M(x)}{EI} dx = +\frac{1}{3}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{EI} - \frac{1}{3}\frac{ql^2}{8}\frac{l}{EI} = 0 .$$

Nessa expressão, a integral foi avaliada conforme indica a Figura 4.16. O diagrama de momentos fletores real foi desmembrado em um triângulo e em uma parábola com máximo no centro. Com base na Tabela 4.1, essas parcelas foram combinadas

em separado com o triângulo do diagrama de momentos fletores virtual para avaliar a integral.

Deve-se tomar cuidado adicional na escolha do sistema virtual: a estrutura adotada no sistema virtual nunca deve acionar um vínculo em relação à estrutura real. Considere como exemplo a estrutura da Figura 4.17, da qual se deseja calcular o deslocamento D_1 no ponto central. Note que a estrutura real é hiperestática e a estrutura virtual é isostática. Entretanto, a estrutura virtual tem um vínculo adicional na extremidade direita (engaste) que não existe na estrutura real.

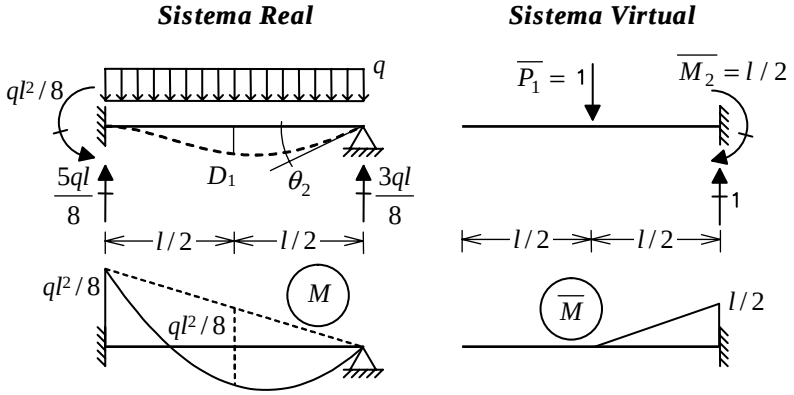


Figura 4.17 – Sistema virtual com vínculo adicional em relação à estrutura real.

O problema com a escolha do sistema virtual da Figura 4.17 é que no trabalho externo virtual total deve ser computado o trabalho realizado pela reação de apoio momento virtual $\overline{M_2}$ com a correspondente rotação real θ_2 na extremidade direita. Isto impede a determinação do deslocamento D_1 pois na expressão do PFV aparecem duas incógnitas, D_1 e θ_2:

$$\overline{W_E} = \overline{U} \rightarrow \overline{P_1} \cdot D_1 - \overline{M_2} \cdot \theta_2 = \int_0^l \frac{\overline{M} M}{EI} dx \, .$$

Note nessa expressão que o trabalho da reação momento virtual $\overline{M_2}$ realizado com a rotação real θ_2 é negativo pois essas entidades têm sentidos opostos (horário e anti-horário, respectivamente).

4.3.2. Princípio dos deslocamentos virtuais

Em algumas situações na análise de estruturas é necessário impor condições de equilíbrio a um sistema de forças. Por exemplo, as soluções fundamentais do Método dos Deslocamentos correspondem à determinação de valores de forças e momentos que equilibram uma estrutura que tem uma configuração deformada compatível imposta, tal como apresentado na Seção 2.3.2 do Capítulo 2.

O *Princípio dos Deslocamentos Virtuais* (PDV) é uma das principais ferramentas para a determinação de forças (e momentos) necessárias para impor uma determinada configuração deformada a uma estrutura. Esse princípio diz que:

- Dado um sistema de forças real (F, f) e uma configuração deformada ($\overline{D},\overline{d}$) arbitrária (virtual) compatível, a igualdade $\overline{W_E} = \overline{U}$ estabelece uma condição de equilíbrio para o sistema de forças real.

Sendo que:

$\overline{W_E} = \sum F \cdot \overline{D} \rightarrow$ trabalho das forças externas reais F com os correspondentes deslocamentos externos virtuais $\overline{D}$;

$\overline{U} = \int f \cdot \overline{d} \rightarrow$ energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos reais f com os correspondentes deslocamentos relativos internos virtuais $\overline{d}$.

Assim como o PFV, o PDV utiliza um sistema auxiliar virtual, que é completamente independente do sistema real, sendo este a estrutura da qual se quer estabelecer uma condição de equilíbrio. O sistema virtual trabalha com a mesma estrutura, mas com uma configuração deformada ($\overline{D},\overline{d}$) escolhida arbitrariamente de tal maneira que uma única força (ou momento) desconhecida (a que se deseja calcular) produza trabalho externo. A configuração deformada do sistema virtual não existe na realidade (por isso, é dita *virtual*) e é uma mera abstração para cálculo.

Considere a viga biapoiada mostrada na Figura 4.18 com uma carga concentrada P_1 com posição definida por uma distância a ao apoio da esquerda (sistema real). Deseja-se determinar o valor da reação vertical V_A no apoio da esquerda. O sistema virtual é definido arbitrariamente com um campo de deslocamentos externos virtuais $\overline{D}$ tal que a outra reação de apoio desconhecida V_B não produza trabalho externo.

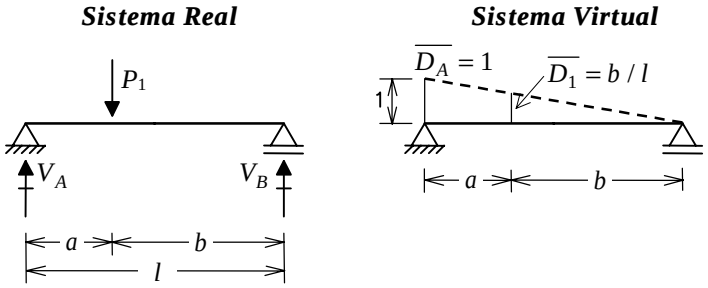


Figura 4.18 – Cálculo de reação de apoio de uma viga biapoiada pelo PDV.

Observa-se na Figura 4.18 que o campo de deslocamentos externos virtuais não precisa satisfazer as condições de compatibilidade (externas ou internas) da estrutura real. Como dito, a única restrição quanto à configuração deformada virtual é

que os deslocamentos externos virtuais sejam compatíveis com deslocamentos relativos (ou deformações) internos virtuais. Nesse exemplo, foi imposto um campo de deslocamentos virtuais de corpo rígido, isto é, sem deformação interna ($\overline{U} = 0$).

Pela Figura 4.18, o valor do deslocamento virtual $\overline{D_1}$, que corresponde à carga externa real P_1, é obtido por semelhança de triângulos. Portanto o valor da reação V_A sai diretamente da imposição de $\overline{W_E} = \overline{U}$:

$$V_A \cdot \overline{D_A} - P_1 \cdot \overline{D_1} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{P_1 b}{l}.$$

O PDV também pode ser utilizado para determinar um esforço interno em uma estrutura. Para tanto, é necessário escolher uma configuração deformada virtual que isole na equação $\overline{W_E} = \overline{U}$ o esforço que se quer calcular. Considere, por exemplo, que se deseja determinar o esforço cortante na seção *S* de uma viga apoiada, tal como mostrado na Figura 4.19. A viga está submetida a uma carga concentrada P_1 definida por uma distância *a* ao apoio da esquerda, e a seção *S* é definida pela ordenada *x* ao início da viga, sendo que $a > x$.

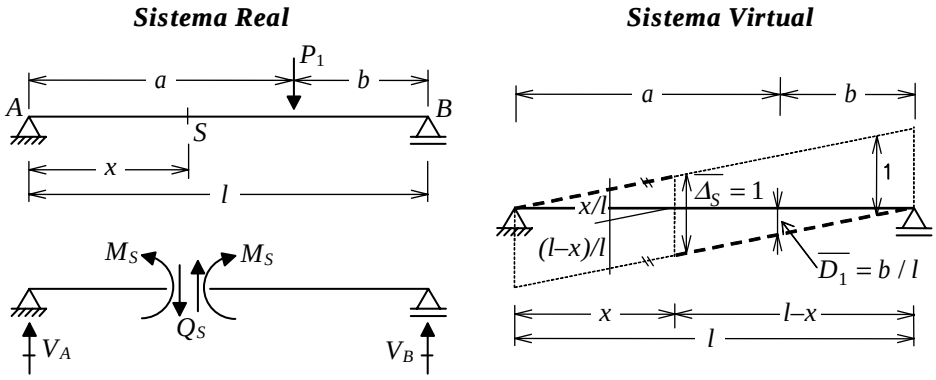


Figura 4.19 – Cálculo de esforço cortante de uma viga biapoiada pelo PDV.

A configuração deformada virtual do exemplo da Figura 4.19 foi definida de tal forma que não existe deformação no interior da viga, com exceção do ponto correspondente à seção *S*, onde existe um deslocamento transversal relativo interno virtual $\overline{\Delta_S} = 1$ concentrado. Isto é, foi imposta uma descontinuidade transversal unitária na posição da seção *S*. Deve-se observar que não existe rotação relativa entre os trechos da elástica virtual antes e depois da seção *S*. Este campo de deslocamentos virtual foi escolhido de tal forma que somente o esforço cortante Q_S na seção *S* produza energia de deformação virtual interna (M_S não provoca energia de deformação pois não existe rotação relativa):

$$\overline{U} = Q_S \cdot \overline{\Delta_S}.$$

Por outro lado, somente a força externa real P_1 provoca trabalho externo. As outras forças externas, as reações de apoio V_A e V_B, têm correspondentes deslocamentos virtuais nulos. Portanto:

$$\overline{W_E} = P_1 \cdot \overline{D_1},$$

sendo que $\overline{D_1}$ está indicado na Figura 4.19. Com base na expressão $\overline{W_E} = \overline{U}$, chega-se ao valor do esforço cortante desejado:

$$Q_S = +\frac{P_1 b}{l}.$$

É óbvio que, nesse exemplo, a aplicação do equilíbrio diretamente é uma forma muito mais simples para se determinar o valor do esforço cortante em *S*. O que se pretendeu mostrar com esse exemplo é que o PDV é uma maneira alternativa para se impor condições de equilíbrio, que em alguns casos pode ser muito mais adequada. Deve-se observar também que o valor do esforço cortante Q_S foi obtido diretamente pelo PDV, sem que se tivesse calculado as reações de apoio da viga. Isso evidencia a elegância desse princípio como ferramenta matemática para imposição de equilíbrio.

De maneira análoga, o momento fletor na seção *S* desse exemplo também pode ser determinado diretamente pelo PDV. A Figura 4.20 mostra a configuração deformada virtual que é utilizada para determinar M_S.

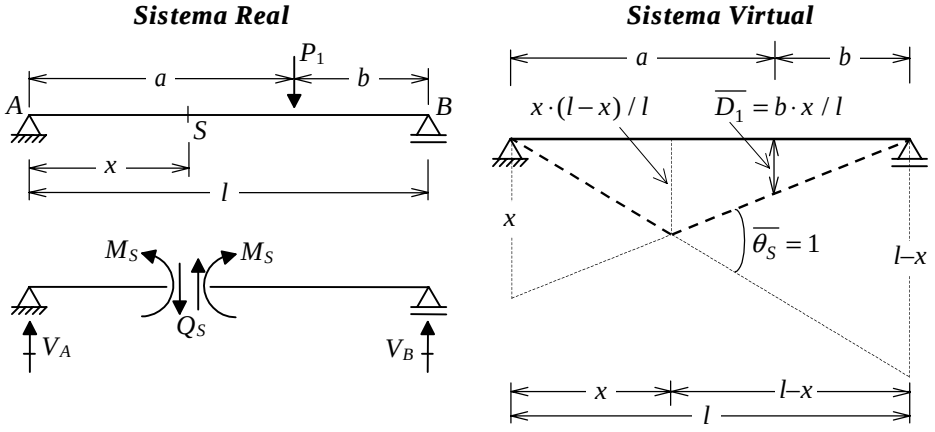


Figura 4.20 – Cálculo de momento fletor de uma viga biapoiada pelo PDV.

A elástica virtual do exemplo da Figura 4.20 é composta de trechos retos com uma rotação relativa interna $\overline{\theta_S} = 1$ concentrada na posição da seção *S* (considerando pequenos deslocamentos de tal forma que o arco de um círculo é aproximado por sua corda). Nesse caso, não existe deslocamento transversal relativo virtual e, portanto, somente M_S produz energia de deformação interna virtual:

$\overline{U} = M_S \cdot \overline{\theta_S}$.

A partir da imposição de $\overline{W_E} = \overline{U}$, sendo $\overline{W_E} = P_1 \cdot \overline{D_1}$ e $\overline{D_1} = b \cdot x / l$ (veja a Figura 4.20), chega-se a:

$$M_S = +\frac{P_1 \cdot b \cdot x}{l} .$$

Os exemplos de aplicação do PDV mostrados acima trataram somente de vigas isostáticas. Além disso, os campos de deslocamentos virtuais impostos corresponderam a trechos retos de movimentos de corpo rígido. Isto foi feito apenas com o objetivo de apresentar o princípio, haja vista que a imposição de condições de equilíbrio em estruturas isostáticas é relativamente simples. Na verdade, a grande vantagem do PDV é a determinação de forças ou momentos que equilibram uma estrutura qualquer (isostática ou hiperestática) que tenha uma configuração deformada conhecida (não rígida no caso geral).

A expressão geral do PDV para o cálculo de uma força externa genérica atuando em um ponto de um pórtico plano para manter o seu equilíbrio é obtida das Equações (4.10) e (4.11), desprezando a energia de deformação por efeito cortante:

$$\overline{W_E} = \overline{U} \Rightarrow P = \frac{1}{\overline{\Delta}} \left[\int_{estrutura} N \cdot \overline{du} \; + \int_{estrutura} M \cdot \overline{d\theta} \right] . \tag{4.26}$$

Sendo:

$P \rightarrow$ força externa genérica a ser calculada no sistema real;

$N \rightarrow$ esforço normal no sistema real;

$M \rightarrow$ momento fletor no sistema real;

$\overline{\Delta} \rightarrow$ deslocamento externo virtual no ponto da força genérica a ser calculada;

$\overline{du} \rightarrow$ deslocamento axial relativo interno no sistema virtual;

$\overline{d\theta} \rightarrow$ rotação relativa interna por flexão no sistema virtual.

No caso de uma grelha (estrutura plana com cargas fora do plano), o efeito de torção também deve ser considerado, resultando na seguinte expressão para o cálculo de uma força externa genérica pelo PDV, também desprezando a energia de deformação por efeito cortante:

$$\overline{W_E} = \overline{U} \Rightarrow P = \frac{1}{\overline{\Delta}} \left[\int_{estrutura} M \cdot \overline{d\theta} \; + \int_{estrutura} T \cdot \overline{d\varphi} \right] . \tag{4.27}$$

Sendo:

$T \rightarrow$ momento torçor no sistema real;

$\overline{d\varphi} \rightarrow$ rotação relativa interna por torção no sistema virtual.

4.3.2.1. PDV para solicitações de carregamentos externos e recalques de apoio

Esta seção deduz a expressão do PDV para o cálculo genérico de forças ou momentos que equilibram uma estrutura qualquer (isostática ou hiperestática) cujas solicitações externas reais são carregamentos externos ou recalques de apoio. Essas solicitações se caracterizam por não apresentarem deformações iniciais.

Para a aplicação do princípio para esses tipos de solicitação, é necessário escrever as Equações (4.26) e (4.27) em função do campo de deslocamentos externos reais e virtuais. Para tanto, é obtida com base na Equação (3.15) uma relação entre o esforço normal N e o deslocamento axial u:

$$N = EA\frac{du}{dx}. \tag{4.28}$$

A relação entre o momento fletor M e o deslocamento transversal v é obtida com base na Equação (3.20):

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2}. \tag{4.29}$$

A relação entre o momento torçor T e a rotação por torção φ é obtida da Equação (3.19):

$$T = GJ_t\frac{d\varphi}{dx}. \tag{4.30}$$

Substituindo as Equações (4.28) e (4.29) na Equação (4.26), e considerando pela Equação (3.1) que $\overline{d\theta}/dx = d^2\overline{v}/dx^2$, tem-se a expressão do PDV para quadros planos em função dos deslocamentos:

$$P = \frac{1}{\Delta}\left[\int_{estrutura} EA\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\overline{u}}{dx}dx \;+\; \int_{estrutura} EI\frac{d^2v}{dx^2}\cdot\frac{d^2\overline{v}}{dx^2}dx\right]. \tag{4.31}$$

Sendo:

$EA \rightarrow$ parâmetro de rigidez axial, sendo E o módulo de elasticidade do material e A a área da seção transversal;

$u(x) \rightarrow$ deslocamento axial no sistema real;

$\overline{u(x)} \rightarrow$ deslocamento axial no sistema virtual;

$EI \rightarrow$ parâmetro de rigidez transversal por flexão, sendo I o momento de inércia da seção transversal;

$v(x) \rightarrow$ deslocamento transversal no sistema real;

$\overline{v(x)} \rightarrow$ deslocamento transversal no sistema virtual.

No caso de grelhas, a expressão do PDV em função de deslocamentos transversais e rotações por torção externos é obtida substituindo as Equações (4.29) e (4.30) na Equação (4.27):

$$P = \frac{1}{\overline{\Delta}} \left[\int_{estrutura} EI \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \overline{v}}{dx^2} dx \quad + \int_{estrutura} GJ_t \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\overline{\varphi}}{dx} dx \right]. \tag{4.32}$$

Sendo:

$GJ_t \rightarrow$ parâmetro de rigidez à torção, sendo G o módulo de cisalhamento do material e J_t o momento de inércia à torção da seção transversal;

$\varphi(x) \rightarrow$ rotação por torção no sistema real;

$\overline{\varphi(x)} \rightarrow$ rotação por torção no sistema virtual.

As Seções 4.4.2 e 4.4.3 mostram aplicações das Equações (4.31) e (4.32) do PDV para o cálculo de forças e momentos em barras cinematicamente determinadas, isto é, em barras das quais se conhece a configuração deformada. Estas são soluções fundamentais que formam base para o Método dos Deslocamentos, tal como vai ser visto no Capítulo 6.

4.3.2.2. PDV para solicitações de variação de temperatura

A variação de temperatura é um tipo de solicitação externa que se caracteriza por provocar deformações iniciais. No caso de estruturas isostáticas, as deformações provocadas por temperatura não sofrem qualquer tipo de restrição, não provocando, portanto, esforços internos na estrutura. Por outro lado, uma estrutura hiperestática pode ter tensões internas induzidas por variação de temperatura.

A aplicação do PDV para esse tipo de solicitação vai ser deduzida para o caso de pórticos planos. Nesse caso, o deslocamento axial relativo interno e a rotação relativa interna por flexão devem considerar um termo devido ao esforço interno (que pode ser provocado conjuntamente por carregamento externo e recalques de apoio) e um termo devido à variação de temperatura:

$$du = \frac{N}{EA} dx + du^T; \tag{4.33}$$

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx + d\theta^T . \tag{4.34}$$

Sendo que du^T e $d\theta^T$ são dados pelas Equações (4.20) e (4.21), respectivamente.

Para aplicar a Equação (4.26) do PDV, é necessário escrever o esforço normal N e o momento fletor M considerando as deformações iniciais provocadas pela variação de temperatura. Isto é feito com base nas Equações (4.33) e (4.34):

$$N = EA\left(\frac{du}{dx} - \frac{du^T}{dx}\right); \tag{4.35}$$

$$M = EI\left(\frac{d\theta}{dx} - \frac{d\theta^T}{dx}\right). \tag{4.36}$$

Substituindo os esforços internos reais dados pelas Equações (4.35) e (4.36) na Equação (4.26), resulta na expressão do PDV para estruturas hiperestáticas com solicitações reais de carregamento externo, recalques e variação de temperatura:

$$P = \frac{1}{\bar{\Delta}}\left[\int_{estrutura}\left[EA\left(\frac{du}{dx} - \frac{du^T}{dx}\right)\right]\cdot\frac{\overline{du}}{dx}dx \;+\; \int_{estrutura}\left[EI\left(\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{d\theta^T}{dx}\right)\right]\cdot\frac{d^2\bar{v}}{dx^2}dx\right]. \tag{4.37}$$

4.3.3. Teoremas de reciprocidade

O PTV pode ser utilizado para formular dois teoremas que são muito úteis na análise de estruturas elásticas lineares. Estes são os chamados teoremas de reciprocidade (Tauchert 1974): o Teorema de Maxwell e a sua versão generalizada, o Teorema de Betti (White *et al.* 1976).

Considere duas soluções estruturais completas A e B que atuam sobre a mesma estrutura elástica e linear (as soluções são ditas completas porque cada uma delas satisfaz todas as condições de equilíbrio e compatibilidade). O sistema A é composto de um sistema de forças (F_A, f_A) em equilíbrio e associado a uma configuração deformada (D_A, d_A) compatível. No sistema A, F_A são as forças externas atuando sobre a estrutura, f_A são esforços internos em equilíbrio com F_A, D_A é o campo de deslocamentos externos da estrutura e d_A são deslocamentos relativos internos compatíveis com D_A. Analogamente, o sistema B é composto de um sistema de forças (F_B, f_B) em equilíbrio e associado a uma configuração deformada (D_B, d_B) compatível.

O PTV pode ser aplicado a esses dois sistemas de duas formas, uma considerando o sistema A como real e o sistema B como virtual e a outra ao contrário. Utilizando a Equação (4.10) pode-se escrever as seguintes relações:

$$\sum F_A \cdot D_B = \int f_A \cdot d_B \, ; \tag{4.38}$$

$$\sum F_B \cdot D_A = \int f_B \cdot d_A \, . \tag{4.39}$$

Considere que a estrutura é um quadro plano que tem um comportamento linear elástico. Nesse caso, a integral do lado direito do sinal de igual das Equações (4.38) e (4.39) são iguais:

$$\int f_A \cdot d_B = \int f_B \cdot d_A = \int \frac{N_A N_B}{EA} dx + \int \frac{M_A M_B}{EI} dx + \int \chi \frac{Q_A Q_B}{GA} dx \, .$$

Dessa forma, pode-se enunciar o *Teorema de Betti* (Tauchert 1974, White *et al.* 1976):

- Se uma estrutura linear elástica é submetida a dois sistemas independentes de forças, o trabalho realizado pelas forças generalizadas do primeiro sistema com os correspondentes deslocamentos generalizados do segundo sistema é igual ao trabalho realizado pelas forças generalizadas do segundo sistema com os correspondentes deslocamentos generalizados do primeiro sistema:

$$\sum F_A \cdot D_B = \sum F_B \cdot D_A \, . \tag{4.40}$$

As forças são ditas generalizadas pois podem envolver cargas concentradas, cargas distribuídas e momentos aplicados. Os deslocamentos são ditos generalizados pois podem envolver deslocamentos e rotações.

Um caso particular do Teorema de Betti, chamado de *Teorema de Maxwell*, ocorre quando as soluções completas independentes são constituídas de forças generalizadas unitárias isoladas, tal como as mostradas na Figura 4.21.

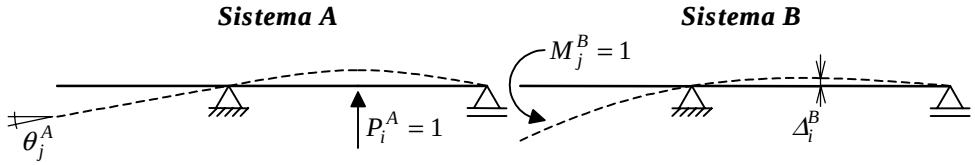


Figura 4.21 – Teorema de Maxwell para forças generalizadas unitárias.

O Teorema de Maxwell, na versão para forças generalizadas unitárias aplicadas, pode ser enunciado da seguinte maneira:

- Em uma estrutura linear elástica, o deslocamento generalizado no ponto *j* provocado por uma força generalizada unitária atuando no ponto *i* é igual ao deslocamento generalizado no ponto *i* provocado por uma força generalizada unitária atuando no ponto *j* (veja a Figura 4.21):

$$\theta_j^A = \Delta_i^B \, . \tag{4.41}$$

Alternativamente, as soluções podem ser constituídas de imposições de deslocamentos generalizados unitários, tal como indica a Figura 4.22.

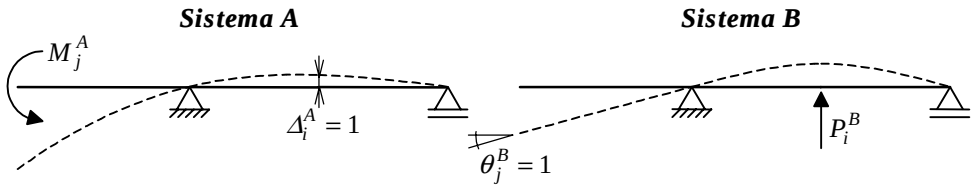


Figura 4.22 – Teorema de Maxwell para deslocamentos generalizados unitários.

O Teorema de Maxwell, na versão para deslocamentos generalizados unitários impostos, pode ser enunciado da seguinte maneira:

- Em uma estrutura linear elástica, a força generalizada que atua no ponto *j* necessária para provocar um deslocamento generalizado unitário no ponto *i* é igual à força generalizada que atua no ponto *i* necessária para provocar um deslocamento generalizado unitário no ponto *j* (veja a Figura 4.22):

$$M_j^A = P_i^B . \tag{4.42}$$

A primeira versão do Teorema de Maxwell vai ser utilizada no próximo capítulo para demonstrar a simetria da matriz de flexibilidade, que é a matriz dos coeficientes de flexibilidade do sistema de equações finais de compatibilidade do Método das Forças.

A segunda versão do Teorema de Maxwell será utilizada na próxima seção e no Capítulo 6 para demonstrar a simetria da matriz de rigidez, que é a matriz dos coeficientes de rigidez do sistema de equações finais de equilíbrio do Método dos Deslocamentos.

4.4. Soluções fundamentais para barras isoladas

A metodologia de cálculo do Método dos Deslocamentos, conforme introduzido na Seção 2.3.2 do Capítulo 2, faz uma superposição de soluções cinematicamente determinadas. Essas soluções são configurações deformadas elementares da estrutura sendo analisada. Dentro dessa metodologia, conforme vai ser visto no Capítulo 6, uma configuração deformada elementar isola um determinado efeito ou parâmetro que representa o comportamento cinemático (deformado) da estrutura. Cada configuração deformada elementar é uma solução fundamental no contexto do Método dos Deslocamentos. Nesse contexto, uma solução fundamental de uma estrutura reticulada é composta de configurações deformadas elementares das suas barras. Esta seção apresenta soluções fundamentais de barras isoladas que compõem as soluções fundamentais do Método dos Deslocamentos.

Existem dois tipos de soluções fundamentais de barras isoladas para o Método dos Deslocamentos. O primeiro corresponde a soluções de uma barra quando são impostos, isoladamente, deslocamentos ou rotações nas suas extremidades. Essas soluções se constituem nas forças e momentos que devem atuar nas extremidades da barra para equilibrá-la quando um deslocamento (ou rotação) é imposto em uma das suas extremidades, além da elástica resultante. O segundo tipo são soluções de engastamento perfeito de barras devido a solicitações externas. Essas soluções são a elástica e as reações de apoio para uma barra com as extremidades engastadas (deslocamentos e rotações restritos nas extremidades) resultantes da aplicação de uma solicitação externa no interior da barra.

4.4.1. Funções de forma para configurações deformadas elementares de barras de pórticos planos

As configurações deformadas elementares de uma barra isolada correspondem às elásticas que resultam da imposição individual de deslocamentos ou rotações em uma de suas extremidades. Os deslocamentos são impostos em direções paralelas aos eixos locais de uma barra, sendo que o eixo x tem a direção axial da barra e o eixo y tem a direção transversal, tal como mostra a Figura 4.23.

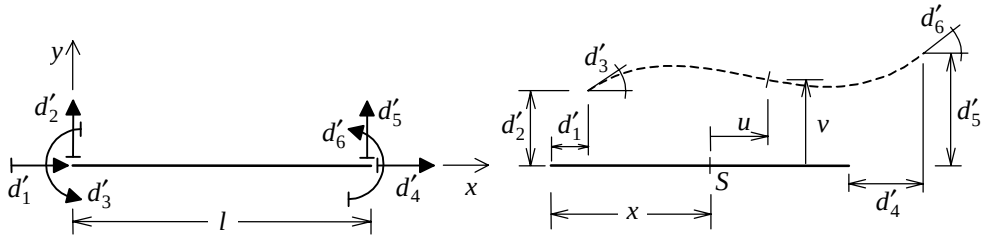


Figura 4.23 – Eixos locais e deslocabilidades de uma barra de pórtico plano isolada.

A Figura 4.23 indica os deslocamentos e rotações nas extremidades de uma barra de pórtico plano isolada nas direções dos eixos locais da barra. Esses deslocamentos e rotações são chamados de *deslocabilidades*:

$d'_i \rightarrow$ *deslocabilidade de barra no sistema local*: deslocamento ou rotação em uma extremidade de uma barra isolada, na direção de um dos eixos locais.

Sendo que d'_1 e d'_4 são os deslocamentos na direção axial, d'_2 e d'_5 são os deslocamentos na direção transversal, e d'_3 e d'_6 são as rotações.

A Figura 4.23 também introduz uma notação para indicar deslocamentos e rotações: *uma seta com um traço transversal na base.* Na figura as deslocabilidades também estão indicadas com seu significado físico na configuração deformada (com amplitude exagerada). Todas as deslocabilidade estão mostradas com seus senti-

dos positivos. Os deslocamentos são positivos nos sentidos dos eixos locais da barra e as rotações são positivas no sentido anti-horário.

Uma elástica elementar da barra de pórtico plano isolada é definida no sistema de eixos locais pelo deslocamento axial $u(x)$ e pelo deslocamento transversal $v(x)$, que estão indicados na Figura 4.23. Conforme foi comentado na Seção 3.1 do Capítulo 3, devido à adoção da hipótese de pequenos deslocamentos, o comportamento axial e o comportamento transversal de uma barra são considerados independentes. Dessa forma, o deslocamento axial $u(x)$ só depende das deslocabilidades axiais d'_1 e d'_4, e o deslocamento transversal $v(x)$ fica definido somente pelas deslocabilidades d'_2, d'_3, d'_5 e d'_6.

Considerando que não existe carregamento na direção axial no interior da barra, com base na Equação (3.7) tem-se que o esforço normal N na barra é constante. Portanto, a partir da Equação (4.28), vê-se que o deslocamento axial $u(x)$ varia linearmente ao longo da barra:

$$u(x) = B_1 x + B_0 \,. \tag{4.43}$$

Por outro lado, o deslocamento transversal $v(x)$ da barra é regido pela Equação (3.22) de Navier. Como não existe carregamento transversal neste caso, o deslocamento transversal tem uma variação cúbica ao longo da barra:

$$v(x) = C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 \,. \tag{4.44}$$

As Equações (4.43) e (4.44) descrevem uma elástica genérica de uma barra isolada. Essa elástica pode ser descrita de uma maneira alternativa em função diretamente das deslocabilidades:

$$u(x) = N_1(x) \cdot d'_1 + N_4(x) \cdot d'_4 \,; \tag{4.45}$$

$$v(x) = N_2(x) \cdot d'_2 + N_3(x) \cdot d'_3 + N_5(x) \cdot d'_5 + N_6(x) \cdot d'_6 \,. \tag{4.46}$$

As funções $N_i(x)$, chamadas de *funções de forma*, definem as elásticas elementares da barra isolada.

Essencialmente, as Equações (4.43) e (4.45) são equivalentes. A diferença é que os parâmetros que definem a elástica axial da primeira equação são meros coeficientes de um polinômio linear, enquanto os parâmetros na segunda equação têm um significado físico: são as deslocabilidades axiais. Analogamente, as Equações (4.44) e (4.46) são equivalentes, mas na última os parâmetros que definem a elástica transversal são deslocabilidades que têm significado físico.

Existe uma função de forma da barra isolada associada a cada uma de suas deslocabilidades. No caso das deslocabilidades axiais, as equações que definem as funções de forma são obtidas a partir da Equação (4.43), determinando os valores das constantes B_0 e B_1 com base em condições de contorno adequadas. A função de

forma $N_1(x)$ é definida considerando $u(0) = 1$ e $u(l) = 0$ na Equação (4.43), e a função de forma $N_4(x)$ é definida considerando $u(0) = 0$ e $u(l) = 1$. Isso resulta nas funções abaixo, que também estão mostradas na Figura 4.24:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}; \tag{4.47}$$

$$N_4(x) = \frac{x}{l}. \tag{4.48}$$

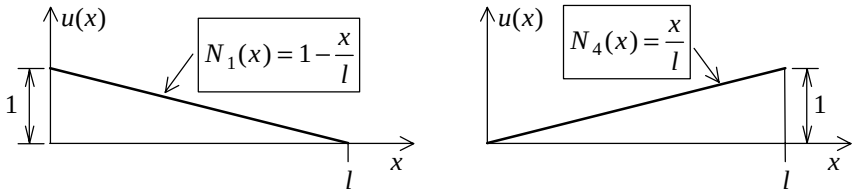


Figura 4.24 – Funções de forma axiais de uma barra isolada.

De forma análoga, para as deslocabilidades transversais, as equações que definem as funções de forma são obtidas a partir da Equação (4.44), determinando os valores das constantes C_0, C_1, C_2 e C_3 com base em condições de contorno adequadas. A função de forma $N_2(x)$ é definida considerando $v(0) = 1$, $dv(0)/dx = 0$, $v(l) = 0$ e $dv(l)/dx = 0$; a função de forma $N_3(x)$ é definida considerando $v(0) = 0$, $dv(0)/dx = 1$, $v(l) = 0$ e $dv(l)/dx = 0$; a função de forma $N_5(x)$ é definida considerando $v(0) = 0$, $dv(0)/dx = 0$, $v(l) = 1$ e $dv(l)/dx = 0$; e a função de forma $N_6(x)$ é definida considerando $v(0) = 0$, $dv(0)/dx = 0$, $v(l) = 0$ e $dv(l)/dx = 1$. Isso resulta nas funções abaixo, que também estão mostradas na Figura 4.25:

$$N_2(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}; \tag{4.49}$$

$$N_3(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + 3\frac{x^3}{l^2}; \tag{4.50}$$

$$N_5(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}; \tag{4.51}$$

$$N_6(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}. \tag{4.52}$$

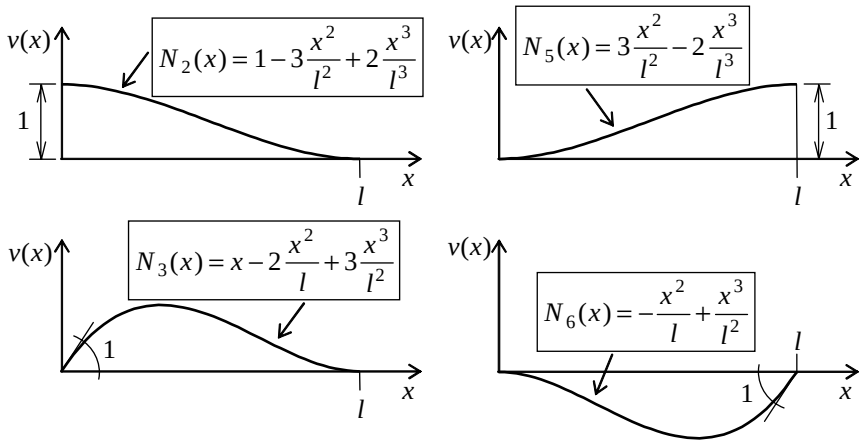


Figura 4.25 – Funções de forma transversais (de flexão) de uma barra isolada.

4.4.2. Coeficientes de rigidez de barra de pórtico plano

As mais importantes soluções fundamentais de barra isolada são os chamados *coeficientes de rigidez de barra*. No presente contexto, coeficientes de rigidez de barra são forças e momentos que devem atuar nas extremidades da barra isolada, paralelamente aos seus eixos locais, para equilibrá-la quando um deslocamento (ou rotação) é imposto, isoladamente, em uma das suas extremidades. As funções de forma mostradas na seção anterior definem elásticas correspondentes a essas soluções fundamentais para uma barra de quadro plano. A seguinte notação é utilizada:

$k'_{ij} \rightarrow$ *coeficiente de rigidez de barra no sistema local*: força ou momento que deve atuar em uma extremidade de uma barra isolada, na direção da deslocabilidade d'_i, para equilibrá-la quando a deslocabilidade $d'_j = 1$ é imposta (com valor unitário), isoladamente, em uma das suas extremidades.

O significado físico dos coeficientes de rigidez de barra de pórtico plano no sistema local é mostrado na Figura 4.26. Essa figura indica, no seu topo, a configuração deformada de uma barra isolada e o conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades da barra, paralelamente a seus eixos locais, para equilibrá-la nessa configuração. Essas forças e momentos são definidos como:

$f'_i \rightarrow$ *força generalizada de barra no sistema local*: força ou momento que atua na direção da deslocabilidade d'_i de uma barra para equilibrá-la quando isolada.

Como indica a Figura 4.26, a configuração deformada de uma barra pode ser decomposta em configurações deformadas elementares baseadas nas funções de forma definidas na seção anterior. A partir dessa superposição, as forças generalizadas da barra são obtidas pela soma das forças e momentos que equilibram a barra para cada uma das configurações deformadas elementares.

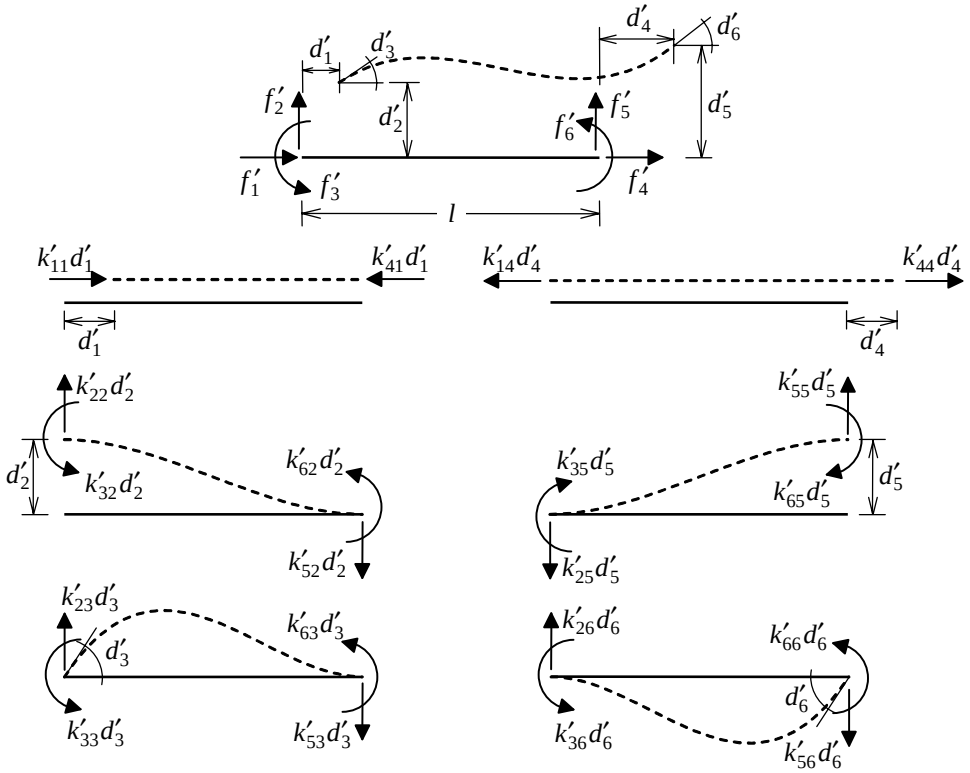


Figura 4.26 – Superposição de configurações deformadas elementares para compor a elástica final de uma barra de pórtico plano isolada.

Observa-se na Figura 4.26 o desacoplamento entre os efeitos axiais e transversais de flexão de uma barra. As deformadas elementares axiais devidas a d'_1 e d'_4 não mobilizam os coeficientes de rigidez de flexão (forças na direção transversal ou momentos). Da mesma forma, as deformadas elementares transversais de flexão devidas a d'_2, d'_3, d'_5 e d'_6 não mobilizam coeficientes de rigidez axiais. Devido a esse desacoplamento, alguns coeficientes de rigidez locais são nulos.

A superposição de configurações deformadas elementares mostrada na Figura 4.26 resulta em uma relação entre cada força nodal generalizada f'_i e as deslocabilidades da barra. Por exemplo, a força total f'_1 é obtida pela soma das forças axiais na extremidade esquerda da barra, resultando em: $f'_1 = k'_{11}d'_1 + k'_{14}d'_4$. Analogamente, a força total f'_2 é obtida pela soma das forças transversais na extremidade esquerda da barra, resultando em: $f'_2 = k'_{22}d'_2 + k'_{23}d'_3 + k'_{25}d'_5 + k'_{26}d'_6$. Generalizando para todas as forças e momentos que atuam nas extremidades da barra, pode-se escrever a seguinte relação matricial:

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & 0 & 0 & k'_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{22} & k'_{23} & 0 & k'_{25} & k'_{26} \\ 0 & k'_{32} & k'_{33} & 0 & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{41} & 0 & 0 & k'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{52} & k'_{53} & 0 & k'_{55} & k'_{56} \\ 0 & k'_{62} & k'_{63} & 0 & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \tag{4.53}$$

A Equação (4.53) também pode ser escrita de uma forma condensada:

$$\{f'\} = [k'] \cdot \{d'\} . \tag{4.54}$$

Sendo:

$\{f'\} \rightarrow$ *vetor das forças generalizadas de barra no sistema local*: conjunto de forças e momentos que atuam nas extremidades de uma barra (nas direções dos eixos locais) para equilibrá-la quando isolada.

$[k'] \rightarrow$ *matriz de rigidez de uma barra no sistema local*: matriz dos coeficientes de rigidez locais k'_{ij} nas direções dos eixos locais.

$\{d'\} \rightarrow$ *vetor das deslocabilidades de barra no sistema local*: conjunto de deslocabilidades de uma barra nas direções dos eixos locais.

Duas observações podem ser feitas quanto à matriz de rigidez da barra isolada. A primeira é que pelo Teorema de Maxwell (versão para deslocamento unitário imposto, Equação (4.42)) a matriz é simétrica, isto é:

$$k'_{ji} = k'_{ij} . \tag{4.55}$$

A segunda observação vem da superposição de configurações deformadas elementares mostrada na Figura 4.26. Observa-se que os coeficientes de rigidez que correspondem a uma dada configuração deformada elementar têm o mesmo índice *j*. Pode-se dizer então:

- A *j-ésima* coluna da matriz de rigidez $[k']$ de uma barra no seu sistema local corresponde ao conjunto de forças generalizadas que atuam nas extremidades da barra, paralelamente a seus eixos locais, para equilibrá-la quando é imposta uma configuração deformada tal que $d'_j = 1$ (deslocabilidade d'_j com valor unitário e as demais deslocabilidades com valor nulo).

O PDV vai ser utilizado nas próximas seções para deduzir os valores dos coeficientes de rigidez de uma barra de pórtico plano no sistema local. Essa dedução é feita para barras prismáticas, isto é, barras com uma seção transversal uniforme ao longo de seu comprimento. No Apêndice B é apresentado um processo, chamado Processo de Mohr (Süssekind 1977-2) ou Analogia da Viga Conjugada, que permite a determinação de coeficientes de rigidez para barras não prismáticas.

4.4.2.1. Coeficientes de rigidez axial de barra

A determinação dos coeficientes de rigidez axial de uma barra pode ser feita de uma forma direta através da imposição do equilíbrio da barra que sofre uma deformação axial. Por exemplo, considere a imposição da deslocabilidade d'_4 mostrada na Figura 4.27. As forças externas f'_1 e f'_4 estão indicadas com seus sentidos positivos. Pode-se observar que para provocar o alongamento da barra é necessário ter um esforço normal de tração $N = f'_4$. Além disso, a força f'_1 tem que ter o sentido contrário ao que está indicado para poder equilibrar a barra. A partir da relação $\sigma_x^a = E\varepsilon_x^a$ entre a tensão e a deformação normais da barra, chega-se a:

$$\frac{N}{A} = E\frac{d'_4}{l} \Rightarrow f'_4 = k'_{44}d'_4 = \frac{EA}{l}d'_4 \therefore k'_{44} = \frac{EA}{l};$$

$$f'_1 = -f'_4 \Rightarrow f'_1 = k'_{14}d'_4 = -\frac{EA}{l}d'_4 \therefore k'_{14} = -\frac{EA}{l}.$$

Entretanto, o PDV provê uma maneira mais geral para se chegar a esses mesmos resultados. Considere que se deseja determinar o valor do coeficiente de rigidez k'_{14}, que corresponde à força f'_1 que deve atuar na extremidade esquerda da barra quando um deslocamento axial $d'_4 = 1$ é imposto isoladamente na extremidade direita. O campo de deslocamentos axiais reais desse problema é $u(x) = N_4(x)\cdot d'_4$, conforme indicado na Figura 4.27. Para se calcular k'_{14}, deve-se escolher um campo de deslocamentos axiais virtuais tal que somente a força f'_1 produza trabalho externo virtual. Esse campo é $\overline{u(x)} = N_1(x)\cdot \overline{d'_1}$, também mostrado na Figura 4.27.

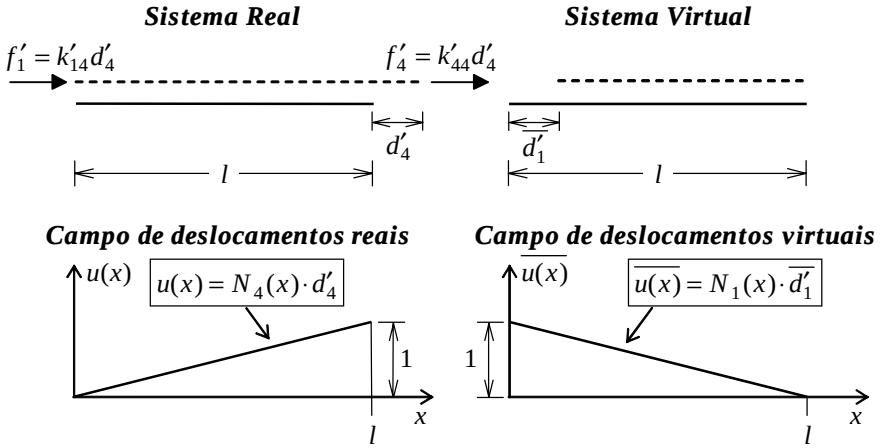


Figura 4.27 – Aplicação do PDV para obtenção de coeficiente de rigidez axial de uma barra isolada.

Aplicando o PDV com base na Equação (4.31), somente com a parcela da energia de deformação axial, chega-se a:

$$k'_{14}d'_4 = \frac{1}{\overline{d'_1}}\left[\int_0^l EA\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\overline{u}}{dx}dx\right] = \left[\int_0^l EA\frac{dN_4}{dx}\cdot\frac{dN_1}{dx}dx\right]\cdot d'_4 .$$

Nessa expressão o valor do deslocamento virtual $\overline{d'_1}$ imposto na extremidade esquerda se cancela. Portanto, tem-se:

$$k'_{14} = EA\int_0^l \frac{dN_1}{dx}\cdot\frac{dN_4}{dx}dx = -\frac{EA}{l} .$$

Vê-se que o PDV determina diretamente o valor do coeficiente de rigidez k'_{14} encontrado anteriormente, sem a necessidade de determinar outro coeficiente. Esse resultado pode ser generalizado para os outros coeficientes, bastando escolher os campos de deslocamentos real e virtual apropriados. Essa generalização resulta em:

$$k'_{ij} = EA\int_0^l \frac{dN_i}{dx}\cdot\frac{dN_j}{dx}dx \qquad (i,j = 1,4) \tag{4.56}$$

Com base na Equação (4.56), os valores dos coeficientes de rigidez axial podem ser calculados. Os resultados estão mostrados na Figura 4.28.

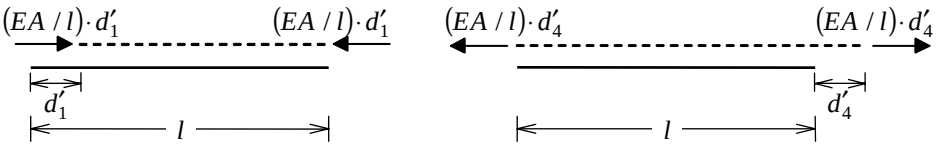


Figura 4.28 – Coeficientes de rigidez axial de uma barra isolada.

4.4.2.2. Coeficientes de rigidez à flexão de barra sem articulação

O PDV também é utilizado para determinar de uma maneira geral os valores dos coeficientes de rigidez à flexão que estão associados às deslocabilidades d'_2, d'_3, d'_5 e d'_6. Considere que se deseja determinar o valor do coeficiente de rigidez k'_{23}, que corresponde à força f'_2 que deve atuar na extremidade esquerda da barra quando uma rotação $d'_3 = 1$ é imposta isoladamente também na extremidade esquerda. O campo de deslocamentos transversais reais é $v(x) = N_3(x)\cdot d'_3$, conforme indicado na Figura 4.29. Para se calcular k'_{23}, deve-se escolher um campo de deslocamentos transversais virtuais tal que somente a força f'_2 produza trabalho externo virtual. Esse campo é $\overline{v(x)} = N_2(x)\cdot\overline{d'_2}$, tal como mostrado na Figura 4.29 superposto ao campo de deslocamentos reais.

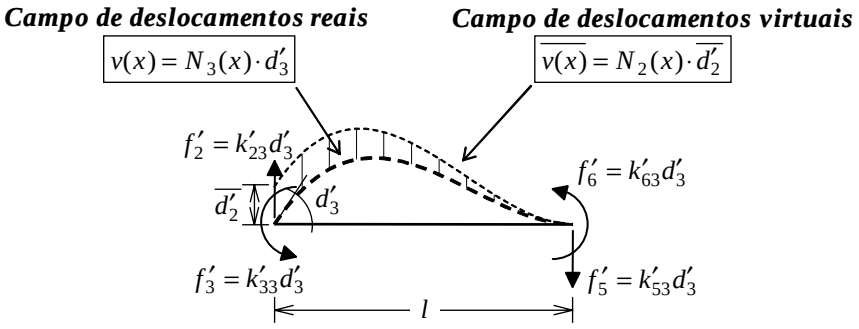


Figura 4.29 – Aplicação do PDV para obtenção de coeficiente de rigidez à flexão de uma barra isolada.

Utilizando a Equação (4.31) do PDV, chega-se a:

$$k'_{23} d'_3 = \frac{1}{\overline{d'_2}} \left[\int_0^l EI \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \overline{v}}{dx^2} dx \right] = \left[\int_0^l EI \frac{d^2 N_3}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx \right] \cdot d'_3 .$$

Nessa expressão o valor do deslocamento virtual $\overline{d'_2}$ se cancela. Portanto, tem-se:

$$k'_{23} = EI \int_0^l \frac{d^2 N_2}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx .$$

A generalização desse resultado para as outros coeficientes resulta na Equação (4.57) abaixo. Os valores dos coeficientes de rigidez à flexão são calculados com base nessa equação. Os resultados estão mostrados na Figura 4.30.

$$k'_{ij} = EI \int_0^l \frac{d^2 N_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx \qquad (i, j = 2,3,5,6) \tag{4.57}$$

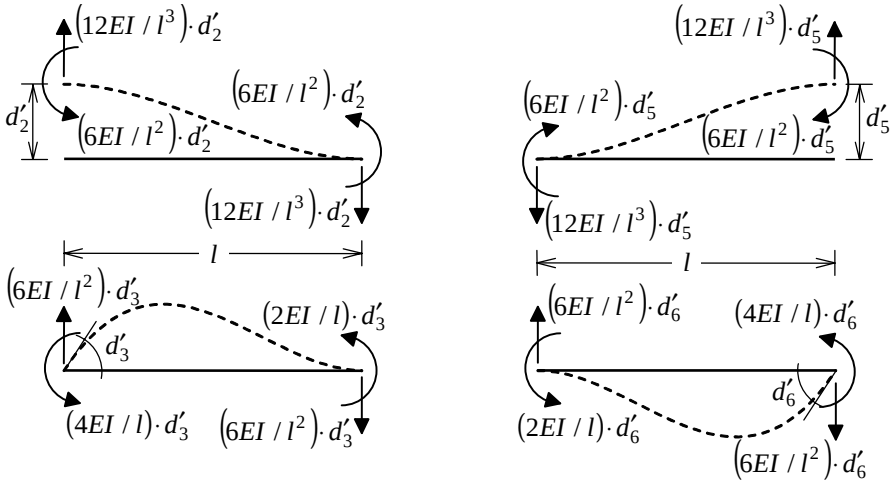


Figura 4.30 – Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra isolada sem articulação.

4.4.2.3. Coeficientes de rigidez à flexão de barra com articulação na esquerda

Estruturas reticuladas muitas vezes apresentam barras articuladas em uma extremidade ou em ambas. No modelo estrutural isso é modelado por uma rótula na extremidade articulada que libera a continuidade de rotação da barra nessa extremidade com as outras barras adjacentes ou com um apoio.

Procedimentos análogos aos que foram adotados para determinar coeficientes de rigidez de barras sem articulação poderiam ser desenvolvidos para barras com articulação. Para tanto, seria necessária a determinação de funções de forma para barras articuladas. Entretanto, um procedimento mais simples, baseado em superposição de efeitos, pode ser adotado para determinar os coeficientes de rigidez de uma barra articulada. Considere, como exemplo, a barra articulada na extremidade esquerda mostrada na Figura 4.31. O objetivo nesse exemplo é a determinação dos coeficientes de rigidez à flexão associados à imposição de uma rotação unitária na extremidade direita.

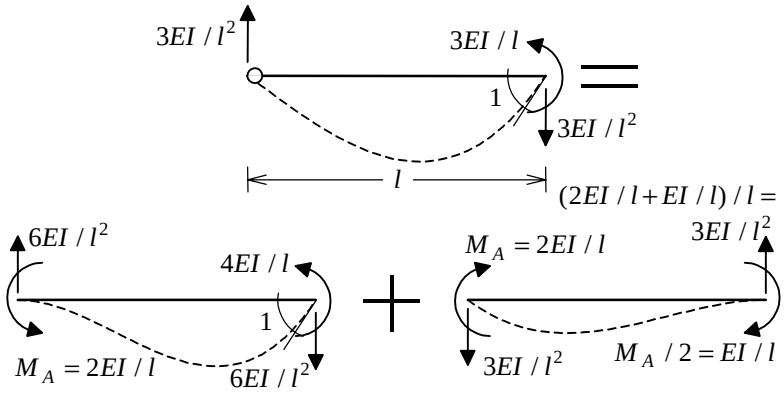


Figura 4.31 – Superposição de deformadas para obtenção de coeficientes de rigidez à flexão de uma barra com articulação na esquerda.

A Figura 4.31 mostra a configuração deformada da barra com a rotação unitária imposta, no sentido anti-horário, na extremidade direita. A articulação na extremidade esquerda faz com que o momento fletor nessa extremidade seja nulo. Essa condição pode ser alcançada com base na superposição de duas configurações deformadas da barra, tal como indicado nessa figura. A primeira parcela corresponde a uma rotação unitária imposta, no sentido anti-horário, na extremidade direita da barra sem articulação. Para garantir o equilíbrio nessa configuração, aparece um momento na extremidade esquerda $M_A = 2EI / l$ no sentido anti-horário. A segunda parcela da superposição corresponde à aplicação de um momento M_A no sentido horário nessa extremidade, de tal forma que o momento final da superpo-

sição nessa extremidade seja nulo. As forças e momentos (coeficientes de rigidez) que atuam na barra articulada são obtidos das forças e momentos correspondentes nas parcelas da superposição.

Procedimentos análogos podem ser feitos para determinar os outros coeficientes de rigidez da barra com articulação na esquerda. Os resultados disso estão mostrados na Figura 4.32.

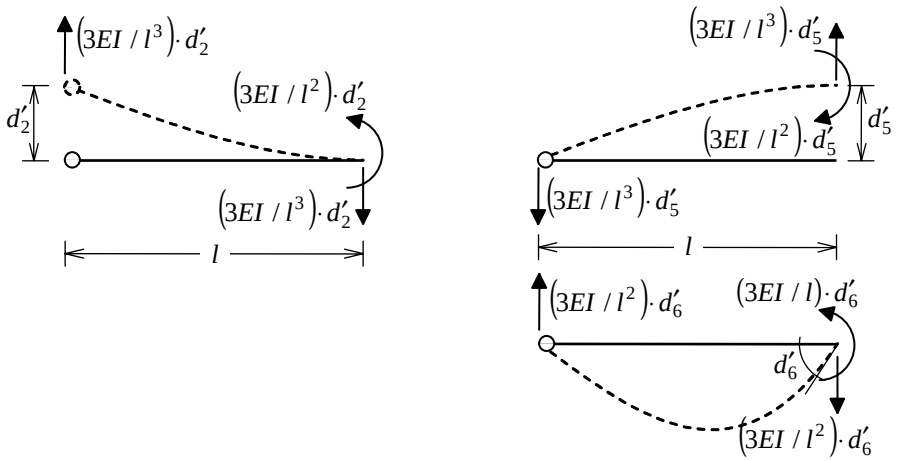


Figura 4.32 – Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra isolada com articulação na esquerda.

Deve-se salientar que os coeficientes de rigidez associados à rotação unitária imposta na extremidade esquerda da barra são nulos. Isto porque a articulação faz com que não haja resistência à rotação imposta nessa extremidade.

4.4.2.4. Coeficientes de rigidez à flexão de barra com articulação na direita

Os mesmos procedimentos mostrados na seção anterior para determinar coeficientes de rigidez de uma barra com articulação na esquerda são adotados para uma barra com articulação na direita.

A Figura 4.33 mostra a superposição de configurações deformadas que é utilizada para a determinação dos coeficientes de rigidez à flexão da barra com articulação na direita associados à imposição de uma rotação unitária na extremidade esquerda.

Todos os coeficientes de rigidez à flexão dessa barra estão mostrados na Figura 4.34. Nota-se também que os coeficientes associados à imposição de uma rotação unitária na extremidade articulada são nulos.

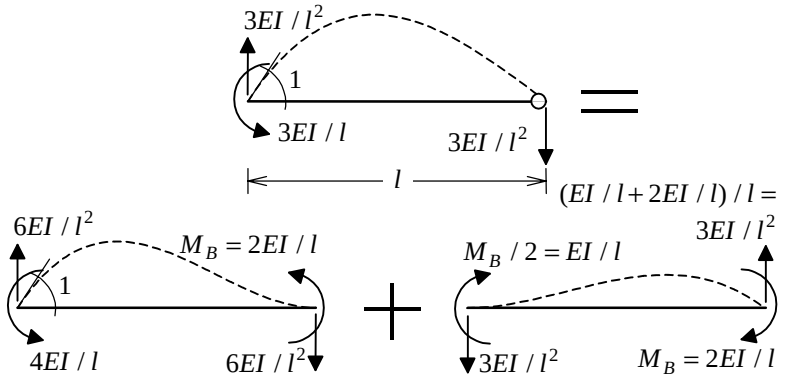


Figura 4.33 – Superposição de deformadas para obtenção de coeficientes de rigidez à flexão de uma barra com articulação na direita.

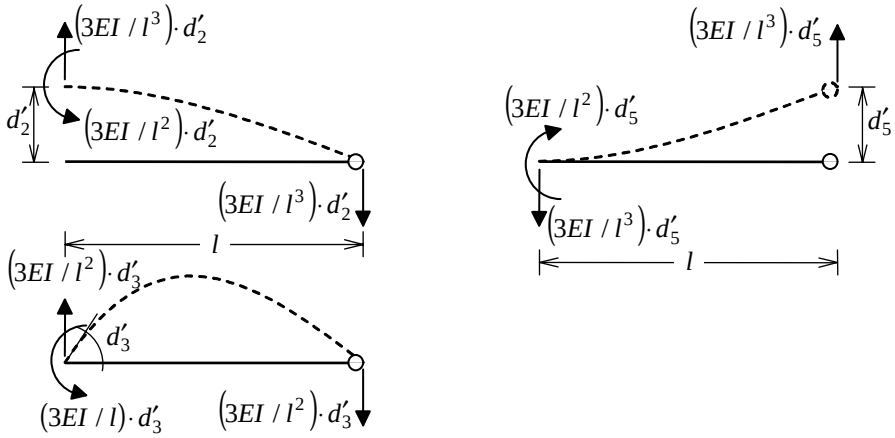


Figura 4.34 – Coeficientes de rigidez à flexão de uma barra isolada com articulação na direita.

4.4.2.5. Matrizes de rigidez de barra de pórtico plano

Esta seção mostra matrizes de rigidez de barras de pórticos planos no sistema local para diferentes condições de extremidade. Isto resume os resultados para os coeficientes de rigidez de barra obtidos nas seções anteriores.

Quatro tipos de condições de extremidade são consideradas: barra sem articulação – Equação (4.58) –, barra com articulação na esquerda – Equação (4.59) –, barra com articulação na direita – Equação (4.60) – e barra com articulação nas duas extremidades – Equação (4.61). Os sinais dos coeficientes são positivos quando as forças e momentos correspondentes têm os sentidos positivos das deslocabilidades (indicados na Figura 4.23). De outra forma, os sinais são negativos. Observa-se também a simetria das matrizes de rigidez, o que é compatível com a Equação (4.55).

Os coeficientes de rigidez axial são iguais para os quatro tipos de barra (primeiras e quartas linhas e colunas das matrizes de rigidez). Observa-se o desacoplamento entre o efeito axial e o efeito transversal de flexão pelos coeficientes nulos comuns a todas as matrizes. Nas matrizes, as linhas e colunas correspondentes às rotações das extremidades articuladas também são nulas. No caso da matriz de rigidez para a barra bi-articulada – Equação (4.61) – só os coeficientes de rigidez axial são diferentes de zero.

$$[k'] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & +12EI/l^3 & +6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & +6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & +4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & +2EI/l \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & +12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & +2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & +4EI/l \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

$$[k'] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & +3EI/l^3 & 0 & 0 & -3EI/l^3 & +3EI/l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/l^3 & 0 & 0 & +3EI/l^3 & -3EI/l^2 \\ 0 & +3EI/l^2 & 0 & 0 & -3EI/l^2 & +3EI/l \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

$$[k'] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & +3EI/l^3 & +3EI/l^2 & 0 & -3EI/l^3 & 0 \\ 0 & +3EI/l^2 & +3EI/l & 0 & -3EI/l^2 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/l^3 & -3EI/l^2 & 0 & +3EI/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.60}$$

$$[k'] = \begin{bmatrix} +EA/l & 0 & 0 & -EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/l & 0 & 0 & +EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

4.4.3. Coeficientes de rigidez à torção de barra

A determinação dos coeficientes de rigidez à torção de uma barra de grelha ou de pórtico espacial pode ser feita utilizando o PDV, a exemplo do que foi feito para a barra de pórtico plano na seção anterior. Considere a imposição de uma rotação por torção φ_A na extremidade esquerda de uma barra isolada, enquanto a rotação na outra extremidade é mantida nula ($\varphi_B = 0$), tal como mostra a Figura 4.35-a. Também considere a imposição de uma rotação φ_B na extremidade da direita, mantendo φ_A nula (Figura 4.35-b). São utilizadas setas duplas para representar rotações e momentos torçores.

Os momentos torçores T_A e T_B que atuam nas extremidades da barra para impor essas configurações deformadas também estão indicados na Figura 4.35 com seus sentidos positivos. Como não existe carregamento no interior da barra, o momento torçor é constante ao longo da barra. Além disso, a partir da Equação (4.30), vê-se que a rotação por torção $\varphi(x)$ varia linearmente ao longo da barra. Portanto, a mesma funções de forma axiais das Equações (4.47) e (4.48) podem ser utilizadas para representar a variação de $\varphi(x)$, tal como indica a Figura 4.35.

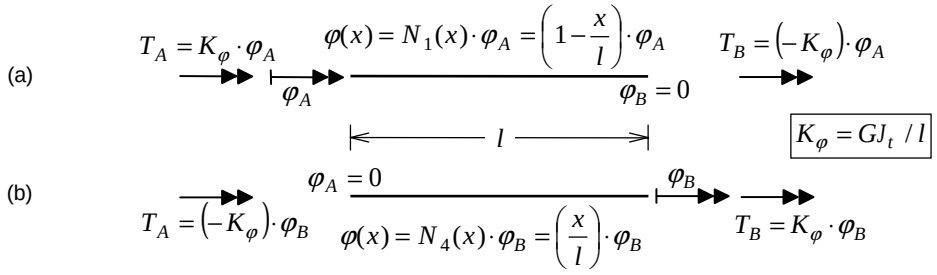


Figura 4.35 – Coeficientes de rigidez à torção de uma barra isolada.

O PDV é utilizado para determinar o momento torçor T_A da Figura 4.35-b. Este é o momento que deve atuar na extremidade esquerda da barra quando uma rotação por torção φ_B é imposta isoladamente na extremidade direita, considerando que $\varphi_A = 0$. O campo de rotações por torção reais desse problema é $\varphi(x) = N_4(x) \cdot \varphi_B$. O campo de rotações por torção virtuais é $\overline{\varphi(x)} = N_4(x) \cdot \overline{\varphi_B}$, tal que somente o momento torçor da extremidade esquerda produza trabalho virtual externo. Aplicando o PDV com base na Equação (4.32), somente com a parcela de energia de deformação por torção, chega-se a:

$$T_A = \frac{1}{\overline{\varphi_B}} \left[\int_0^l GJ_t \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\overline{\varphi}}{dx} dx \right] = \left[\int_0^l GJ_t \frac{dN_4}{dx} \cdot \frac{dN_1}{dx} dx \right] \cdot \varphi_B = \left(-\frac{GJ_t}{l} \right) \cdot \varphi_B .$$

O coeficiente de rigidez à torção é o fator que multiplica a rotação φ_B. O sinal negativo indica que o momento torçor T_A tem o sentido contrário ao da rotação φ_B imposta com sentido positivo. Esse resultado pode ser generalizado para os outros coeficientes, bastando escolher os campos de rotações real e virtual apropriados. Essa generalização resulta nos coeficientes de rigidez à torção mostrados na Figura 4.35 (os coeficientes são os fatores que multiplicam as rotações). Define-se genericamente o parâmetro K_φ como o *coeficiente de rigidez à torção*:

$$K_\varphi = \frac{GJ_t}{l} \tag{4.62}$$

Da mesma maneira como se definiu a matriz de rigidez de uma barra de pórtico plano no sistema de eixos locais da barra, é possível definir uma matriz de rigidez de barra de grelha. Uma grelha é uma estrutura plana com carregamento transversal ao seu plano. Por hipótese, uma barra de grelha não tem solicitações axiais, apresentando efeitos de flexão e cisalhamento transversais ao plano e efeito de torção. A Figura 4.36 mostra a convenção adotada neste livro para os eixos locais e para as deslocabilidades locais de uma barra de grelha. As deslocabilidades estão indicadas com seus sentidos positivos e as setas duplas indicam rotações.

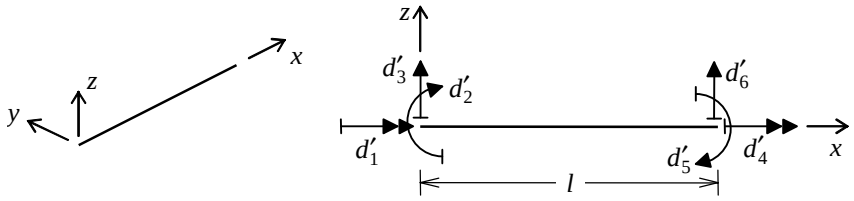


Figura 4.36 – Eixos locais e deslocabilidades de uma barra de grelha isolada.

Com base na convenção adotada na Figura 4.36 e nos coeficientes de rigidez à flexão deduzidos na Seção 4.4.2, a Equação (4.63) mostra a matriz de rigidez de uma barra de grelha no sistema local. Esta matriz considera os coeficientes de rigidez à flexão e o coeficiente de rigidez à torção dado pela Equação (4.62). Os efeitos de deformação por cisalhamento não são considerados. O momento de inércia da seção transversal é $I = Iy$, isto é, I é o momento de inércia em torno do eixo local y mostrado na Figura 4.36.

$$[k'] = \begin{bmatrix} +GJ_t/l & 0 & 0 & -GJ_t/l & 0 & 0 \\ 0 & +4EI/l & -6EI/l^2 & 0 & +2EI/l & +6EI/l^2 \\ 0 & -6EI/l^2 & +12EI/l^3 & 0 & -6EI/l^2 & -12EI/l^3 \\ -GJ_t/l & 0 & 0 & +GJ_t/l & 0 & 0 \\ 0 & +2EI/l & -6EI/l^2 & 0 & +4EI/l & +6EI/l^2 \\ 0 & +6EI/l^2 & -12EI/l^3 & 0 & +6EI/l^2 & +12EI/l^3 \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

4.4.4. Reações de engastamento de barra para solicitações externas

Esta seção apresenta soluções fundamentais de engastamento perfeito de barras isoladas para carregamentos aplicados e solicitações de variação de temperatura. Essas soluções serão utilizadas dentro da metodologia do Método dos Deslocamentos que será introduzida no Capítulo 6.

A Figura 4.37 mostra a notação e os sentidos positivos das reações de engastamento perfeito para um carregamento genérico, em que:

$\hat{f}'_i \rightarrow$ *reação de engastamento perfeito de barra no sistema local*: reação força ou momento que atua na direção da deslocabilidade local d'_i de uma barra com as extremidades fixas para equilibrá-la quando atua uma solicitação externa.

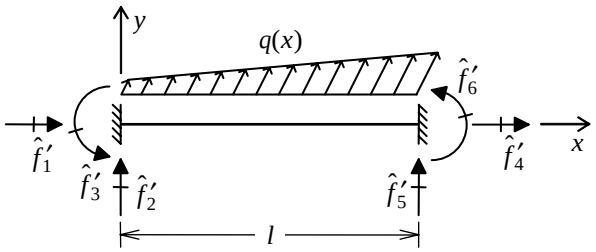


Figura 4.37 – Notação e sentidos positivos de reações de engastamento perfeito para barras isoladas.

Todas as deduções serão feitas para barras sem articulação. As reações de engastamento para uma barra com articulação podem ser obtidas a partir das reações de engastamento de uma barra sem articulação com o mesmo carregamento. A Figura 4.38 mostra a superposição de efeitos que é utilizada para a determinação das reações de engastamento de uma barra com articulação na esquerda. A Figura 4.39 faz o mesmo para uma barra com articulação na direita.

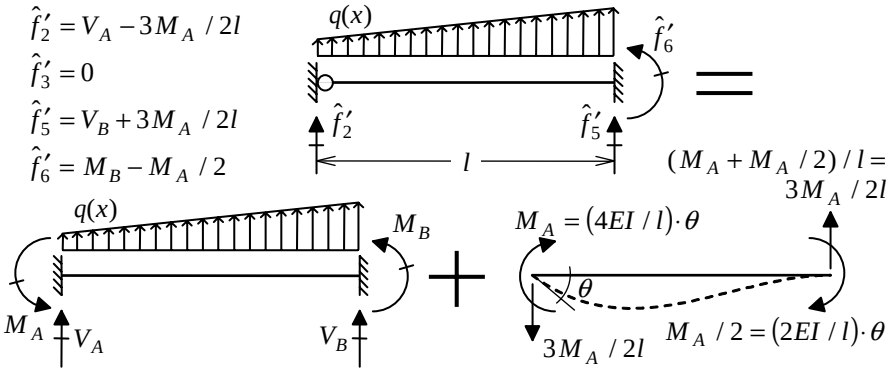


Figura 4.38 – Superposição de efeitos para determinar reações de engastamento para barras com articulação na esquerda.

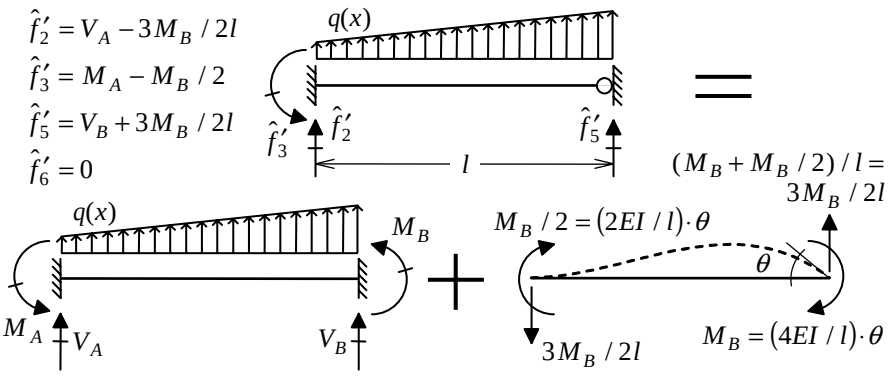


Figura 4.39 – Superposição de efeitos para determinar reações de engastamento para barras com articulação na direita.

4.4.4.1. Reações de engastamento para carregamentos externos

A determinação das reações de engastamento perfeito de uma barra solicitada para um carregamento externo genérico vai ser feita com base no Teorema de Betti, que foi apresentado na Seção 4.3.3, seguindo o que foi feito por Felton & Nelson (1996).

Para exemplificar isso, considere a barra bi-engastada mostrada na Figura 4.40 com um carregamento distribuído transversalmente. O objetivo do exemplo é determinar a reação força transversal $\hat{f}_2'$ da extremidade esquerda da barra.

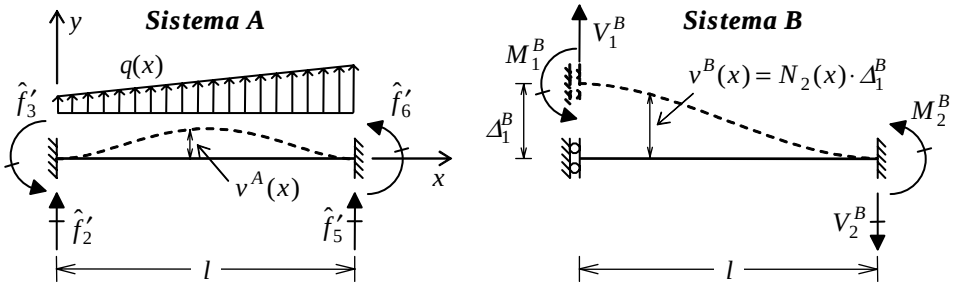


Figura 4.40 – Aplicação do Teorema de Betti para determinar a reação vertical na extremidade esquerda.

Para a aplicação do Teorema de Betti para o exemplo da Figura 4.40, é necessário definir dois sistemas, *A* e *B*. O sistema *A* é a barra bi-engastada com o carregamento externo aplicado e as correspondentes reações de apoio. O sistema B tem o vínculo associado à reação $\hat{f}_2'$ liberado e uma força transversal V_1^B aplicada no ponto do vínculo liberado. A configuração deformada do sistema *B* é tal que seu campo de deslocamentos externos é proporcional à função de forma $N_2(x)$.

O Teorema de Betti aplicado ao exemplo da Figura 4.40 impõe o seguinte: "o trabalho realizado pelas forças e momentos externos do sistema *A* com os correspondentes deslocamentos e rotações do sistema *B* é igual ao trabalho realizado pelas forças e momentos do sistema *B* com os correspondentes deslocamentos e rotações do sistema *A*."

Observa-se que todas as forças e momentos externos do sistema *B* têm deslocamentos e rotações correspondentes nulos no sistema *A*. Portanto, o trabalho das forças do sistema *A* com os deslocamentos do sistema *B* é nulo:

$$\hat{f}_2' \cdot \Delta_1^B + \int_0^l q(x) \cdot N_2(x) \cdot \Delta_1^B \cdot dx = 0 .$$

Dessa forma, chega-se a uma expressão para a determinação da reação desejada em função do carregamento transversal $q(x)$:

$$\hat{f}_2' = -\int_0^l q(x) \cdot N_2(x) \cdot dx = 0 .$$

Um exemplo análogo é utilizado para determinar a reação momento $\hat{f}_3'$ na extremidade esquerda pelo Teorema de Betti, tal como ilustrado na Figura 4.41. Nesse caso, no sistema *B* libera-se a rotação associada à reação $\hat{f}_3'$ no apoio da esquerda.

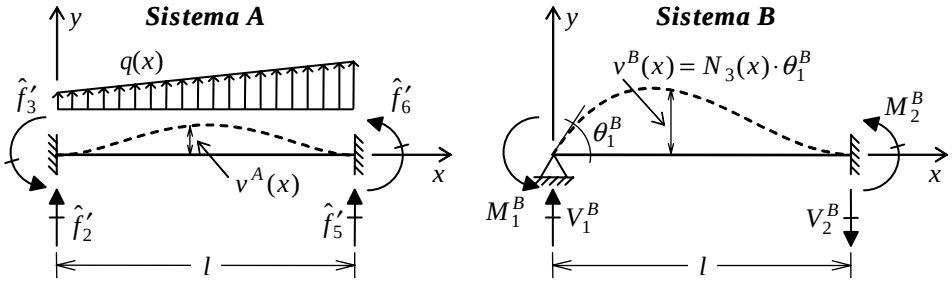


Figura 4.41 – Aplicação do Teorema de Betti para determinar a reação momento na extremidade esquerda.

O campo de deslocamentos externos do sistema *B* na Figura 4.41 é proporcional à função de forma $N_3(x)$, e a aplicação do Teorema de Betti para esse exemplo resulta em:

$$\hat{f}_3' = -\int_0^l q(x) \cdot N_3(x) \cdot dx = 0 .$$

Os resultados obtidos nos exemplos das Figuras 4.40 e 4.41 podem ser generalizados para diversos tipos de cargas: axiais, transversais distribuídas, transversais concentradas e momentos concentrados, tal como ilustrado na Figura 4.42.

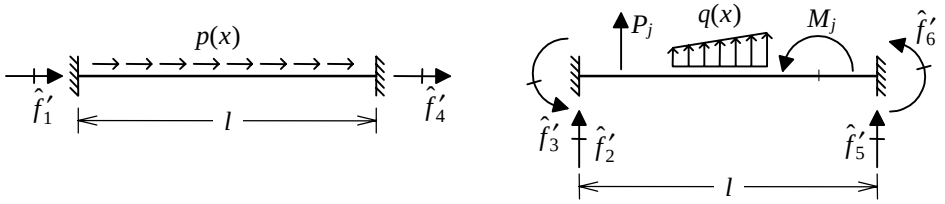


Figura 4.42 – Reações de engastamento perfeito axiais e transversais para barras isoladas.

A expressão (4.64), resultante da aplicação do Teorema de Betti, é utilizada para determinar as reações axiais $\hat{f}'_1$ e $\hat{f}'_4$ devidas a uma carga axial distribuída $p(x)$. A expressão (4.65) é utilizada para determinar as reações forças transversais $\hat{f}'_2$ e $\hat{f}'_5$ e as reações momentos $\hat{f}'_3$ e $\hat{f}'_6$ devidas a cargas transversais distribuídas, cargas transversais concentradas e cargas momentos concentrados (veja a Figura 4.42).

$$\hat{f}'_i = -\int_0^l N_i(x)\cdot p(x)\cdot dx \qquad (i=1,4) \tag{4.64}$$

$$\hat{f}'_i = -\int_0^l N_i(x)\cdot q(x)\cdot dx - \sum_j N_i(x_j)\cdot P_j - \sum_j \frac{dN_j(x_j)}{dx}\cdot M_j \qquad (i=2,3,5,6) \tag{4.65}$$

As Figuras 4.43, 4.44 e 4.45 mostram reações de engastamento de barras submetidas a carregamentos transversais. Estas reações foram determinadas com base na expressão (4.65) e, para as barras articuladas, com base nas Figuras 4.38 e 4.39.

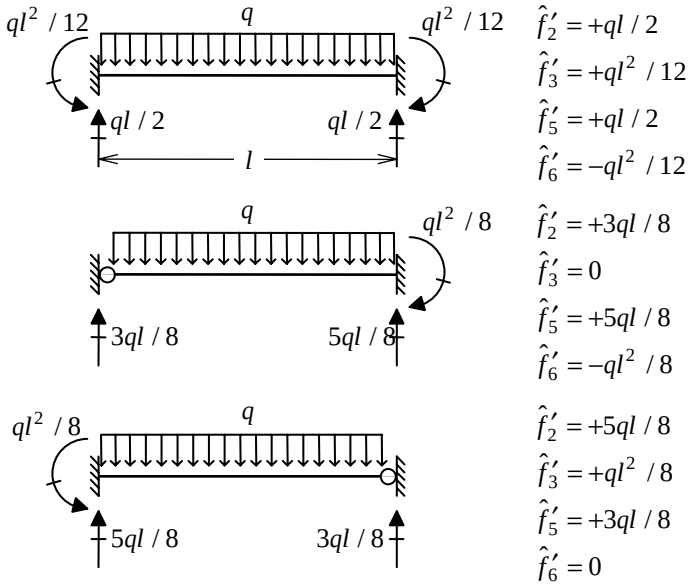
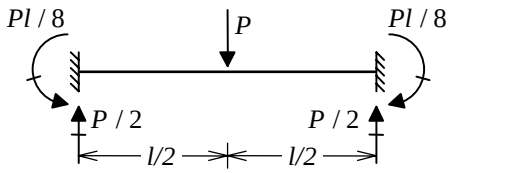
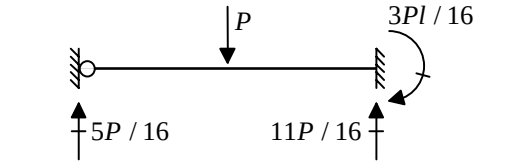


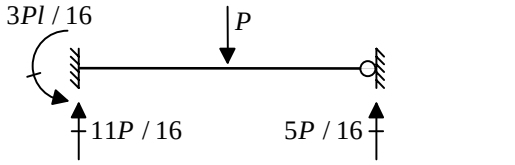
Figura 4.43 – Reações de engastamento para barras com carga transversal uniformemente distribuída.



$\hat{f}'_2 = +P/2$
$\hat{f}'_3 = +Pl/8$
$\hat{f}'_5 = +P/2$
$\hat{f}'_6 = -Pl/8$

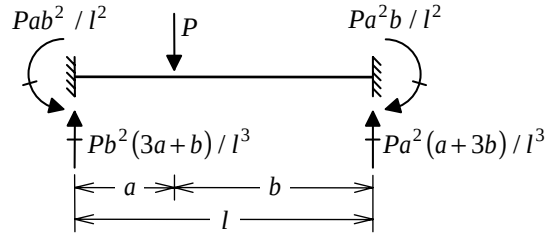


$\hat{f}'_2 = +5P/16$
$\hat{f}'_3 = 0$
$\hat{f}'_5 = +11P/16$
$\hat{f}'_6 = -3Pl/16$

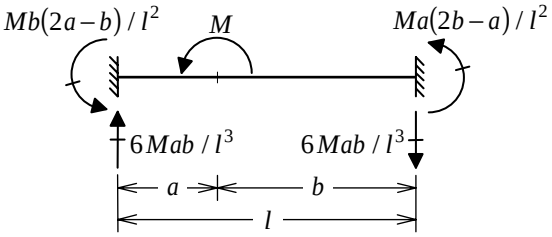


$\hat{f}'_2 = +11P/16$
$\hat{f}'_3 = +3Pl/16$
$\hat{f}'_5 = +5P/16$
$\hat{f}'_6 = 0$

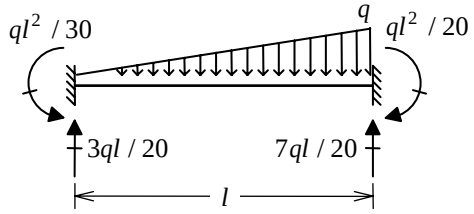
Figura 4.44 – Reações de engastamento para barras com carga concentrada no meio do vão.



$\hat{f}'_2 = +Pb^2(3a+b)/l^3$
$\hat{f}'_3 = +Pab^2/l^2$
$\hat{f}'_5 = +Pa^2(a+3b)/l^3$
$\hat{f}'_6 = -Pa^2b/l^2$



$\hat{f}'_2 = +6Mab/l^3$
$\hat{f}'_3 = +Mb(2a-b)/l^2$
$\hat{f}'_5 = -6Mab/l^3$
$\hat{f}'_6 = +Ma(2b-a)/l^2$



$\hat{f}'_2 = +3ql/20$
$\hat{f}'_3 = +ql^2/30$
$\hat{f}'_5 = +7ql/20$
$\hat{f}'_6 = -ql^2/20$

Figura 4.45 – Reações de engastamento para barras com carga concentrada, momento concentrado e carga triangular (West 1989).

Nesta seção as expressões para a determinação de reações de engastamento de barras isoladas solicitadas por carregamentos externos são exatas para o caso de uma barra com seções transversais que não variam ao longo de seu comprimento. Isto porque os campos de deslocamentos externos utilizados no sistema auxiliar para a aplicação do Teorema de Betti (sistema *B*) são proporcionais às funções de forma, que correspondem a soluções para barras com seção transversal constante. No Apêndice B é apresentado um processo, chamado Processo de Mohr ou Analogia da Viga Conjugada, que permite a determinação de reações de engastamento para barras não prismáticas.

4.4.4.2. Reações de engastamento para variação de temperatura

Para finalizar as expressões para a determinação de reações de engastamento perfeito de barras isoladas, é necessário considerar as solicitações de variação de temperatura. Inicialmente será mostrado um procedimento simples (McGuire & Gallagher 1979), baseado em superposição de efeitos. Um método geral, baseado no PDV, vai ser mostrado mais adiante.

A Figura 4.46 ilustra o caso de uma variação uniforme de temperatura T_{CG}, correspondendo ao que ocorre na fibra do centro de gravidade da seção transversal. A barra tem um material com módulo de elasticidade E e coeficiente de dilatação térmica α. A seção transversal tem área A e momento de inércia I.

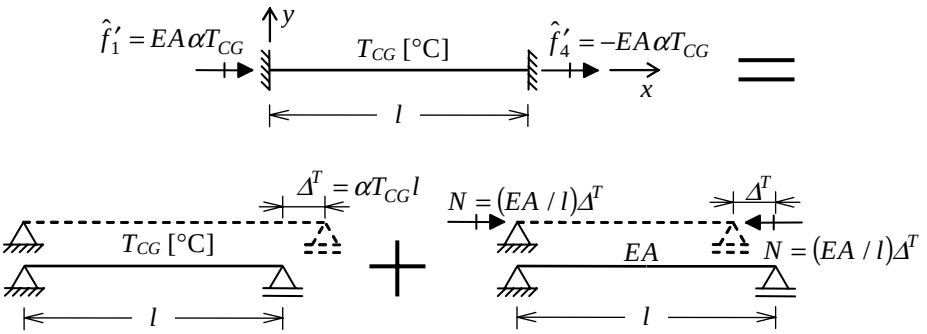


Figura 4.46 – Superposição de efeitos para determinar reações de engastamento de uma barra com variação uniforme de temperatura (McGuire & Gallagher 1979).

O cálculo das reações de engastamento provocadas pela variação uniforme de temperatura do exemplo da Figura 4.46 é feito por superposição de efeitos, tendo como estrutura base a barra com o vínculo que impede o deslocamento axial do apoio da direita liberado. Na primeira parcela da superposição, a barra sofre a variação uniforme de temperatura e pode se alongar (ou encurtar) livremente. O deslocamento axial no apoio da direita é $\Delta^T = \alpha T_{CG} l$. Na segunda parcela da superposição, é aplicada uma força axial $N = (EA / l)\Delta^T$ que impõe um deslocamento axial

desse apoio igual a Δ^T, mas no sentido contrário. Observa-se que as reações de engastamento nesse exemplo são forças axiais iguais ao esforço normal *N*.

O cálculo das reações de engastamento para uma variação transversal de temperatura é feito de forma análoga por superposição de efeitos, tal como indicado na Figura 4.47. As parcelas da superposição têm os vínculos que impedem as rotações nas extremidades da barra liberados. Na primeira parcela ocorre uma deformação por flexão da barra devida à variação transversal de temperatura, na qual cada elemento infinitesimal de barra sofre uma rotação relativa interna $d\theta^T$, que é dada pela Equação (4.21). Na segunda parcela são aplicados momentos $M = EI \cdot d\theta^T / dx$ nas extremidades da barra que anulam essa deformação. Observa-se que as reações de engastamento nesse exemplo são momentos iguais ao momento *M* aplicado.

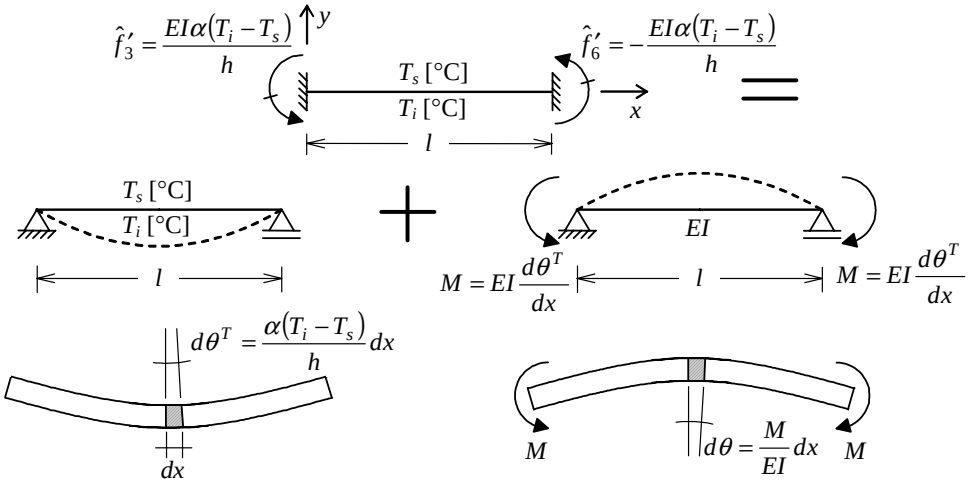


Figura 4.47 – Superposição de efeitos para determinar reações de engastamento de uma barra com variação transversal de temperatura (McGuire & Gallagher 1979).

Os mesmos resultados encontrados acima podem ser alcançados de uma maneira mais formal com base na Equação (4.37) do PDV. O sistema real corresponde à barra bi-engastada que sofre uma variação axial e transversal de temperatura. Como pode ser observado nas Figuras 4.46 e 4.47, os deslocamentos finais reais axiais $u(x)$ e transversais $v(x)$ são nulos. Dessa forma, a Equação (4.37) se reduz a:

$$P = \frac{1}{\Delta}\left[\int_0^l \left[EA\left(-\frac{du^T}{dx}\right)\right]\cdot\frac{\overline{du}}{dx}dx + \int_0^l \left[EI\left(-\frac{d\theta^T}{dx}\right)\right]\cdot\frac{d^2\overline{v}}{dx^2}dx\right]. \qquad (4.66)$$

O sistema virtual é escolhido de tal forma que apenas a reação (real) de engastamento que se deseja determinar produza trabalho virtual externo. Portanto, para o cálculo da reação $\hat{f}'_1$ escolhe-se um campo de deslocamentos virtuais igual a

$\overline{u(x)} = \overline{d_1} \cdot N_1(x)$, sendo $\overline{d_1}$ o deslocamento axial virtual na extremidade esquerda. De maneira semelhante, para o cálculo da reação $\hat{f}_2'$ escolhe-se um campo de deslocamentos virtuais igual a $\overline{v(x)} = \overline{d_2} \cdot N_2(x)$, e analogamente para as outras reações.

Com base nas Equações (4.66), (4.20) e (4.21), chega-se às expressões gerais para o cálculo das reações de engastamento de uma barra isolada provocadas por uma variação de temperatura:

$$\hat{f}_i' = -EA\alpha T_{CG} \cdot \int_0^l \frac{dN_i}{dx} dx \qquad (i = 1,4) \tag{4.67}$$

$$\hat{f}_i' = -EI \frac{\alpha(T_i - T_s)}{h} \cdot \int_0^l \frac{d^2 N_i}{dx^2} dx \qquad (i = 2,3,5,6) \tag{4.68}$$

Sendo:

$EA \rightarrow$ parâmetro de rigidez axial, sendo E o módulo de elasticidade do material e A a área da seção transversal;

$EI \rightarrow$ parâmetro de rigidez transversal por flexão, sendo I o momento de inércia da seção transversal;

$\alpha \rightarrow$ coeficiente de dilatação térmica do material;

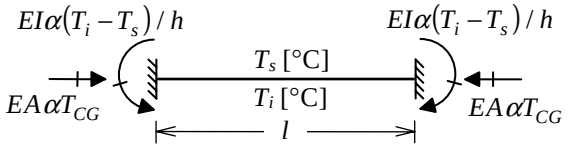
$h \rightarrow$ altura da seção transversal de uma barra;

$T_i \rightarrow$ variação de temperatura na fibra inferior de uma barra;

$T_s \rightarrow$ variação de temperatura na fibra superior de uma barra;

$T_{CG} \rightarrow$ variação de temperatura na fibra do centro de gravidade de uma barra.

As reações de engastamento calculadas pelas Equações (4.67) e (4.68) estão mostradas na Figura 4.48. Observa-se que os valores são os mesmos encontrados anteriormente nos exemplos das Figuras 4.46 e 4.47.



$$\hat{f}_1' = +EA\alpha T_{CG}$$
$$\hat{f}_2' = 0$$
$$\hat{f}_3' = +EI\alpha(T_i - T_s)/h$$
$$\hat{f}_4' = -EA\alpha T_{CG}$$
$$\hat{f}_5' = 0$$
$$\hat{f}_6' = -EI\alpha(T_i - T_s)/h$$

Figura 4.48 – Reações de engastamento para uma barra com variação de temperatura.

5. MÉTODO DAS FORÇAS

Na solução de uma estrutura hiperestática, conforme introduzido no Capítulo 2 (Seção 2.3), é necessário considerar os três grupos de condições básicas da Análise Estrutural: condições de equilíbrio, condições de compatibilidade (continuidade interna e compatibilidade com os vínculos externos) e condições impostas pelas leis constitutivas dos materiais que compõem a estrutura.

Formalmente (veja a Seção 2.3.1), o Método das Forças resolve o problema considerando os grupos de condições a serem atendidas pelo modelo estrutural na seguinte ordem:

1° Condições de equilíbrio;
2° Condições sobre o comportamento dos materiais (leis constitutivas);
3° Condições de compatibilidade.

Na prática, entretanto, a metodologia utilizada pelo Método das Forças para analisar uma estrutura hiperestática é:

- Somar uma série de soluções básicas que satisfazem as condições de equilíbrio, mas não satisfazem as condições de compatibilidade da estrutura original, para na superposição restabelecer as condições de compatibilidade.

Cada solução básica (chamada de caso básico) não satisfaz isoladamente todas as condições de compatibilidade da estrutura original, as quais ficam restabelecidas quando se superpõem todos os casos básicos.

A estrutura utilizada para a superposição de soluções básicas é, em geral, uma estrutura isostática auxiliar obtida a partir da estrutura original pela eliminação de vínculos. Essa estrutura isostática é chamada *Sistema Principal* (SP). As forças ou os momentos associados aos vínculos liberados são as incógnitas do problema e são denominados *hiperestáticos*. Essa metodologia de solução de uma estrutura hiperestática pelo Método das Forças vai ser explicada detalhadamente na próxima seção.

5.1. Metodologia de análise pelo Método das Forças

O objetivo desta seção é apresentar a metodologia de análise de uma estrutura hiperestática pelo Método das Forças. Para facilitar o entendimento do método, esta apresentação é feita com base em um exemplo, que é mostrado na Figura 5.1.

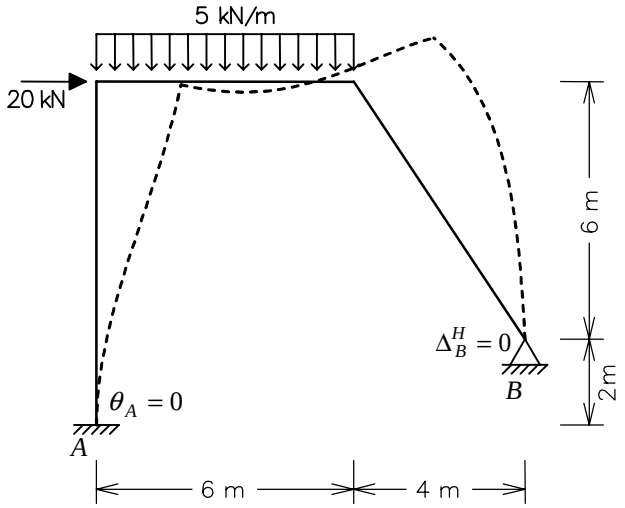


Figura 5.1 – Estrutura utilizada para a descrição da metodologia do Método das Forças.

A configuração deformada do pórtico da Figura 5.1 é mostrada de forma exagerada (o fator de amplificação dos deslocamentos da deformada é igual a 1000). Todas das barras da estrutura têm os mesmos valores para área ($A = 5 \cdot 10^{-3}$ m^2) e momento de inércia ($I = 5 \cdot 10^{-4}$ m^4) da seção transversal, e para o módulo de elasticidade ($E = 2 \cdot 10^8$ kN / m^2) do material.

5.1.1. Hiperestáticos e Sistema Principal

Para analisar a estrutura com respeito às condições de equilíbrio, são mostradas na Figura 5.2 as cinco componentes de reações de apoio da estrutura.

São três as equações do equilíbrio global da estrutura no plano (veja a Seção 2.6 do Capítulo 2):

$\sum F_x = 0 \rightarrow$ somatório de forças na direção horizontal igual a zero;

$\sum F_y = 0 \rightarrow$ somatório de forças na direção vertical igual a zero;

$\sum M_o = 0 \rightarrow$ somatório de momentos em relação a um ponto qualquer igual a zero.

Como a estrutura é hiperestática, não é possível determinar os valores das reações de apoio da estrutura utilizando apenas as três equações de equilíbrio que são disponíveis. O número de incógnitas excedentes ao número de equações de equilíbrio é definido como:

$g \rightarrow$ *grau de hiperestaticidade*.

No exemplo, $g = 2$.

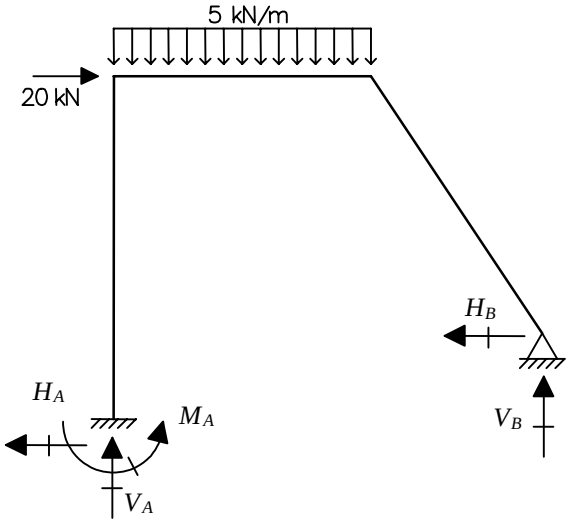


Figura 5.2 – Componentes de reações de apoio da estrutura da Figura 5.1.

Conforme mencionado, a solução do problema hiperestático pelo Método das Forças é feita pela superposição de soluções básicas isostáticas. Para isso cria-se uma estrutura isostática auxiliar, chamada *Sistema Principal* (SP), que é obtida da estrutura original hiperestática pela eliminação de vínculos. O SP adotado no exemplo da Figura 5.1 é a estrutura isostática mostrada na Figura 5.3.

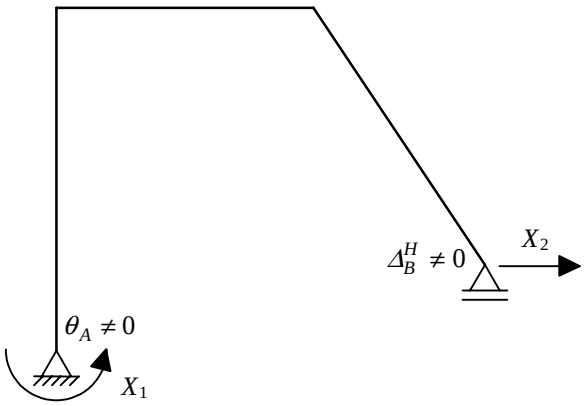


Figura 5.3 – Sistema Principal adotado para a solução da estrutura da Figura 5.1.

Observa-se na Figura 5.3 que foram eliminados dois vínculos externos da estrutura original: a imposição de rotação θ_A nula do apoio da esquerda e a imposição de deslocamento horizontal Δ_B^H nulo do apoio da direita. O número de vínculos que devem ser eliminados para transformar as estrutura hiperestática original em uma estrutura isostática é igual ao grau de hiperestaticidade, *g*. A escolha do SP é arbi-

trária: qualquer estrutura isostática escolhida é válida, desde que seja estável estaticamente. As Seções 5.3 e 5.4, a seguir, vão abordar a questão da escolha do Sistema Principal.

Os esforços associados aos vínculos eliminados são as reações de apoio M_A e H_B, que estão indicadas na Figura 5.2. Esses esforços são chamados de *hiperestáticos* e são as incógnitas da solução pelo Método das Forças. Utiliza-se a nomenclatura X_i para indicar os hiperestáticos, sendo i o seu índice, que varia de 1 a g. No exemplo, tem-se:

$X_1 = M_A \rightarrow$ reação momento associada ao vínculo de apoio $\theta_A = 0$;

$X_2 = H_B \rightarrow$ reação horizontal associada ao vínculo de apoio $\Delta_B^H = 0$.

Os hiperestáticos do exemplo são mostrados na Figura 5.3 com sentidos que foram convencionados como positivos: momento positivo no sentido anti-horário e força horizontal positiva com sentido da esquerda para a direita.

5.1.2. Restabelecimento das condições de compatibilidade

A solução do problema pelo Método das Forças recai em encontrar os valores que X_1 e X_2 devem ter para, juntamente com o carregamento aplicado, recompor os vínculos de apoio eliminados. Isto é, procuram-se os valores dos hiperestáticos que fazem com que as condições de compatibilidade violadas na criação do SP, $\theta_A = 0$ e $\Delta_B^H = 0$, sejam restabelecidas.

A determinação de X_1 e X_2 é feita através da superposição de casos básicos, utilizando o SP como estrutura para as soluções básicas. O número de casos básicos é sempre igual ao grau de hiperestaticidade mais um (g + 1). No exemplo, isso resulta nos casos (0), (1) e (2) que são mostrados a seguir.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP

O caso básico (0), mostrado na Figura 5.4, isola o efeito da solicitação externa (carregamento aplicado) no SP. A figura mostra a configuração deformada (com fator de amplificação igual a 20) do SP no caso (0). A rotação δ_{10} e o deslocamento horizontal δ_{20}, nas direções dos vínculos eliminados para a criação do SP, são chamados de *termos de carga*. Um termo de carga é definido formalmente como:

$\delta_{i0} \rightarrow$ *termo de carga*: deslocamento ou rotação na direção do vínculo eliminado associado ao hiperestático X_i quando atua a solicitação externa isoladamente no SP (com hiperestáticos com valores nulos).

Neste exemplo, os dois termos de carga podem ser calculados utilizando o Princípio das Forças Virtuais (PFV), tal como mostrado na Seção 4.3.1.1 do Capítulo 4. Esse cálculo não está sendo mostrado por uma questão de simplicidade, pois o ob-

jetivo aqui é apresentar a metodologia do Método das Forças. Ao longo deste capítulo serão mostrados diversos exemplos de aplicação do PFV para o cálculo de termos de carga e outros coeficientes. Os valores dos termos de carga do exemplo estão indicados na Figura 5.4.

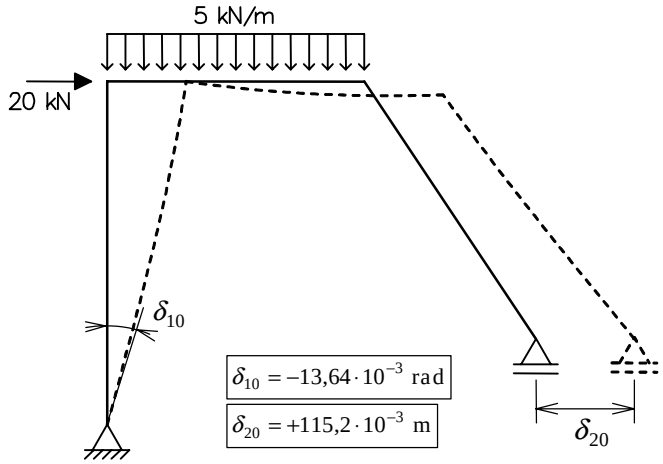


Figura 5.4 – Solicitação externa isolada no SP da estrutura da Figura 5.1.

O sinal negativo da rotação δ_{10} indica que a rotação tem o sentido contrário do que é considerado para o hiperestático X_1 no caso (1) a seguir. Analogamente, o sinal positivo de δ_{20} indica que este deslocamento tem o mesmo sentido que é considerado para o hiperestático X_2 no caso (2) a seguir.

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP

A Figura 5.5 mostra a configuração deformada (com fator de amplificação igual a 2000) do SP no caso (1). O hiperestático X_1 é colocado em evidência, já que ele é uma incógnita do problema. Considera-se um valor unitário para X_1, sendo o efeito de $X_1 = 1$ multiplicado pelo valor final que X_1 deverá ter. A rotação δ_{11} e o deslocamento horizontal δ_{21} provocados por $X_1 = 1$, nas direções dos vínculos eliminados para a criação do SP, são chamados de *coeficientes de flexibilidade*. Formalmente, um coeficiente de flexibilidade é definido como:

$\delta_{ij} \rightarrow$ *coeficiente de flexibilidade*: deslocamento ou rotação na direção do vínculo eliminado associado ao hiperestático X_i devido a um valor unitário do hiperestático X_j atuando isoladamente no SP.

Os valores dos coeficientes de flexibilidade do caso (1), que estão indicados na Figura 5.5 foram calculados pelo PFV. Por definição, as unidades dos coeficientes de flexibilidade correspondem às unidades de deslocamento ou rotação divididas pela unidade do hiperestático em questão.

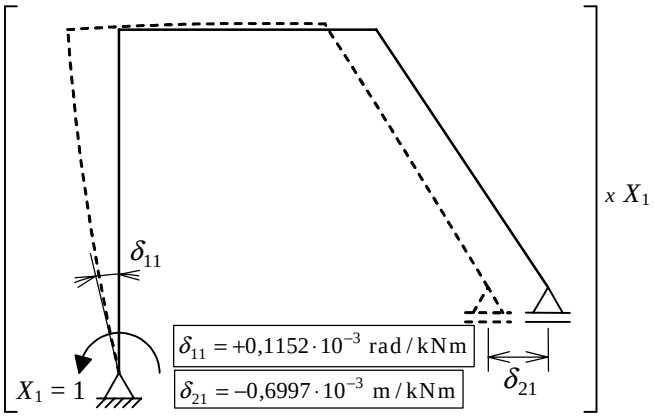


Figura 5.5 – Hiperestático X_1 isolado no SP da estrutura da Figura 5.1.

As mesmas observações feitas quanto aos sinais dos termos de carga podem ser feitas para os coeficientes de flexibilidade. Isto é, o sinal da rotação δ_{11} é positivo pois tem o mesmo sentido do que foi arbitrado para $X_1 = 1$ e o sinal do deslocamento horizontal δ_{21} é negativo pois tem o sentido contrário ao que foi arbitrado para $X_2 = 1$ no caso (2) a seguir. Observe que o sinal dos coeficientes δ_{ii} (que têm $i = j$), sendo i o índice do hiperestático, sempre é positivo, pois esses coeficientes são deslocamentos ou rotações nos próprios pontos de aplicação de forças ou momentos unitários.

Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP

A Figura 5.6 mostra a configuração deformada (com fator de amplificação igual a 400) do SP no caso (2). De maneira análoga ao caso (1), o hiperestático X_2 é colocado em evidência, considerando-se um valor unitário multiplicado pelo seu valor final. A rotação δ_{12} e o deslocamento horizontal δ_{22} provocados por $X_2 = 1$, nas direções dos vínculos eliminados para a criação do *SP*, também são *coeficientes de flexibilidade*. As unidades destes coeficientes, por definição, são unidades de deslocamento ou rotação divididas pela unidade do hiperestático X_2.

Os valores dos coeficientes de flexibilidade do caso (2) também estão indicados na Figura 5.6. Observe que os valores de δ_{12} e δ_{21} são iguais. Isto não é coincidência. Os coeficientes δ_{ij} e δ_{ji}, sendo i e j índices de hiperestáticos, sempre serão iguais. Isso é demonstrado pelo Teorema de Maxwell mostrado na Seção 4.3.3 do Capítulo 4.

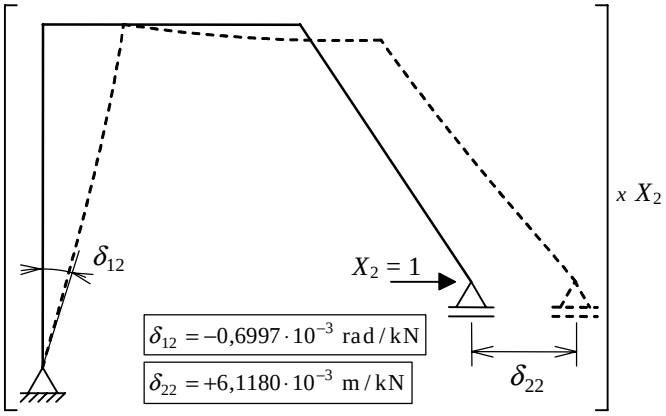


Figura 5.6 – Hiperestático X_2 isolado no SP da estrutura da Figura 5.1.

Restabelecimento das condições de compatibilidade

A partir dos resultados obtidos nos casos mostrados, pode-se utilizar superposição de efeitos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas na criação do SP. Isto é feito a seguir.

- Superposição das rotações do nó inferior esquerdo (nó *A*):

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0$$

- Superposição dos deslocamentos horizontais no nó inferior direito (nó *B*):

$$\delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0$$

- Sistema de equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -13{,}64 \cdot 10^{-3} + 0{,}1152 \cdot 10^{-3} \cdot X_1 - 0{,}6997 \cdot 10^{-3} \cdot X_2 = 0 \\ +115{,}2 \cdot 10^{-3} - 0{,}6997 \cdot 10^{-3} \cdot X_1 + 6{,}1180 \cdot 10^{-3} \cdot X_2 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema de equações de compatibilidade resulta nos seguintes valores das reações de apoio X_1 e X_2:

$X_1 = +13{,}39$ kNm ;
$X_2 = -17{,}29$ kN .

O sinal de X_1 é positivo pois tem o mesmo sentido (anti-horário) do que foi arbitrado para $X_1 = 1$ no caso (1) e o sinal de X_2 é negativo pois tem o sentido contrário (da direita para a esquerda) ao que foi arbitrado para $X_2 = 1$ no caso (2), tal como indica a Figura 5.7.

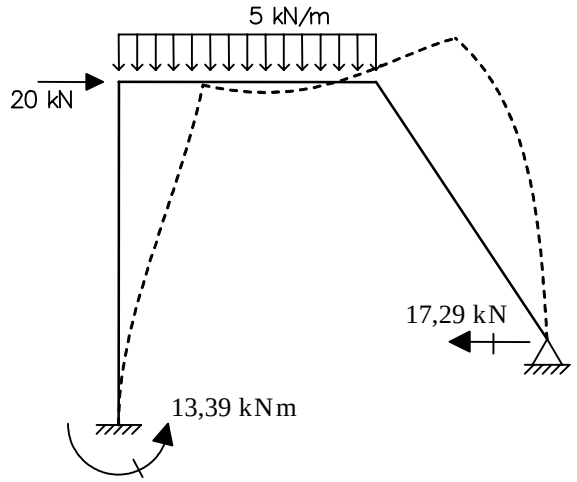


Figura 5.7 – Valores e sentidos dos hiperestáticos na solução da estrutura da Figura 5.1.

Os valores encontrados para X_1 e X_2 fazem com que $\theta_A = 0$ e $\Delta_B^H = 0$. Dessa forma, atingiu-se a solução correta da estrutura, pois além de satisfazer as condições de equilíbrio – que sempre foram satisfeitas nos casos (0), (1) e (2) – também satisfaz as condições de compatibilidade.

5.1.3. Determinação dos esforços internos

A solução da estrutura não termina na obtenção dos valores dos hiperestáticos X_1 e X_2. Ainda é necessário obter os diagrama de esforços internos e os deslocamentos da estrutura. Existem duas alternativas para isso:

1. Calcula-se uma estrutura isostática (o Sistema Principal) com o carregamento aplicado simultaneamente aos hiperestáticos – com os valores corretos encontrados – como se fossem forças e momentos aplicados.
2. Utiliza-se a própria superposição de casos básicos para a obtenção dos esforços internos (ou deslocamentos) finais.

Embora a primeira opção possa parecer mais simples, a segunda opção é a que vai ser utilizada na maioria das soluções. O motivo para isso é que no cálculo dos valores dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade pelo PFV (Seção 4.3.1.1 do Capítulo 4) é necessário o conhecimento dos diagramas de esforços internos dos casos básicos (0), (1) e (2). Portanto, como os diagramas de esforços internos dos casos básicos já estarão disponíveis, os esforços internos finais da estrutura hiperestática original são obtidos por superposição dos esforços internos dos casos básicos. Por exemplo, os momentos fletores finais (M) podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de momentos fletores (M_i) dos casos básicos:

$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2 ,$$

sendo que o diagrama M_0 corresponde ao caso (0) e os diagramas M_1 e M_2 são provocados por valores unitários dos hiperestáticos nos casos (1) e (2), respectivamente.

Esse resultado pode ser generalizado para todos os esforços internos – esforços normais finais (N), esforços cortantes finais (Q) e momentos fletores finais (M) – de uma estrutura com grau de hiperestaticidade g:

$$N = N_0 + \sum_{j=1}^{j=g} N_j \cdot X_j \; ; \tag{5.1}$$

$$Q = Q_0 + \sum_{j=1}^{j=g} Q_j \cdot X_j \; ; \tag{5.2}$$

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^{j=g} M_j \cdot X_j \; . \tag{5.3}$$

Sendo:

$N_0 \rightarrow$ diagrama de esforços normais no caso (0), isto é, quando a solicitação externa atua isoladamente no SP;

$N_j \rightarrow$ diagrama de esforços normais no caso (j) provocado por X_j = 1, isto é, quando o hiperestático X_j atua isoladamente no SP com valor unitário;

$Q_0 \rightarrow$ diagrama de esforços cortantes no caso (0), isto é, quando a solicitação externa atua isoladamente no SP;

$Q_j \rightarrow$ diagrama de esforços cortantes no caso (j) provocado por X_j = 1, isto é, quando o hiperestático X_j atua isoladamente no SP com valor unitário;

$M_0 \rightarrow$ diagrama de momentos fletores no caso (0), isto é, quando a solicitação externa atua isoladamente no SP;

$M_j \rightarrow$ diagrama de momentos fletores no caso (j) provocado por X_j = 1, isto é, quando o hiperestático X_j atua isoladamente no SP com valor unitário.

Na seqüência deste capítulo será mostrado como se calculam os coeficientes que aparecem na formulação do Método das Forças pelo PFV com base nos diagramas de esforços internos dos casos básicos. Nesta seção isso não foi feito pois o objetivo era apresentar a metodologia geral de solução.

5.2. Matriz de flexibilidade e vetor dos termos de carga

O sistema de equações de compatibilidade da solução pelo Método das Forças do exemplo da seção anterior pode ser reescrito de uma forma matricial:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

No caso geral de uma estrutura com grau de hiperestaticidade g , pode-se escrever:

$$\{\delta_0\} + [\delta]\{X\} = \{0\}. \tag{5.4}$$

Sendo:

$\{\delta_0\} \rightarrow$ vetor dos termos de carga;

$[\delta] \rightarrow$ matriz de flexibilidade;

$\{X\} \rightarrow$ vetor dos hiperestáticos.

O número de equações de compatibilidade na relação matricial (5.4) é igual ao grau de hiperestaticidade da estrutura, sendo que cada equação restabelece o vínculo associado ao hiperestático genérico X_i. O termo de carga δ_{i0} é o deslocamento ou a rotação que aparece no vínculo eliminado associado ao hiperestático X_i no caso (0). O coeficiente δ_{ij} da matriz de flexibilidade é o deslocamento ou a rotação que aparece no vínculo eliminado associado ao hiperestático X_i provocado por X_j = 1 no caso (*j*).

Observa-se que o vetor dos termos de carga depende do SP escolhido e da solicitação externa. Já a matriz de flexibilidade *só* depende do SP escolhido. Portanto, se outro carregamento (ou qualquer outra solicitação) atuar, mantendo-se o mesmo SP, somente os termos de carga têm que ser calculados novamente.

O Método das Forças é assim chamado pois as incógnitas são forças (ou momentos). O método também é chamado de Método da Compatibilidade pois as equações finais expressam condições de compatibilidade. Ele também é denominado Método da Flexibilidade pois envolve coeficientes de flexibilidade em sua solução.

Duas observações podem ser feitas com respeito à matriz de flexibilidade. A primeira é que pelo Teorema de Maxwell, mostrado na Seção 4.3.3 (versão para forças generalizadas unitárias impostas, equação (4.41)), a matriz é simétrica. Ou seja:

$$\delta_{ji} = \delta_{ij}. \tag{5.5}$$

A segunda observação é que os coeficientes de flexibilidade que correspondem a um dado caso básico – casos (1) e (2) da seção anterior – têm o mesmo índice *j*. Pode-se escrever então:

- A *j-ésima* coluna da matriz de flexibilidade $[\delta]$ da estrutura corresponde ao conjunto de deslocamentos generalizados (deslocamentos ou rotações) nas direções dos vínculos eliminados do SP provocados por $X_j = 1$ (hiperestático X_j com valor unitário atuando isoladamente no SP).

5.3. Escolha do Sistema Principal para uma viga contínua

No exemplo da Seção 5.1, para se chegar ao Sistema Principal foram eliminados vínculos de apoio. Esta opção pode ser a mais intuitiva, mas não é a única. Em alguns casos, por uma questão de conveniência da solução, pode-se eliminar vínculos internos da estrutura hiperestática para a determinação do SP. Em outros casos, a única alternativa é a eliminação de vínculos internos.

Esta seção analisará uma estrutura com duas alternativas para o SP: uma eliminando vínculos externos de apoio e outra eliminando a continuidade interna na sua configuração deformada. No exemplo adotado vai ficar claro que a segunda alternativa é a mais conveniente, pois resulta em cálculos bem mais simples para a determinação dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade. Isso acontece na maioria dos casos quando são introduzidas rótulas na estrutura para eliminar a continuidade interna de rotação.

Considere a viga contínua mostrada na Figura 5.8, com três vãos e com uma carga uniformemente distribuída abrangendo o vão da esquerda. A rigidez à flexão da viga, *EI*, é fornecida. Pede-se o diagrama de momentos fletores da estrutura. Para o cálculo de deslocamentos ou rotações é utilizado o PFV, cujo desenvolvimento teórico foi mostrado no Capítulo 4 (veja Seção 4.3.1.1). Nesse cálculo, não são considerados efeitos axiais (mesmo porque não existem esforços axiais na viga contínua) ou efeitos de cisalhamento na energia de deformação.

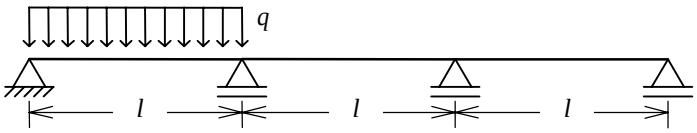


Figura 5.8 – Viga contínua com três vãos e carregamento uniformemente distribuído no primeiro vão.

A estrutura da Figura 5.8 tem grau de hiperestaticidade $g = 2$. Para a resolução pelo Método das Forças, duas opções para o Sistema Principal (SP) vão ser consideradas. O objetivo é caracterizar as diferenças que existem na escolha do SP. Na primeira opção são eliminados vínculos externos (vínculos de apoio) e na segunda são eliminados vínculos internos (continuidade de rotação).

5.3.1. Sistema Principal obtido por eliminação de apoios

Nesta opção são eliminados os apoios internos da viga para se chegar ao SP. Os hiperestáticos X_1 e X_2 são as reações de apoio associadas a estes vínculos, tal como indicado na Figura 5.9.

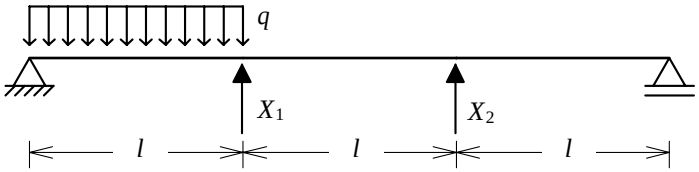


Figura 5.9 – Primeira opção para SP da estrutura da Figura 5.8.

A solução pelo Método das Forças recai em determinar os valores que as reações de apoio X_1 e X_2 devem ter para que, juntamente com o carregamento atuante, os deslocamentos verticais dos pontos dos apoios eliminados sejam nulos. Desta forma ficam restabelecidas as condições de compatibilidade externas eliminadas com a criação do SP.

A metodologia utilizada para impor as condições de compatibilidade consiste em fazer uma superposição de casos básicos utilizando o SP como estrutura auxiliar. Como a estrutura original é duas vezes hiperestática, existem três casos básicos, tal como mostrado a seguir.

5.3.1.1. Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP

Neste caso somente a solicitação externa atua no SP e os valores dos hiperestáticos são nulos ($X_1 = 0$ e $X_2 = 0$). A Figura 5.10 mostra a configuração deformada do caso (0), onde os termos de carga δ_{10} e δ_{20} estão indicados, e o diagrama de momentos fletores, M_0, para este caso.

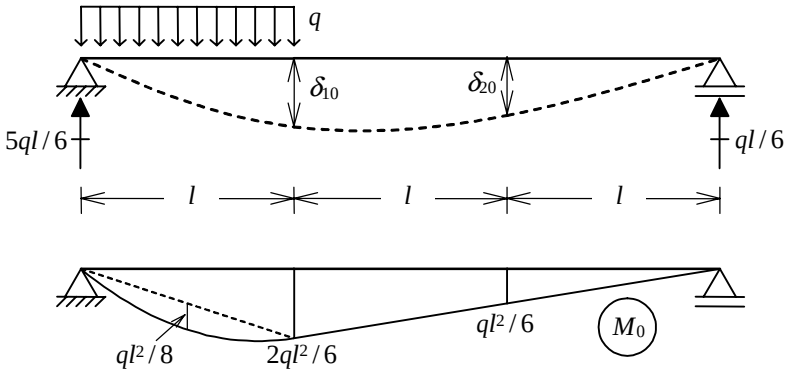


Figura 5.10 – Solicitação externa isolada no SP da Figura 5.9.

Os termos de carga no caso (0) têm a seguinte interpretação física:

$\delta_{10} \rightarrow$ deslocamento vertical no ponto do apoio eliminado associado a X_1 provocado pelo o carregamento externo no caso (0);

$\delta_{20} \rightarrow$ deslocamento vertical no ponto do apoio eliminado associado a X_2 provocado pelo carregamento externo no caso (0).

5.3.1.2. Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP

Neste caso somente o hiperestático X_1 atua no SP, sem a solicitação externa e com $X_2 = 0$. Como o valor do hiperestático X_1 não é conhecido, coloca-se X_1 em evidência no caso (1), considerado como caso básico $X_1 = 1$ e multiplicando externamente pela incógnita X_1, tal como indicado na Figura 5.11. A configuração deformada e o diagrama de momentos fletores do caso (1) estão mostrados na figura, onde os coeficientes de flexibilidade δ_{11} e δ_{21} estão indicados. Por definição, o diagrama de momentos fletores M_1 é para $X_1 = 1$.

Os coeficientes de flexibilidade no caso (1) são interpretados fisicamente como:

$\delta_{11} \rightarrow$ deslocamento vertical no ponto do apoio eliminado associado a X_1 provocado por $X_1 = 1$ no caso (1);

$\delta_{21} \rightarrow$ deslocamento vertical no ponto do apoio eliminado associado a X_2 provocado por $X_1 = 1$ no caso (1).

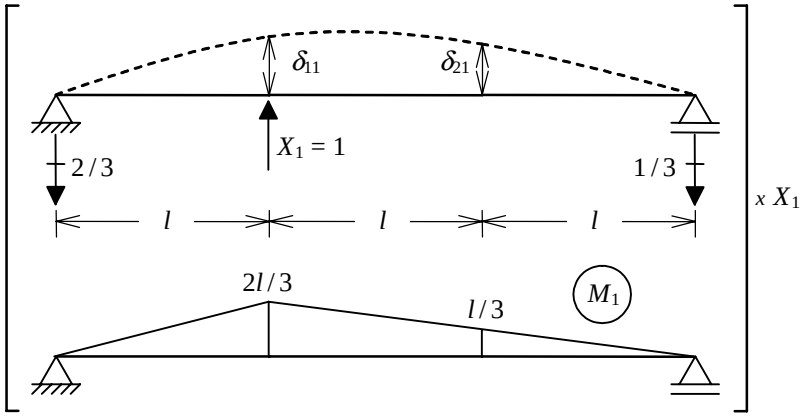


Figura 5.11 – Hiperestático X_1 isolado no SP da Figura 5.9.

5.3.1.3. Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP

Neste caso somente o hiperestático X_2 atua no SP, sem a solicitação externa e com $X_1 = 0$. Analogamente ao caso (1), coloca-se X_2 em evidência no caso (2). A configuração deformada e o diagrama de momentos fletores, M_2 (para $X_2 = 1$), do caso (2) estão mostrados na Figura 5.12, onde os coeficientes de flexibilidade δ_{12} e δ_{22} estão indicados.

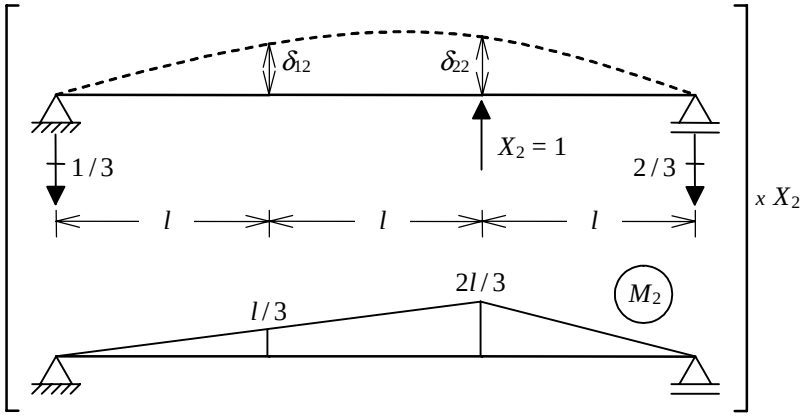


Figura 5.12 – Hiperestático X_2 isolado no SP da Figura 5.9.

Os coeficientes de flexibilidade no caso (2) têm a seguinte interpretação física:

$\delta_{12} \rightarrow$ deslocamento vertical no ponto do apoio eliminado associado a X_1 provocado por $X_2 = 1$ no caso (2);

$\delta_{22} \rightarrow$ deslocamento vertical no ponto do apoio eliminado associado a X_2 provocado por $X_2 = 1$ no caso (2).

5.3.1.4. Restabelecimento das condições de compatibilidade

Com base na superposição dos três casos básicos, são restabelecidas as condições de compatibilidade que foram violadas na criação do SP. O objetivo é restabelecer as condições impostas pelos apoios eliminados, isto é, vai se impor que, na superposição, os deslocamentos verticais finais dos pontos dos apoios são nulos:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

O cálculo dos coeficientes que aparecem neste sistema de equações é feito com auxílio do PFV. Conforme visto na Seção 4.3.1.1 do Capítulo 4, o PFV trabalha com um sistema real de deformação, do qual se quer calcular um deslocamento em al-

gum ponto, e um sistema de forças virtuais, com uma força aplicada no ponto e na direção do deslocamento que se quer calcular.

No presente exemplo da viga contínua com três vãos, para o SP adotado, os deslocamentos a serem calculados são sempre os deslocamentos verticais nos pontos dos apoios eliminados para a criação do SP. Portanto, os sistemas de forças virtuais adotados sempre serão forças unitárias aplicadas nestes pontos. Observa-se que estes sistemas correspondem justamente aos casos (1) e (2) para os hiperestáticos X_1 e X_2 com valores unitários. Dessa forma, os sistemas de deformação real são os casos (0), (1) e (2) e os sistemas de forças virtuais são os casos (1) e (2) com $X_1 = 1$ e $X_2 = 1$, respectivamente.

Cálculo de δ_{10}

No cálculo do termo de carga δ_{10} pelo PFV, o sistema real de deformação é o caso (0) e o sistema de forças virtuais é o caso (1) com $X_1 = 1$. Portanto, a expressão para este coeficiente, desprezando deformações por cisalhamento, é (veja a Seção 4.3.1.1):

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \int_{viga} \overline{M} M dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_1 M_0 dx \ .$$

A integral acima é calculada para cada trecho da viga:

$$\int_0^{3l} M_1 M_0 dx = \int_0^{l} M_1 M_0 dx + \int_l^{2l} M_1 M_0 dx + \int_{2l}^{3l} M_1 M_0 dx \ .$$

Esta integral é calculada com base na Tabela 4.1 do Capítulo 4 para a combinação de diagramas de momentos fletores. Para tanto, os diagramas em cada trecho da viga são decompostos em parcelas retangulares (que não existem neste caso), triangulares e parabólicas simples, tal como indica a Figura 5.13.

Abaixo são mostradas as expressões das combinações das parcelas dos diagramas. Em cada trecho, cada parcela no caso (1) é combinada com as outras parcelas no caso (0). Observa-se que os momentos fletores no caso (0) tracionam as fibras inferiores e no caso (1) tracionam as fibras superiores. Portanto, os sinais das integrais são negativos. O valor final para δ_{10} é mostrado em função de l (comprimento de um trecho), q (taxa de carregamento distribuído) e EI (rigidez à flexão da viga). Isso resulta em:

$$\int_0^{l} M_1 M_0 dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{2ql^2}{6}\right)(l) - \frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{ql^2}{8}\right)(l);$$

$$\int_l^{2l} M_1 M_0 dx = -\frac{1}{6}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{2ql^2}{6}\right)(l) - \frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{ql^2}{6}\right)(l) - \frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{2ql^2}{6}\right)(l) - \frac{1}{6}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{ql^2}{6}\right)(l);$$

$$\int_{2l}^{3l} M_1 M_0 dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{ql^2}{6}\right)(l);$$

$$\int_{0}^{3l} M_1 M_0 dx = -\frac{ql^4}{4}.$$

O valor final de δ_{10} é:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\cdot \int_{0}^{3l} M_1 M_0 dx = -\frac{ql^4}{4EI}.$$

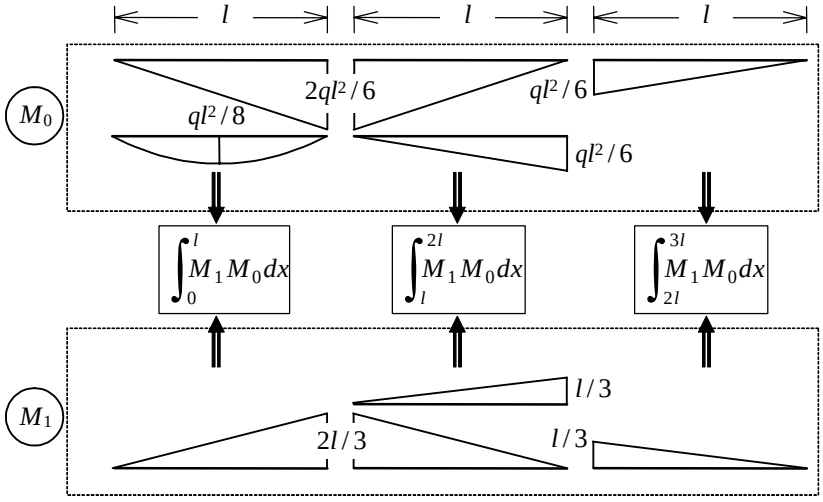


Figura 5.13 – Combinação de diagramas de momentos fletores para o cálculo do termo de carga δ_{10} relativo ao SP da Figura 5.9.

Cálculo de δ_{20}

Este cálculo é análogo ao cálculo do termo de carga δ_{10}. Para calcular δ_{20} pelo PFV, o sistema de deformação real é o caso (0) e o sistema de forças virtuais é o caso (2) com $X_2 = 1$, resultando em:

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\cdot \int_{viga} \overline{M} M dx = \frac{1}{EI}\cdot \int_{0}^{3l} M_2 M_0 dx.$$

Esta integral é calculada com base na combinação dos diagramas de momentos fletores em cada trecho da viga, tal como mostrado na Figura 5.14.

As expressões para as integrais para cada trecho e o resultado final para δ_{20} estão mostrados abaixo. Assim como para δ_{10}, os sinais são negativos pois os momentos fletores dos casos (0) e (2) tracionam fibras opostas:

$$\int_0^l M_2 M_0 dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{2ql^2}{6}\right)(l) - \frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{ql^2}{8}\right)(l);$$

$$\int_l^{2l} M_2 M_0 dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{2ql^2}{6}\right)(l) - \frac{1}{6}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{ql^2}{6}\right)(l) - \frac{1}{6}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{2ql^2}{6}\right)(l) - \frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{ql^2}{6}\right)(l);$$

$$\int_{2l}^{3l} M_2 M_0 dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{ql^2}{6}\right)(l);$$

$$\int_0^{3l} M_2 M_0 dx = -\frac{5ql^4}{24}.$$

Isso resulta em:

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_2 M_0 dx = -\frac{5ql^4}{24EI}.$$

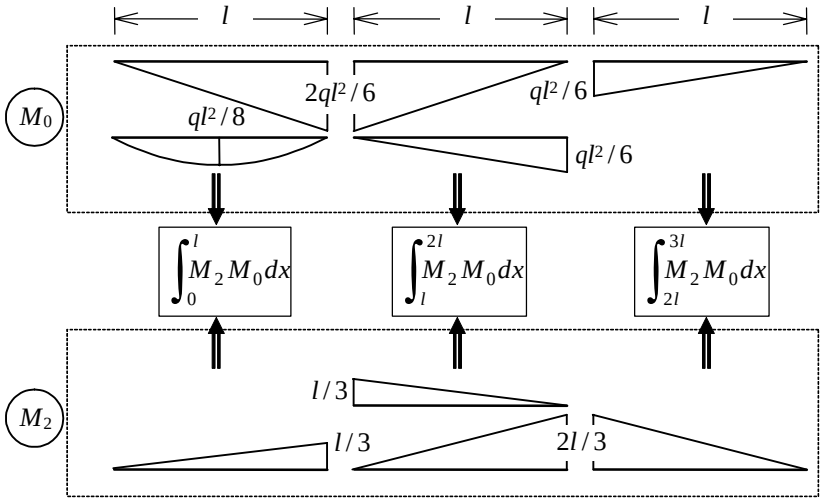


Figura 5.14 – Combinação de diagramas de momentos fletores para o cálculo do termo de carga δ_{20} relativo ao SP da Figura 5.9.

Cálculo de δ_{11}

Para calcular o coeficiente de flexibilidade δ_{11} pelo PFV, o sistema real de deformação e o sistema de forças virtuais coincidem: são o caso (1) com $X_1 = 1$. Dessa forma,

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \int_{viga} \overline{M} M dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_1 M_1 dx \, .$$

Esta expressão demonstra que o sinal de δ_{11} é positivo, conforme foi mencionado anteriormente neste capítulo, na Seção 5.1.2 (δ_{ii} é sempre positivo, sendo i o índice do hiperestático). A combinação dos diagramas de momentos fletores estão mostradas na Figura 5.15 e as expressões para as integrais em cada trecho para o cálculo deste coeficiente são mostradas abaixo:

$$\int_0^{l} M_1 M_1 dx = +\frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{2l}{3}\right)(l);$$

$$\int_l^{2l} M_1 M_1 dx = +\frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)(l)+\frac{1}{6}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{2l}{3}\right)(l)+\frac{1}{6}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)(l)+\frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{2l}{3}\right)(l);$$

$$\int_{2l}^{3l} M_1 M_1 dx = +\frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)(l);$$

$$\int_0^{3l} M_1 M_1 dx = +\frac{4l^3}{9}.$$

O valor resultante para δ_{11} é:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_1 M_1 dx = +\frac{4l^3}{9EI}.$$

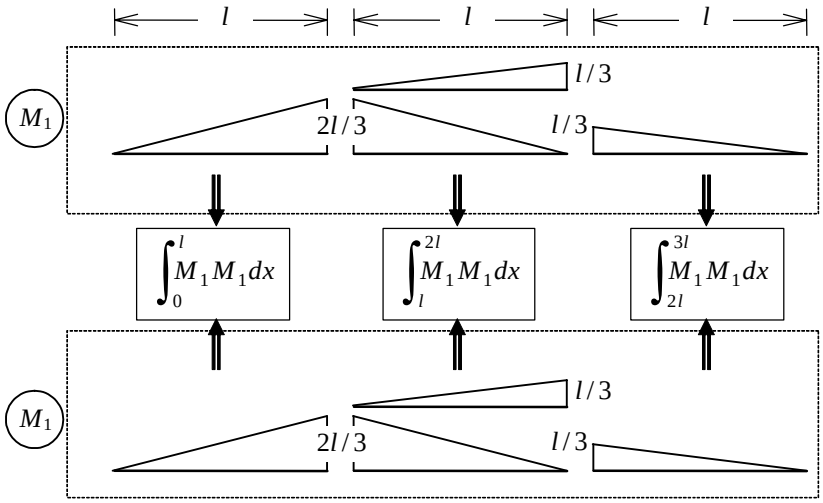


Figura 5.15 – Combinação de diagramas de momentos fletores para o cálculo do coeficiente de flexibilidade δ_{11} relativo ao SP da Figura 5.9.

Cálculo de δ_{21} e δ_{12}

No cálculo do coeficiente de flexibilidade δ_{21} pelo PFV, o sistema real de deformação é o caso (1) com $X_1 = 1$ e o sistema de forças virtuais é o caso (2) com $X_2 = 1$. Para o cálculo do coeficiente de flexibilidade δ_{12}, os papéis dos casos (1) e (2) se invertem: o sistema de deformação real é o caso (2) com $X_2 = 1$ e o sistema de forças virtuais é o caso (1) com $X_1 = 1$. Isso resulta em:

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI} \cdot \int_{viga} \overline{M} M dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_2 M_1 dx \; ;$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \int_{viga} \overline{M} M dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_1 M_2 dx \; .$$

Estas expressões demonstram que δ_{12} e δ_{21} são iguais, conforme foi mencionado anteriormente na Seção 5.1.2 ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$, sendo i e j índices de hiperestáticos). A Figura 5.16 mostra a combinação dos diagramas de momentos fletores; as expressões para as integrais em cada trecho e o cálculo final destes coeficientes são mostrados abaixo. Observa-se que estes coeficientes são positivos pois os momentos fletores dos casos (1) e (2) tracionam fibras do mesmo lado (neste exemplo são as fibras superiores):

$$\int_0^{l} M_2 M_1 dx = \int_0^{l} M_1 M_2 dx = +\frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{2l}{3}\right)(l);$$

$$\int_l^{2l} M_2 M_1 dx = \int_l^{2l} M_1 M_2 dx = +\frac{1}{6}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)(l)+\frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{2l}{3}\right)(l)+\frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)(l)+\frac{1}{6}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{2l}{3}\right)(l);$$

$$\int_{2l}^{3l} M_2 M_1 dx = \int_{2l}^{3l} M_1 M_2 dx = +\frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)(l);$$

$$\int_0^{3l} M_2 M_1 dx = \int_0^{3l} M_1 M_2 dx = +\frac{7l^3}{18};$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_2 M_1 dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_1 M_2 dx = +\frac{7l^3}{18EI} \; .$$

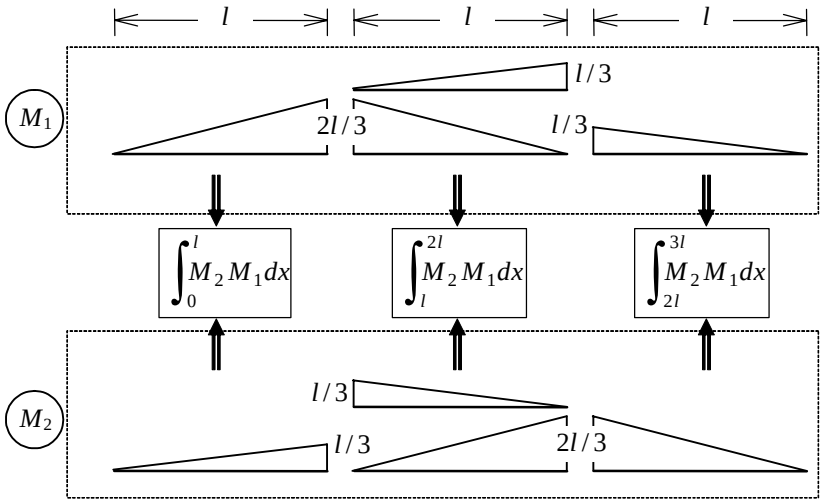


Figura 5.16 – Combinação de diagramas de momentos fletores para o cálculo dos coeficientes de flexibilidade δ_{12} e δ_{21} relativo ao SP da Figura 5.9.

Cálculo de δ_{22}

Assim como para δ_{11}, no cálculo do coeficiente de flexibilidade δ_{22} pelo PFV, o sistema real de deformação e o sistema de forças virtuais se identificam. Para δ_{22}, os dois sistemas são o caso (2) com $X_2 = 1$. Isto resulta em:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \int_{viga} \overline{M} M dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_2 M_2 dx \,.$$

Como mencionado, observa-se que o sinal de δ_{22} é positivo. O cálculo deste coeficiente é feito através das integrais mostradas abaixo que resultam da combinação dos diagramas de momentos fletores mostrada na Figura 5.17:

$$\int_0^{l} M_2 M_2 dx = +\frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)(l);$$

$$\int_l^{2l} M_2 M_2 dx = +\frac{1}{3}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)(l)+\frac{1}{6}\left(\frac{l}{3}\right)\left(\frac{2l}{3}\right)(l)+\frac{1}{6}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{l}{3}\right)(l)+\frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{2l}{3}\right)(l);$$

$$\int_{2l}^{3l} M_2 M_2 dx = +\frac{1}{3}\left(\frac{2l}{3}\right)\left(\frac{2l}{3}\right)(l);$$

$$\int_0^{3l} M_2 M_2 dx = +\frac{4l^3}{9};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{3l} M_2 M_2 dx = +\frac{4l^3}{9EI} .$$

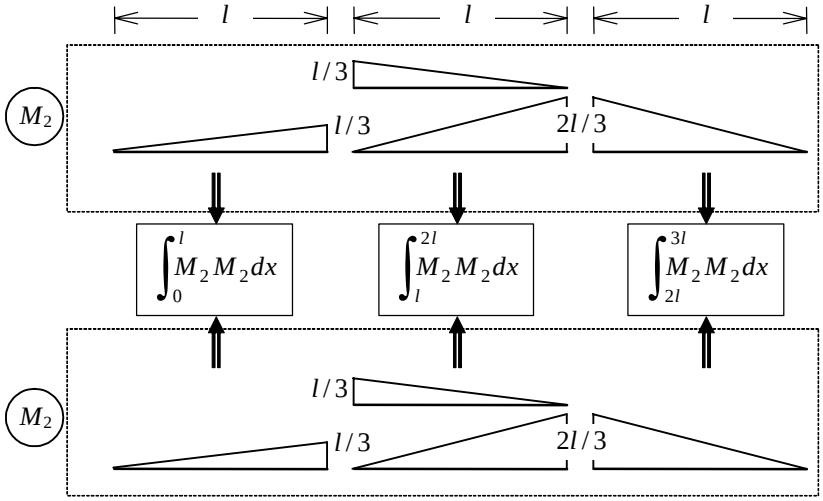


Figura 5.17 – Combinação de diagramas de momentos fletores para o cálculo do coeficiente de flexibilidade δ_{22} relativo ao SP da Figura 5.9.

Solução do sistema de equações de compatibilidade

Com base nas expressões dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade encontrados anteriormente, pode-se montar o sistema de equações de compatibilidade final do Método das Forças para este exemplo:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow -\frac{ql^4}{EI} \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 5/24 \end{Bmatrix} + \frac{l^3}{EI} \begin{bmatrix} 4/9 & 7/18 \\ 7/18 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

A partir da solução deste sistema de equações determinam-se os valores dos hiperestáticos X_1 e X_2 em função de l (comprimento de um vão da viga) e q (taxa de carregamento distribuído):

$$\begin{cases} X_1 = +\dfrac{13ql}{20} \\ X_2 = -\dfrac{ql}{10} \end{cases} .$$

Observa-se que estes valores independem do parâmetro EI (rigidez à flexão da viga), que foi eliminado na solução do sistema de equações acima.

5.3.1.5. Reações de apoio e diagrama de momentos fletores finais

Para finalizar a solução da viga contínua com três vãos, resta determinar o diagrama de momentos fletores finais. Conforme mencionado anteriormente neste capítulo (Seção 5.1.3), este diagrama pode ser determinado de duas maneiras:

- Calcula-se o Sistema Principal com o carregamento aplicado simultaneamente aos hiperestáticos X_1 e X_2 com os valores corretos encontrados;
- Utiliza-se a própria superposição de casos básicos para a obtenção dos momentos fletores finais: $M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$.

A segunda opção é em geral utilizada pois os diagramas de momentos fletores dos casos básicos já estão disponíveis (foram necessários para o cálculo dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade). A Figura 5.18 mostra as reações apoio e os momentos fletores finais para esta estrutura.

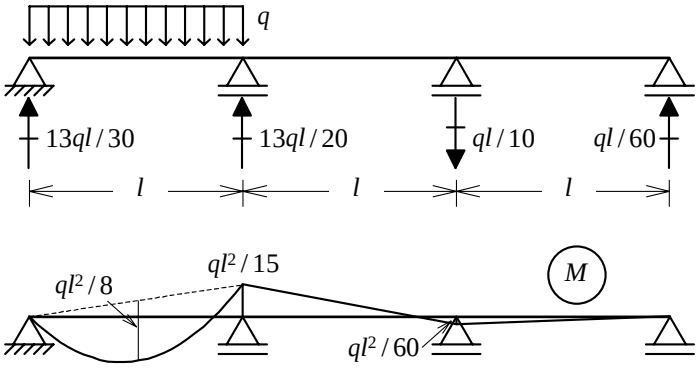


Figura 5.18 – Reações de apoio e diagrama de momentos fletores finais da estrutura da Figura 5.8.

5.3.2. Sistema Principal obtido por introdução de rótulas internas

Nesta outra opção para o SP, são eliminados vínculos internos de continuidade de rotação da elástica (configuração deformada) da viga. Neste caso, são introduzidas duas rótulas nas seções dos dois apoios internos. Os hiperestáticos X_1 e X_2 são momentos fletores associados à continuidade de rotação da viga nestas seções, tal como mostrado na Figura 5.19.

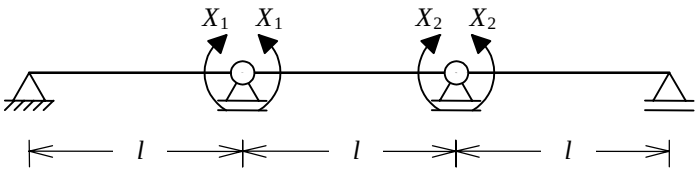


Figura 5.19 – Segunda opção para SP da estrutura da Figura 5.8.

Seguindo a metodologia do Método das Forças, a solução do problema recai em determinar os valores que os momentos fletores X_1 e X_2 devem ter para que, juntamente com o carregamento atuante, fique restabelecida a continuidade de rotação da elástica da viga. Os mesmos passos mostrados para a solução considerando a opção anterior do SP (Seção 5.3.1) são feitos para esta opção. Isto é mostrado a seguir.

5.3.2.1. Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP

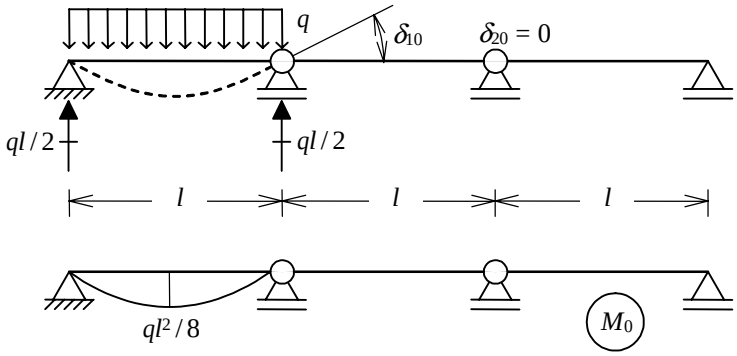


Figura 5.20 – Solicitação externa isolada no SP da Figura 5.19.

$\delta_{10} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1 devida ao carregamento externo no caso (0);

$\delta_{20} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_2 devida ao carregamento externo no caso (0).

5.3.2.2. Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP

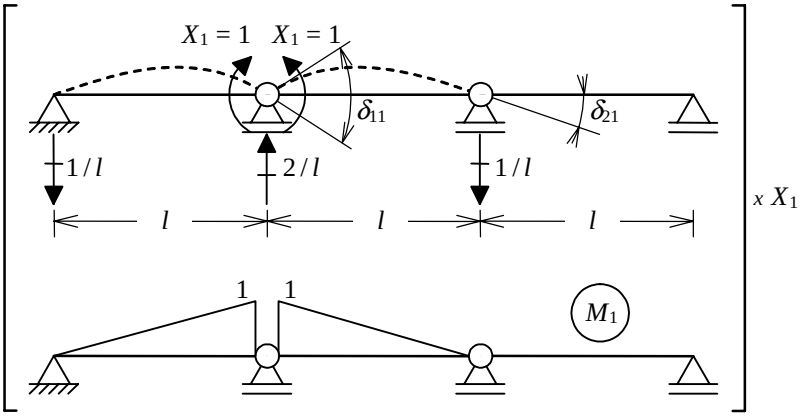


Figura 5.21 – Hiperestático X_1 isolado no SP da Figura 5.19.

$\delta_{11} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1 devida a $X_1 = 1$ no caso (1);

$\delta_{21} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_2 devida a $X_1 = 1$ no caso (1).

5.3.2.3. Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP

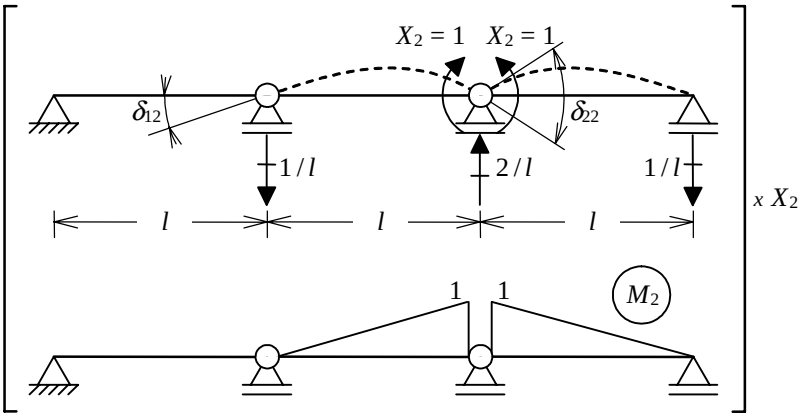


Figura 5.22 – Hiperestático X_2 isolado no SP da Figura 5.19.

$\delta_{12} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1 devida a $X_2 = 1$ no caso (2);

$\delta_{22} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_2 devida a $X_2 = 1$ no caso (2).

5.3.2.4. Restabelecimento das condições de compatibilidade

Para esta opção do Sistema Principal, é preciso restabelecer as condições de continuidade de rotação nas seções onde foram introduzidas as rótulas. Isto é feito com base na superposição dos três casos básicos. As equações de compatibilidade vão impor que, na superposição, as rotações relativas entre as seções adjacentes a cada rótula sejam nulas, resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

O cálculo dos coeficientes deste sistema de equações também é feito com auxílio do Princípio das Forças Virtuais (PFV). Para o Sistema Principal adotado, são calculadas as rotações relativas entre as seções adjacentes a cada rótula introduzida na criação do SP. Portanto, os sistemas de forças virtuais adotados são sempre pares de momentos unitários aplicados adjacentes às rótulas. Assim como para a primeira opção do SP (Seção 5.3.1), observa-se que estes sistemas correspondem justamente aos casos (1) e (2) para os hiperestáticos X_1 e X_2 com valores unitários. Assim, os sistemas de deformação real são os casos (0), (1) e (2) e os sistemas de forças virtuais são os casos (1) e (2) com $X_1 = 1$ e $X_2 = 1$, respectivamente.

Uma grande vantagem desta segunda opção do SP é a facilidade no cálculo dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade. Este cálculo é mostrado abaixo com base na combinação dos diagramas de momentos fletores dos casos básicos mostrados anteriormente:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3}(1)\left(\frac{ql^2}{8}\right)(l) \right] = -\frac{ql^3}{24EI};$$

$$\delta_{20} = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3}(1)(1)(l) + \frac{1}{3}(1)(1)(l) \right] = +\frac{2l}{3EI};$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{6}(1)(1)(l) \right] = +\frac{l}{6EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[+\frac{1}{3}(1)(1)(l) + \frac{1}{3}(1)(1)(l) \right] = +\frac{2l}{3EI}.$$

O sistema de equações de compatibilidade resultante e a sua solução estão indicados abaixo:

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\rightarrow -\frac{ql^3}{EI}\begin{Bmatrix}1/24\\ 0\end{Bmatrix}+\frac{l}{EI}\begin{bmatrix}2/3 & 1/6\\ 1/6 & 2/3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix};$$

$$\begin{cases}X_1=+\dfrac{ql^2}{15}\\ X_2=-\dfrac{ql^2}{60}\end{cases}.$$

Observa-se que os valores de X_1 e X_2 correspondem exatamente aos valores dos momentos fletores nas seções dos apoios internos da viga contínua, conforme indicado na Seção 5.3.1.5. Portanto, esta opção do SP acarreta, como não poderia deixar de ser, a mesma solução da estrutura hiperestática.

Outra vantagem desta segunda opção do SP é a facilidade no traçado do diagrama dos momentos fletores finais. Nas seções onde foram introduzidas rótulas o valor do momento fletor final é o próprio valor do hiperestático correspondente a cada rótula, como está indicado na Figura 5.18. O traçado do diagrama ao longo das barras é obtido por uma superposição simples dos diagramas dos casos básicos. No primeiro vão é uma superposição de um triângulo com uma parábola, no segundo é uma superposição de dois triângulos e no terceiro é só um triângulo.

5.4. Escolha do Sistema Principal para um quadro fechado

Na seção anterior foi analisada uma viga contínua com duas opções para o SP: uma com eliminação de vínculos externos e outra com eliminação de continuidade interna. Esta seção estende este estudo para um quadro externamente isostático, mostrado na Figura 5.23, de tal maneira que, para a criação do SP, é necessário eliminar vínculos internos de continuidade. De acordo com a Seção 2.6 do Capítulo 2, o grau de hiperestaticidade do quadro é $g = 3$. Todas as barras têm os mesmos parâmetros de material e de seção transversal.

Neste estudo, apenas são discutidos os Sistemas Principais adotados e as interpretações físicas dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade. A solução final da estrutura não é mostrada, visto que isso é feito para diversos outros exemplos no restante deste capítulo.

Duas opções são adotadas para o SP da solução do pórtico da Figura 5.23 pelo Método das Forças. Na primeira, o anel (circuito fechado de barras) é cortado, seccionando-o em uma seção. Na segunda, são introduzidas rótulas internas.

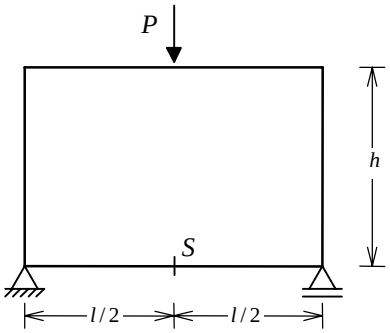


Figura 5.23 – Pórtico plano externamente isostático e com hiperestaticidade interna devida a um anel.

5.4.1. Sistema Principal obtido por corte de uma seção

A primeira opção para a criação do SP da estrutura da Figura 5.23 é feita secionando o anel na seção *S* indicada na figura. O SP resultante é mostrado na Figura 5.24.

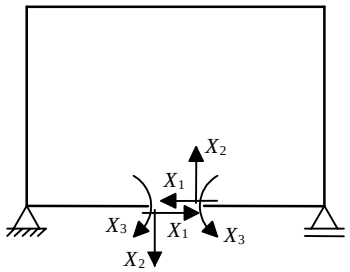


Figura 5.24 – Primeira opção para SP do quadro da Figura 5.23.

Os hiperestáticos correspondentes a esta opção do SP também estão indicados na Figura 5.24. Eles são os esforços internos (de ligação) na seção *S*. Os casos básicos da solução da estrutura pelo Método das Forças com este SP são mostrados a seguir.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP

A Figura 5.25 mostra o efeito da solicitação externa para o SP adotado. Vêem-se na figura as interpretações físicas dos termos de carga para este caso, sendo que:

$\delta_{10} \rightarrow$ deslocamento axial relativo entre as seções resultantes do corte na seção *S* provocado pela solicitação externa no caso (0);

$\delta_{20} \rightarrow$ deslocamento transversal relativo entre as seções resultantes do corte na seção *S* provocado pela solicitação externa no caso (0) (no exemplo, δ_{20} é nulo);

$\delta_{30} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções resultantes do corte na seção S provocada pela solicitação externa no caso (0).

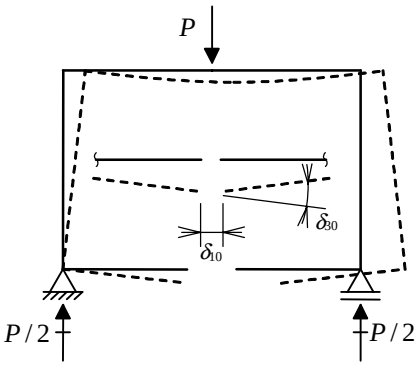


Figura 5.25 – Solicitação externa isolada no SP da Figura 5.24.

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP

O caso (1) da solução com o SP adotado é mostrado na Figura 5.26, e as interpretações físicas dos coeficientes de flexibilidade correspondentes são:

$\delta_{11} \rightarrow$ deslocamento axial relativo entre as seções resultantes do corte na seção S provocado por $X_1 = 1$ no caso (1);

$\delta_{21} \rightarrow$ deslocamento transversal relativo entre as seções resultantes do corte na seção S provocado por $X_1 = 1$ no caso (1) (no exemplo, δ_{21} é nulo);

$\delta_{31} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções resultantes do corte na seção S provocada por $X_1 = 1$ no caso (1).

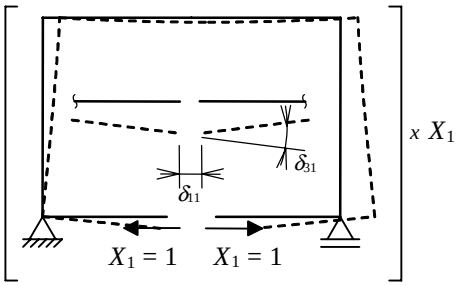


Figura 5.26 – Hiperestático X_1 isolado no SP da Figura 5.24.

Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP

A Figura 5.27 mostra o caso (2) da solução para o SP adotado. Os coeficientes de flexibilidade podem ser interpretados como:

$\delta_{12} \rightarrow$ deslocamento axial relativo entre as seções resultantes do corte na seção S provocado por $X_2 = 1$ no caso (2) (no exemplo, δ_{12} é nulo);

$\delta_{22} \rightarrow$ deslocamento transversal relativo entre as seções resultantes do corte na seção S provocado por $X_2 = 1$ no caso (2);

$\delta_{32} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções resultantes do corte na seção S provocada por $X_2 = 1$ no caso (2) (no exemplo, δ_{32} é nulo).

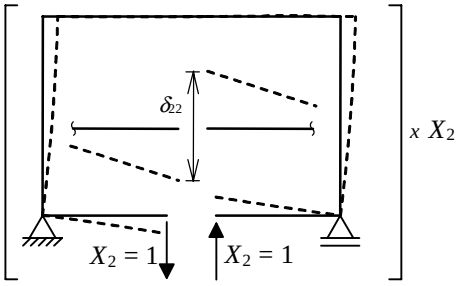


Figura 5.27 – Hiperestático X_2 isolado no SP da Figura 5.24.

Caso (3) – Hiperestático X_3 isolado no SP

Finalmente, o caso (3) desta opção do SP é indicado na Figura 5.28, cujos coeficientes de flexibilidades têm a seguinte interpretação física:

$\delta_{13} \rightarrow$ deslocamento axial relativo entre as seções resultantes do corte na seção S provocado por $X_3 = 1$ no caso (3);

$\delta_{23} \rightarrow$ deslocamento transversal relativo entre as seções resultantes do corte na seção S provocado por $X_3 = 1$ no caso (3) (no exemplo, δ_{23} é nulo);

$\delta_{33} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções resultantes do corte na seção S provocada por $X_3 = 1$ no caso (3).

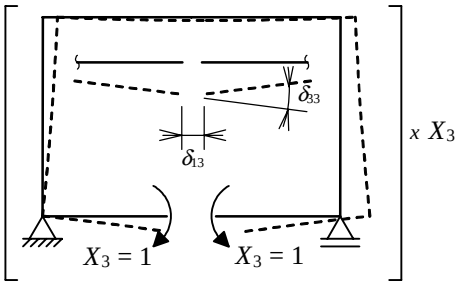


Figura 5.28 – Hiperestático X_3 isolado no SP da Figura 5.24.

Restabelecimento das condições de compatibilidade

Dentro da metodologia do Método das Forças, a superposição dos casos básicos (0), (1), (2) e (3) é utilizada para recompor as condições de compatibilidade que foram violadas na criação do SP. Para tanto, somam-se os valores das descontinuidades de deslocamentos axial e transversal e de rotação na seção de corte S, e impõe-se que as somas tenham valores nulos. Isso resulta em um sistema com três equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 = 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, é possível encontrar os valores de X_1, X_2 e X_3 que fazem com que os deslocamentos axial e transversal relativos e a rotação relativa na seção de corte S sejam nulos. Com isso, as três condições de continuidade violadas são restabelecidas.

5.4.2. Sistema Principal obtido por introdução de rótulas

A Figura 5.29 mostra a segunda opção para o SP da estrutura da Figura 5.23. Este SP é obtido introduzindo-se três rótulas no anel da estrutura. Os momentos fletores nas seções onde as rótulas são introduzidas são os hiperestáticos desta solução.

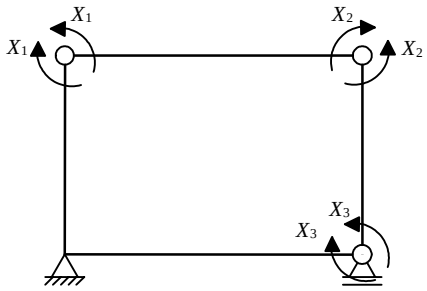


Figura 5.29 – Segunda opção para SP do quadro da Figura 5.23.

Deve-se observar que as rótulas poderiam ser colocadas em quaisquer outros três pontos, desde que não ficassem alinhadas em uma mesma barra, o que caracterizaria uma instabilidade (veja a Seção 2.4 do Capítulo 2). A Figura 5.30-a mostra outro SP válido obtido pela introdução de três rótulas na estrutura da Figura 5.23. A Figura 5.30-b indica um SP não válido pois as três rótulas estão alinhadas na barra superior do pórtico.

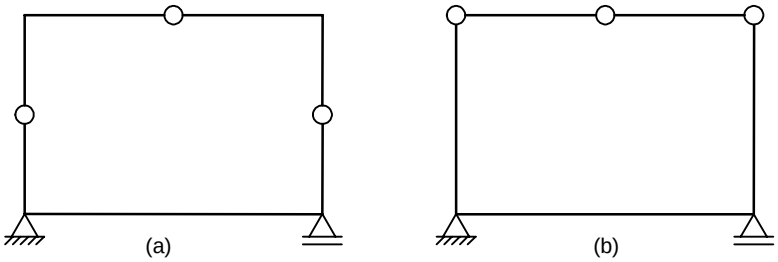


Figura 5.30 – Outras alternativas para SP do quadro da Figura 5.23 com introdução de rótulas: (a) opção válida; (b) opção inválida.

Outra observação importante com respeito à solução utilizando um SP que é obtido pela introdução de rótulas é que, em geral, na solução dos casos básicos, é necessária a decomposição do quadro isostático composto em quadros isostáticos simples. No caso geral, esta decomposição resultaria em quadros biapoiados, triarticulados ou engastados com balanços. Para o SP adotado, uma possível decomposição seria em um quadro biapoiado e outro triarticulado, tal como mostrado para os casos (0) e (1) a seguir. Para os casos (2) e (3) a mesma decomposição se aplicaria.

As interpretações físicas dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para esta opção do SP podem ser feitas genericamente da seguinte maneira:

$\delta_{i0} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada ao hiperestático X_i provocada pela solicitação externa no caso (0);

$\delta_{ij} \rightarrow$ rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada ao hiperestático X_i provocada por $X_j = 1$ no caso (j).

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SP

A Figura 5.31 indica a solução do caso (0) da presente opção para o SP. Observa-se que para resolver este problema isostático é conveniente decompor o quadro composto da Figura 5.29 em um quadro triarticulado que é suportado por um quadro biapoiado com uma barra vertical em balanço na esquerda. O quadro composto é separado em duas porções pelas rótulas associadas aos hiperestáticos X_1 e X_3. Os apoios do quadro triarticulado são fictícios, mas servem para indicar que existem duas forças de ligação (apoios do 2° gênero) e a ordem de carregamento dos quadros simples: nas seções de ligação das rótulas separadas, a porção que contém o apoio fictício é a porção suportada.

Para resolver o problema, devem-se determinar as "reações" de apoio no quadro triarticulado e aplicar estas reações como se fossem cargas atuando no quadro biapoiado. Na verdade, cada par reação-carga em um apoio fictício da decomposição representa um esforço interno de ligação em uma rótula. No caso (0) deste exemplo só existem esforços de ligação verticais, como mostra a Figura 5.31.

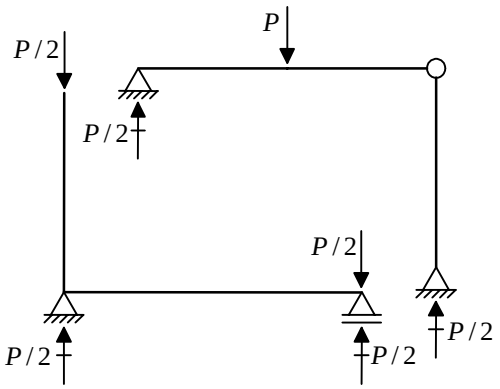


Figura 5.31 – Solicitação externa isolada no SP da Figura 5.29.

Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP

A solução do caso (1) desta opção do SP é semelhante à solução do caso (0). A decomposição do quadro composto no caso (1) está mostrada na Figura 5.32.

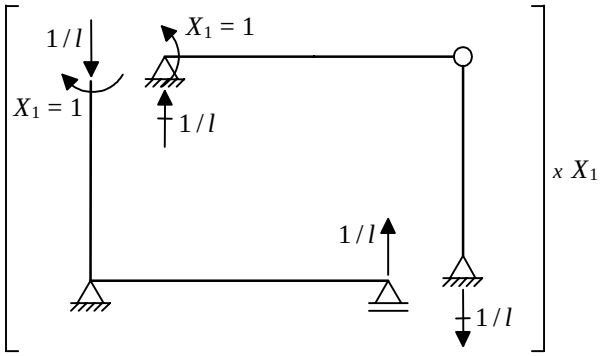


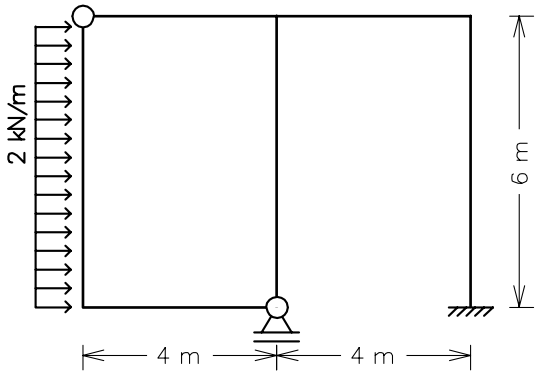
Figura 5.32 – Hiperestático X_1 isolado no SP da Figura 5.29.

Esta seção indicou a solução de um quadro fechado hiperestático, mas externamente isostático, adotando duas opções para o SP. Em princípio pode parecer mais complicado criar o SP introduzindo rótulas internas (segunda opção) do que seccionando em uma seção (primeira opção). Entretanto, conforme foi visto na Seção 5.3, existem pelo menos duas vantagens para isso. A primeira é que, em geral, a introdução de rótulas resulta em um cálculo mais simples dos termos de carga e dos coeficientes de flexibilidade. A segunda vantagem é que o traçado do diagrama de momentos fletores final, que é obtido pela superposição dos diagramas dos casos básicos, é mais simples. Nos pontos onde são introduzidas rótulas, o valor do diagrama de momentos fletores final é o próprio valor do hiperestático correspondendo àquela rótula. O restante deste capítulo apresenta soluções de pórticos planos, treliças e grelhas pelo Método das Forças.

5.5. Exemplos de solução pelo Método das Forças

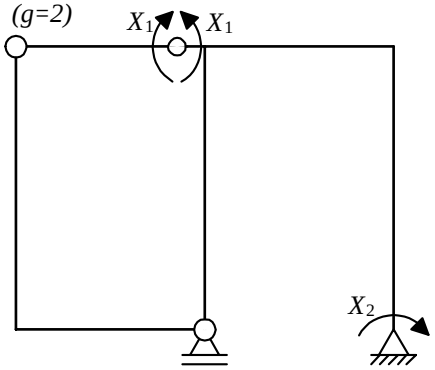
Exemplo 01

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão EI = 1,0 x 10^5 kNm^2.

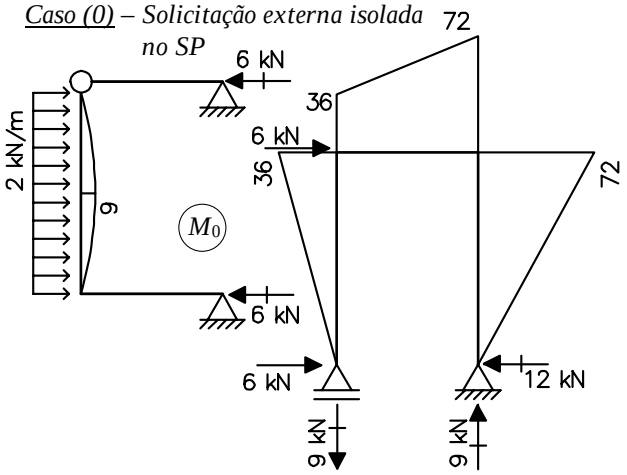


Sistema Principal e Hiperestáticos

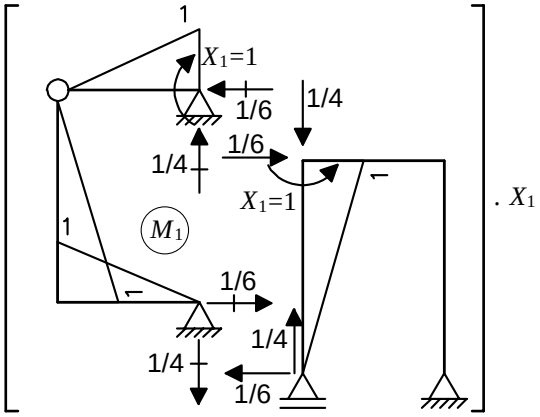
(g=2)



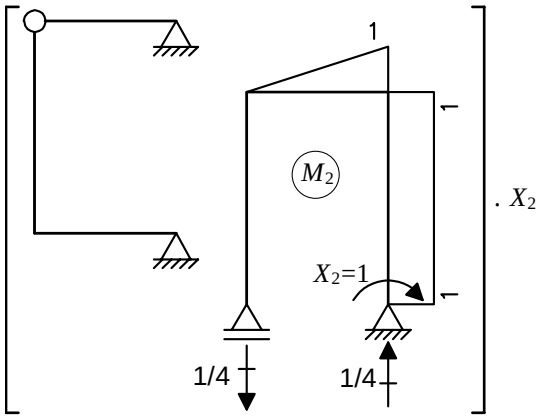
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – X_1 isolado no SP



Caso (2) – X_2 isolado no SP



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}X_1=+8.10kNm\\ X_2=-45.82kNm\end{Bmatrix}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 6\right]=-\frac{54}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 36\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 72\cdot 6\right]=+\frac{336}{EI}$$

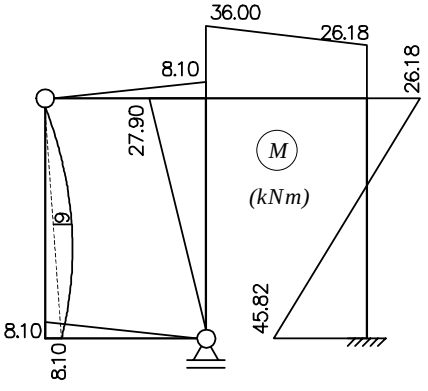
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right]=+\frac{20}{3EI}$$

$$\delta_{21}=\delta_{12}=0$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 4+1\cdot 1\cdot 6\right]=+\frac{22}{3EI}$$

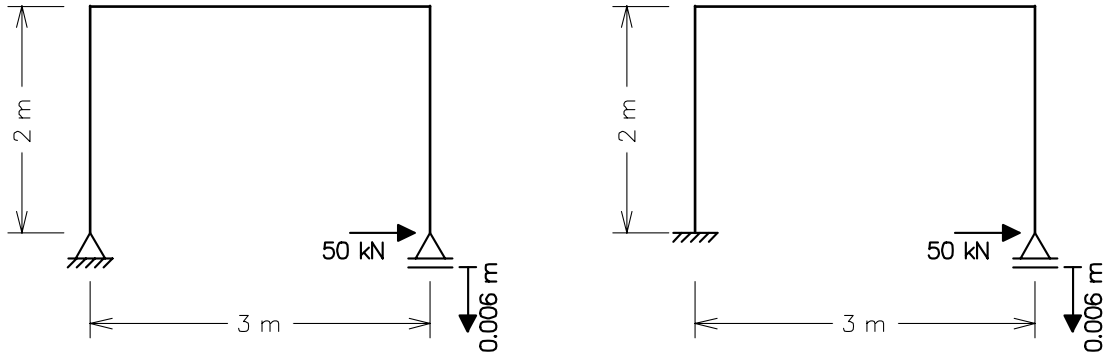
Diagrama de Momentos Fletores

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$



Exemplo 02

Considere as duas estruturas mostradas abaixo. A da esquerda é um quadro isostático e a da direita é um quadro hiperestático. Os dois quadros sofrem a mesma solicitação: uma força horizontal de 50 kN aplicada no apoio da direita e um recalque desse mesmo apoio de *6 mm* para baixo. Todas as barras têm um material com módulo de elasticidade E = 1,0 x 10^8 kN / m^2 e seções transversais com momento de inércia I = 1,0 x 10^{-3} m^4. Considere válida a hipótese de pequenos deslocamentos.



Pede-se:

(a) Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura isostática.

(b) Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática. Deve-se utilizar o Método das Forças, adotando OBRIGATORIAMENTE como Sistema Principal a estrutura isostática da esquerda. Somente considere deformações por flexão.

(b.1) Dê a intepretação física do termo de carga δ_{10} do sistema de equações de compatibidade do Método das Forças para esta solução.

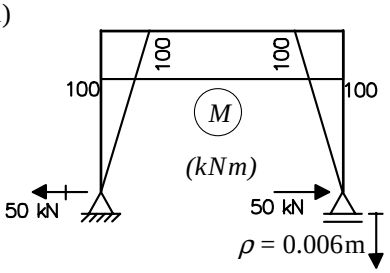
(b.2) Mostre a dedução do termo de carga δ_{10} pelo Princípio das Forças Virtuais.

(c) Considere que as colunas dos quadros acima tiveram a seção transversal modificada para uma com momento de inércia $I = 2{,}0 \times 10^{-3}$ m^4 (a viga não se altera). Responda sem fazer nenhum cálculo:

(c.1) O diagrama de momentos fletores da estrutura isostática se altera? Por que?

(c.2) O diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática se altera? Por que?

Item (a)



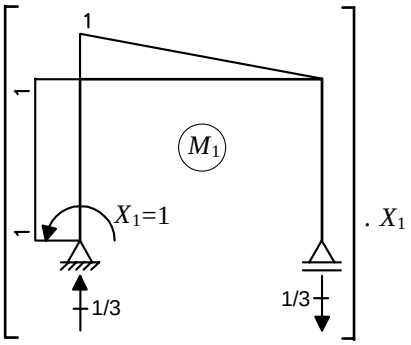
Como a estrutura é isostática, o "pequeno" recalque de apoio não provoca deformações (só movimento de corpo rígido). Portanto, o recalque não provoca momentos fletores, que só são devidos à carga de 50 kN aplicada.

Item (b)

<u>*Caso (0)*</u> *– Solicitação eterna isolada no SP*

Idêntico ao item (a).

<u>*Caso (1)*</u> *– X_1 isolado no SP*



Item (b.1) – *Equação de compatibilidade*

$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$ $\quad$ δ_{10} é a rotação da seção do apoio da esquerda no *caso (0)*

Item (b.2) – *Cálculo de* δ_{10} *pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)*

Sistema Real	Sistema Virtual
(Estrutura da qual se quer calcular o deslocamento.) É o *caso (0)*, que é idêntico ao item (a).	(Estrutura com força unitária virtual na direção do deslocamento que se quer calcular.) É o *caso (1)* com $X_1 = 1$.

PFV: $\overline{W_E} = \overline{U}$

$\overline{W_E} \rightarrow$ Trabalho das forças externas do sistema virtual com os correspondentes deslocamentos externos do sistema real. Neste caso, o trabalho externo virtual é igual ao produto de $X_1 = 1$ por δ_{10} mais o produto da reação vertical no apoio direito do *caso (1)* – força de $1/3$ para baixo – pelo recalque de apoio ρ: $\overline{W_E} = 1 \cdot \delta_{10} + (1/3) \cdot \rho$.	$\overline{U} \rightarrow$ Energia de deformação interna virtual. Esta é a energia de deformação por flexão provocada pelos momentos fletores do sistema virtual $\overline{M} = M_1$ com as correspondentes rotações relativas internas do sistema real $d\theta = (M_0 / EI)dx$. Deve ser observado que o recalque de apoio ρ não provoca deformações internas (só provoca movimento de corpo rígido). Portanto, $d\theta$ é somente devido à carga de *50 kN* aplicada. Assim: $\overline{U} = \int_{estrutura} \overline{M} d\theta = \int_{estrutura} M_1 d\theta = \int_{estrutura} \frac{M_1 M_0}{EI} dx$

Assim:

$$\delta_{10} = (1/EI) \cdot \int_{estrut.} M_1 M_0 dx - (1/3) \cdot \rho$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 2 \right] - \left(\frac{1}{3} \right) \cdot 0.006$$

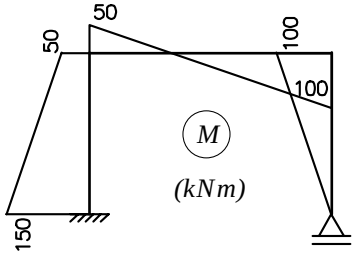
$$\delta_{10} = -4.5x10^{-3} rad$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \right] = +3x10^{-5} rad/kNm$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 150 kNm$$

Diagrama de Momentos Fletores

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$

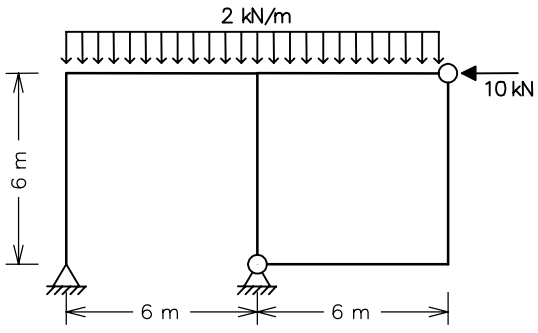


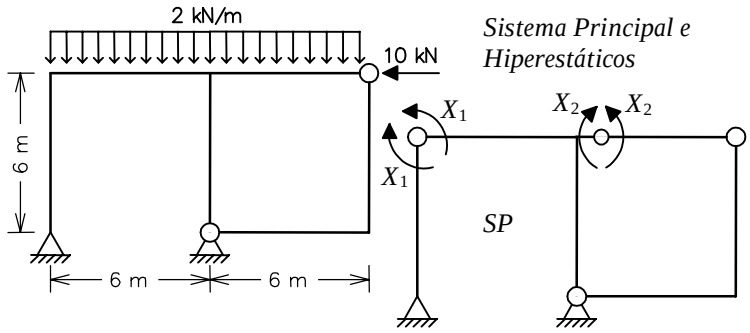
Item (c.1) – Na estrutura isostática, o diagrama de momentos fletores só depende dos valores da carga e reações, e da geometria da estrutura. Com a consideração da hipótese de pequenos deslocamentos, as equações de equilíbrio podem ser escritas para a geometria indeformada (original) da estrutura. Portanto, o diagrama de momentos fletores não se altera com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.

Item (c.2) – Na estrutura hiperestática, por ter vínculos excedentes, os esforços internos dependem da rigidez relativa entre as barras. Com as colunas mais rígidas do que a viga, as rotações das extremidades da vigas são menores do que no caso com todas as barras com rigidez iguais, se aproximando do caso de uma viga com extremidades engastadas. Portanto, o diagrama de momentos fletores fica alterado com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.

Exemplo 03

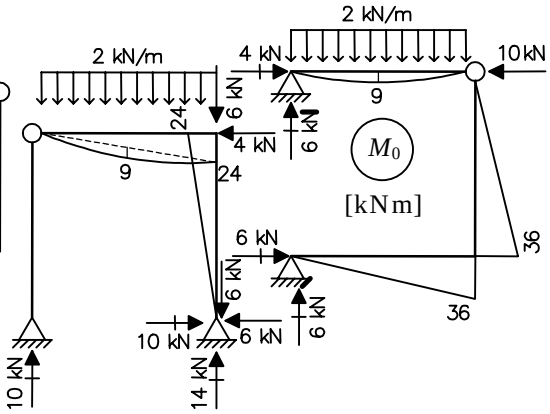
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão EI = 4,0 x 10^4 kNm^2.



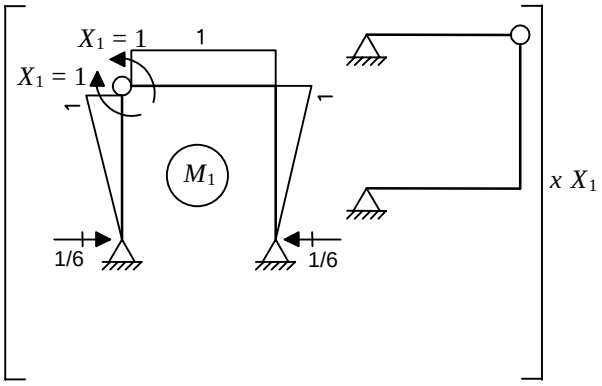


Sistema Principal e Hiperestáticos

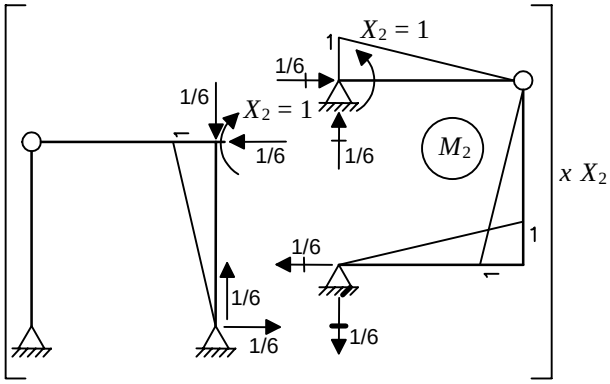
<u>Caso (0)</u> – Solicitação externa isolada no SP



<u>Caso (1)</u> – Hiperestático X_1 isolado no SP



<u>Caso (2)</u> – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de compatibilidade:

$$\begin{cases}\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0\\ \delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{EI}\cdot\begin{Bmatrix}-156\\-114\end{Bmatrix}+\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}+10&-2\\-2&+8\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_1=+19{,}4\ \text{kNm}\\X_2=+19{,}1\ \text{kNm}\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot1\cdot24\cdot6-\frac{2}{3}\cdot1\cdot9\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot24\cdot6\right]=-\frac{156}{EI}$$

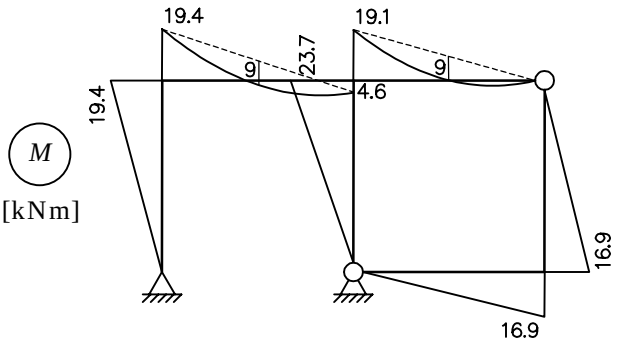
$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot1\cdot24\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot9\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot36\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot36\cdot6\right]=-\frac{114}{EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6+1\cdot1\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right]=+\frac{10}{EI}\qquad\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right]=-\frac{2}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right)\right]=+\frac{8}{EI}$$

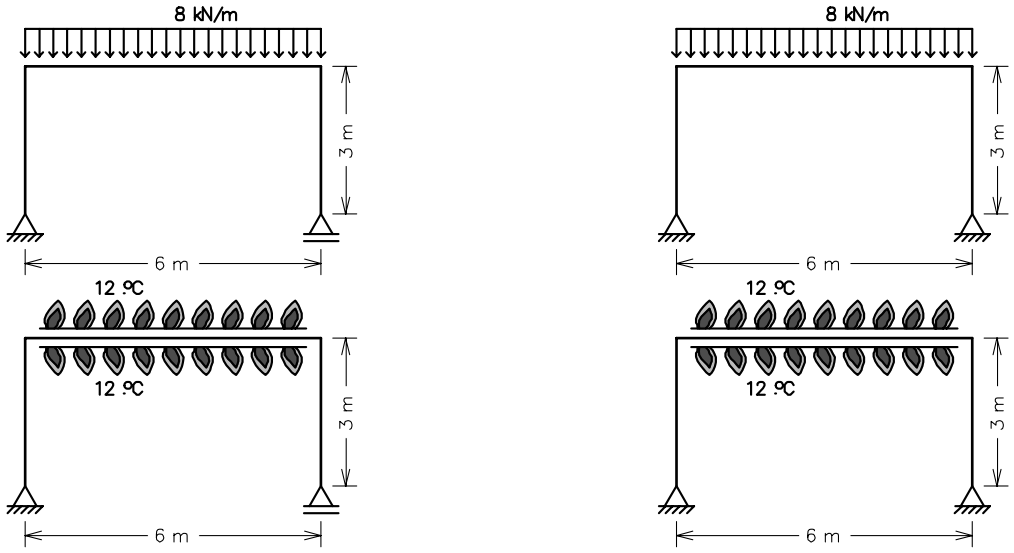
Momentos Fletores Finais:

$$M=M_0+M_1\cdot X_1+M_2\cdot X_2$$



Exemplo 04

Considere os quatro pórticos mostrados abaixo. Os pórticos do lado esquerdo são isostáticos e os do lado direito são hiperestáticos. Os pórticos superiores têm como solicitação uma carga uniformemente distribuída aplicada na viga. As duas estruturas inferiores têm como solicitação um aumento uniforme de temperatura (ΔT = 12 °C) na viga. Todas as barras têm um material com módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN / m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ /°C. Todas a barras têm seções transversais com momento de inércia I = 1,0 x 10^{-3} m⁴.



Pede-se:

(a) Indique os aspectos das configurações deformadas (amplificadas) das quatro estruturas.

(b) Determine os diagramas de momentos fletores das estruturas isostáticas e os aspectos (não precisa dos valores numéricos) dos diagramas de momentos fletores das estruturas hiperestáticas.

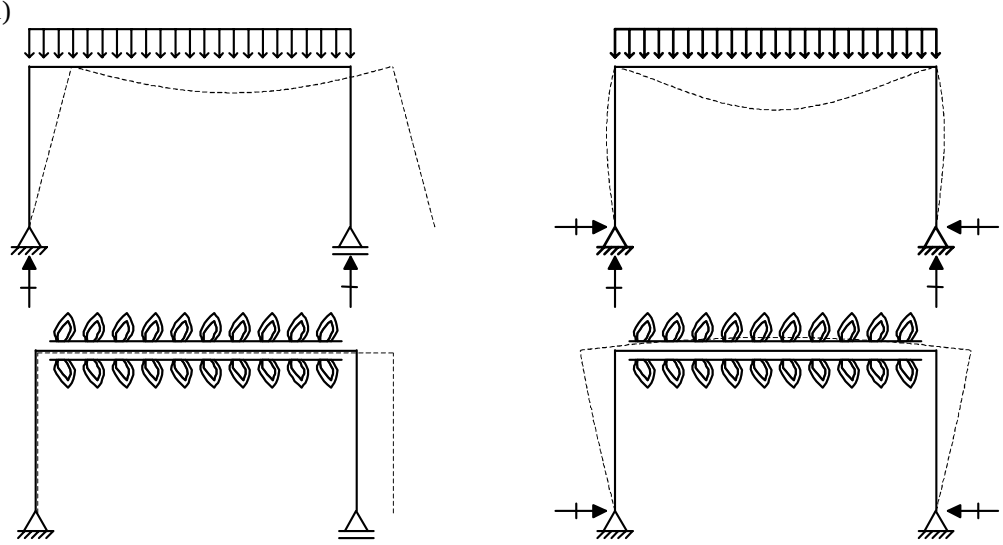
(c) Determine o diagrama de momentos fletores (com valores numéricos) da estrutura hiperestática inferior (solicitada pela variação de temperatura). Deve-se utilizar o Método das Forças, adotando obrigatoriamente como Sistema Principal a estrutura isostática da esquerda. Somente considere deformações por flexão. Sabe-se que o alongamento relativo interno de um elemento infenitesimal de barra devido a uma variação uniforme de temperatura é $du = \alpha \Delta T \, dx$. Neste caso não existe rotação relativa interna do elemento infinitesimal.

(d) Considere que as colunas dos quadros acima tiveram a seção transversal modificada para uma com momento de inércia I = 2,0 x 10^{-3} m⁴ (a viga não se altera). Responda:

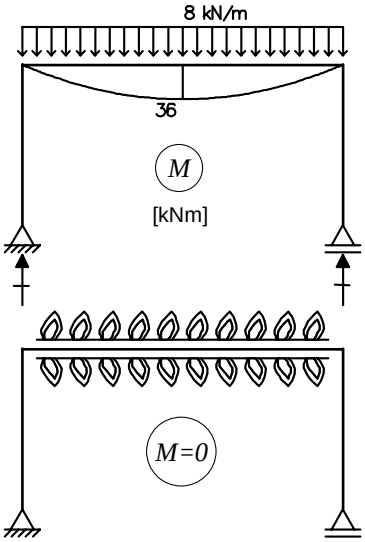
(d.1) Os diagramas de momentos fletores das estruturas isostáticas se alteram? Por que?

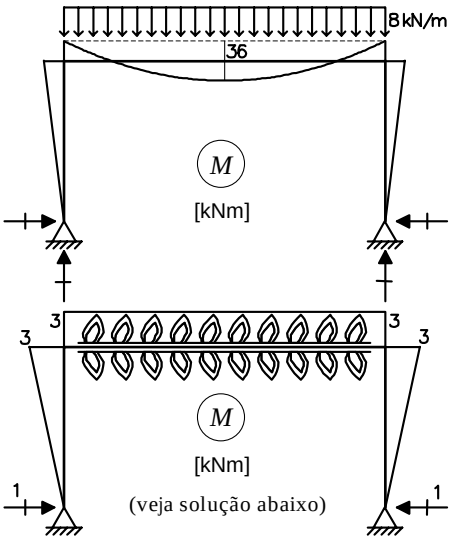
(d.2) Os diagramas de momentos fletores das estruturas hiperestáticas se alteram? Por que?

Item (a)



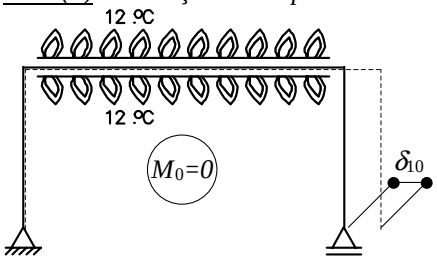
Item (b)





Item (c)

Caso (0) – *Variação de temperatura no SP*



$$\delta_{10} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 10^{-5} \cdot 12 \cdot 6 = +72 \cdot 10^{-5} m$$

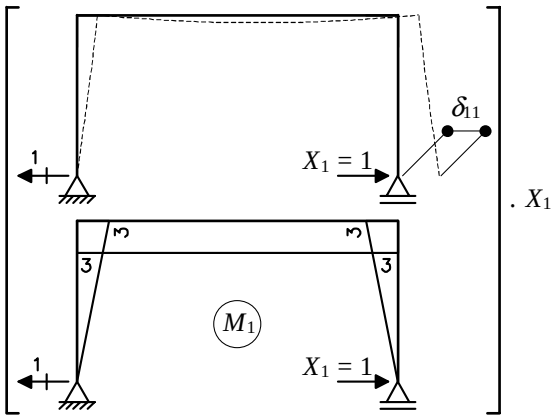
Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -1 kN$$

Momentos fletores finais (veja acima)

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 = 0 + M_1 \cdot (-1) = -M_1$$

Caso (1) – *Hiperestático X_1 isolado no SP*



$$\delta_{11} = \int \frac{(M_1)^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 6 \right]$$

$$\delta_{11} = +72 \cdot 10^{-5} m / kN$$

Item (d.1) – Na estrutura isostática, o diagrama de momentos fletores só depende dos valores da carga e reações, e da geometria da estrutura. Com a consideração da hipótese de pequenos deslocamentos, as equações de equilíbrio podem ser escritas para a geometria indeformada (original) da estrutura.
Portanto, o diagrama de momentos fletores não se altera com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.
No caso da carga uniformente distribuída, a estrutura isostática terá sempre o diagrama de momentos fletores indicado no item (a) (diagrama parabólico no viga). No caso da variação de temperatura, a estrutura isostática terá sempre momentos fletores nulos.

Item (d.2) – Na estrutura hiperestática, por ter vínculos excedentes, os esforços internos dependem da rigidez relativa entre as barras. Com as colunas mais rígidas do que a viga, as rotações das extremidades da viga são menores do que no caso com todas as barras com rigidez iguais, se aproximando do caso de uma viga com extremidades engastadas.
Portanto, o diagrama de momentos fletores fica alterado com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.
No caso da carga uniformente distribuída, a estrutura isostática terá como o mesmo aspecto do diagrama de momentos fletores indicado no item (a), mas os valores ficam alterados em relação ao diagrama com viga e colunas com mesma seção transversal.

A solução da estrutura hiperestática pelo Método das Forças, para a solicitação de variação uniforme de temperatura na viga, demonstra que a os valores dos momentos fletores finais dependem dos valores relativos entre momentos de inércia das seções transversais barras:

O *caso (0)* mostrado no item (c) permanece inalterado, isto é:

$\delta_{10} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 10^{-5} \cdot 12 \cdot 6 = +72 \cdot 10^{-5} m$.

O diagrama de momentos fletores M_1 do *item (c)* é o mesmo, mas o valor do coeficiente de flexibilidade fica alterado:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_{viga}} \cdot [3 \cdot 3 \cdot 6] + \frac{1}{EI_{coluna}} \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \right]$$

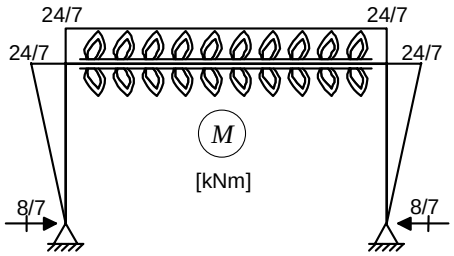
$\delta_{11} = 54 \cdot 10^{-5} + 9 \cdot 10^{-5} = 63 \cdot 10^{-5} m / kN$

<u>*Equação de compatibilidade*</u>

$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -8/7 \, kN$

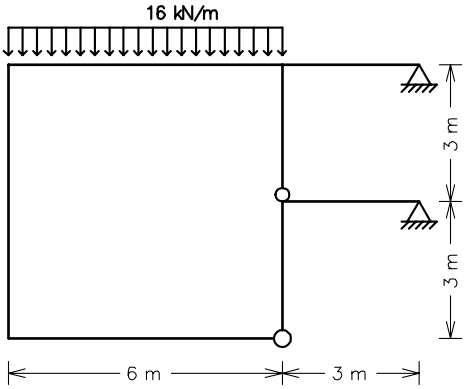
<u>*Momentos fletores finais*</u>

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 = M_1 \cdot (-8/7)$



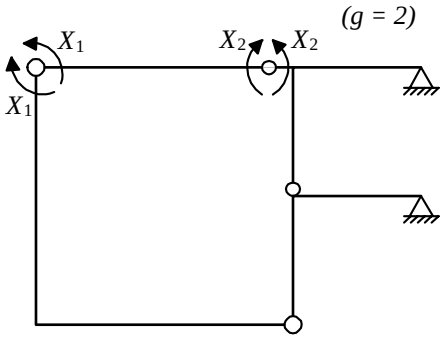
Exemplo 05

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão *EI* = 1,0 x 10^5 kNm^2.

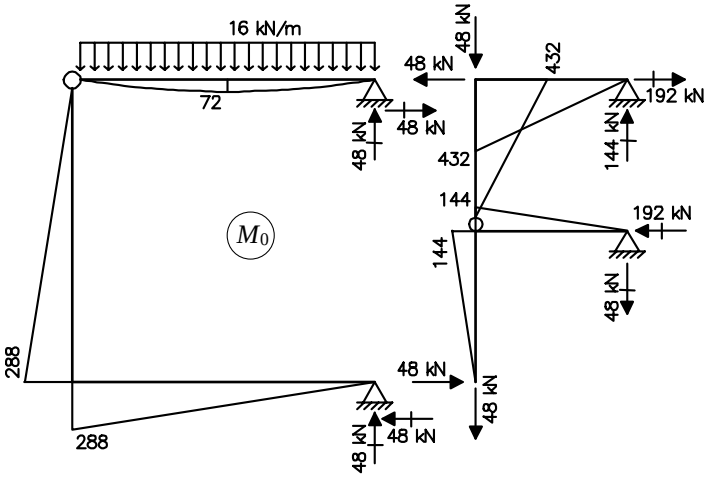


<u>*Sistema Principal e Hiperestáticos*</u>

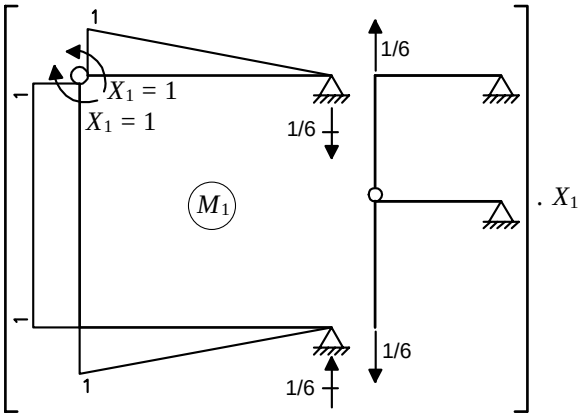
(g = 2)



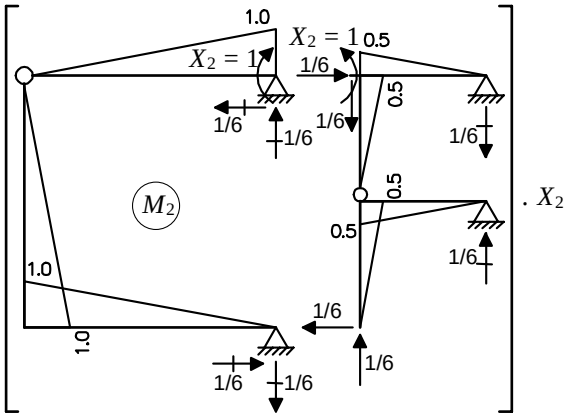
<u>*Caso (0)*</u> *– Solicitação externa isolada no SP*



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}X_1=-61.3kNm\\ X_2=+170.7kNm\end{Bmatrix}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 288\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 288\cdot 6\right]=+\frac{1296}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 288\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 288\cdot 6\\ -\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 432\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 432\cdot 3\\ -\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 144\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 144\cdot 3\end{bmatrix}=-\frac{1440}{EI}$$

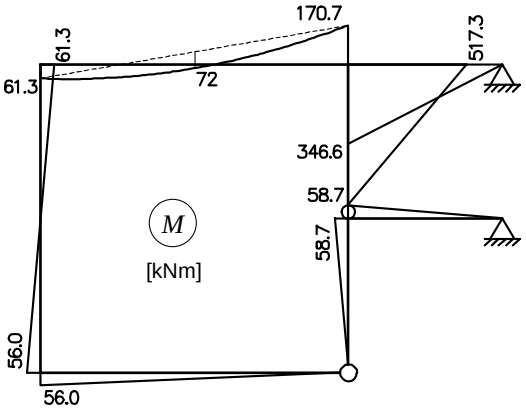
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6+1\cdot 1\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right]=+\frac{10}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right]=-\frac{4}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[3\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6+4\cdot\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 3\right]=+\frac{7}{EI}$$

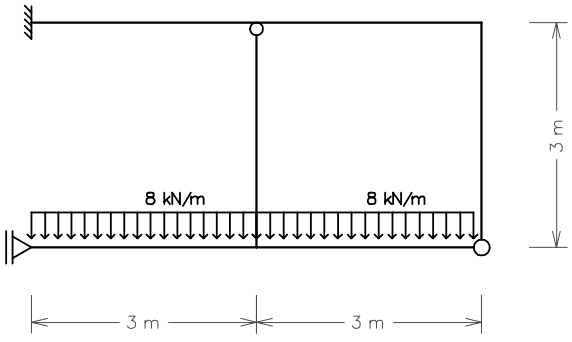
Momentos Fletores Finais

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$



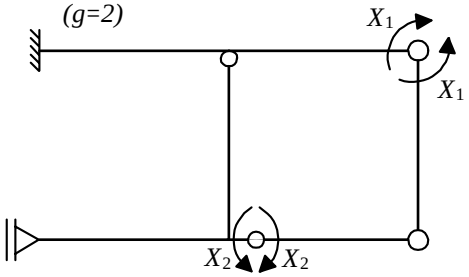
Exemplo 06

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão EI = 4,0 x 10^4 kNm².



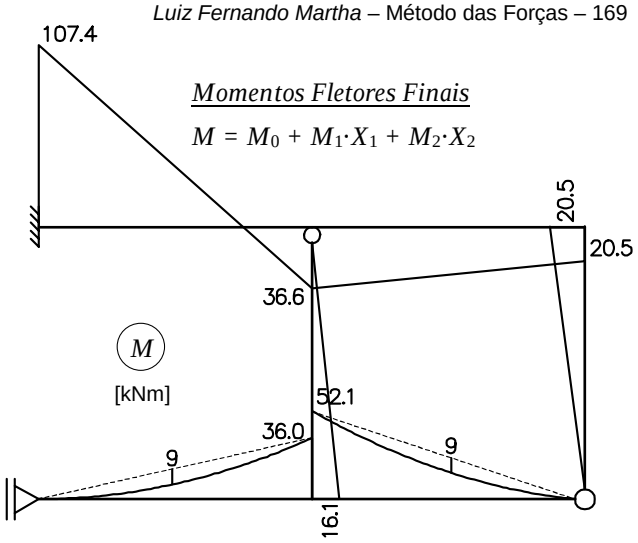
Sistema Principal e Hiperestáticos

(g=2)

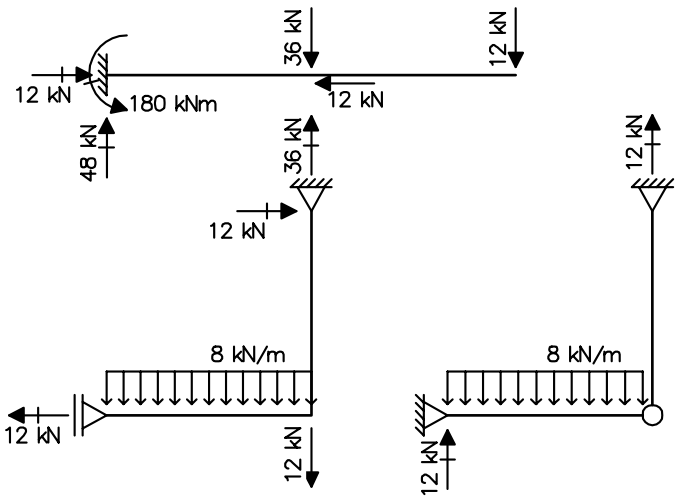


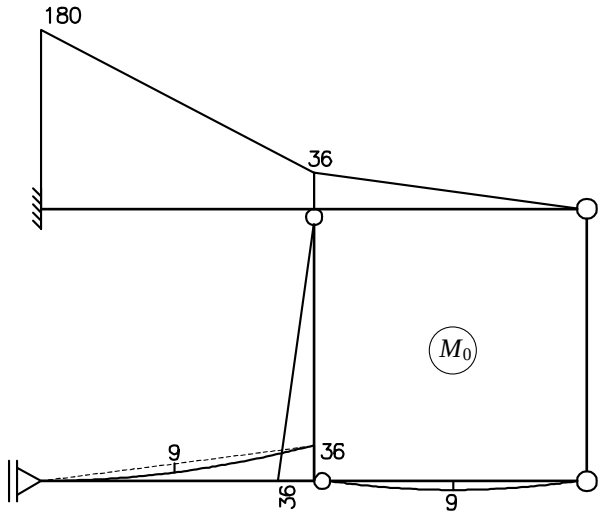
Momentos Fletores Finais

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

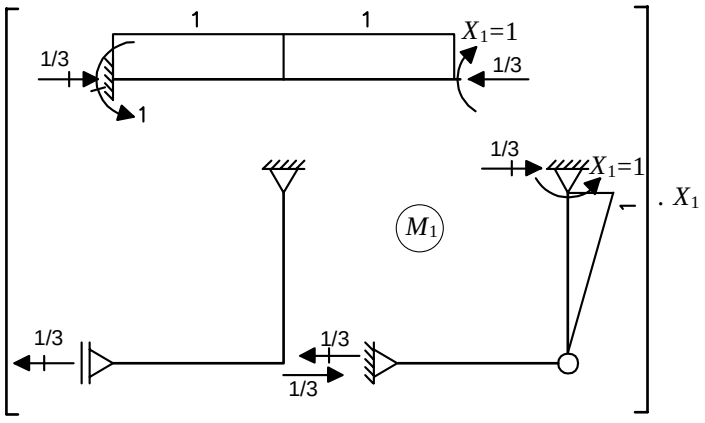


Caso (0) – *Solicitação externa isolada no SP*

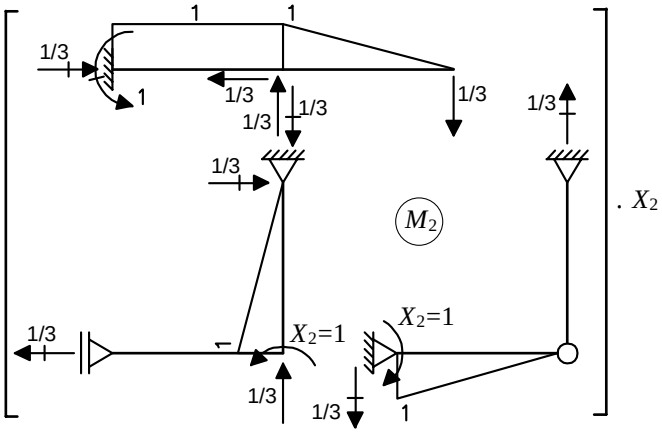




Caso (1) – X_1 *isolado no SP*



Caso (2) – X_2 *isolado no SP*



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}X_1=-20.5kNm\\ X_2=-52.1kNm\end{Bmatrix}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 180\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 36\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 36\cdot 3\right]=+\frac{378}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 180\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 36\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 3\\ +\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3\end{array}\right]=+\frac{405}{EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot 1\cdot 3+1\cdot 1\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right]=+\frac{7}{EI}$$

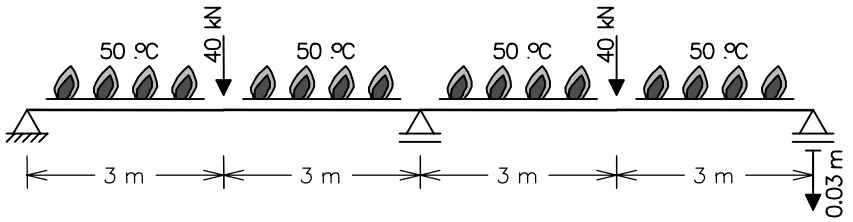
$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot 1\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right]=+\frac{9}{2EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot 1\cdot 3+3\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right]=+\frac{6}{EI}$$

Exemplo 07

Para a viga contínua com dois vãos mostrada abaixo pede-se o diagrama de momentos fletores utilizando o Método das Forças. As seguintes solicitações atuam na estrutura concomitantemente:

- Uma carga concentrada de 40 kN no centro de cada vão.
- Aquecimento das fibras superiores da viga de ΔT_s = 50 °C ao longo de toda a sua extensão (as fibras inferiores não sofrem variação de temperatura, isto é, ΔT_i = 0 °C).
- Recalque vertical (para baixo) de 3 cm do apoio direito.



Sabe-se:

(a) A viga tem um material com módulo de elasticidade $E = 10^8$ kN / m² e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ / °C.

(b) A viga tem seção transversal com área A = 1,0 x 10^{-2} m² e momento de inércia I = 1,0 x 10^{-3} m⁴. A altura da seção transversal é h = 0,60 m e o seu centro de gravidade fica posicionado na metade da altura.

(c) O deslocamento axial relativo interno provocado pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

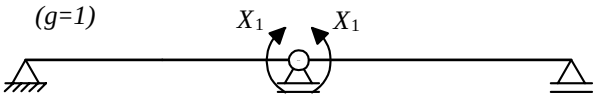
$du^T = \alpha \Delta T_{CG}\, dx$,

sendo ΔT_{CG} a variação de temperatura na fibra do centro de gravidade da seção transversal.

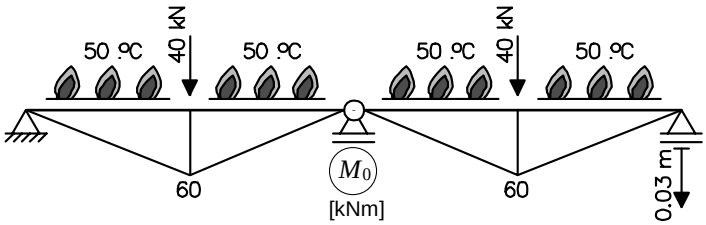
(d) O rotação relativa interna provocada pela variação de temperatura em um elemento infinitesimal de barra é

$$d\theta^T = \frac{\alpha(\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx\,.$$

Sistema Principal e Hiperestático

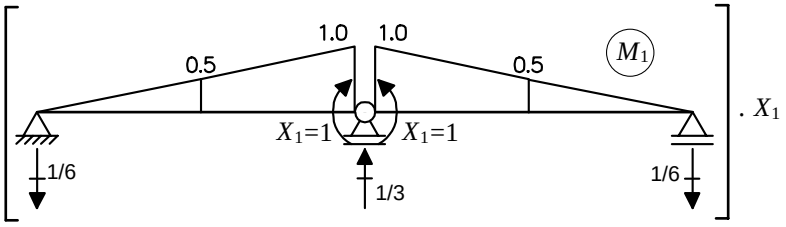


Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Como o Sistema Principal é isostático, a variação de temperatura e o recalque de apoio só provocam deslocamentos (não provocam esforços internos). Portanto, os momentos fletores só são devidos às cargas de *40 kN* aplicadas.

Caso (1) – X_1 isolado no SP



Equação de compatibilidade

$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$

δ_{10} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida na criação do Sistema Principal no *caso (0)*.

δ_{11} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula introduzida na criação do Sistema Principal devido a $X_1 = 1$ no *caso (1)*.

Cálculo de δ_{10} *pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)*

Sistema Real

(Estrutura da qual se quer calcular a rotação relativa.)
É o *caso (0)*.

Sistema Virtual

(Estrutura com momentos unitários virtuais na direção da rotação relativa que se quer calcular.)
É o *caso (1)* com $X_1 = 1$.

PFV: $\overline{W_E} = \overline{U}$

$\overline{W_E} \rightarrow$ Trabalho das forças externas do sistema virtual com os correspondentes deslocamentos externos do sistema real.

Neste caso, o trabalho externo virtual é igual ao produto de $X_1 = 1$ por δ_{10} mais o produto da reação vertical no apoio direito do *caso (1)* – força de 1/6 para baixo – pelo recalque de apoio:

$\overline{W_E} = 1 \cdot \delta_{10} + (-1/6) \cdot (-0.03)$.

$\overline{U} \rightarrow$ Energia de deformação interna virtual.

(Despreza-se a energia de deformação por cisalhamento e, como o esforço normal no *caso (1)* é nulo, a energia de deformação axial é nula.)

Portanto, a energia de deformação é somente devida à flexão, isto é, é a energia (virtual) provocada pelos momentos fletores do sistema virtual $\overline{M} = M_1$ com as correspondentes rotações relativas internas do sistema real $d\theta$.

A rotação relativa interna real no *caso (0)* é devida às cargas de *40 kN* aplicadas e devida à variação de temperatura:

$d\theta = d\theta^P + d\theta^T$

Sendo,

$d\theta^P = (M_0 / EI)dx$ e

$d\theta^T = [\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s) / h]dx$

Deve ser observado que o recalque de apoio não provoca rotação relativa interna (só provoca movimento de corpo rígido).

Assim:

$$\overline{U} = \int_{estrutura} \overline{M} d\theta = \int_{estrutura} M_1 d\theta = \int_{estrutura} M_1 d\theta^P + \int_{estrutura} M_1 d\theta^T$$

$$\overline{U} = \int \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dx + \int \frac{M_1 \cdot \alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx$$

$\overline{W_E} = \overline{U} \Rightarrow$

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} \int M_1 dx - \frac{1}{6} \cdot 0.03$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 60 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 60 \cdot 3 - \frac{1}{6} \cdot 1.0 \cdot 60 \cdot 3 \right) \right]$$

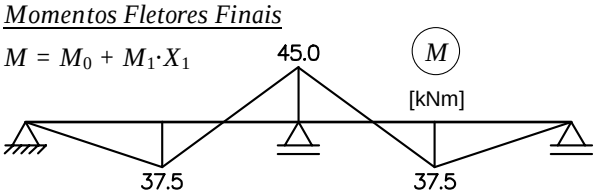
$$+ \frac{\alpha \cdot (-50)}{0.60} \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1.0 \right) \right] - \frac{1}{6} \cdot 0.03 = -\frac{180}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 6 \right) \right] = +\frac{4}{EI}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 45 kNm$$

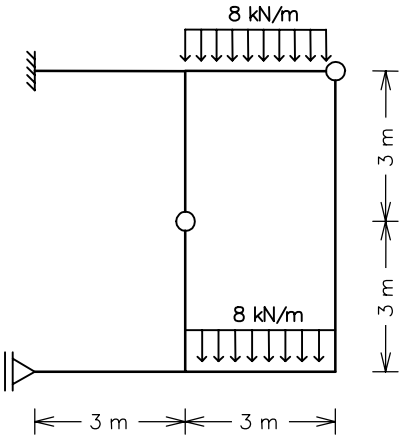
Momentos Fletores Finais

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$

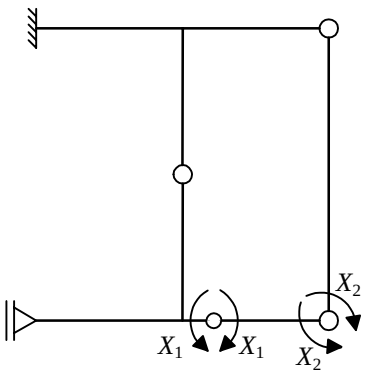


Exemplo 08

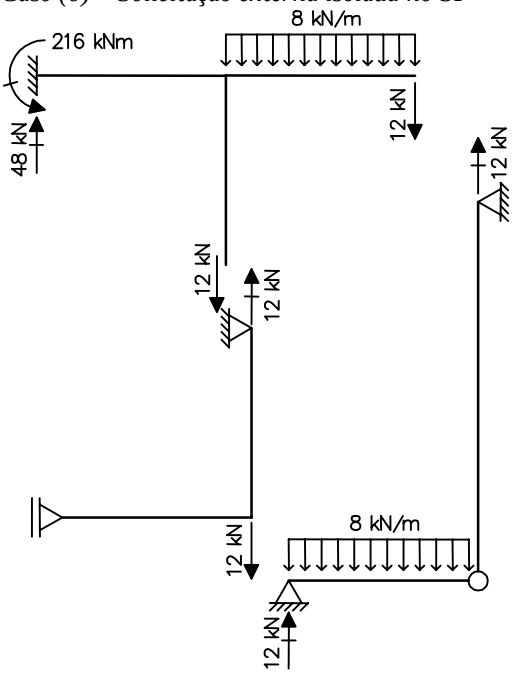
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão *EI* = 4.0x10⁴ kNm². Somente considere deformações por flexão.

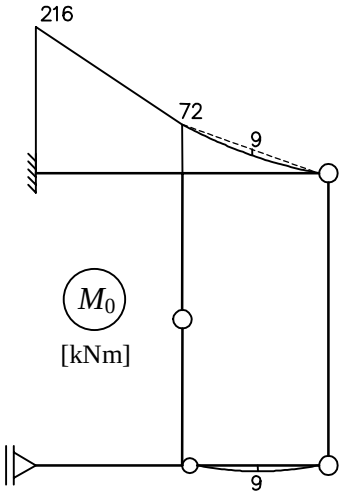


Sistema Principal e Hiperestáticos

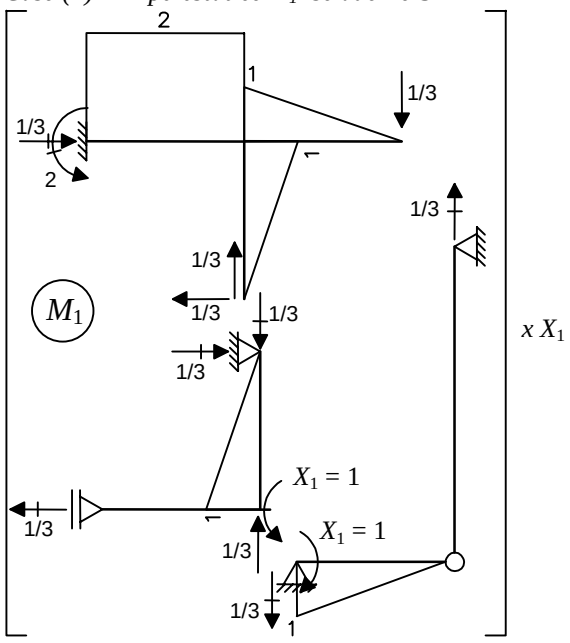


Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP

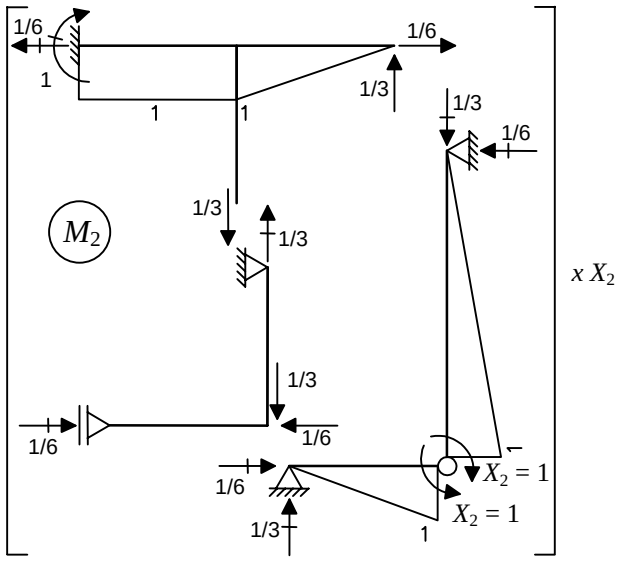




Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Sistema de Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}X_1=-48.6kNm\\ X_2=+24.3kNm\end{Bmatrix}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 216\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 72\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3\right]=+\frac{936}{EI}$$

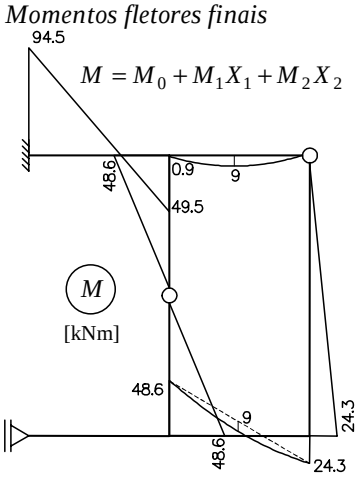
$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 216\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 72\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 9\cdot 3\right]=-\frac{486}{EI}$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot 2\cdot 3+4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right]=+\frac{16}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-2\cdot 1\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right]=-\frac{13}{2EI}$$

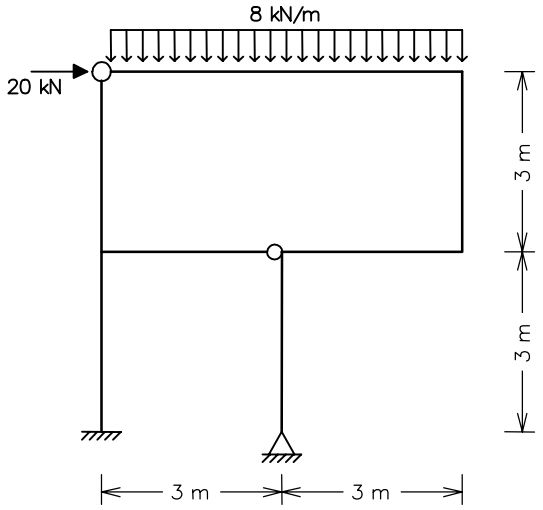
$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot 1\cdot 3+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right]=+\frac{7}{EI}$$

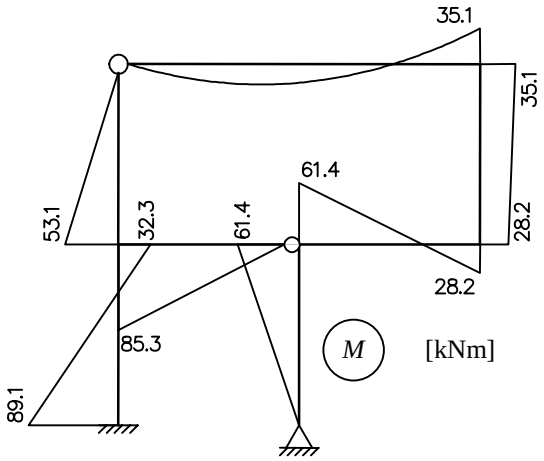
Momentos fletores finais



Exemplo 09

Considere a estrutura hiperestática abaixo, onde também está indicado o seu diagrama de momentos fletores. Todas as barras têm a mesma inércia a flexão *EI* e pode-se considerar que não existem deformações axiais e de cisalhamento nas barras.





Pede-se:

Item (a)

Determine um possível sistema principal (Método das Forças) para o quadro acima. As incógnitas (hiperestáticos) também devem ser indicadas. Mostre a decomposição do sistema principal em quadros isostáticos simples (tri-articulados, bi-apoiados ou engastados e em balanço).

Item (b)

Considerando o sistema principal encontrado no item anterior, indique os casos básicos – caso (0), caso (1), caso (2), etc. – utilizados para análise da estrutura pelo Método das Forças. Determine os diagramas de momentos fletores para todos os casos básicos.

Item (c)

Escreva literalmente (somente símbolos, sem números) o sistema de equações finais da solução desta estrutura pelo Método das Forças. Escolha uma destas equações e indique as expressões numéricas envolvidas nos cálculos de cada um dos coeficientes da equação escolhida. Não é preciso completar as contas para calcular os coeficientes. Indique que tipo de condição que esta equação está impondo. Indique as interpretações físicas e unidades de todos os coeficientes que aparecem na equação escolhida.

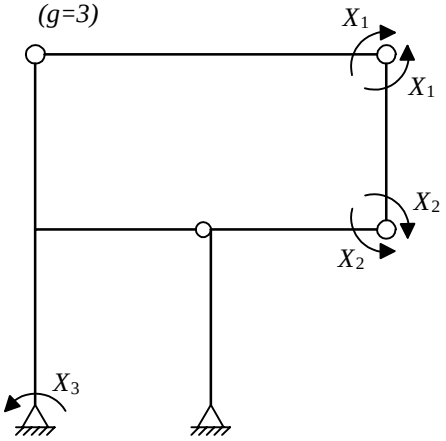
Item (d)

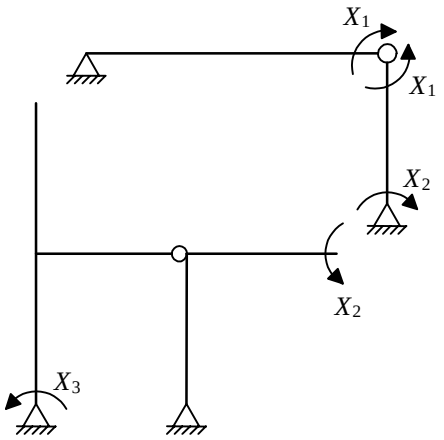
Com base no diagrama de momentos fletores fornecido para a estrutura hiperestática e no sistema principal escolhido, determine os valores das incógnitas (hiperestáticos) que resultariam da solução da estrutura pelo Método das Forças. Demonstre que a superposição dos casos básicos, considerando os valores dos hiperestáticos encontrados, resulta no diagrama de momentos fletores fornecido.

Item (a)

Sistema Principal e Hiperestáticos

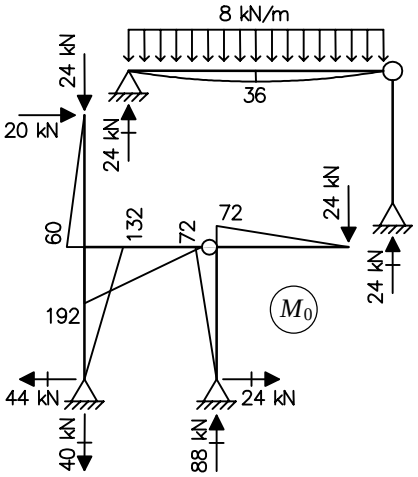
(g=3)



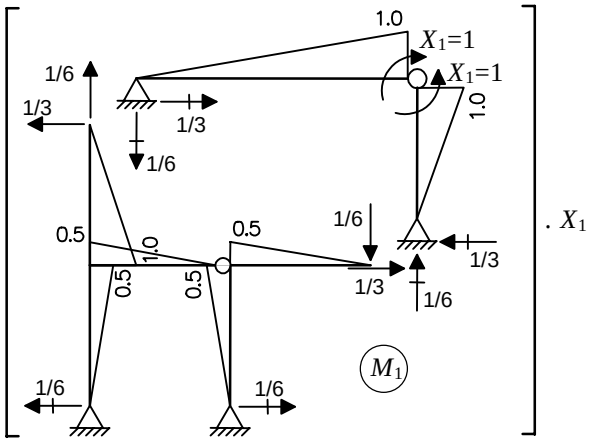


Item (b)

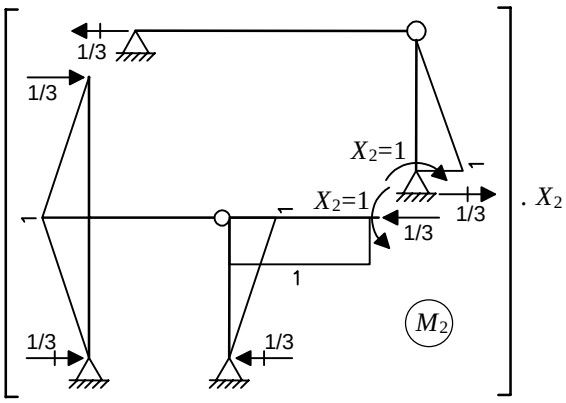
Caso (0) – *Solicitação externa isolada no SP*



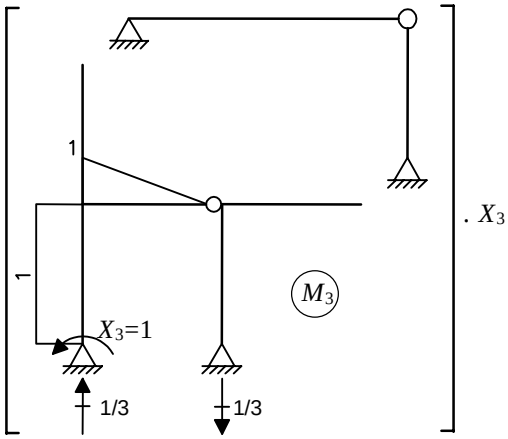
Caso (1) – X_1 *isolado no SP*



Caso (2) – X_2 *isolado no SP*



Caso (3) – X_3 *isolado no SP*



Item (c)

Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\\ \delta_{30}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Considere a primeira equação deste sistema:

Esta equação impõe uma condição de compatibilidade interna: a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1 é nula, isto é, no ponto onde foi introduzida a rótula a rotação da elástica é contínua.

Termo de carga δ_{10} [rad] → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1 devida à solicitação externa no caso (0):

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 36\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 192\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 72\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 132\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 72\cdot 3\right]$$

Coeficiente de flexibilidade δ_{11} [rad/kNm] → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1 devida a $X_1 = 1$:

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)+4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 3\right)\right]$$

Coeficiente de flexibilidade δ_{12} [rad/kNm] → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1 devida a $X_2 = 1$:

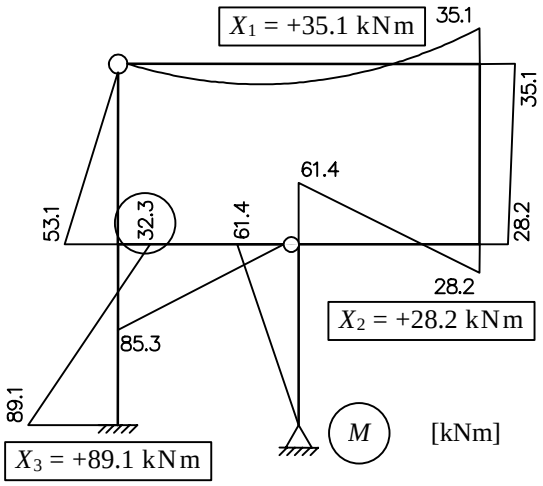
$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 3 \right]$$

Coeficiente de flexibilidade δ_{13} [rad / kNm] → rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula associada a X_1 devida a $X_3 = 1$:

$$\delta_{13} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 1 \cdot 3 \right]$$

Item (d)

Os valores dos hiperestáticos podem ser obtidos do diagrama de momentos fletores finais da estrutura que foi fornecido:



Demonstração de que a superposição dos casos básicos resulta nos momentos finais:

$M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_3 \cdot X_3 = M$

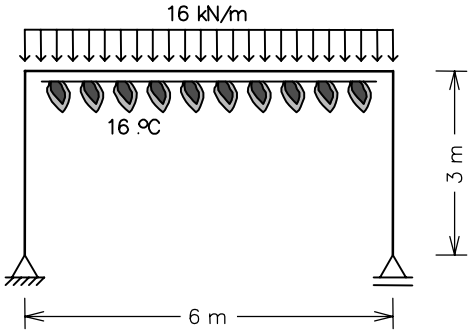
Considere o momento fletor assinalado no diagrama. Observa-se que este valor pode ser obtido pela superposição dos momentos fletores dos casos básicos nesta seção:

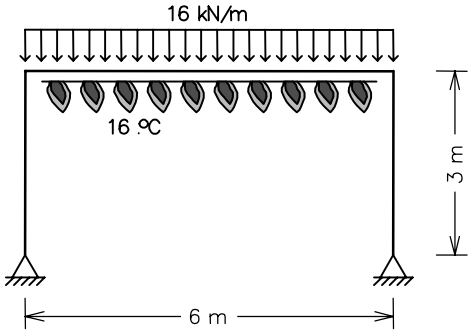
$+132 + 0.5 \cdot 35.1 + (-1.0) \cdot 28.2 + (-1.0) \cdot 89.1 = +32.3$

O mesmo pode ser verificado para outras seções.

Exemplo 10

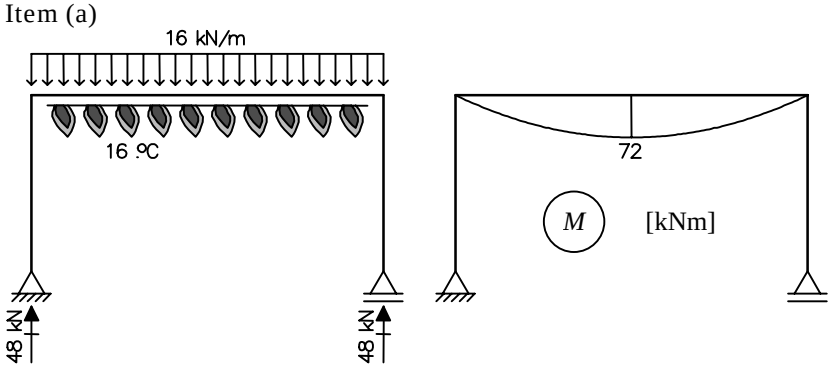
Considere os dois pórticos mostrados abaixo. As duas estruturas têm como solicitação o carregamento uniformemente distribuído indicado e um aumento de temperatura $\Delta T_i = 16$ °C nas fibras inferiores da viga. As fibras superiores da viga não sofrem variação de temperatura ($\Delta T_s = 0$ °C). Todas as barras têm um material com módulo de elasticidade $E = 1{,}0 \times 10^8$ kN / m^2 e coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 10^{-5}$ / °C. Todas a barras têm seções transversais com momento de inércia $I = 1{,}0 \times 10^{-3}$ m^4, altura $h = 0.60$ m e centro de gravidade no meio de altura. Somente considere os efeitos axiais para a variação de temperatura.





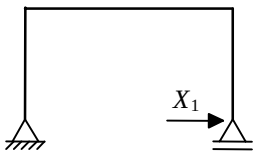
Pede-se:
Item (a): Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura isostática.
Item (b): Determine o diagrama de momentos fletores da estrutura hiperestática.
Item (c): Considere que as colunas dos quadros acima tiveram a seção transversal modificada para uma com momento de inércia I = 2,0 x 10^{-3} m^4 (a viga não se altera). Responda:
(c.1) Os diagramas de momentos fletores das estruturas isostáticas se alteram? Por que?
(c.2) Os diagramas de momentos fletores das estruturas hiperestáticas se alteram? Por que?

Item (a)

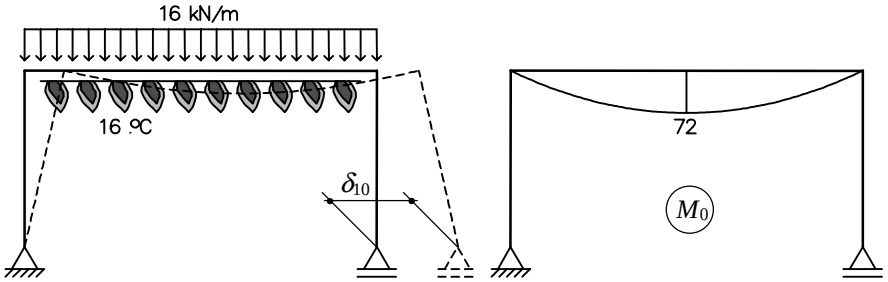


Item (b)

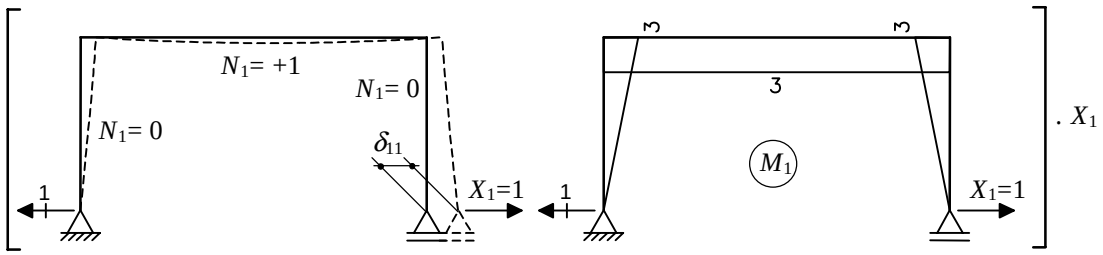
Sistema Principal e Hiperestático (g=1)



Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – X_1 isolado no SP



Equação de compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$$

Sendo $\delta_{10} = \delta_{10}^q + \delta_{10}^T$:

$\delta_{10}^q \rightarrow$ deslocamento horizontal da seção do apoio da direita devido à carga distribuída no caso (0).

$\delta_{10}^T \rightarrow$ deslocamento horizontal da seção do apoio da direita devido à variação de temperatura no caso (0).

$$\delta_{10}^q = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 72 \cdot 6\right] = +864 \cdot 10^{-5} m$$

$$\delta_{10}^T = \int_{viga} M_1 d\theta^T + \int_{viga} N_1 du^T$$

$$d\theta^T = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_s)}{h} dx = \frac{\alpha \cdot 80}{3} dx$$

$$du^T = \alpha \cdot \Delta T_{GC} \cdot dx = \alpha \cdot 8 \cdot dx$$

$$\delta_{10}^T = \frac{\alpha \cdot 80}{3} \int_{viga} M_1 dx + \alpha \cdot 8 \int_{viga} N_1 dx$$

$$\delta_{10}^T = \frac{\alpha \cdot 80}{3} \cdot 6 \cdot 3 + \alpha \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 = +528 \cdot 10^{-5} m$$

$$\delta_{11} = \int \frac{(M_1)^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 6 \right]$$

$$\delta_{11} = +72 \cdot 10^{-5} \, m / kN$$

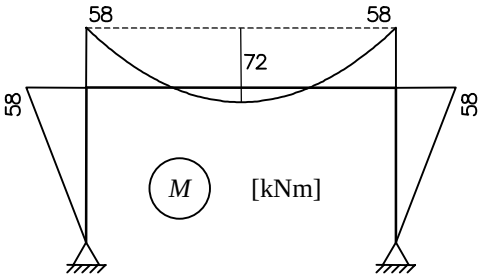
$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \rightarrow$$

$$(864 + 528) \cdot 10^{-5} + 72 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -\frac{58}{3} kN$$

Momentos fletores finais

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



Item (c)

Item (c.1) – Na estrutura isostática, o diagrama de momentos fletores só depende dos valores da carga e reações, e da geometria da estrutura. Com a consideração da hipótese de pequenos deslocamentos, as equações de equilíbrio podem ser escritas para a geometria indeformada (original) da estrutura.

Portanto, o diagrama de momentos fletores não se altera com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.

No caso da carga uniformente distribuída, a estrutura isostática terá sempre o diagrama de momentos fletores indicado no *item (a)* (diagrama parabólico na viga). Momentos fletores devidos à variação de temperatura isolada na estrutura isostática são sempre nulos.

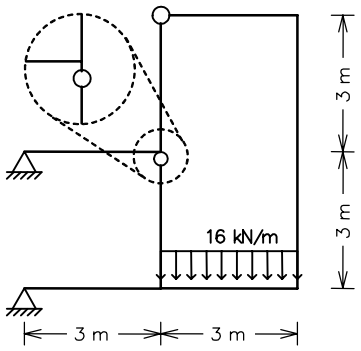
Item (c.2) – Na estrutura hiperestática, por ter vínculos excedentes, os esforços internos dependem da rigidez relativa entre as barras. Com as colunas mais rígidas do que a viga, as rotações das extremidades da viga são menores do que no caso com todas as barras com mesma rigidez à flexão *EI*, se aproximando do caso de uma viga com extremidades engastadas.

Portanto, o diagrama de momentos fletores fica alterado com a modificação do momento de inércia da seção transversal das colunas.

A solução da estrutura hiperestática pelo Método das Forças mostrada no item (b) demonstra que os valores dos momentos fletores finais dependem dos valores relativos entre momentos de inércia das seções transversais das barras.

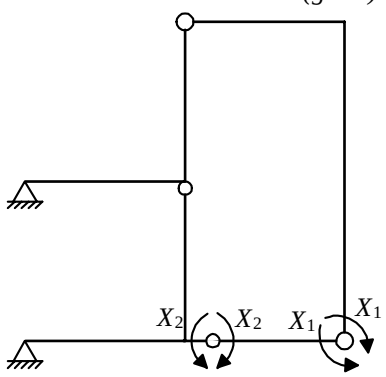
Exemplo 11

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão *EI* = 1,0 x 10^5 kNm^2.

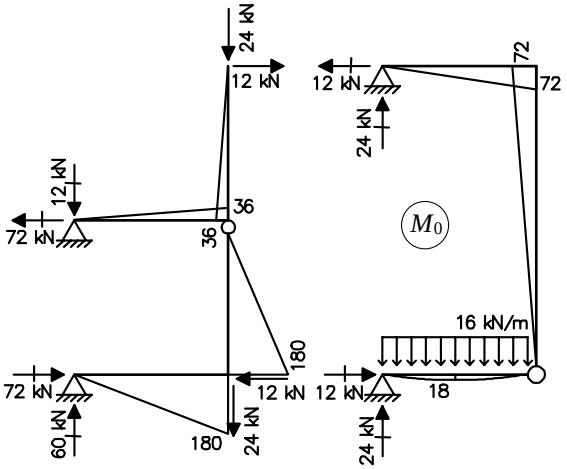


Sistema Principal e Hiperestáticos

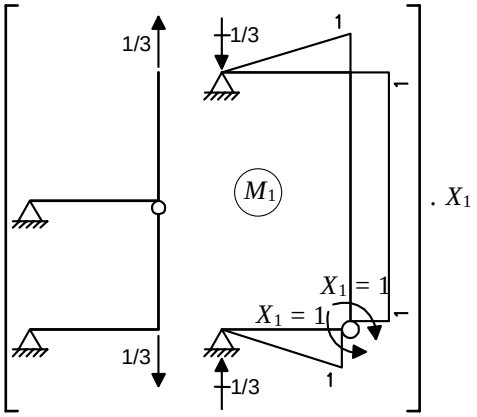
(g = 2)



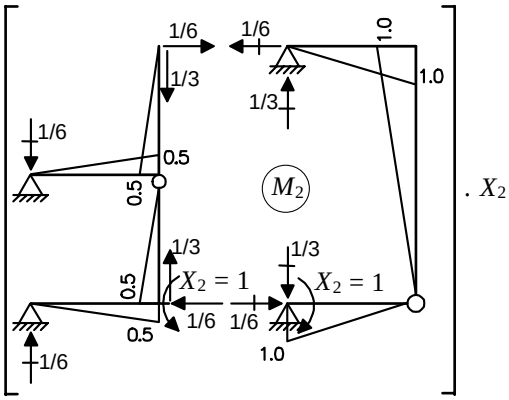
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no SP



Caso (2) – Hiperestático X_2 isolado no SP



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}X_1=+14.6kNm\\ X_2=-43.8kNm\end{Bmatrix}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 72\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3\right]=-\frac{270}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}+\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 36\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 36\cdot 3\\ +\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 180\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 180\cdot 3\\ +\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 72\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3\end{bmatrix}=+\frac{270}{EI}$$

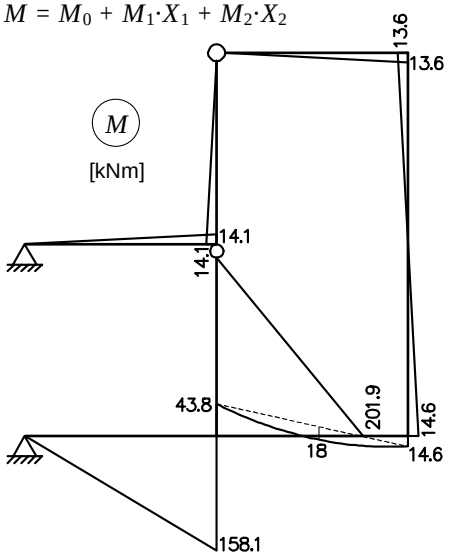
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3+1\cdot 1\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right]=+\frac{8}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 6+\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right]=-\frac{7}{2EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[4\cdot\frac{1}{3}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 3+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right]=+\frac{5}{EI}$$

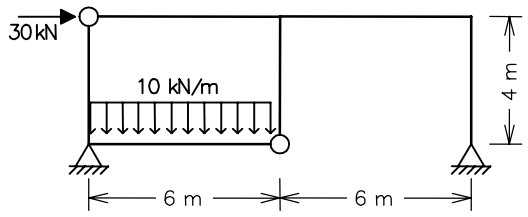
Momentos Fletores Finais

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

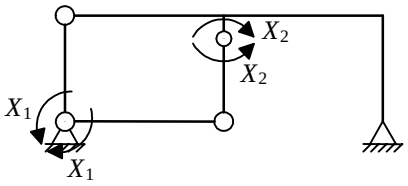


Exemplo 12

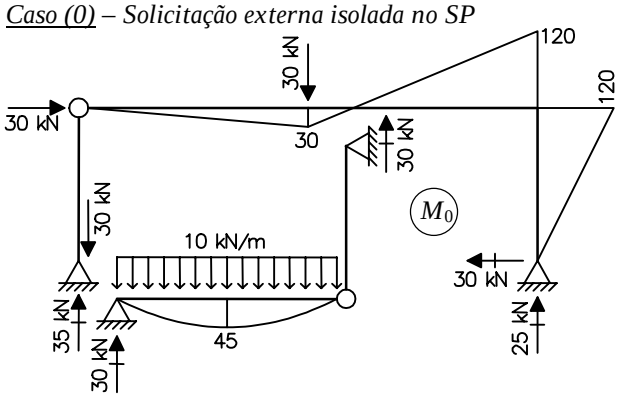
Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 2{,}4 \times 10^4$ kNm².



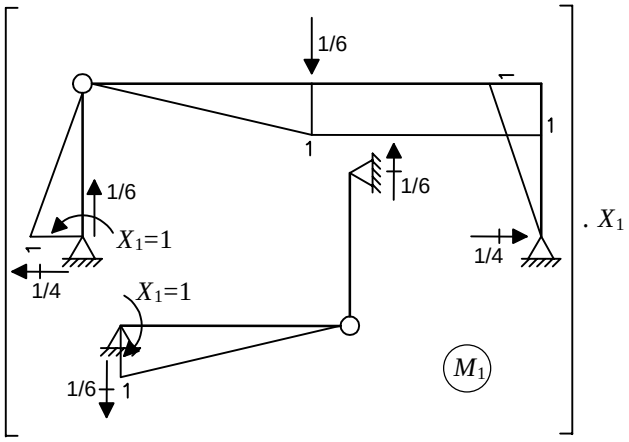
Sistema Principal e Hiperestáticos
(g=2)



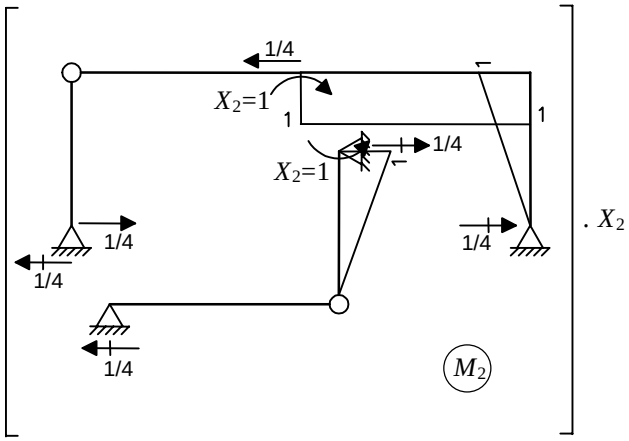
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – X_1 isolado no SP



Caso (2) – X_2 isolado no SP



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}X_1=-13{,}0\,kNm\\ X_2=+60{,}6\,kNm\end{cases}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\cdot1\cdot30\cdot6+\frac{1}{2}\cdot1\cdot30\cdot6-\frac{1}{2}\cdot1\cdot120\cdot6\\ -\frac{1}{3}\cdot1\cdot120\cdot4+\frac{1}{3}\cdot1\cdot45\cdot6\end{bmatrix}=-\frac{280}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot1\cdot30\cdot6-\frac{1}{2}\cdot1\cdot120\cdot6-\frac{1}{3}\cdot1\cdot120\cdot4\right]=-\frac{430}{EI}$$

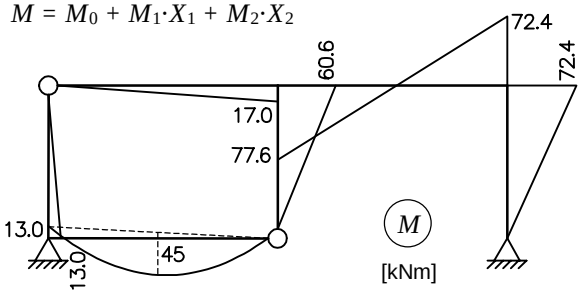
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot6\right)+1\cdot1\cdot6\\ +2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4\right)\end{bmatrix}=+\frac{38}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot1\cdot6+\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4\right]=+\frac{22}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[1\cdot1\cdot6+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot4\right)\right]=+\frac{26}{3EI}$$

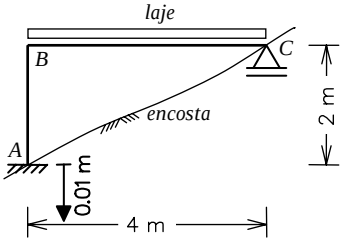
Momentos Fletores Finais

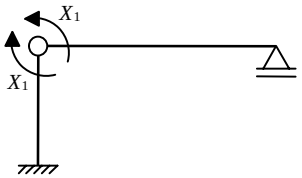
$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

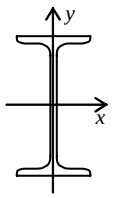


Exemplo 13 – *Provão de Engenharia Civil, 2002*

Em uma construção a meia encosta, a laje de piso foi apoiada em estruturas metálicas compostas de perfis *I*, colocados de modo a oferecer a maior resistência ao momento fletor atuante. Ao inspecionar a obra para recebimento, você verificou a existência de um recalque vertical de 1 cm no engaste *A* de uma das estruturas metálicas, cujo modelo estrutural é apresentado na figura abaixo (na esquerda). A fim de avaliar os esforços adicionais nessa estrutura, ocasionados pelo recalque, você utilizou o Método das Forças e, para tanto, escolheu o Sistema Principal (no qual foi colocada uma rótula no nó *B*) e o hiperestático X_1 (carga momento em ambos os lados da rótula inserida em *B*), mostrados na figura (no centro). A seção transversal do perfil e a orientação dos eixos *x* e *y* estão representadas na figura (na direita).





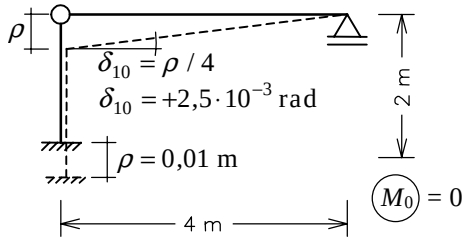


Módulo de elasticidade do material:
$E = 2{,}0 \times 10^8$ kN / m²

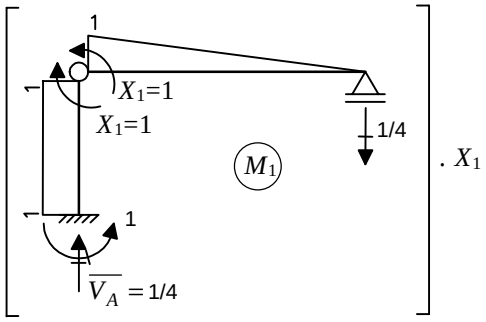
Momentos de inércia da seção transversal:
$J_x = 5{,}1 \times 10^{-5}$ m⁴
$J_y = 8{,}4 \times 10^{-6}$ m⁴

Com base no exposto, pede-se o diagrama de momentos fletores, causado apenas pelo recalque em *A*. Despreze deformações axiais das barras.

Caso (0) – *Solicitação externa isolada no SP*



Caso (1) – X_1 *isolado no SP*



Equação de compatibilidade

$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0$

δ_{10} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula do Sistema Principal provocada pelo recalque de apoio no *caso (0)*.

δ_{11} é a rotação relativa entre as seções adjacentes à rótula do Sistema Principal provocada por $X_1 = 1$ no *caso (1)*.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[1 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \right] = + \frac{10}{3EI}$$

O enunciado diz que os perfis metálicos foram colocados de modo a oferecer a maior resistência ao momento fletor atuante. Portanto, o momento de inércia da seção transversal a ser adotado é o maior momento de inércia da barra: $I = J_x = 5{,}1 \times 10^{-5}$ m⁴.

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \rightarrow 2{,}5 \cdot 10^{-3} + \frac{10}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-5}} X_1 \Rightarrow X_1 = -7{,}65 \text{ kNm}.$$

Cálculo de δ_{10} *pelo Princípio das Forças Virtuais (PFV)*

Sistema Real	Sistema Virtual
(Estrutura da qual se quer calcular a rotação relativa.)	(Estrutura com momentos unitários virtuais na direção da rotação relativa que se quer calcular.)
É o *caso (0)*.	É o *caso (1)* com $X_1 = 1$.

PFV: $\overline{W_E} = \overline{U}$

$\overline{W_E} \rightarrow$ Trabalho das forças externas do sistema virtual com os correspondentes deslocamentos externos do sistema real.

Neste caso, o trabalho externo virtual é igual ao produto de $X_1 = 1$ por δ_{10} mais o produto da reação vertical no apoio esquerdo do *caso (1)* – força de 1/4 para cima – pelo recalque de apoio:

$\overline{W_E} = 1 \cdot \delta_{10} + \overline{V_A} \cdot \rho$

$\overline{W_E} = 1 \cdot \delta_{10} + (+1/4) \cdot (-0{,}01)$

$\overline{U} \rightarrow$ Energia de deformação interna virtual.

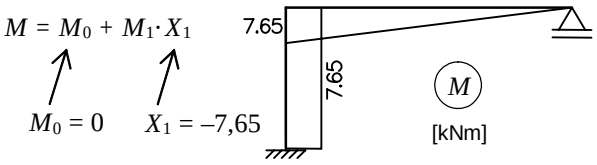
O recalque de apoio não provoca deformações internas (só provoca movimentos de corpo rígido das barras). Portanto:

$\overline{U} = 0$

$\overline{W_E} = \overline{U} \Rightarrow \delta_{10} + (+1/4) \cdot (-0{,}01) = 0$

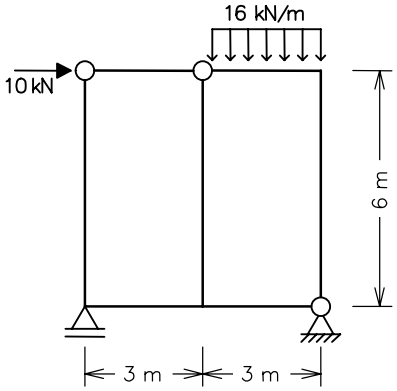
$\therefore \delta_{10} = 0{,}01/4 = +2{,}5 \cdot 10^{-3}$ rad

Momentos Fletores Finais



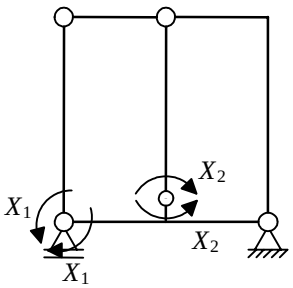
Exemplo 14

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão $EI = 1{,}0 \times 10^4$ kNm².

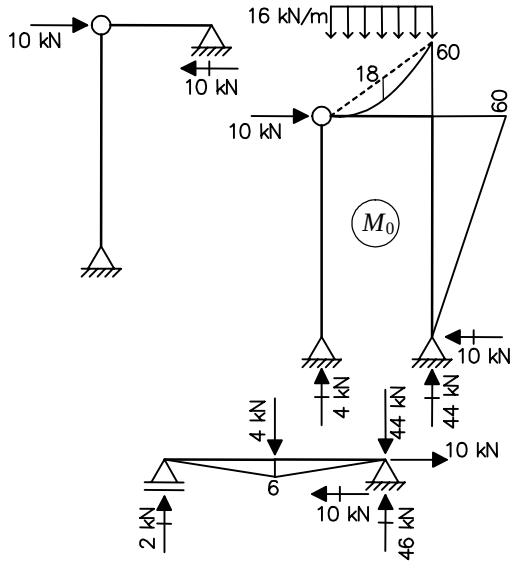


Sistema Principal e Hiperestáticos

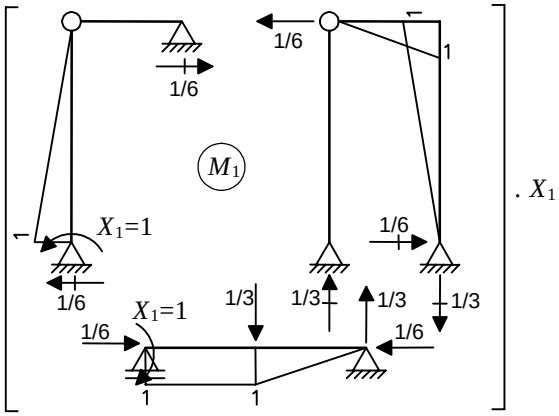
(g=2)



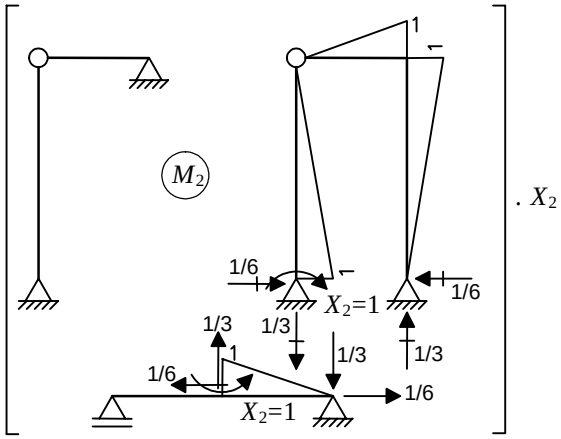
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SP



Caso (1) – X_1 *isolado no SP*



Caso (2) – X_2 *isolado no SP*



Equações de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}X_1=+6{,}8\ \text{kNm}\\ X_2=-21{,}5\ \text{kNm}\end{Bmatrix}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 6\\ +\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 6\cdot 3\end{array}\right]=-\frac{147}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 18\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 6\cdot 3\right]=+\frac{156}{EI}$$

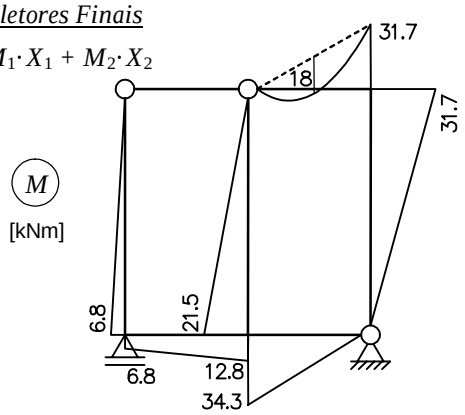
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\begin{array}{l}2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right)+\\ 2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)+1\cdot 1\cdot 3\end{array}\right]=+\frac{9}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right]=-\frac{4}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6\right)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\right)\right]=+\frac{6}{EI}$$

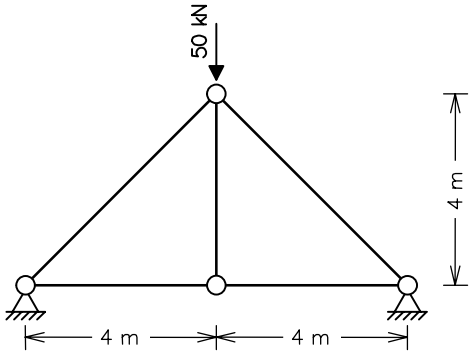
Momentos Fletores Finais

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

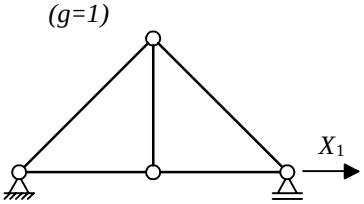


Exemplo 15

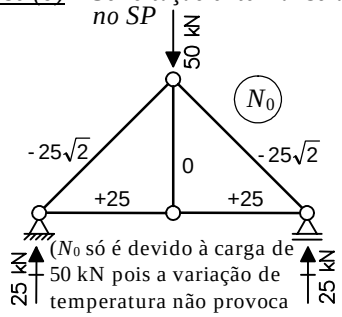
Utilizando o Método das Forças, determine o diagrama de esforços normais para a treliça hiperestática ao lado submetida ao carregamento indicado e a um aumento uniforme de temperatura de 50 °C em todas as barras. Todas as barras têm o mesmo valor para a inércia axial $EA = 1{,}0 \times 10^5$ kN e para o coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 1{,}0 \times 10^{-5}$ /°C. Sabe-se que o deslocamento axial relativo interno para uma variação uniforme de temperatura T é igual a: $du^T = \alpha T dx$.



Sistema Principal e Hiperestáticos (g=1)

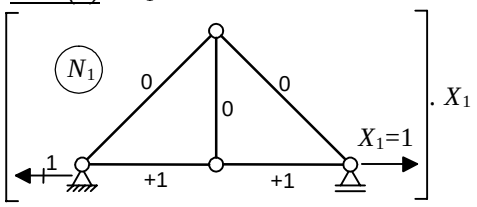


Caso (0) – *Solicitação externa isolada no SP*



(N_0 só é devido à carga de 50 kN pois a variação de temperatura não provoca esforços no SP isostático)

Caso (1) – X_1 *isolado no SP*



Equação de Compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

Termo de carga: $\delta_{10} = \delta_{10}^P + \delta_{10}^T$

$\delta_{10}^P \rightarrow$ deslocamento horizontal no apoio da direita devido à carga P = 50 kN no caso (0).

$\delta_{10}^P \rightarrow$ deslocamento horizontal no apoio da direita devido à variação uniforme de temperatura T = 50 °C no caso (0).

$$\delta_{10}^P = \int_{estrutura} \frac{N_1 N_0}{EA} dx = \frac{1}{EA} \cdot [2 \cdot (1 \cdot 25 \cdot 4)] = +\frac{200}{EA}$$

$$\delta_{10}^T = \int_{estrutura} N_1 du^T = \int N_1 \alpha T dx = 50\alpha \cdot \int N_1 dx = 50\alpha \cdot [2 \cdot (1 \cdot 4)] = +400\alpha$$

$$\delta_{11} = \int_{estrutura} \frac{N_1^2}{EA} dx = \frac{1}{EA} \cdot [2 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 4)] = +\frac{8}{EA}$$

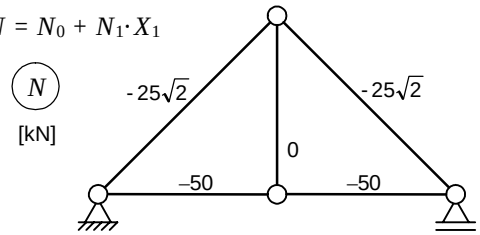
$EA = 1 \cdot 10^5$ kN $\quad \alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ /°C

$\Rightarrow (200 + 400) \cdot 10^{-5} + 8 \cdot 10^{-5} X_1 = 0$

$\therefore X_1 = -75$ kN

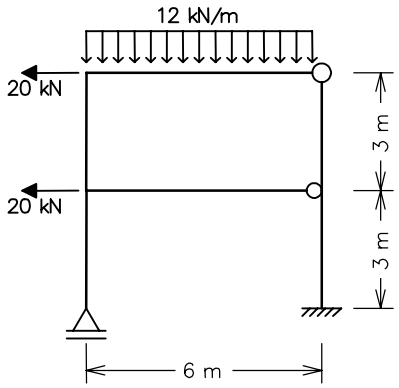
Esforços Normais Finais

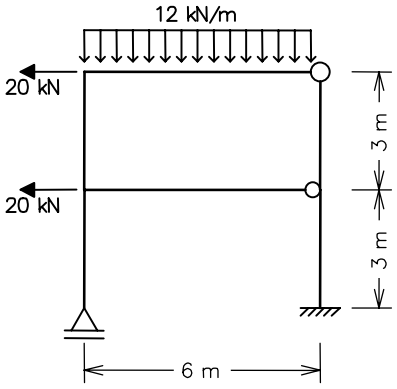
$N = N_0 + N_1 \cdot X_1$



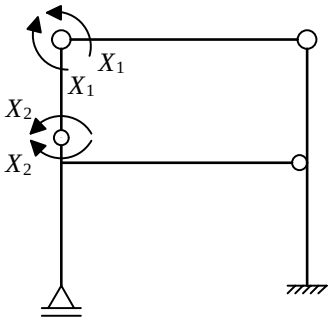
Exemplo 16

Determine pelo Método das Forças o diagrama de momentos fletores do quadro hiperestático ao lado. Somente considere deformações por flexão. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão EI = 9,6 x 10^4 kNm^2.

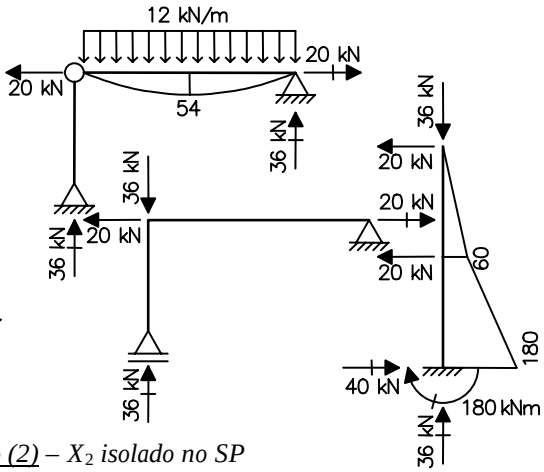




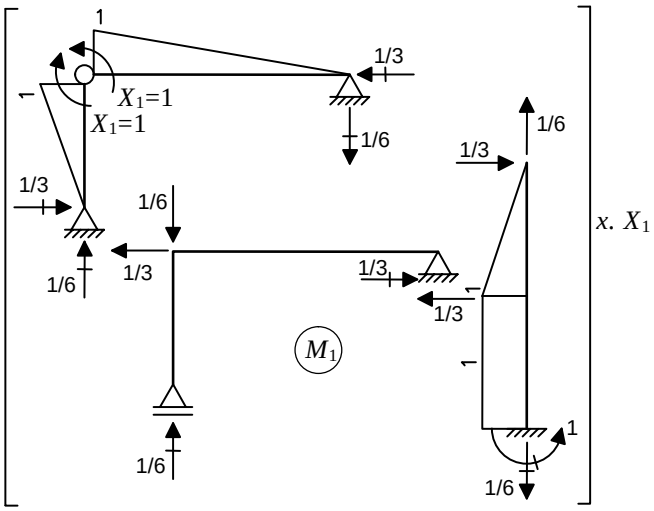
Sistema Principal e Hiperestáticos (g=2)



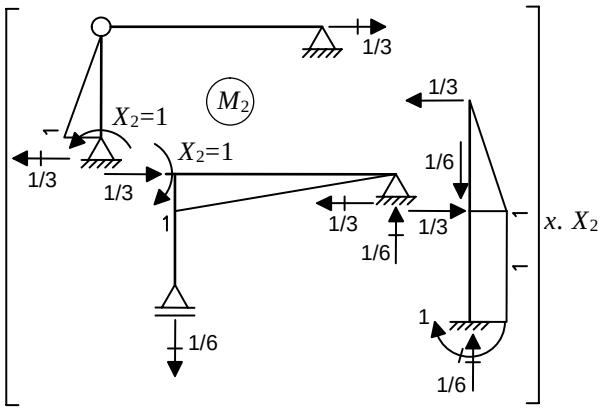
Caso (0) – *Solicitação externa isolada no SP*



Caso (1) – X_1 *isolado no SP*



Caso (2) – X_2 *isolado no SP*



Equações de compatibilidade:

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}X_1=+60{,}6\ \text{kNm}\\ X_2=-29{,}7\ \text{kNm}\end{matrix}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 54\cdot 6-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 3\\ -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 60\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 180\cdot 3\end{bmatrix}=-\frac{528}{EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 60\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 60\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 180\cdot 3\right]=+\frac{420}{EI}$$

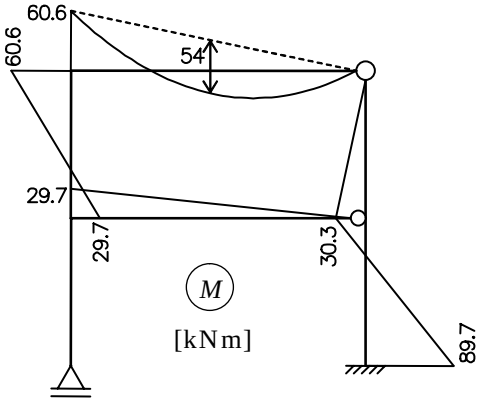
$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3+1\cdot 1\cdot 3\right]=+\frac{7}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3-1\cdot 1\cdot 3\right]=-\frac{7}{2EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 6+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 3+1\cdot 1\cdot 3\right]=+\frac{7}{EI}$$

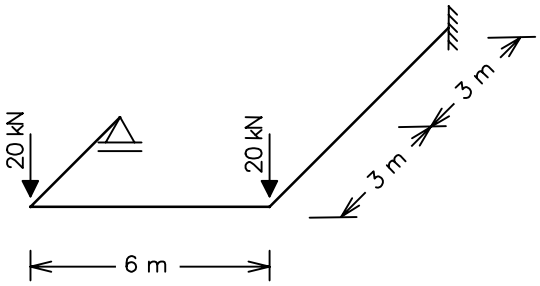
Momentos fletores finais:

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2$

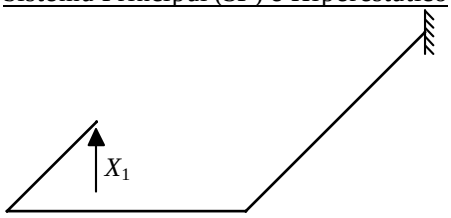


Exemplo 17

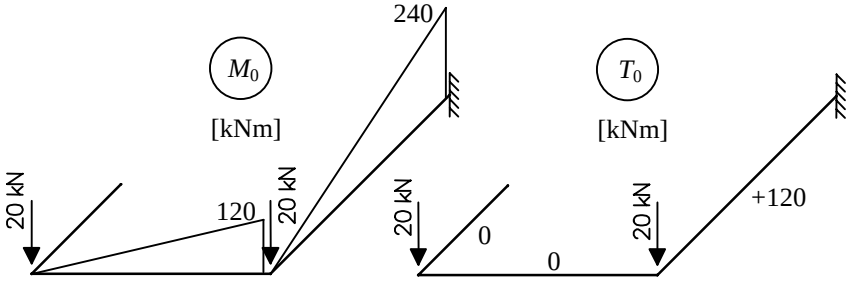
Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e momentos torçores para a grelha ao lado. A relação entre a rigidez à torção e a rigidez à flexão é $GJ_t = 6EI$, para todas as barras.



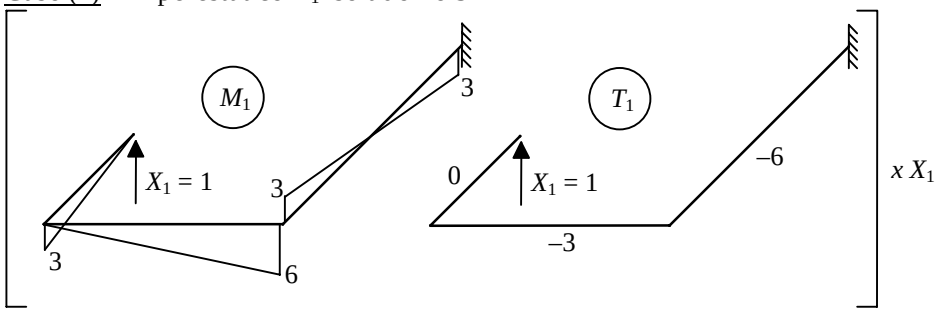
Sistema Principal (*SP*) e Hiperestático



Caso (0) – Solicitação externa isolada no *SP*



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no *SP*



Equação de Compatibilidade

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \left[-\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 120 + \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 240 - \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 240 \right] \cdot \frac{1}{EI} + \left[6 \cdot (-6) \cdot 120 \right] \cdot \frac{1}{GJ_t}$$

$$\delta_{10} = -\frac{2160}{EI} - \frac{4320}{6EI} = -\frac{2880}{EI}$$

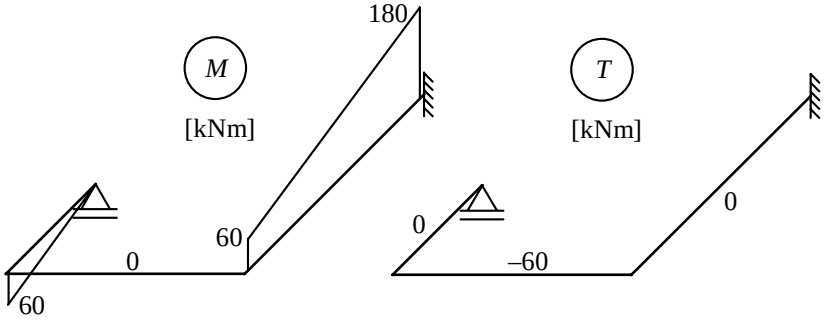
$$\delta_{11} = \left[\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \right] \cdot \frac{1}{EI} + \left[6 \cdot (-3) \cdot (-3) + 6 \cdot (-6) \cdot (-6) \right] \cdot \frac{1}{GJ_t}$$

$$\delta_{11} = \frac{99}{EI} + \frac{270}{6EI} = +\frac{144}{EI}$$

$$\Rightarrow \quad X_1 = 20 \text{ kN}$$

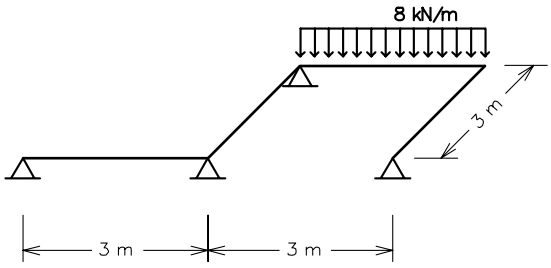
Momentos Fletores e Momentos Torçores finais

$M = M_0 + M_1 X_1$ $\qquad$ $T = T_0 + T_1 X_1$

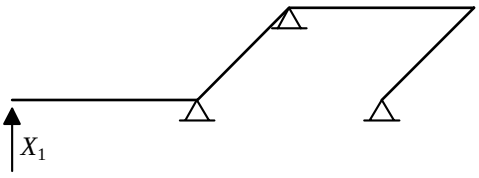


Exemplo 18

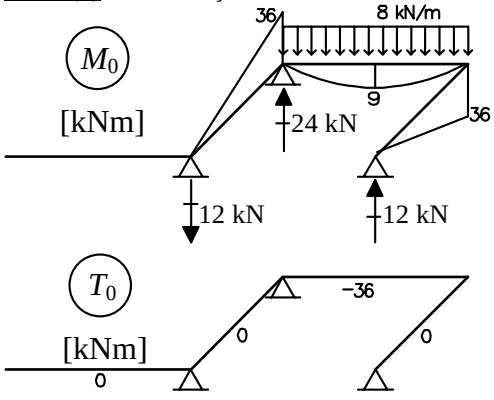
Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e momentos torçores para a grelha ao lado. A relação entre a rigidez à torção e a rigidez à flexão é $GJ_t = 3EI$, para todas as barras.



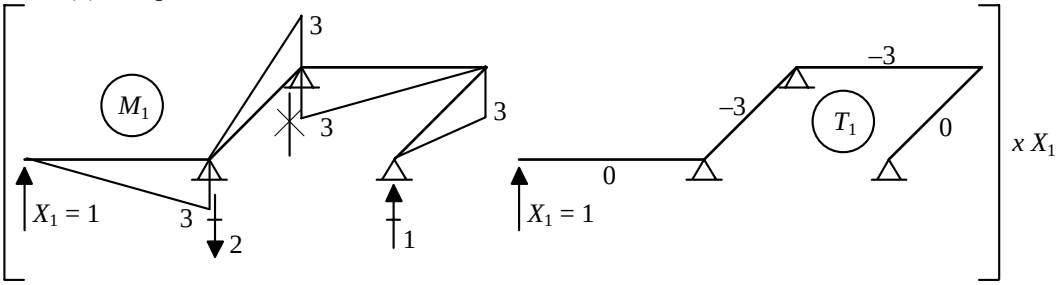
Sistema Principal (*SP*) e Hiperestático



Caso (0) – Solicitação externa isolada no *SP*



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no *SP*



Equação de Compatibilidade

$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$

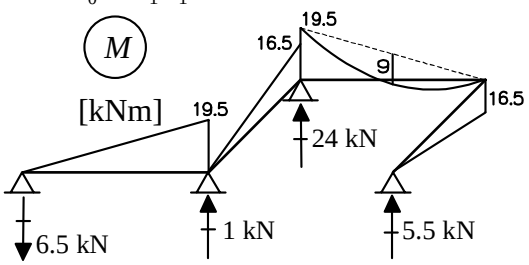
$$\delta_{10} = \left[+\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 36 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 9 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 36 \right]\cdot \frac{1}{EI} + \left[3\cdot(-3)\cdot(-36)\right]\cdot \frac{1}{GJ_t} = \frac{243}{EI} + \frac{324}{3EI} = +\frac{351}{EI}$$

$$\delta_{11} = \left[\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3 \right]\cdot \frac{1}{EI} + \left[3\cdot(-3)\cdot(-3) + 3\cdot(-3)\cdot(-3)\right]\cdot \frac{1}{GJ_t} = \frac{36}{EI} + \frac{54}{3EI} = +\frac{54}{EI}$$

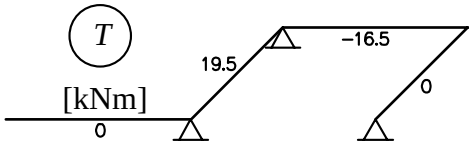
$\Rightarrow \quad X_1 = -6.5$ kN

Momentos Fletores e Momentos Torçores finais

$M = M_0 + M_1 X_1$

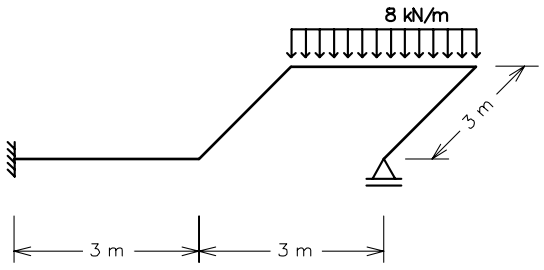


$T = T_0 + T_1 X_1$

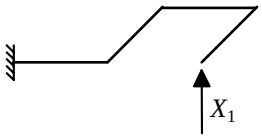


Exemplo 19

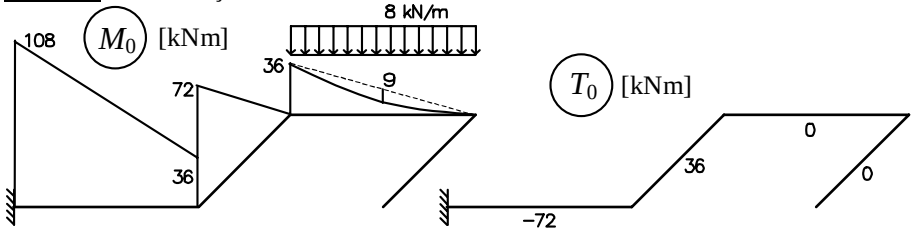
Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e momentos torçores para a grelha ao lado. A relação entre a rigidez à torção e a rigidez à flexão é $GJ_t = 3EI$, para todas as barras.



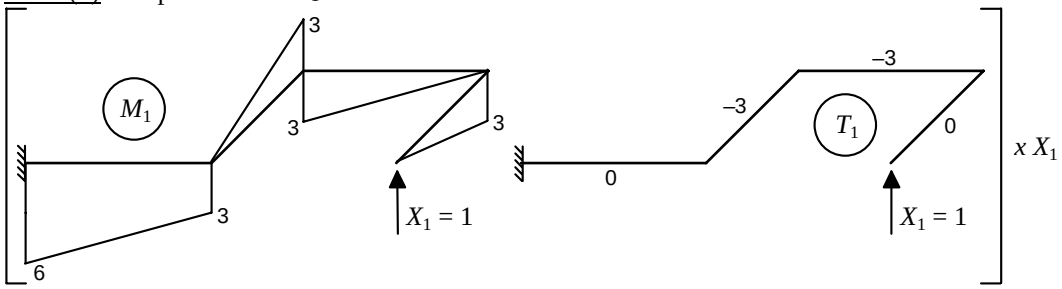
Sistema Principal (*SP*) e Hiperestático



Caso (0) – Solicitação externa isolada no *SP*



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no *SP*



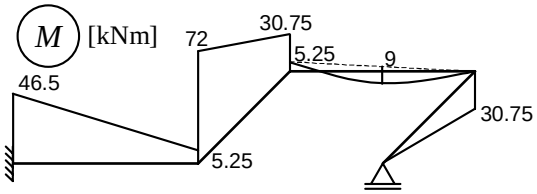
Equação de Compatibilidade: $\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = +10.25 \text{ kN}$

$$\delta_{10} = \left[-\frac{1}{3}\cdot 6\cdot 108\cdot 3 - \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 36\cdot 3 - \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 108\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 36\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 72\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 36\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 9\cdot 3 \right]\cdot \frac{1}{EI} + \left[(-3)\cdot 36\cdot 3\right]\cdot \frac{1}{GJ_t} = -\frac{1107}{EI}$$

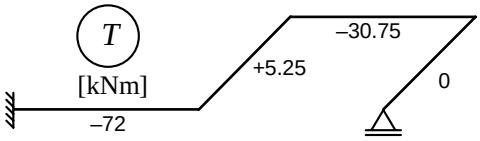
$$\delta_{11} = \left[\frac{1}{3}\cdot 6\cdot 6\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 3\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 6\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3 + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3\right) \right]\cdot \frac{1}{EI} + \left[2\cdot\left((-3)\cdot(-3)\cdot 3\right)\right]\cdot \frac{1}{GJ_t} = \frac{90}{EI} + \frac{54}{3EI} = +\frac{108}{EI}$$

Momentos Fletores e Momentos Torçores finais

$M = M_0 + M_1 X_1$

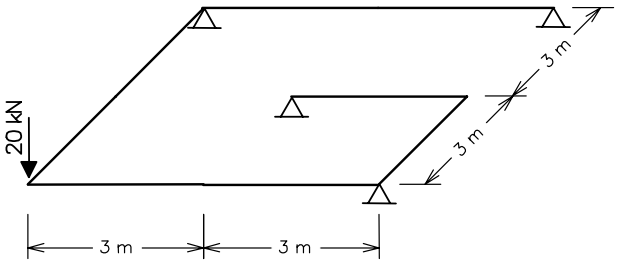


$T = T_0 + T_1 X_1$

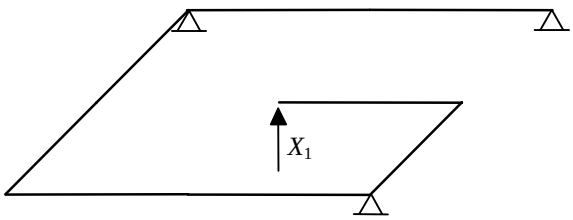


Exemplo 20

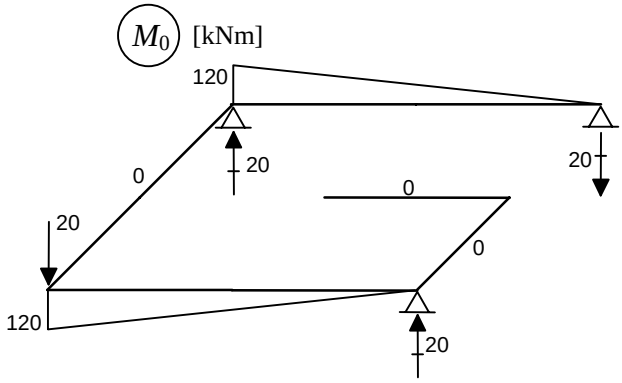
Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e momentos torçores para a grelha ao lado. A relação entre a rigidez à torção e a rigidez à flexão é $GJ_t = 3EI$, para todas as barras.

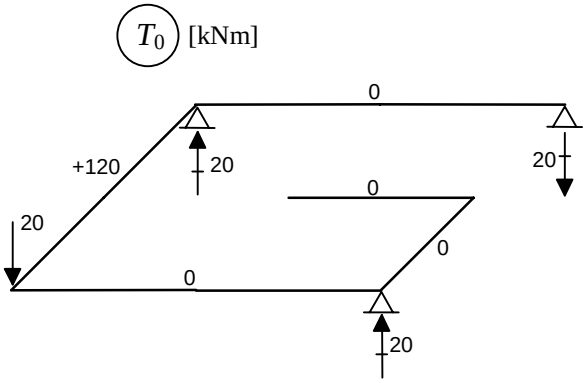


Sistema Principal (*SP*) e Hiperestático

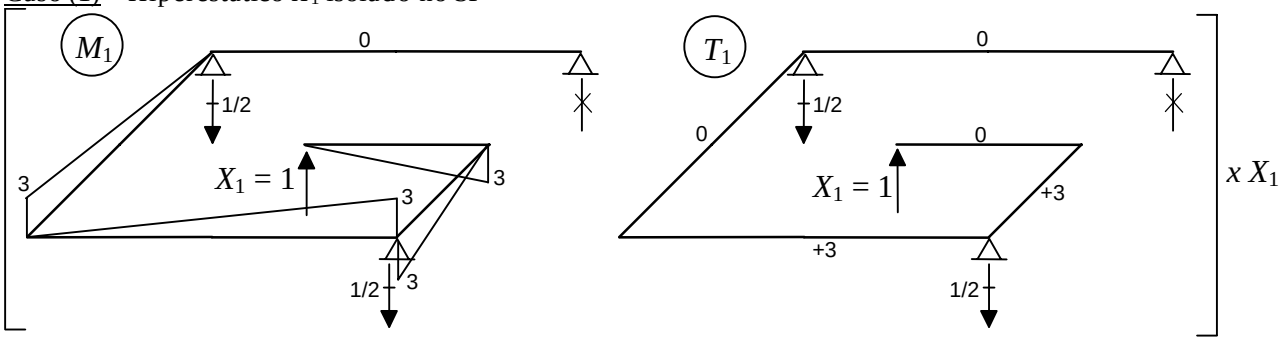


Caso (0) – Solicitação externa isolada no *SP*





Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no *SP*



Equação de Compatibilidade:

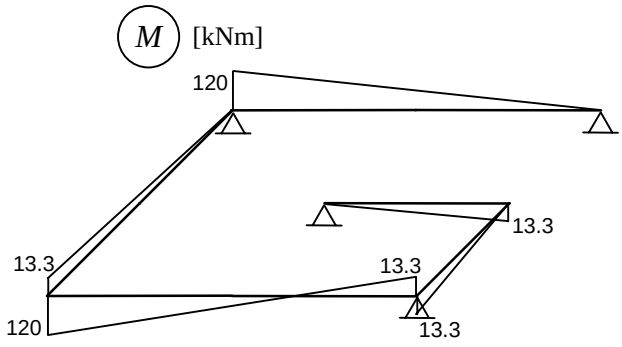
$$\delta_{10} = \left[-\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 120 \cdot 6 \right] \cdot \frac{1}{EI} + [0] \cdot \frac{1}{GJ_t} = -\frac{360}{EI}$$

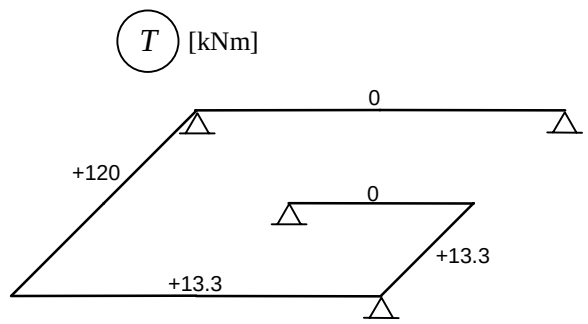
$$\delta_{11} = \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 \right) \right] \cdot \frac{1}{EI} + \left[(+3) \cdot (+3) \cdot 3 + (+3) \cdot (+3) \cdot 6 \right] \cdot \frac{1}{GJ_t} = \frac{54}{EI} + \frac{81}{3EI} = +\frac{81}{EI}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X_1 = +4.4 \text{ kN}$$

Momentos Fletores e Momentos Torçores finais

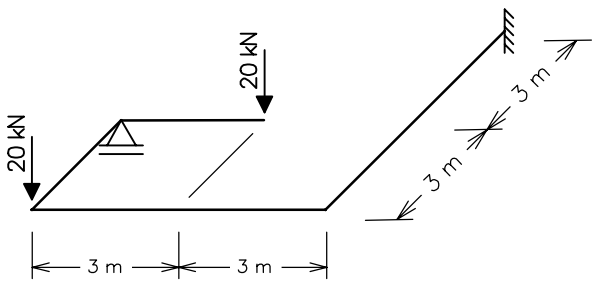
$$M = M_0 + M_1 X_1 \qquad T = T_0 + T_1 X_1$$



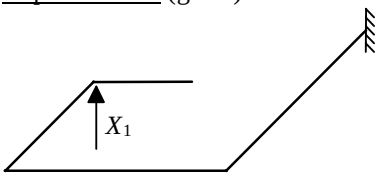


Exemplo 21

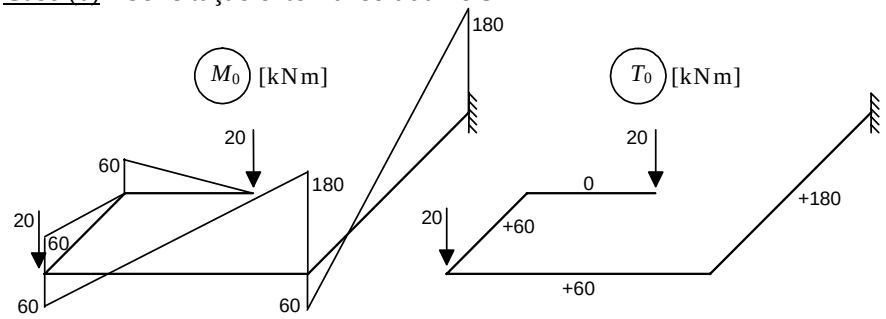
Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e momentos torçores para a grelha ao lado. A relação entre a rigidez à torção e a rigidez à flexão é $GJ_t = 6EI$, para todas as barras.



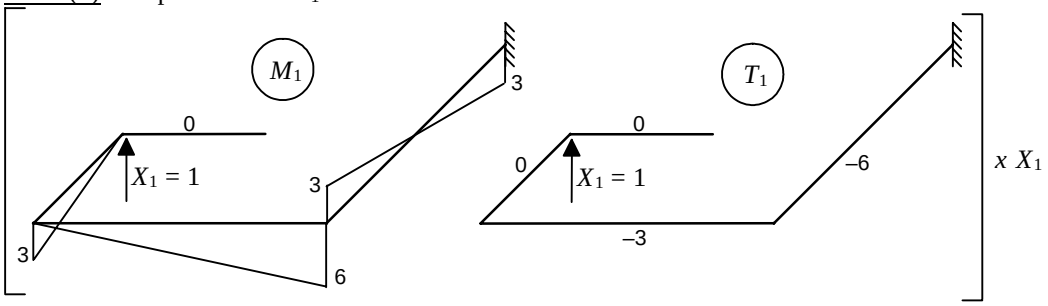
Sistema Principal (*SP*) e Hiperestático (g = 1)



Caso (0) – Solicitação externa isolada no *SP*



Caso (1) – Hiperestático X_1 isolado no *SP*



Equação de Compatibilidade:

$$\delta_{10} = \left[-\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 60\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 60\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 180\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 60\cdot 6 + \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 60\cdot 6 + \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 180\cdot 6 - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 180\cdot 6 \right]\cdot \frac{1}{EI}$$

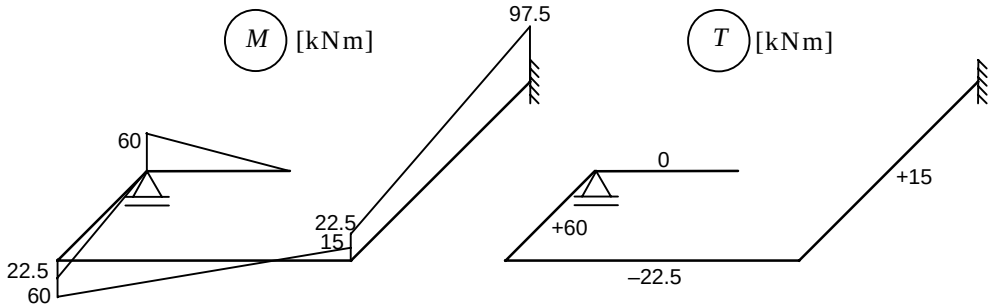
$$+\left[(-3)\cdot(60)\cdot 6 + (-6)(180)\cdot 6\right]\cdot \frac{1}{GJ_t} = -\frac{2700}{EI} - \frac{7560}{GJ_t} = -\frac{2700}{EI} - \frac{7560}{6EI} = -\frac{3960}{EI}$$

$$\delta_{11} = \left[3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3\right) + \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 6\cdot 6 \right]\cdot \frac{1}{EI} + \left[(-3)\cdot(-3)\cdot 6 + (-6)\cdot(-6)\cdot 6\right]\cdot \frac{1}{GJ_t} = \frac{99}{EI} + \frac{270}{GJ_t} = \frac{99}{EI} + \frac{270}{6EI} = +\frac{144}{EI}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X_1 = +27.5\ kN$$

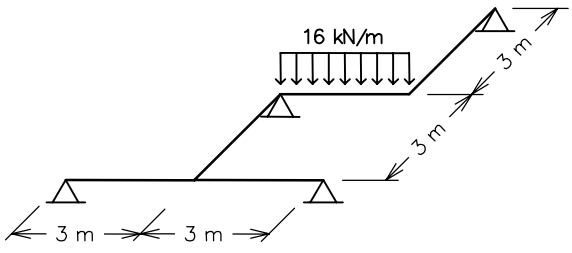
Momentos Fletores e Momentos Torçores finais

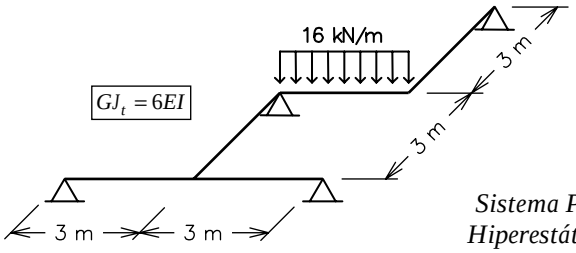
$M = M_0 + M_1 X_1$ $\qquad$ $T = T_0 + T_1 X_1$



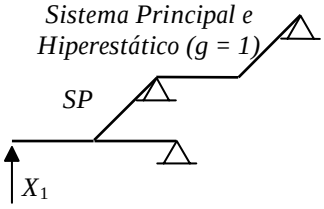
Exemplo 22

Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e momentos torçores para a grelha ao lado. A relação entre a rigidez à torção e a rigidez à flexão é $GJ_t = 6EI$, para todas as barras.

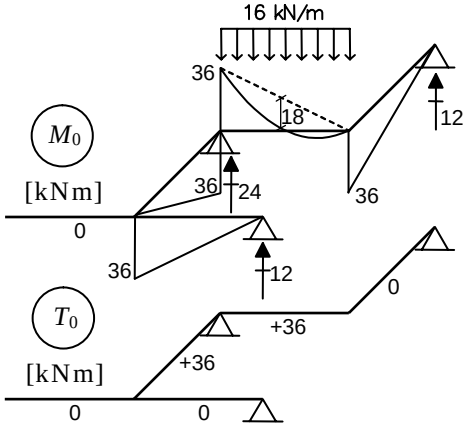




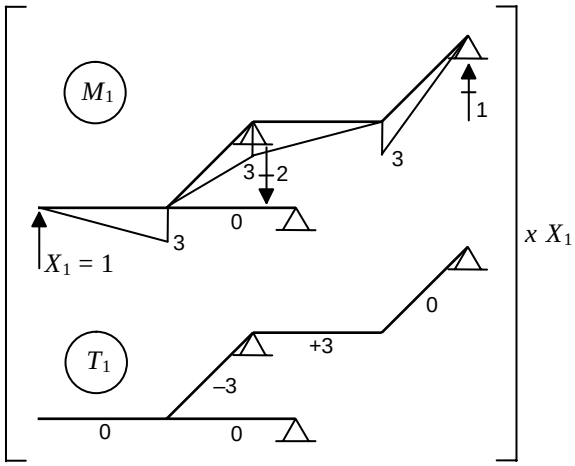
Sistema Principal e Hiperestático (g = 1)



Caso (0) – *Solicitação externa isolada no SP*



Caso (1) – *Hiperstático X_1 isolado no SP*



Equação de compatibilidade:

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \left[+\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 36\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 36\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 18\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 36\cdot 3 \right]\cdot\frac{1}{EI}$$

$$+\left[(-3)\cdot(+36)\cdot 3 + (+3)(+36)\cdot 3\right]\cdot\frac{1}{GJ_t} = +\frac{162}{EI} + \frac{0}{GJ_t} = +\frac{162}{EI}$$

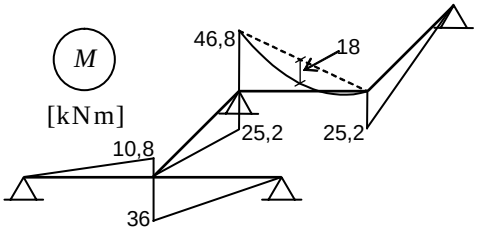
$$\delta_{11} = \left[4\cdot\left(+\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3 \right)\right]\cdot\frac{1}{EI} + \left[(-3)\cdot(-3)\cdot 3 + (+3)\cdot(+3)\cdot 3\right]\cdot\frac{1}{GJ_t}$$

$$\delta_{11} = +\frac{36}{EI} + \frac{54}{GJ_t} = +\frac{36}{EI} + \frac{54}{6EI} = +\frac{45}{EI}$$

$$\Rightarrow \frac{162}{EI} + \frac{45}{EI}\cdot X_1 = 0 \qquad \therefore X_1 = -3{,}6 \text{ kN}$$

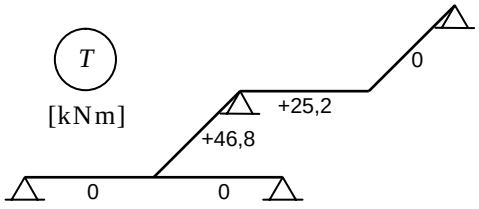
Momentos Fletores Finais:

$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$



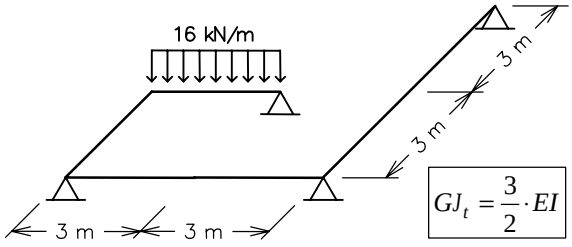
Momentos Torsores Finais:

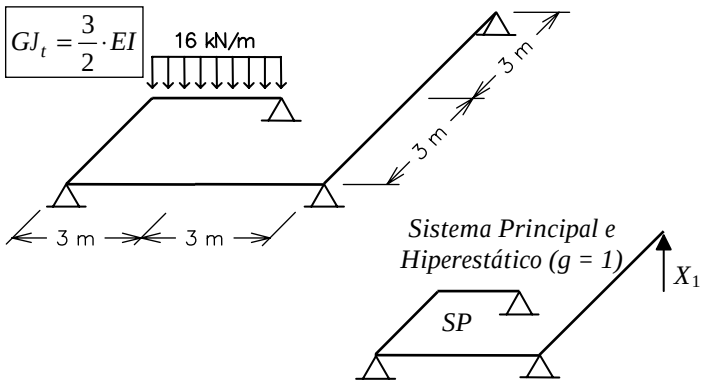
$T = T_0 + T_1 \cdot X_1$



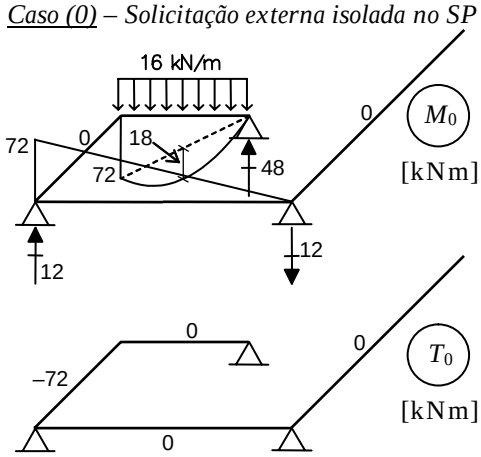
Exemplo 23

Empregando-se o Método das Forças, obter os diagramas de momentos fletores e momentos torçores para a grelha ao lado. Todas as barras têm a relação indicada entre a rigidez à torção GJ_t e a rigidez à flexão EI.

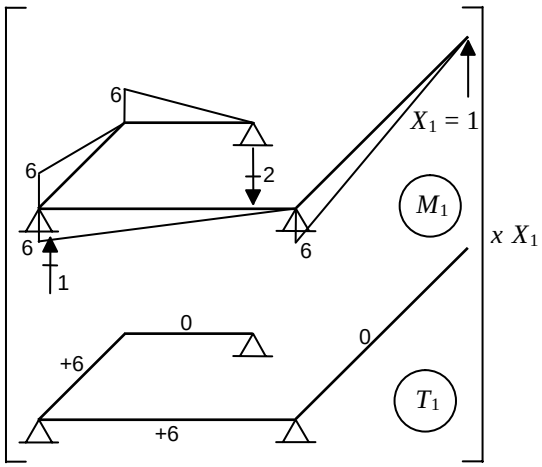




Caso (0) – *Solicitação externa isolada no SP*



Caso (1) – *Hiperstático X_1 isolado no SP*



Equação de compatibilidade:

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

$$\delta_{10} = \left[-\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 72 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 18 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 72 \cdot 6 \right] \cdot \frac{1}{EI} + \left[6 \cdot (-72) \cdot 3 \right] \cdot \frac{1}{GJ_t}$$

$$\delta_{10} = -\frac{1404}{EI} - \frac{1296}{GJ_t} = -\frac{1404}{EI} - \frac{2 \cdot 1296}{3 \cdot GJ_t} = -\frac{2268}{EI}$$

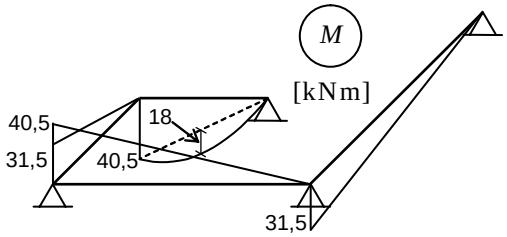
$$\delta_{11} = \left[2 \cdot \left(+\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \right) + 2 \cdot \left(+\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \right) \right] \cdot \frac{1}{EI} + \left[6 \cdot 6 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \right] \cdot \frac{1}{GJ_t}$$

$$\delta_{11} = +\frac{216}{EI} + \frac{324}{GJ_t} = +\frac{216}{EI} + \frac{2 \cdot 324}{3 \cdot EI} = +\frac{432}{EI}$$

$$\Rightarrow -\frac{2268}{EI} + \frac{432}{EI} \cdot X_1 = 0 \quad \therefore X_1 = +5{,}25 \text{ kN}$$

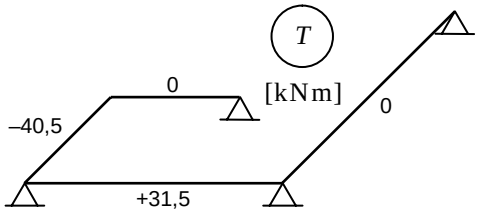
Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1$$



Momentos Torsores Finais:

$$T = T_0 + T_1 \cdot X_1$$



6. MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

Conforme foi introduzido na Seção 2.3 do Capítulo 2, o Método dos Deslocamentos pode ser considerado como o método dual do Método das Forças. Em ambos os métodos a solução de uma estrutura considera os três grupos de condições básicas da Análise Estrutural: condições de equilíbrio, condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações e condições impostas pelas leis constitutivas dos materiais. Entretanto, o Método dos Deslocamentos resolve o problema considerando os grupos de condições a serem atendidas pelo modelo estrutural na ordem inversa do que é feito pelo Método das Forças:

1° Condições de compatibilidade;
2° Leis constitutivas dos materiais;
3° Condições de equilíbrio.

A dualidade entre os dois métodos fica clara quando se observa a metodologia utilizada pelo Método dos Deslocamentos para analisar uma estrutura. A metodologia de cálculo do método consiste em:

- Somar uma série de soluções básicas (chamadas de casos básicos) que satisfazem as condições de compatibilidade, mas que não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original, para na superposição restabelecer as condições de equilíbrio.

Esse procedimento é o inverso do que é feito na solução pelo Método das Forças mostrada no capítulo anterior.

Cada caso básico satisfaz isoladamente as condições de compatibilidade (continuidade interna e compatibilidade com respeito aos vínculos externos da estrutura). Entretanto, os casos básicos não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original pois são necessários forças e momentos adicionais para manter o equilíbrio. As condições de equilíbrio da estrutura ficam restabelecidas quando se superpõem todas as soluções básicas.

6.1. Deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico

A solução pelo Método dos Deslocamentos pode ser vista como uma superposição de soluções cinematicamente determinadas, isto é, de configurações deformadas conhecidas, conforme ilustra a Figura 6.1. Essa figura mostra a configuração deformada de um pórtico plano formada pela superposição de configurações deformadas elementares, cada uma associada a um determinado efeito que é isolado.

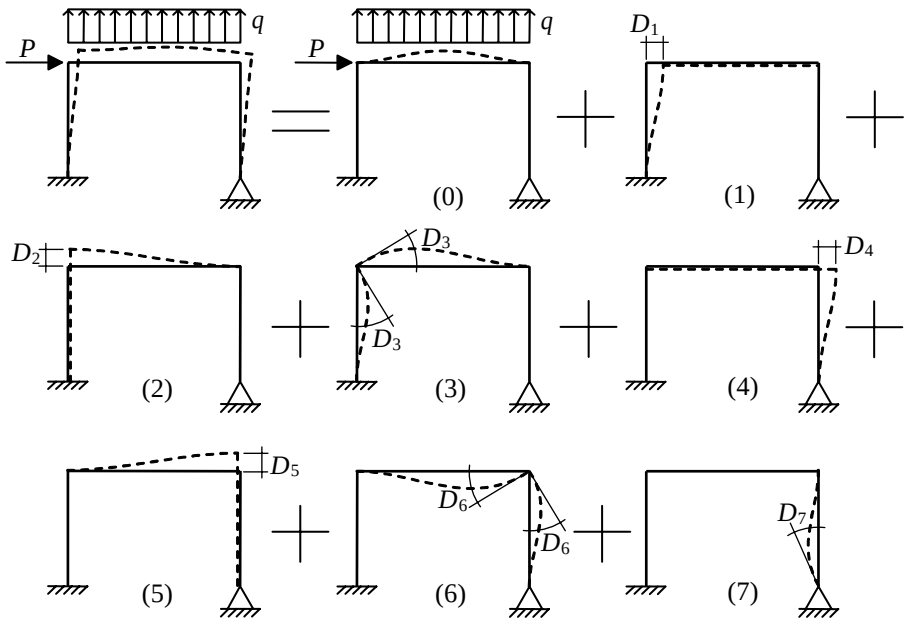


Figura 6.1 – Configuração deformada de um pórtico plano formada pela superposição de configurações deformadas elementares.

Na Figura 6.1, a configuração deformada elementar do caso (0) isola o efeito da solicitação externa (carregamento), sendo que essa configuração deformada é tal que os nós (extremidades das barras) da estrutura apresentam deslocamentos e rotações nulos. A configuração deformada nesse caso corresponde à situação de engastamento perfeito da viga (barra horizontal) devida à carga uniformemente distribuída aplicada. As demais configurações deformadas mostradas nessa figura, dos casos (1) a (7), correspondem a imposições de deslocamentos e rotações nodais isolados, isto é, cada caso apresenta uma configuração deformada elementar em que somente uma componente de deslocamento ou rotação nodal tem um valor não nulo.

A superposição de configurações deformadas mostrada na Figura 6.1 indica que a configuração deformada final de uma estrutura reticulada pode ser parametrizada pelas componentes de deslocamentos e rotações dos nós da estrutura. Isso é possível porque pode-se determinar a configuração deformada de uma barra a partir dos deslocamentos e rotações dos nós extremos da barra e do seu carregamento. De fato, as Equações (4.45) e (4.46) da Seção 4.4.1 do Capítulo 4 determinam a elástica (deslocamentos axiais e transversais) de uma barra em função dos deslocamentos e rotações nas extremidades das barras. A elástica final da barra é obtida superpondo o efeito da solicitação externa isolado no caso (0).

Com base nisso, a seguinte definição é feita:

- *Deslocabilidades* são as componentes de deslocamentos e rotações nodais que estão livres, isto é, que devem ser conhecidas para determinar a configuração deformada de uma estrutura.

Dessa forma, as deslocabilidades são os parâmetros que definem (completamente) a configuração deformada de uma estrutura. As deslocabilidades são as incógnitas do Método dos Deslocamentos.

A seguinte notação vai ser utilizada:

$D_i \rightarrow$ *deslocabilidade de uma estrutura*: componente de deslocamento ou rotação livre (não restrita por apoio) em um nó da estrutura, na direção de um dos eixos globais.

A deslocabilidade D_i também é chamada de *deslocabilidade global* para diferenciá-la de uma deslocabilidade local de uma barra isolada (veja a Seção 4.4.1).

No exemplo mostrado na Figura 6.1, D_1 e D_4 são deslocamentos horizontais dos nós superiores, D_2 e D_5 são deslocamentos verticais dos nós superiores, D_3 e D_6 são rotações dos nós superiores e D_7 é a rotação do nó inferior direito. As demais componentes de deslocamentos e rotação não são deslocabilidades livres pois são restritas por apoios.

Uma estrutura que tem todas as suas deslocabilidades definidas (com valores conhecidos) é denominada *estrutura cinematicamente determinada*. No exemplo da Figura 6.1, as configurações deformadas elementares dos casos (1) a (7) são consideradas cinematicamente determinadas com exceção dos valores das deslocabilidades D_i, que não são desconhecidos a priori.

O modelo estrutural utilizado nos casos básicos é o de uma estrutura cinematicamente determinada obtida a partir da estrutura original pela adição de vínculos na forma de *apoios fictícios*. Esse modelo é chamado de *Sistema Hipergeométrico* (SH).

O SH correspondente à estrutura da Figura 6.1 é mostrado na Figura 6.2. Os apoios fictícios adicionados à estrutura para impedir (prender) as deslocabilidades são numerados de acordo com a numeração das deslocabilidades. Isto é, o apoio *1* impede a deslocabilidade D_1, o apoio *2* impede a deslocabilidade D_2, e assim por diante.

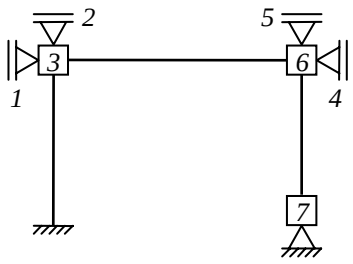


Figura 6.2 – Sistema Hipergeométrico do pórtico plano da Figura 6.1.

Pode parecer estranho criar uma estrutura (o SH) na qual todos os nós são engastados completamente. Na verdade, o SH é utilizado para isolar as diversas componentes cinemáticas da estrutura, isto é, isolar os efeitos de cada uma de suas deslocabilidades. Como mostrado na Figura 6.1, em cada um dos casos básicos da solução pelo Método dos Deslocamentos, no máximo uma deslocabilidade assume um valor não nulo. Com base no SH, essa deslocabilidade é imposta como um "recalque" do correspondente apoio fictício inserido na criação do SH, enquanto os outros apoios fictícios fixam as demais deslocabilidades.

Neste ponto é interessante resgatar um paralelo que foi feito no Capítulo 2 entre o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos. Conforme discutido na Seção 2.3.3 e no capítulo anterior, as incógnitas do Método das Forças são os hiperestáticos, que são forças e momentos associados a vínculos excedentes à determinação estática da estrutura. Por outro lado, as incógnitas do Método dos Deslocamentos são as deslocabilidades, que são componentes de deslocamentos e rotações nodais que definem a configuração deformada da estrutura. Com respeito à estrutura utilizada nas soluções básicas, no Método das Forças essa estrutura é o Sistema Principal, que é uma estrutura estaticamente determinada (isostática) obtida da estrutura original pela eliminação dos vínculos excedentes associados aos hiperestáticos. Em contraposição, no Método dos Deslocamentos a estrutura utilizada nas soluções básicas é o Sistema Hipergeométrico, que é uma estrutura cinematicamente determinada obtida da estrutura original pela adição dos vínculos necessários para impedir as deslocabilidades. Essa comparação evidencia a dualidade entre os dois métodos.

Uma observação importante é que, enquanto existem vários possíveis Sistemas Principais (Método das Forças) para uma estrutura, existe somente um Sistema Hipergeométrico (Método dos Deslocamentos). Isso porque para se chegar ao Sistema Principal isostático do Método das Forças existem várias possibilidades para se eliminar vínculos da estrutura e para se chegar ao Sistema Hipergeométrico só existe uma possibilidade, que é impedindo todas as deslocabilidades.

6.2. Metodologia de análise pelo Método dos Deslocamentos

O objetivo desta seção é apresentar a metodologia de análise estrutural do Método dos Deslocamentos, o que é feito com base em um exemplo numérico cujos dados são mostrados na Figura 6.3. Os cálculos dos coeficientes que aparecem na solução não vão ser indicados nesta seção, mas serão explicados em seções subseqüentes (a Seção 6.6.3 mostra os cálculos dos coeficientes para a estrutura da Figura 6.3).

Todas as barras da estrutura do exemplo têm as mesmas propriedades elásticas e de seção transversal. O material adotado tem módulo de elasticidade $E = 1{,}2 \cdot 10^7$ kN / m^2. A seção transversal das barras tem área $A = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ m^2 e momento de i-

nércia $I = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ m^4. A solicitação externa é uma carga uniformemente distribuída $q = 5$ kN / m aplicada na barra horizontal.

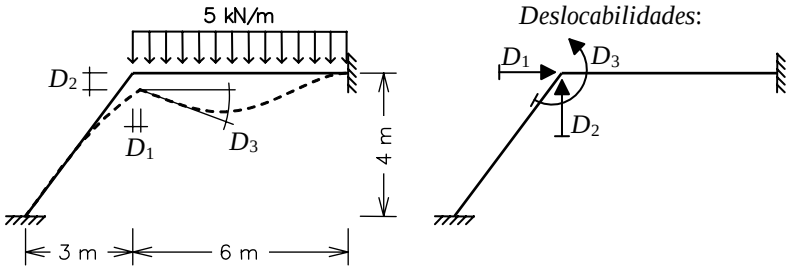


Figura 6.3 – Estrutura utilizada para a descrição da metodologia do Método dos Deslocamentos e suas deslocabilidades.

A Figura 6.3 também indica a configuração deformada da estrutura (com uma amplificação de 450 vezes) e as deslocabilidades D_1, D_2 e D_3, correspondendo, respectivamente, aos deslocamentos horizontal e vertical e à rotação do nó interno. A figura também serve para apresentar uma notação para deslocamentos e rotações: uma seta com um traço perpendicular na base. Essa notação permite indicar as deslocabilidades sem desenhar a configuração deformada da estrutura, que em geral é complicada ou desconhecida.

Como foi dito, a configuração deformada da estrutura fica parametrizada pelas deslocabilidades. Observe que existem infinitos valores para D_1, D_2 e D_3 satisfazendo as condições de compatibilidade. Isto é, existem infinitas configurações deformadas que satisfazem as condições de compatibilidade com respeito aos vínculos externos (apoios), que satisfazem as condições de continuidade do campo de deslocamentos no interior das barras e que satisfazem a continuidade de ligação entre as barras (as barras permanecem ligadas e com o mesmo ângulo entre si no nó interno). Entretanto, somente uma dessas configurações deformadas está associada ao equilíbrio da estrutura. Conforme discutido na Seção 3.7 do Capítulo 3, o Método dos Deslocamentos tem como estratégia procurar, dentre todas as configurações deformadas que satisfazem a compatibilidade, aquela que também faz com que o equilíbrio seja satisfeito.

O equilíbrio da estrutura é imposto na forma de equilíbrio dos nós isolados, considerando também que as barras isoladas estão em equilíbrio. Portanto, a solução desse problema pelo Método dos Deslocamentos recai em encontrar os valores que D_1, D_2 e D_3 devem ter para que o nó interno fique em equilíbrio, visto que os nós dos apoios têm seu equilíbrio automaticamente satisfeito pelas reações de apoio.

Dentro da metodologia do Método dos Deslocamentos aplicada ao exemplo da Figura 6.3, soluções básicas (casos básicos) isolam o efeito da solicitação externa (carregamento) e os efeitos de cada uma das deslocabilidades. Cada efeito isolado

afeta o equilíbrio do nó interno. Na superposição dos casos básicos é imposto o equilíbrio do nó interno.

O Sistema Hipergeométrico (SH) para a estrutura do exemplo é mostrado na Figura 6.4. Os casos básicos utilizam esse SH como estrutura auxiliar, através da qual os efeitos isolados são impostos.

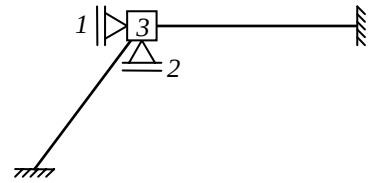


Figura 6.4 – Sistema Hipergeométrico da estrutura da Figura 6.3.

No exemplo em estudo, existem quatro casos básicos – casos (0), (1), (2) e (3) – conforme descrito a seguir.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

O caso (0), mostrado na Figura 6.5, isola o efeito da solicitação externa, isto é, do carregamento aplicado. Dessa forma, a carga externa é a aplicada no SH com $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ e $D_3 = 0$. Nesse caso, as forças e os momentos que aparecem nos apoios fictícios do SH são chamados de *termos de carga* β_{i0}. Um termo de carga é definido formalmente como:

$\beta_{i0} \rightarrow$ reação no apoio fictício associado à deslocabilidade D_i para equilibrar o SH quando atua a solicitação externa isoladamente, isto é, com deslocabilidades com valores nulos.

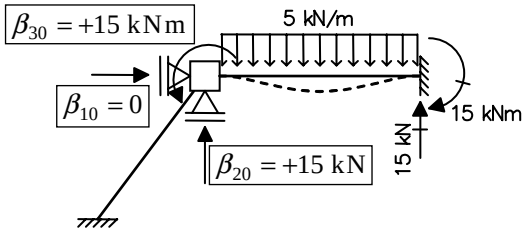


Figura 6.5 – Solicitação externa isolada no SH da estrutura da Figura 6.3.

Neste exemplo, são três os termos de carga, conforme indicado na Figura 6.5, sendo que β_{10} é a reação horizontal, β_{20} é a reação vertical e β_{30} é a reação momento nos três apoios fictícios do nó interno. Essas reações correspondem à situação de engastamento perfeito do SH, e os seus valores são calculados de maneira a equilibrar o nó interno levando em conta o carregamento uniformemente distribuído que atua na barra horizontal. As reações de engastamento de barras carregadas são calculadas tal como mostrado na Seção 4.4.4 do Capítulo 4.

Também os esforços internos no caso (0) são esforços em barras cujos nós extremos são engastados. Dessa forma, somente as barras que têm carga no seu interior apresentam esforços internos e deformações. Isto pode ser entendido pelo fato de os apoios fictícios adicionados no SH isolarem as barras com respeito a deformações.

Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH

O caso (1), mostrado na Figura 6.6, isola o efeito da deslocabilidade D_1, mantendo nulos os valores das deslocabilidades D_2 e D_3. Conforme indicado nessa figura, a deslocabilidade D_1 é colocada em evidência. Considera-se um valor unitário para D_1, sendo o efeito de $D_1 = 1$ multiplicado pelo valor final que D_1 deverá ter.

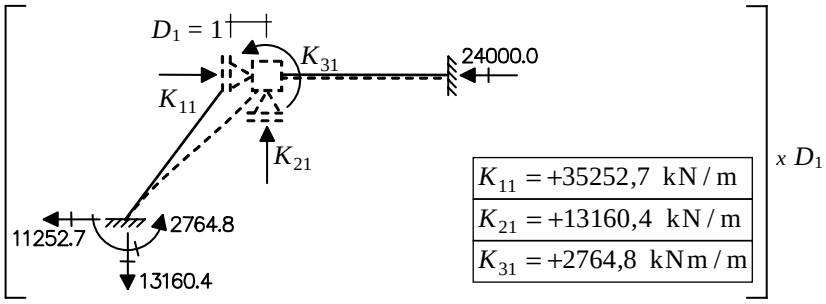


Figura 6.6 – Deslocabilidade D_1 isolada no SH da estrutura da Figura 6.3.

Para impor a configuração deformada onde $D_1 = 1$ e as demais deslocabilidades são mantidas nulas, é necessário aplicar um conjunto de forças e momentos nodais que mantém o SH em equilíbrio nessa configuração, tal como indicado na Figura 6.6.

As forças e momentos que aparecem nos apoios fictícios do SH para equilibrá-lo quando é imposta uma configuração onde $D_1 = 1$ são chamados de *coeficientes de rigidez globais* K_{ij}. Formalmente, o coeficiente de rigidez global é definido como:

$K_{ij} \rightarrow$ *coeficiente de rigidez global*: força ou momento que deve atuar na direção de D_i para manter a estrutura (na verdade, o SH) em equilíbrio quando é imposta uma configuração deformada onde $D_j = 1$ e as demais deslocabilidades são nulas.

No caso (1), os coeficientes de rigidez globais são a força horizontal K_{11}, a força vertical K_{21} e o momento K_{31}. Por definição, as unidades dos coeficientes de rigidez correspondem às unidades de força ou momento divididas pela unidade da deslocabilidade em questão. Nesse exemplo, no caso (1) a unidade de D_1 é a de deslocamento em metros.

Conforme vai ser visto ainda neste capítulo, os coeficientes de rigidez globais são obtidos em função de coeficientes de rigidez das barras isoladas, que por sua vez

são tabelados (veja a Seção 4.4.2 do Capítulo 4). Uma das vantagens do Método dos Deslocamentos em relação ao Método das Forças é que o cálculo dos coeficientes de rigidez é baseado em valores tabelados, o que exige um esforço menor na solução manual da estrutura, quando comparado com o cálculo dos coeficientes de flexibilidade do Método das Forças mostrado no capítulo anterior. Essa vantagem também facilita a implementação computacional do Método dos Deslocamentos.

Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH

De maneira análoga, no caso (2), a deslocabilidade D_2 é colocada em evidência, considerando o efeito devido a um valor unitário de D_2 multiplicado pelo seu valor final, tal como indicado na Figura 6.7. Esse caso isola o efeito da deslocabilidade D_2, mantendo nulos os valores das deslocabilidades D_1 e D_3.

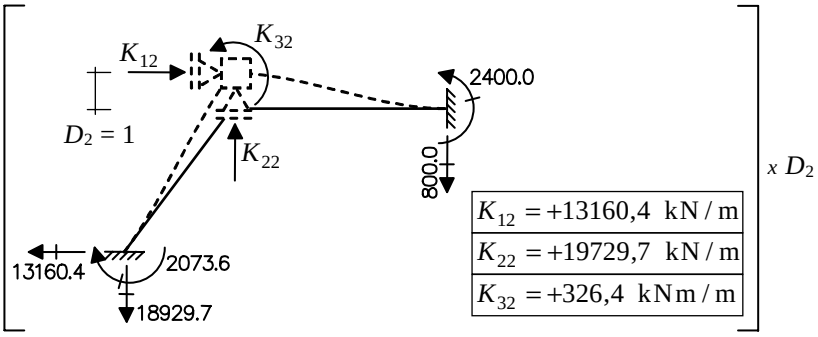


Figura 6.7 – Deslocabilidade D_2 isolada no SH da estrutura da Figura 6.3.

A força horizontal K_{12}, a força vertical K_{22} e o momento K_{32}, que aparecem nos apoios fictícios do SH para mantê-lo em equilíbrio quando é imposta uma configuração deformada onde $D_2 = 1$, são os coeficientes de rigidez globais que aparecem no caso (2). As unidades desses coeficientes, por definição, são unidades de força ou momento divididas pela unidade da deslocabilidade D_2 (metro), tal como mostrado na Figura 6.7.

Caso (3) – Deslocabilidade D_3 isolada no SH

Do mesmo modo, no caso (3) a deslocabilidade D_3 é colocada em evidência, como mostra a Figura 6.8. Esse caso isola o efeito da deslocabilidade D_3, mantendo nulos os valores das deslocabilidades D_1 e D_2. A figura também mostra os coeficientes de rigidez globais desse caso. Observe que as unidades desses coeficientes são unidades de força ou momento divididas por radiano, pois a deslocabilidade D_3 é uma rotação.

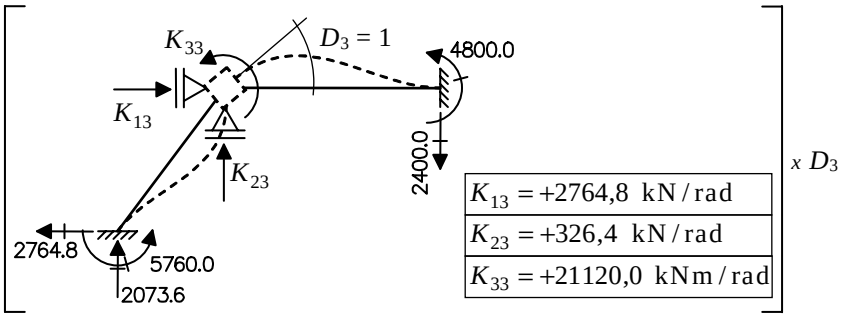


Figura 6.8 – Deslocabilidade D_3 isolada no SH da estrutura da Figura 6.3.

Restabelecimento das condições de equilíbrio

A partir dos resultados obtidos nos casos mostrados acima, pode-se utilizar a superposição dos casos para restabelecer as condições de equilíbrio do nó interior. A resultante de forças e momentos externos neste nó deve ser nula, tal como feito a seguir.

- Somatório das forças externas horizontais que atuam no nó interior:

$$\beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 = 0$$

- Somatório das forças externas verticais que atuam no nó interior:

$$\beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 = 0$$

- Somatório dos momentos externos que atuam no nó interior:

$$\beta_{30} + K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 = 0$$

Pode-se generalizar esses resultados, escrevendo uma equação de equilíbrio na direção da deslocabilidade D_i para uma estrutura com n deslocabilidades:

$$\beta_{i0} + \sum_{j=1}^{j=n} K_{ij} \cdot D_j = 0 \,. \qquad (6.1)$$

A solução do sistema formado pelas três equações de equilíbrio do exemplo desta seção, com os valores mostrados anteriormente para os termos de carga β_{i0} e para os coeficientes de rigidez globais K_{ij}, resulta nos seguintes valores para as deslocabilidades:

$D_1 = +0{,}45 \cdot 10^{-3}$ m;

$D_2 = -1{,}05 \cdot 10^{-3}$ m;

$D_3 = -0{,}75 \cdot 10^{-3}$ rad.

Esses valores fazem com que as resultantes de forças e momentos externos que atuam no nó interno da estrutura sejam nulas. Dessa forma, atingiu-se a solução correta da estrutura, pois além de satisfazer as condições de compatibilidade – que sempre foram satisfeitas nos casos (0), (1), (2) e (3) – ela também satisfaz as condições de equilíbrio, haja vista que não existem forças e momentos externos (fictícios) aplicados ao nó. O equilíbrio dos outros dois nós sempre foi satisfeito pelas reações de apoio, cujos valores finais podem obtidos pela superposição dos valores das reações obtidos em cada caso.

Os sinais das deslocabilidades são determinados pelos sentidos em que foram impostos os deslocamentos unitários e a rotação unitária nos casos básicos. Assim, o sinal positivo de D_1 indica que esse deslocamento tem o mesmo sentido (da esquerda para a direita) do deslocamento horizontal imposto no caso (1). O sinal negativo de D_2 indica que esse deslocamento vertical é para baixo pois é contrário ao deslocamento unitário imposto no caso (2). E o sinal negativo de D_3 mostra que esta rotação é no sentido horário pois é contrária à rotação unitária imposta no caso (3).

Determinação dos esforços internos

Uma vez determinados os valores das deslocabilidades, os diagramas finais de esforços da estrutura do exemplo em estudo também podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de cada um dos casos básicos, conforme vai ser mostrado na seqüência deste capítulo. Por exemplo, os momentos fletores finais (M) podem ser obtidos pela superposição dos diagramas de momentos fletores (M_i) dos casos básicos:

$$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2 + M_3 D_3 ,$$

sendo que o diagrama M_0 corresponde ao caso (0) e os diagramas M_1, M_2 e M_3 são provocados por valores unitários das deslocabilidades nos casos (1), (2) e (3), respectivamente.

Esse resultado pode ser generalizado para todos os esforços internos – esforços normais finais (N), esforços cortantes finais (Q) e momentos fletores finais (M) – de uma estrutura com n deslocabilidades:

$$N = N_0 + \sum_{j=1}^{j=n} N_j \cdot D_j \; ; \tag{6.2}$$

$$Q = Q_0 + \sum_{j=1}^{j=n} Q_j \cdot D_j \; ; \tag{6.3}$$

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^{j=n} M_j \cdot D_j \; . \tag{6.4}$$

Sendo:

$N_0 \rightarrow$ diagrama de esforços normais da estrutura (na verdade, do SH) no caso (0), isto é, quando é imposta a solicitação externa com todas as deslocabilidades mantidas nulas;

$N_j \rightarrow$ diagrama de esforços normais da estrutura (na verdade, do SH) no caso (*j*), isto é, quando é imposta uma configuração deformada onde $D_j = 1$ e as demais deslocabilidades são nulas;

$Q_0 \rightarrow$ diagrama de esforços cortantes da estrutura (na verdade, do SH) no caso (0), isto é, quando é imposta a solicitação externa com todas as deslocabilidades mantidas nulas;

$Q_j \rightarrow$ diagrama de esforços cortantes da estrutura (na verdade, do SH) no caso (*j*), isto é, quando é imposta uma configuração deformada onde $D_j = 1$ e as demais deslocabilidades são nulas;

$M_0 \rightarrow$ diagrama de momentos fletores da estrutura (na verdade, do SH) no caso (0), isto é, quando é imposta a solicitação externa com todas as deslocabilidades mantidas nulas;

$M_j \rightarrow$ diagrama de momentos fletores da estrutura (na verdade, do SH) no caso (*j*), isto é, quando é imposta uma configuração deformada onde $D_j = 1$ e as demais deslocabilidades são nulas.

6.3. Matriz de rigidez global e vetor dos termos de carga

Pode-se reescrever o sistema de equações de equilíbrio do exemplo da seção anterior de uma forma matricial:

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 = 0 \\ \beta_{30} + K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \beta_{30} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

No caso geral de uma estrutura com *n* deslocabilidades, pode-se escrever:

$$\{\beta_0\} + [K]\{D\} = \{0\}. \tag{6.5}$$

Sendo:

$\{\beta_0\} \rightarrow$ vetor dos termos de carga;

$[K] \rightarrow$ matriz de rigidez global;

$\{D\} \rightarrow$ vetor das deslocabilidades.

O número de equações de equilíbrio na Equação matricial (6.5) é igual ao número de deslocabilidades, sendo cada equação dada pela Equação (6.1), que corresponde a uma deslocabilidade genérica D_i.

Observa-se que a matriz de rigidez global independe da solicitação externa (carregamento), que só é considerada no vetor dos termos de carga. A matriz [*K*] é uma característica da estrutura apenas, já que só existe um possível Sistema Hipergeométrico para cada estrutura.

A exemplo do que foi feito na Seção 4.4.2 do Capítulo 4 para uma barra isolada, duas observações podem ser feitas com respeito à matriz de rigidez global. A primeira é que pelo Teorema de Maxwell (versão para deslocamento unitário imposto, Equação (4.42)) a matriz é simétrica. Ou seja:

$$K_{ji} = K_{ij} . \tag{6.6}$$

A segunda observação é que os coeficientes de rigidez que correspondem a uma dada configuração deformada elementar – casos (1), (2) e (3) da seção anterior – têm o mesmo índice *j*. Pode-se dizer então:

- A *j-ésima* coluna da matriz de rigidez $[K]$ global da estrutura corresponde ao conjunto de forças generalizadas (forças e momentos) que atuam nas direções das deslocabilidades para equilibrá-la quando é imposta uma configuração deformada tal que $D_j = 1$ (deslocabilidade D_j com valor unitário e as demais deslocabilidades com valor nulo).

O Método dos Deslocamentos é assim chamado pois as incógnitas são deslocamentos (ou rotações). O método também é chamado de Método do Equilíbrio pois as equações finais expressam condições de equilíbrio. Ele também é chamado de Método da Rigidez pois envolve coeficientes de rigidez em sua solução.

É interessante rever uma comparação que foi feita no Capítulo 2 entre o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos no que diz respeito aos sistemas de equações resultantes dos métodos e aos coeficientes dessas equações.

Conforme discutido na Seção 2.3.3 e no capítulo anterior, as condições expressas pelo sistema de equações finais do Método das Forças são condições de compatibilidade. Essas condições são impostas nas direções dos vínculos eliminados para se chegar ao Sistema Principal (SP). Por outro lado, as equações finais do Método dos Deslocamentos expressam condições de equilíbrio, que são impostas nas direções das deslocabilidades, ou seja, nas direções dos vínculos introduzidos para se chegar ao Sistema Hipergeométrico (SH).

No Método das Forças, os hiperestáticos mantêm o equilíbrio e recompõem a compatibilidade, ao passo que, no Método dos Deslocamentos, as deslocabilidades mantêm a compatibilidade e recompõem o equilíbrio.

Os termos de carga no Método das Forças são deslocamentos ou rotações provocados pela solicitação externa atuando no SP com hiperestáticos com valores nulos. Já no Método dos Deslocamentos, os termos de carga são forças ou momentos necessários para equilibrar o SH, com deslocabilidades com valores nulos, submetido à solicitação externa. Isto é, no Método dos Deslocamentos os termos de carga são reações de engastamento perfeito.

Finalmente, os coeficientes da matriz de flexibilidade do Método das Forças são deslocamentos ou rotações provocados por hiperestáticos com valores unitários atuando no SP. Os coeficientes da matriz de rigidez global do Método dos Deslocamentos são forças ou momentos necessários para equilibrar o SH submetido a deslocabilidades com valores unitários.

6.4. Convenções de sinais do Método dos Deslocamentos

As equações finais do Método dos Deslocamentos expressam o equilíbrio dos nós da estrutura nas direções das deslocabilidades. Por isso, é conveniente introduzir uma convenção de sinais para forças e momentos que facilite a definição de condições de equilíbrio. Isto vai acarretar uma nova convenção de sinais para esforços normais, esforços cortantes e momentos fletores em quadros planos. A Tabela 6.1 resume a convenção de sinais adotada no método para quadros planos.

Tabela 6.1 – Convenção de sinais adotada para quadros planos no Método dos Deslocamentos.

Deslocamentos horizontais:	+	−
Deslocamentos verticais:	+	−
Rotações:	+	−
Forças horizontais:	+	−
Forças verticais:	+	−
Momentos:	+	−
Esforços axiais em extremidades de barra:	+ −	+ −
Esforços cortantes em extremidades de barra:	+ −	− +
Momentos fletores em extremidades de barra:	+ −	− +

Observa-se na Tabela 6.1 que os deslocamentos e forças horizontais são positivos quando têm o sentido da esquerda para a direita e negativos quando têm o sentido contrário. Os deslocamentos e forças verticais são positivos quando têm o sentido de baixo para cima e negativos quando voltados para baixo. As rotações e os momentos são positivos quando têm o sentido anti-horário e são negativos quando têm o sentido horário. A convenção para esforços atuando nas extremidades das barras é a mesma, porém se refere a direções no sistema de eixos locais da barra (direção axial e direção transversal ao eixo da barra).

A convenção de sinais para momentos fletores vai ser explorada para descrever os diagramas de momentos fletores nos passos intermediários do método. Ao invés de desenhar os diagramas de momentos fletores dos casos básicos do Método dos Deslocamentos, os momentos fletores serão indicados nas extremidades da barras, segundo a convenção de sinais apresentada acima. Deve-se observar que, conforme foi explicado na Seção 4.1 do Capítulo 4, o traçado do diagrama de momentos fletores em uma barra da qual se conhecem os momentos fletores nas extremidades e o carregamento no interior da barra é um procedimento simples: "pendura-se", a partir da linha reta que une os momentos nas extremidades da barra, o diagrama de momentos fletores devido ao carregamento em uma viga biapoida de mesmo comprimento.

Uma das utilidades da convenção de sinais mostrada acima é condensar informações sobre os esforços que atuam em uma barra. Por exemplo, considere a viga biengastada mostrada na Figura 6.9.

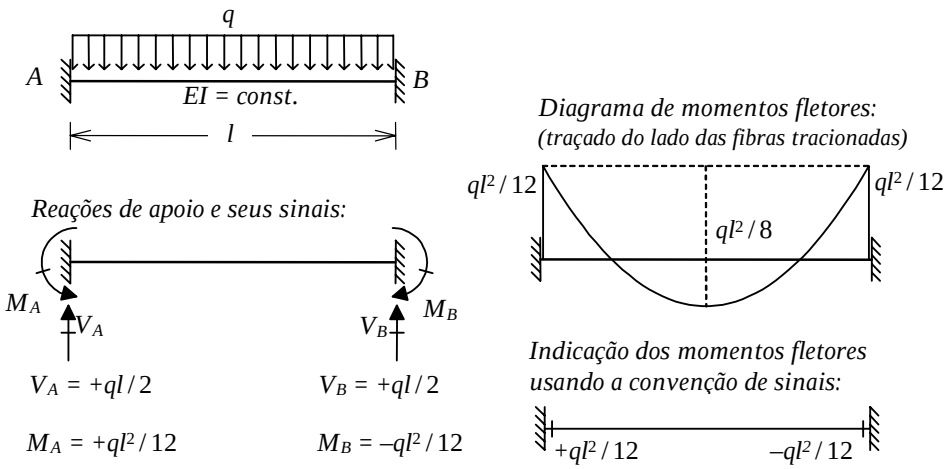


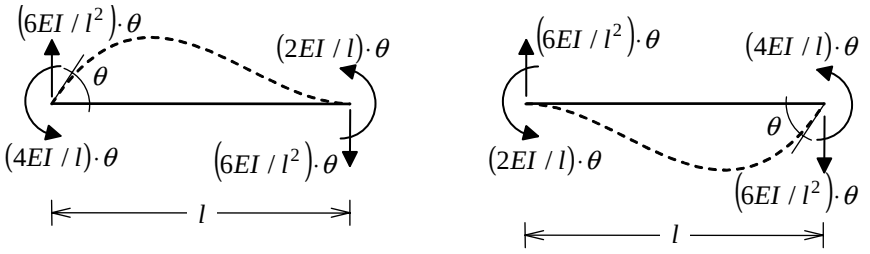
Figura 6.9 – Indicação de momentos fletores em uma viga biengastada utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos.

A Figura 6.9 indica valores de reações de apoio com seus sentidos físicos e com os sinais da convenção adotada. O diagrama de momentos fletores para essa viga

biengastada está mostrado na sua forma usual, isto é, desenhado do lado da fibra da seção transversal que é tracionada. Também está mostrado como se indicam os momentos fletores nas extremidades usando a convenção de sinais do método. Observa-se que os momentos fletores nas extremidades da barra têm o mesmo sinal das reações momento.

Soluções básicas de vigas biengastadas, também chamadas de *soluções de engastamento perfeito* (veja a Seção 4.4.4 do Capítulo 4), são necessárias para a utilização do Método dos Deslocamentos. Isso porque o caso (0) da superposição de casos básicos do método corresponde a uma situação de engastamento perfeito (veja a Seção 6.2). As reações de apoio de vigas biengastadas, e por conseguinte os momentos fletores, são tabelados para diversos tipos de carregamento, tal como indicado na Seção 4.4.4.

Outras soluções fundamentais que são necessárias dentro da metodologia do Método dos Deslocamentos são soluções para deslocamentos ou rotações impostos isoladamente em uma das extremidades de uma barra. Conforme visto na Seção 4.4.2, essas soluções resultam em *coeficientes de rigidez de barra*. Para exemplificar a convenção de sinais adotada, são mostradas na Figura 6.10 as soluções para rotações impostas às seções extremas de uma barra isolada.



Indicação dos momentos fletores usando a convenção de sinais:



Figura 6.10 – Indicação de momentos fletores resultantes da imposição de rotações nas extremidades de uma barra isolada utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos.

Na próxima seção é mostrado um exemplo de uma viga contínua que tem por objetivo utilizar a convenção de sinais na solução pelo Método dos Deslocamentos. Alguns conceitos importantes do método serão salientados nessa solução.

6.5. Exemplo de solução de uma viga contínua

Considere a viga contínua mostrada na Figura 6.11. O valor da rigidez à flexão da viga é $EI = 1{,}2 \times 10^4$ kNm^2. O valor da carga uniformemente distribuída é $q = 12$ kN / m.

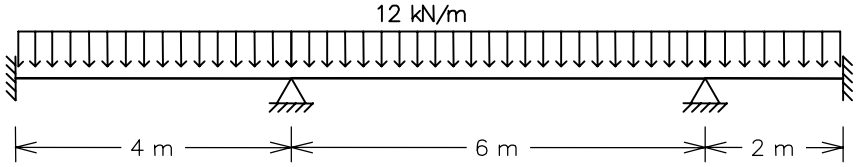
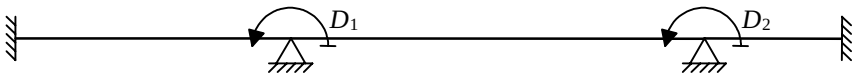


Figura 6.11 – Viga contínua para exemplo de solução pelo Método dos Deslocamentos.

As únicas deslocabilidades da estrutura da Figura 6.11 são as rotações D_1 e D_2 dos nós dos apoios internos. Isto é indicado na Figura 6.12 com o correspondente Sistema Hipergeométrico (SH).

Deslocabilidades:



Sistema Hipergeométrico:

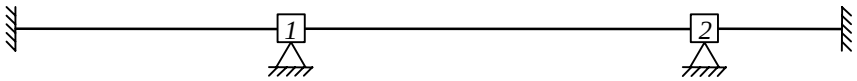


Figura 6.12 – Deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico da estrutura da Figura 6.11.

Uma vez identificadas as deslocabilidades e o SH, a metodologia do Método dos Deslocamentos segue com a superposição de casos básicos, cada um isolando um determinado efeito no SH, tal como definido na Seção 6.2. Isso é mostrado a seguir.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

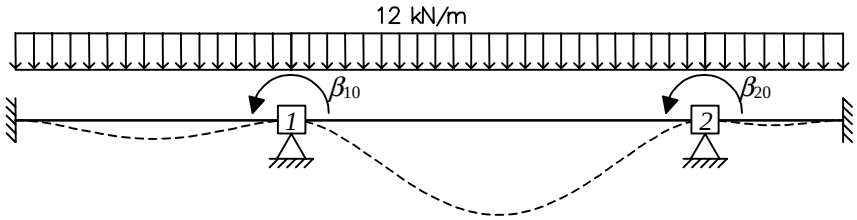


Figura 6.13 – Configuração deformada (exagerada) do caso (0) da estrutura da Figura 6.11.

Neste caso, é imposta uma configuração deformada, indicada na Figura 6.13 de forma ampliada, na qual as rotações dos nós dos apoios internos são mantidas nulas enquanto atua o carregamento. Para que o SH fique em equilíbrio com essa condição imposta, aparecem reações momentos nas chapas fictícias do SH. Essas reações nos apoios fictícios do SH são chamadas de termos de carga, conforme visto anteriormente. Os termos de carga β_{10} e β_{20} são apresentados genericamente na Figura 6.13 com seus sentidos positivos. A interpretação física desses termos pode

ser entendida com auxílio do diagrama de momentos fletores para o caso (0), mostrado na Figura 6.14.

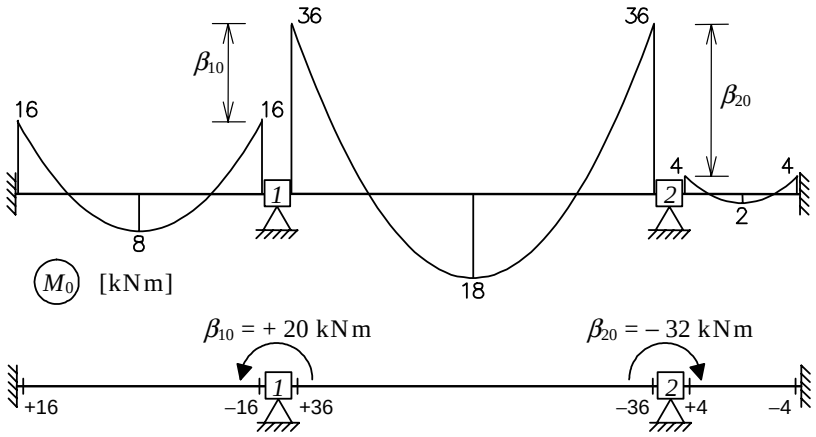


Figura 6.14 – Diagrama de momentos fletores do caso (0) da estrutura da Figura 6.11.

Os momentos fletores para o caso (0) são determinados a partir da solução conhecida para uma viga biengastada com carregamento uniformemente distribuído, conforme mostrado anteriormente. Os momentos de engastamento perfeito nas extremidades de uma barra têm valores em módulo igual a $ql^2/12$, sendo l o comprimento da barra. Os momentos fletores são mostrados na Figura 6.14 de duas maneiras. Na primeira, o diagrama é traçado na convenção usual, isto é, do lado da fibra da seção transversal que é tracionada. Na segunda, os valores dos momentos fletores são indicados nas extremidades das barras de acordo com a convenção de sinais adotada no Método dos Deslocamentos. Observam-se, no diagrama traçado, as descontinuidades do diagrama de momentos fletores, indicando condições de equilíbrio da estrutura original (sem as chapas fictícias) que são violadas. Entretanto, o equilíbrio do SH é satisfeito com a introdução dos termos de carga β_{10} e β_{20}. Fica clara a interpretação física desses termos na Figura 6.14.

Nota-se também a simplicidade para a obtenção dos valores dos termos de carga. Como o sentido das reações momento é compatível com o sentido dos momentos fletores que atuam nas extremidades das barras, para obter os valores dos termos de carga basta somar os valores, com sinal, dos momentos fletores nas seções adjacentes ao nó do termo de carga. Dessa forma:

$\beta_{10} = -q4^2/12 + q6^2/12 = -16 + 36 = +20$ kNm;

$\beta_{20} = -q6^2/12 + q2^2/12 = -36 + 4 = -32$ kNm.

Como dito anteriormente, ao invés de desenhar os diagramas de momentos fletores dos casos básicos do Método dos Deslocamentos, os momentos fletores serão indicados nas extremidades da barras de acordo com a segunda maneira apresen-

tada na Figura 6.14. No exemplo desta seção, as duas maneiras são mostradas para caracterizar bem o sentido físico dos termos de carga. Isso também será feito para caracterizar os coeficientes de rigidez globais nos dois outros casos básicos deste exemplo.

Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH

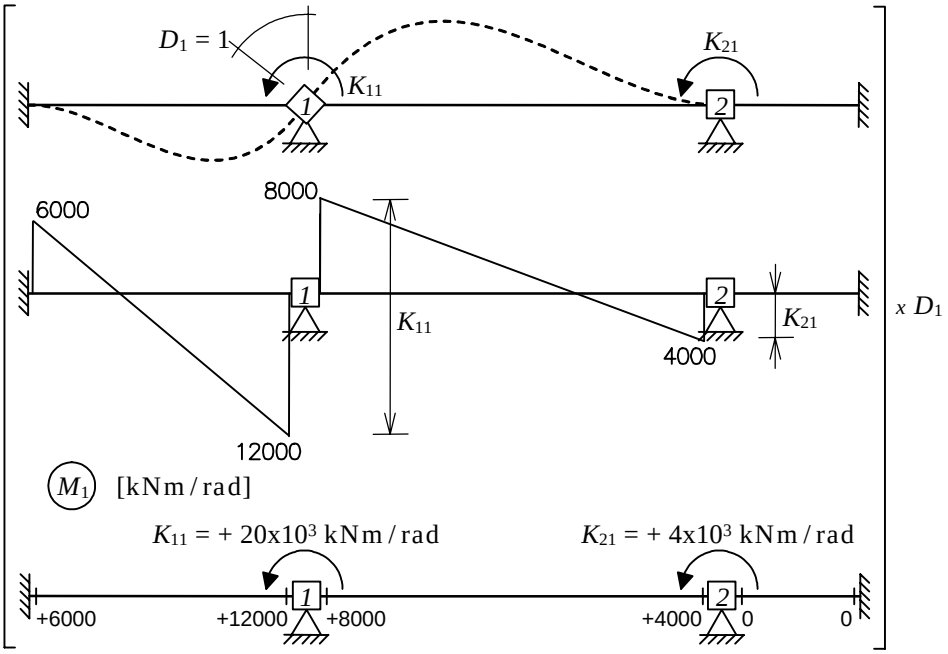


Figura 6.15 – Configuração deformada e diagrama de momentos fletores do caso (1) da estrutura da Figura 6.11.

No caso (1) é imposta uma configuração deformada na qual a rotação D_1 é unitária, colocando o seu valor a ser determinado em evidência, tal como mostrado na Figura 6.15. A figura também mostra o diagrama de momentos fletores M_1, que corresponde ao valor unitário de D_1. Os valores dos momentos fletores são obtidos dos coeficientes de rigidez de barra ($4EI/l$ e $2EI/l$) provocados por rotações impostas em suas extremidades, tal como indicado na Figura 6.10 (com $\theta = 1$). Os momentos fletores são mostrados na forma de um diagrama (traçado do lado da fibra tracionada) e com valores nas extremidades das barras.

Deve-se observar que a barra da direita na Figura 6.15 não sofre deformações no caso (1) e, portanto, tem momentos fletores nulos. Também estão indicadas na figura as interpretações físicas dos coeficientes de rigidez globais K_{11} e K_{21}: correspondem às descontinuidades no diagrama de momentos fletores. Em outras palavras, esses coeficientes são os momentos necessários para manter em equilíbrio o SH quando é imposta uma configuração deformada onde $D_1 = 1$ isoladamente. É

evidente que outros momentos e forças são necessários para manter o SH em equilíbrio nessa configuração deformada, mas eles são reações nos apoios reais da estrutura. Os coeficientes de rigidez globais são os momentos (neste exemplo) que aparecem nos apoios fictícios do SH.

Os valores de K_{11} e K_{21} são obtidos pelas somas dos momentos fletores (com sinal) nas seções adjacentes ao nó correspondente:

$K_{11} = +4EI/4 + 4EI/6 = +12000 + 8000 = +20000$ kNm/rad;

$K_{21} = +2EI/4 = +4000$ kNm/rad.

A soma dos coeficientes de rigidez (locais) de barra ($4EI/4$ e $4EI/6$) para a obtenção do coeficiente de rigidez global K_{11} pode ser entendida de outra maneira: *o "esforço" (K_{11}) necessário para girar a estrutura de $D_1 = 1$ é a soma dos "esforços" (os coeficientes de rigidez das barras) necessários para girar cada barra em separado.* Essa soma de contribuições de coeficientes de rigidez de barra para compor um coeficiente de rigidez global da estrutura é uma das características mais importantes do Método dos Deslocamentos. Essa característica proporciona a concepção de algoritmos simples para a implementação computacional do método.

Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH

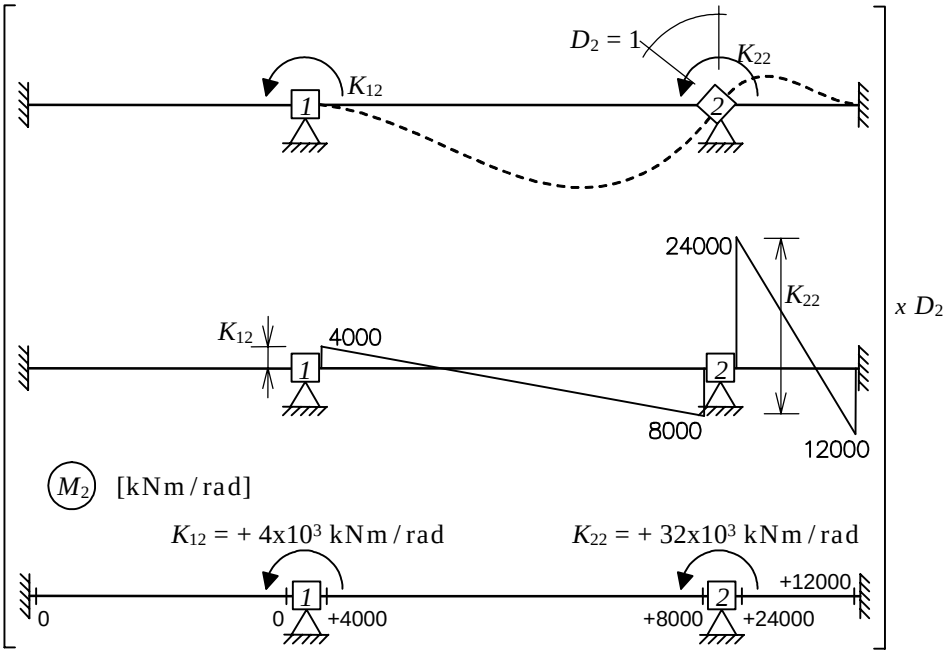


Figura 6.16 – Configuração deformada e diagrama de momentos fletores do caso (2) da estrutura da Figura 6.11.

O caso (2) mostrado na Figura 6.16 é inteiramente análogo ao caso (1). Os valores dos coeficientes de rigidez globais obtidos nesse caso são:

$K_{12} = +2EI/4 = +4000$ kNm/rad;

$K_{22} = +4EI/6 + 4EI/2 = +8000 + 24000 = +32000$ kNm/rad.

Equações de equilíbrio

Para se resolver a estrutura pelo Método dos Deslocamentos, como visto na Seção 6.2, são impostas condições de equilíbrio que determinam que os momentos externos totais introduzidos pelas chapas fictícias do SH sejam nulos. Utilizando a superposição dos casos básicos, essas condições de equilíbrio resultam no seguinte sistema de equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} +20 \\ -32 \end{Bmatrix} + 10^3 \begin{bmatrix} +20 & +4 \\ +4 & +32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

A solução desse sistema de equações fornece os seguintes valores para as deslocabilidades:

$D_1 = -1{,}23 \times 10^{-3}$ rad;
$D_2 = +1{,}15 \times 10^{-3}$ rad.

O valor negativo de D_1 indica que a rotação da seção do apoio interno da esquerda se dá no sentido horário e o valor positivo de D_2 indica que a rotação na seção do outro nó interno tem o sentido anti-horário. Esses sentidos de rotação são compatíveis com a configuração deformada da estrutura, para este carregamento, que é mostrada (ampliada exageradamente) na Figura 6.17.

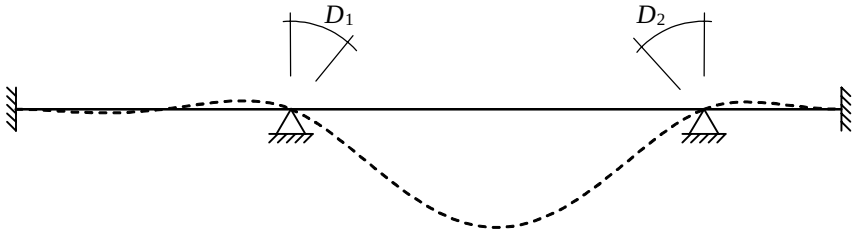


Figura 6.17 – Configuração deformada da estrutura da Figura 6.11.

Determinação do diagrama de momentos fletores finais

Após a determinação dos valores das deslocabilidades, resta a determinação dos efeitos finais na estrutura. Isto é feito utilizando a superposição de casos básicos, sendo que agora os casos (1) e (2) são ponderados com os valores encontrados para D_1 e D_2. Por exemplo, os momentos fletores finais na estrutura são obtidos por:

$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2 \qquad \Rightarrow M = M_0 - 1{,}23\text{x}10^{-3} \text{ x } M_1 + 1{,}15\text{x}10^{-3} \text{ x } M_2.$

Essa superposição é feita individualmente para todas as seções extremas das barras, honrando o sinal da convenção do método que aparece nos diagramas dos casos básicos. O resultado é mostrado na Figura 6.18. Pode-se observar que a soma dos momentos fletores finais, com sinais, das duas seções adjacentes a cada nó interno é nula, indicando que o equilíbrio do nó à rotação está sendo satisfeito.

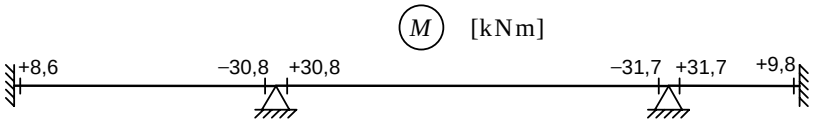


Figura 6.18 – Momentos fletores da estrutura da Figura 6.11 utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos.

Entretanto, essa forma de apresentação de resultados de momentos fletores não é adequada. É preciso traçar o diagrama de momentos fletores ao longo da estrutura, sendo que o diagrama é desenhado usualmente do lado da fibra tracionada das seções transversais. Portanto, é preciso interpretar a convenção de sinais de momentos fletores, verificando o sentido dos momentos nas duas extremidades de cada barra. Isto é mostrado na Figura 6.19, que indica os sentidos dos momentos fletores que atuam nas extremidades das barras e sobre os nós da viga contínua. Essa figura também mostra o traçado do diagrama de momentos fletores finais da estrutura.

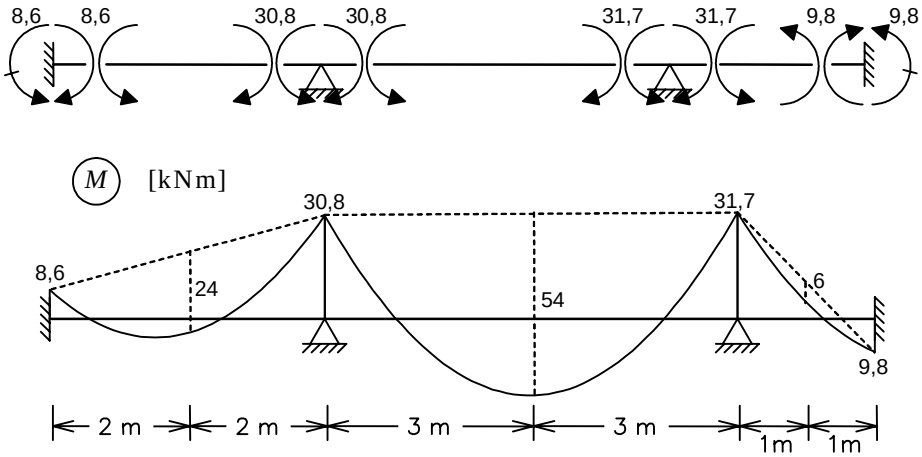


Figura 6.19 – Momentos fletores da estrutura da Figura 6.11 desenhados do lado da fibra das seções transversais.

A partir da solução do exemplo desta seção podem-se fazer alguns comentários. Em todas as etapas do Método dos Deslocamentos, os esforços nas barras e as reações de apoio são sempre determinados com base em configurações deformadas conhecidas. É sempre assim: *conhece-se a configuração deformada e daí se tiram os esforços e reações*. Esse é certamente um raciocínio característico do método, bem dife-

rente da forma como que se resolvem estruturas isostáticas por equilíbrio ou estruturas hiperestáticas pelo Método das Forças. Apesar dessa metodologia não ser intuitiva para quem começa a aprender o Método dos Deslocamentos, a solução de cada caso básico é bem simples. Isso porque as deformações impostas são sempre configurações muito simples: ou são a solução de engastamento perfeito do caso (0) ou é imposta apenas uma deslocabilidade isolada nos outros casos. Os esforços e reações em cada caso básico são obtidos de soluções tabeladas. Esta metodologia simples também permite algoritmos de fácil implementação computacional.

6.6. Exemplos de solução de pórticos simples

Foi observado na seção anterior que os coeficientes de rigidez globais, que compõem o sistema de equações de equilíbrio do Método dos Deslocamentos, são formados pela contribuição de coeficientes de rigidez de barras individualmente. No exemplo da seção anterior, como só havia deslocabilidades do tipo rotação, só se levaram em conta coeficientes de rigidez à rotação. Nesta seção a utilização dos coeficientes de rigidez de barra vai ser generalizada com a consideração adicional de coeficientes de rigidez axial e transversal.

Como visto na Seção 4.4.2 do Capítulo 4, o objetivo dos coeficientes de rigidez de barra é tabelar soluções para os esforços que devem atuar em uma barra isolada devidos a deslocamentos ou rotações impostos isoladamente em uma extremidade da barra. Esses coeficientes também são chamados de *coeficientes de rigidez locais*.

Três exemplos são apresentados nesta seção com o objetivo de mostrar a metodologia do Método dos Deslocamentos principalmente no que se refere ao cálculo dos coeficientes de rigidez globais em função dos coeficientes de rigidez locais das barras. Nos dois primeiros exemplos, as barras são horizontais ou verticais. Isso faz com que os coeficientes de rigidez locais, nas direções locais, sejam horizontais ou verticais, podendo ser somados diretamente para compor os coeficientes de rigidez globais. O terceiro exemplo mostra que é necessário projetar os coeficientes de rigidez locais de uma barra inclinada para fazer essa composição.

6.6.1. Pórtico com três deslocabilidades

Considere o pórtico mostrado na Figura 6.20. As duas barras têm o mesmo material com módulo de elasticidade E e têm a mesma seção transversal, cuja relação entre área A e momento de inércia I é dada por $A/I = 2\ \text{m}^{-2}$. O objetivo do exemplo é a determinação do diagrama de momentos fletores. Na Figura 6.21 estão indicadas as deslocabilidades da estrutura e o correspondente Sistema Hipergeométrico (SH).

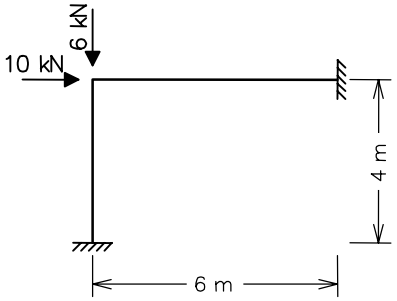


Figura 6.20 – Exemplo de solução de pórtico com três deslocabilidades.

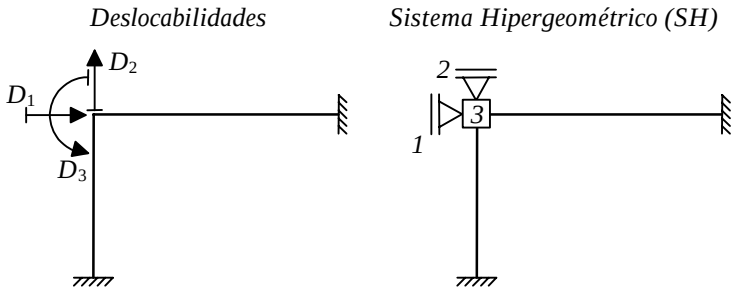


Figura 6.21 – Deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico da estrutura da Figura 6.20.

A solução pelo Método dos Deslocamentos apresentada neste capítulo utiliza uma superposição de casos básicos utilizando como estrutura auxiliar o SH. Isto é mostrado a seguir.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

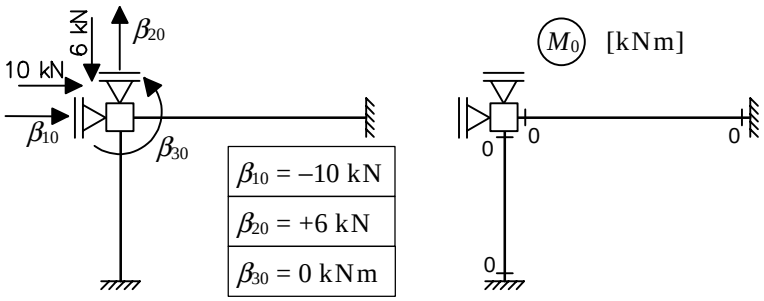


Figura 6.22 – Caso (0) da estrutura da Figura 6.20.

Os termos de carga β_{10}, β_{20} e β_{30} do caso (0) são indicados na Figura 6.22 com seus sentidos positivos. O sentido real vai ser dado pelo sinal do termo. Se for negativo, isso indica que o sentido é contrário ao desenhado. Nesse caso, como as cargas são aplicadas diretamente sobre o nó onde foram colocados os apoios fictícios do SH, os termos de carga são obtidos diretamente pelo equilíbrio do nó, resultando

nos valores indicados. Como não existem cargas aplicadas no interior das barras, estas não apresentam deformações. Se não existem deformações, não existem esforços. Por isso, os momentos fletores M_0 no caso (0) são nulos, conforme indicado na Figura 6.22.

Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH

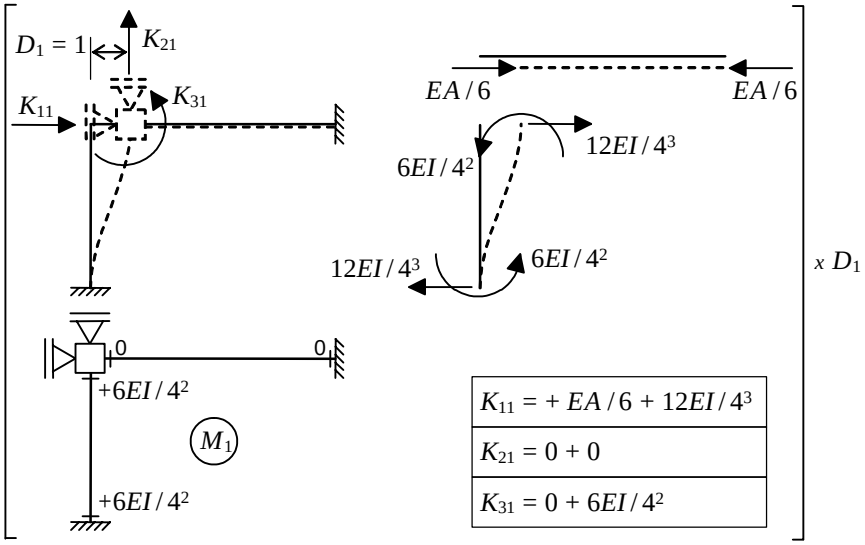


Figura 6.23 – Caso (1) da estrutura da Figura 6.20.

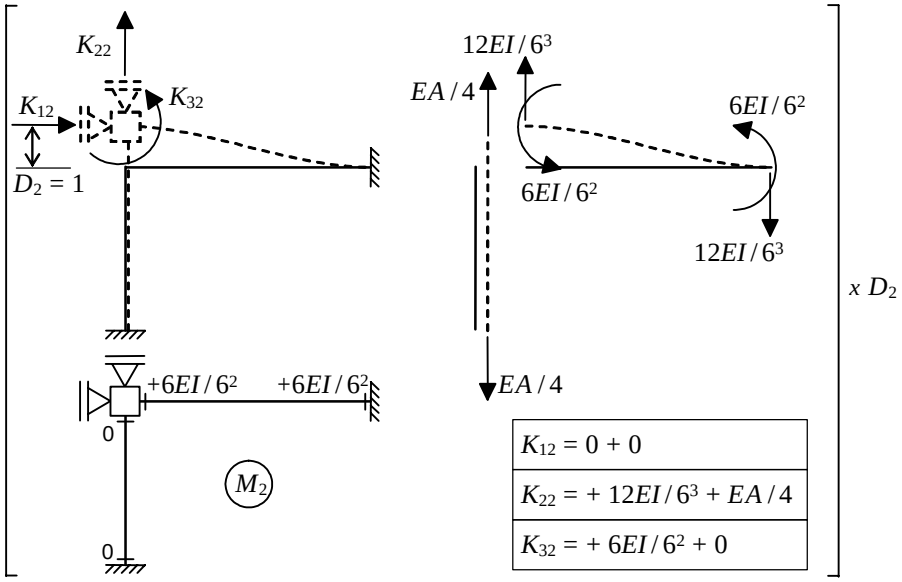
O caso (1) está indicado na Figura 6.23. Observa-se nessa figura como os coeficientes de rigidez locais das barras contribuem para os coeficientes de rigidez globais da estrutura. Por exemplo, a força K_{11}, que deve atuar na direção global de D_1 para dar configuração deformada onde $D_1 = 1$, é obtida pela soma do coeficiente de rigidez axial $EA/6$ da barra horizontal com o coeficiente de rigidez transversal $12EI/4^3$ da barra vertical. Vê-se também que em nenhuma das duas barras aparecem forças verticais no nó deslocado para dar a configuração deformada imposta. Assim, não há contribuição para o coeficiente de rigidez global K_{21}, o que resulta em um valor nulo. De forma análoga, o coeficiente de rigidez global K_{31} recebe uma contribuição nula da barra horizontal, pois esta sofre apenas uma deformação axial, e uma contribuição do momento $6EI/4^2$ vindo da barra vertical.

Na Figura 6.23 também estão mostrados o valores dos momentos fletores M_1 (para $D_1 = 1$) nas extremidades das barras seguindo a convenção de sinais apresentada na Seção 6.4. Neste caso somente a barra vertical apresenta momentos fletores.

Nos casos seguintes, os coeficientes de rigidez globais são calculados de maneira análoga, sendo todos indicados nas Figuras 6.24 e 6.25. Também estão indicados

nas figuras os momentos fletores M_2 e M_3 (para D_2 e D_3 com valores unitários) nas extremidades das barras, seguindo a convenção de sinais do método.

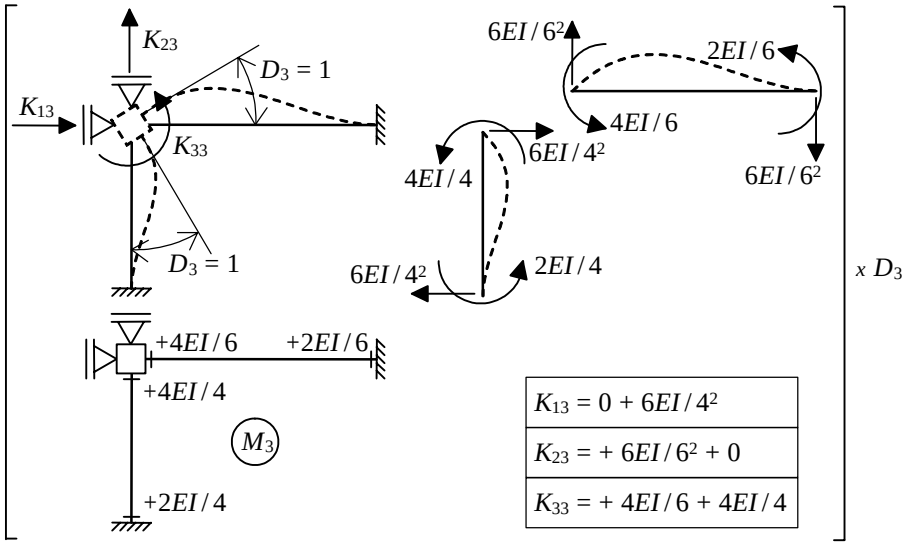
Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH



$K_{12} = 0 + 0$
$K_{22} = + 12EI / 6^3 + EA / 4$
$K_{32} = + 6EI / 6^2 + 0$

Figura 6.24 – Caso (2) da estrutura da Figura 6.20.

Caso (3) – Deslocabilidade D_3 isolada no SH



$K_{13} = 0 + 6EI / 4^2$
$K_{23} = + 6EI / 6^2 + 0$
$K_{33} = + 4EI / 6 + 4EI / 4$

Figura 6.25 – Caso (3) da estrutura da Figura 6.20.

Equações de equilíbrio

Conforme visto anteriormente (veja as Seções 6.2 e 6.5), a solução pelo Método dos Deslocamentos recai em equações de equilíbrio que impõem reações finais nulas nos apoios fictícios do SH. Para o exemplo desta seção, essas equações são:

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 = 0 \\ \beta_{30} + K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 = 0 \end{cases}$$

Utilizando a relação fornecida entre o valor da área e do momento inércia da seção transversal das barras (A/I = 2 m^{-2}), pode-se colocar os coeficientes de rigidez globais em função do parâmetro de rigidez à flexão EI. Isso resulta no seguinte sistema de equações, cuja solução também é indicada em função de EI:

$$\begin{Bmatrix} -10 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 25/48 & 0 & 3/8 \\ 0 & 5/9 & 1/6 \\ 3/8 & 1/6 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{cases} D_1 = +22{,}085/EI \\ D_2 = -9{,}595/EI \\ D_3 = -4{,}010/EI \end{cases} .$$

A configuração deformada final da estrutura é mostrada na Figura 6.26. Observa-se que os sinais dos deslocamentos e da rotação são consistentes: D_1 é positivo (da esquerda para a direita), D_2 é negativo (de cima para baixo) e D_3 é negativo (sentido horário).

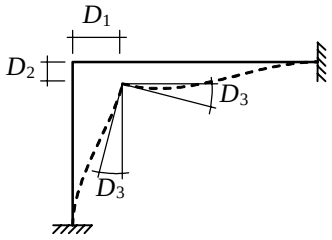


Figura 6.26 – Configuração deformada (com ampliação exagerada) da estrutura da Figura 6.20.

Determinação do diagrama de momentos fletores finais

Os momentos fletores finais na estrutura são obtidos pela superposição de efeitos dos casos básicos, sendo M_0 nulo:

$M = M_0 + M_1 D_1 + M_2 D_2 + M_3 D_3$

Isso resulta nos valores, com sinais, dos momentos fletores nas extremidades das barras indicados na esquerda da Figura 6.27. Esses sinais são interpretados segundo a convenção do método, resultando nos sentidos indicados no meio da figura. Finalmente, o diagrama de momentos fletores é desenhado do lado da fibra tracionada, conforme indicado na direita da Figura 6.27.

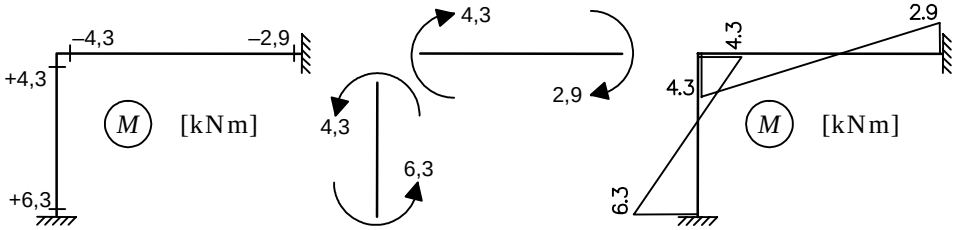


Figura 6.27 – Diagrama de momentos fletores da estrutura da Figura 6.20.

6.6.2. Pórtico com articulação interna

Esta seção mostra a solução pelo Método dos Deslocamentos de um pórtico simples com seis deslocabilidades e uma articulação (rótula) interna, tal como mostrado na Figura 6.28. As três barras têm a mesma seção transversal, com área A e momento de inércia I, e material com módulo de elasticidade E. A relação entre A e I é dada por $A/I = 2$ m^{-2}. A Figura 6.29 mostra as deslocabilidades e o correspondente Sistema Hipergeométrico.

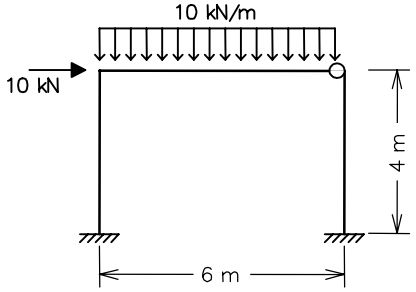


Figura 6.28 – Exemplo de solução de pórtico com articulação interna.

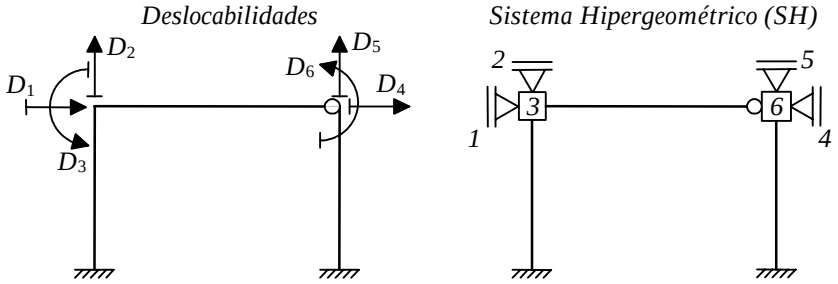


Figura 6.29 – Deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico da estrutura da Figura 6.28.

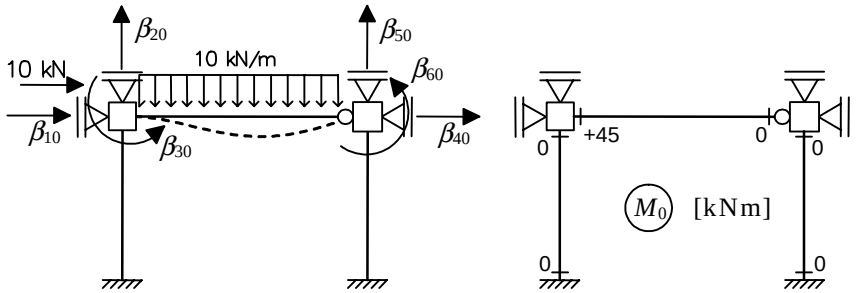
Assim como no exemplo da seção anterior, o objetivo principal deste exemplo é mostrar a determinação dos coeficientes de rigidez globais em função dos coeficientes de rigidez locais da barras. Essa determinação é simples pois as barras da

estrutura são perpendiculares entre si. Quando existem barras inclinadas, é preciso converter coeficientes de rigidez locais das direções locais para as direções globais. Isso porque os coeficientes de rigidez globais são formados por somas de contribuições dos coeficientes de rigidez locais das diversas barras. Para poderem ser somados, os coeficientes locais devem ter as mesmas direções (horizontais ou verticais). A próxima seção apresenta um exemplo com barra inclinada, onde vai ser mostrado como se faz esta conversão.

Observe nas Figuras 6.28 e 6.29 que a articulação do nó superior direito é considerada na extremidade direita da barra horizontal (da viga). A outra possibilidade para considerar a rótula seria na seção superior da barra vertical (coluna) da direita. Ainda haveria uma outra possibilidade que seria considerar as duas barras articuladas neste nó. Isso geraria, como será mostrado no próximo capítulo, uma indeterminação do sistema de equações finais de equilíbrio quanto ao valor da rotação D_6. Na verdade, isso resulta em um "truque" de cálculo em que esta rotação não é considerada como deslocabilidade. Essa discussão vai ser deixada para o próximo capítulo.

A superposição de casos básicos utilizando como estrutura auxiliar o SH é mostrada a seguir. Em cada caso básico são mostradas as configurações deformadas impostas e estão indicados os correspondentes momentos fletores nas extremidades das barras seguindo a convenção de sinais apresentada na Seção 6.4.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH



$\beta_{10} = -10$ kN	$\beta_{40} = 0$
$\beta_{20} = +37{,}5$ kN	$\beta_{50} = +22{,}5$ kN
$\beta_{30} = +45$ kNm	$\beta_{60} = 0$

Figura 6.30 – Caso (0) da estrutura da Figura 6.28.

Os termos de carga β_{i0} são indicados na Figura 6.30 com seus sentidos positivos. O sentido real vai ser dado pelo sinal do termo. Se for negativo, isso indica que o sentido é contrário ao desenhado. Para o caso (0), é necessária a solução prévia das reações de engastamento perfeito de uma viga engastada na esquerda e articulada

na direita devido a uma carga uniformemente distribuída. Essa solução é mostrada na Seção 4.4.4.1 do Capítulo 4 (veja a Figura 4.43). O momento fletor que aparece na extremidade esquerda da viga da estrutura é igual a $+10 \cdot 6^2 / 8 = +45$ kNm, tal como indicado na Figura 6.30.

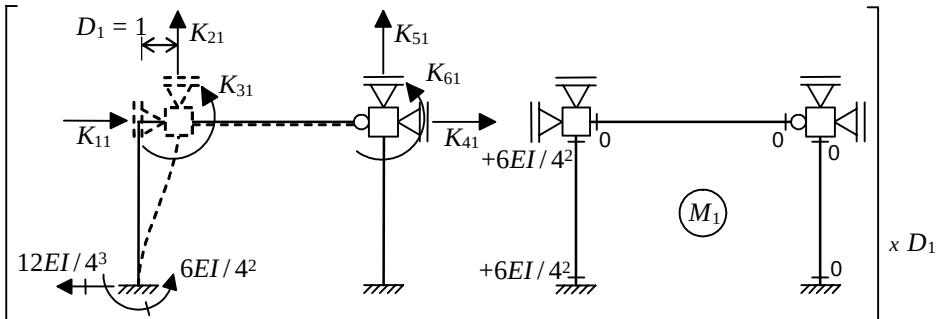
Os valores, com sinal, dos termos de carga mostrados na Figura 6.30 são obtidos com base nas cargas aplicadas e na solução de engastamento perfeito para a viga com uma rótula na extremidade direita (veja a Figura 4.43).

Os procedimentos para a determinação dos coeficientes de rigidez globais K_{ij} do exemplo desta seção são análogos aos que foram feitos para o exemplo da seção anterior e estão mostrados nas Figuras 6.31 a 6.36. Entretanto, essas figuras não indicam os esforços que atuam nas extremidades das barras isoladas em cada caso básico. O raciocínio para a obtenção dos coeficientes globais pode ser feito consultando as figuras dos coeficientes de rigidez locais da Seção 4.4.2 do Capítulo 4.

Os coeficientes de rigidez globais dos casos (1) a (6) estão indicados com seus sentidos positivos nas Figuras 6.31 a 6.36. O sentido real é dado pelo sinal. Se o sinal for negativo, o sentido real é contrário ao desenhado. Os valores dos coeficientes dos casos (1) a (6) também estão mostrados nas figuras correspondentes em função dos parâmetros de rigidez axial *EA* e de rigidez à flexão *EI*.

É interessante observar a influência da articulação da barra horizontal na determinação dos coeficientes de rigidez da estrutura. Por exemplo, devido a essa articulação, nos casos básicos (2), (3) e (5) (Figuras 6.32, 6.33 e 6.35) os coeficientes K_{62}, K_{63} e K_{65} são nulos, apesar de a barra horizontal estar sendo mobilizada à flexão. Note também que a barra horizontal não é mobilizada à flexão no caso (6) (Figura 6.36).

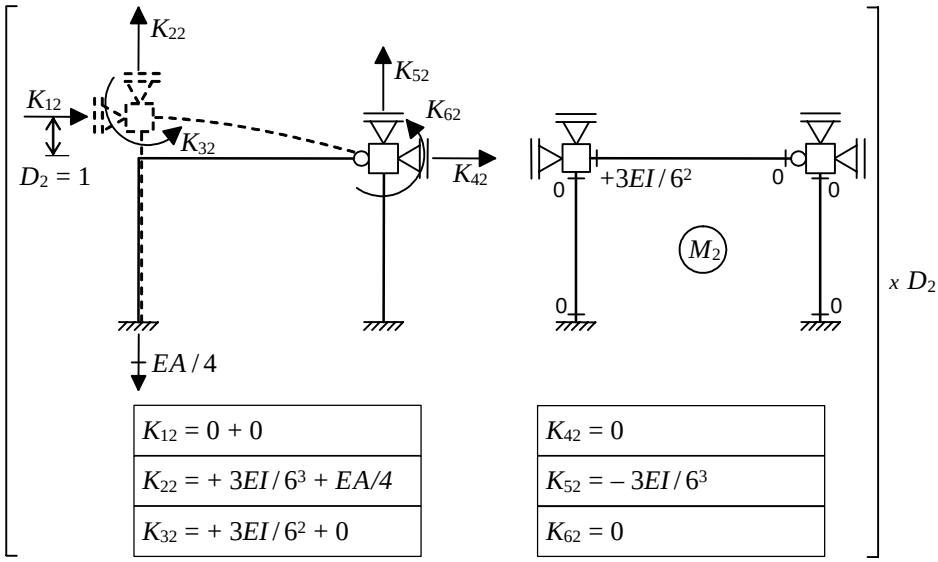
Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH



$K_{11} = + EA/6 + 12EI/4^3$	$K_{41} = -EA/6$
$K_{21} = 0 + 0$	$K_{51} = 0$
$K_{31} = 0 + 6EI/4^2$	$K_{61} = 0$

Figura 6.31 – Caso (1) da estrutura da Figura 6.28.

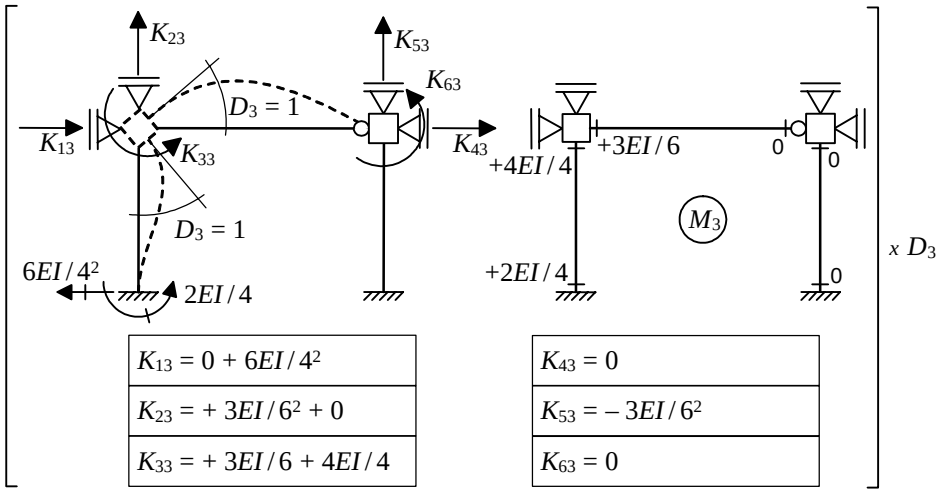
Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH



$K_{12} = 0 + 0$	$K_{42} = 0$
$K_{22} = + 3EI / 6^3 + EA/4$	$K_{52} = - 3EI / 6^3$
$K_{32} = + 3EI / 6^2 + 0$	$K_{62} = 0$

Figura 6.32 – Caso (2) da estrutura da Figura 6.28.

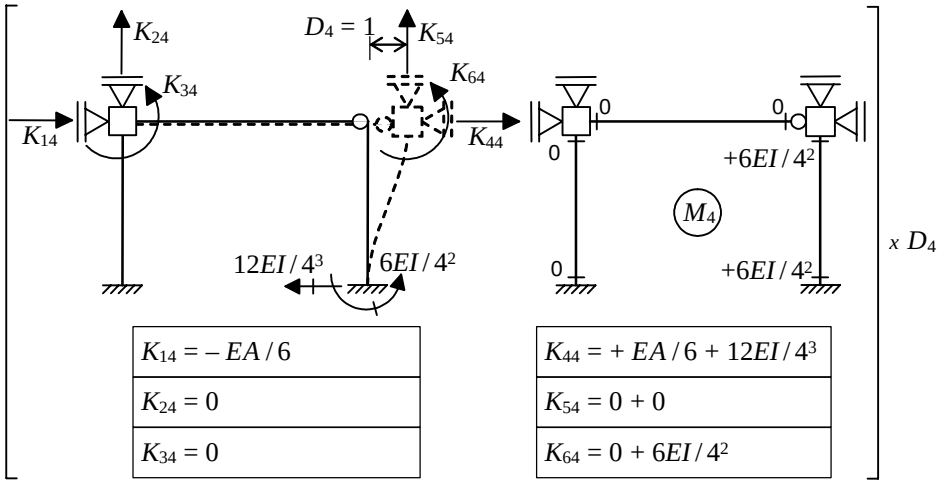
Caso (3) – Deslocabilidade D_3 isolada no SH



$K_{13} = 0 + 6EI / 4^2$	$K_{43} = 0$
$K_{23} = + 3EI / 6^2 + 0$	$K_{53} = - 3EI / 6^2$
$K_{33} = + 3EI / 6 + 4EI / 4$	$K_{63} = 0$

Figura 6.33 – Caso (3) da estrutura da Figura 6.28.

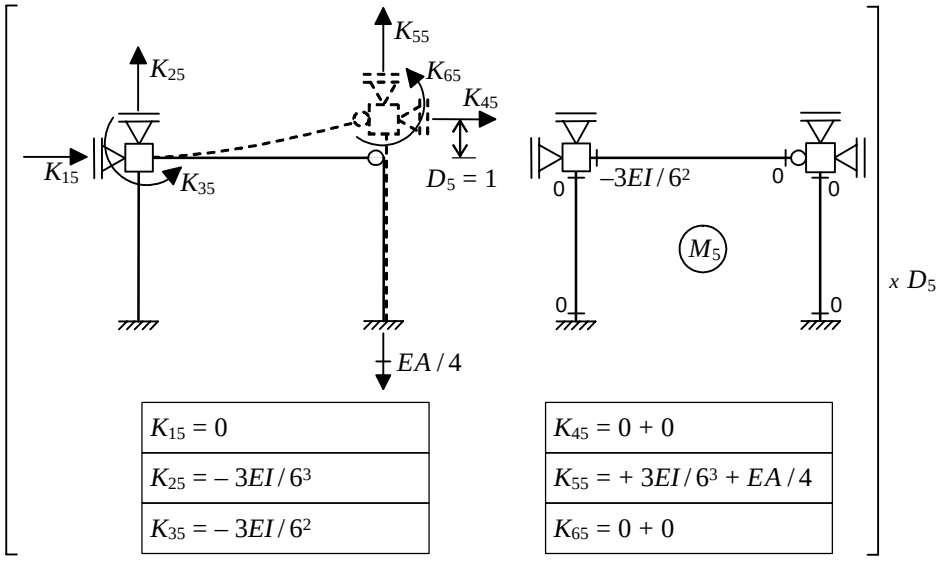
Caso (4) – Deslocabilidade D_4 isolada no SH



$K_{14} = -EA/6$	$K_{44} = +EA/6 + 12EI/4^3$
$K_{24} = 0$	$K_{54} = 0 + 0$
$K_{34} = 0$	$K_{64} = 0 + 6EI/4^2$

Figura 6.34 – Caso (4) da estrutura da Figura 6.28.

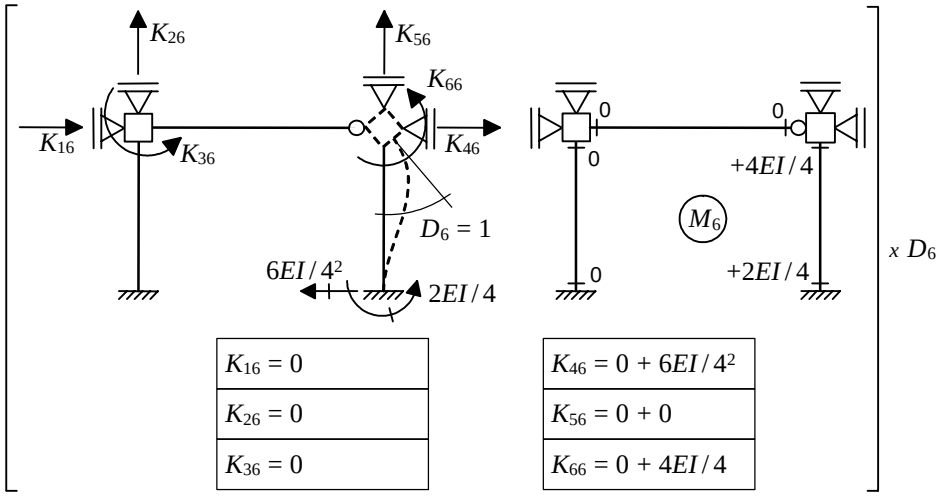
Caso (5) – Deslocabilidade D_5 isolada no SH



$K_{15} = 0$	$K_{45} = 0 + 0$
$K_{25} = -3EI/6^3$	$K_{55} = +3EI/6^3 + EA/4$
$K_{35} = -3EI/6^2$	$K_{65} = 0 + 0$

Figura 6.35 – Caso (5) da estrutura da Figura 6.28.

Caso (6) – Deslocabilidade D_6 isolada no SH



$K_{16} = 0$	$K_{46} = 0 + 6EI / 4^2$
$K_{26} = 0$	$K_{56} = 0 + 0$
$K_{36} = 0$	$K_{66} = 0 + 4EI / 4$

Figura 6.36 – Caso (6) da estrutura da Figura 6.28.

Equações de equilíbrio

O sistema de equações de equilíbrio do Método dos Deslocamentos, expressão (6.5), para o exemplo desta seção contém seis condições de equilíbrio, uma para cada deslocabilidade. Utilizando a relação fornecida $A/I = 2$ m^{-2}, pode-se colocar os coeficientes de rigidez globais em função do parâmetro de rigidez à flexão EI. Isso resulta no sistema de equações mostrado em seguida, cuja solução também é indicada em função de EI:

$$\begin{Bmatrix} -10{,}0 \\ +37{,}5 \\ +45{,}0 \\ 0 \\ +22{,}5 \\ 0 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} +25/48 & 0 & +3/8 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & +37/72 & +1/12 & 0 & -1/72 & 0 \\ +3/8 & +1/12 & +3/2 & 0 & -1/12 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & +25/48 & 0 & +3/8 \\ 0 & -1/72 & -1/12 & 0 & +37/72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +3/8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = +156{,}55/EI \\ D_2 = -63{,}35/EI \\ D_3 = -68{,}75/EI \\ D_4 = +137{,}25/EI \\ D_5 = -56{,}65/EI \\ D_6 = -51{,}45/EI \end{cases}.$$

Determinação do diagrama de momentos fletores finais

A configuração deformada final da estrutura e o diagrama de momentos fletores, obtido pela superposição dos diagramas dos casos básicos dada pela Equação (6.4), estão indicados na Figura 6.37.

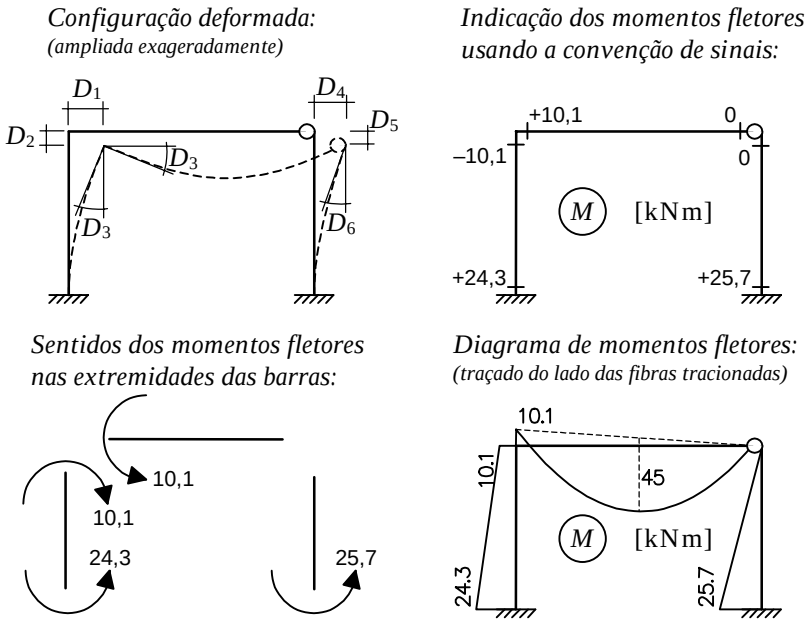


Figura 6.37 – Configuração deformada e diagrama de momentos fletores da estrutura da Figura 6.28.

Observa-se pela solução do exemplo desta seção que o Método dos Deslocamentos tem uma metodologia com procedimentos simples e padronizados. Entretanto, neste exemplo e no anterior só foram consideradas barras horizontais e verticais. A próxima seção vai mostrar a solução de uma estrutura com uma barra inclinada.

6.6.3. Pórtico com barra inclinada

Nos exemplos apresentados nas Seções 6.5, 6.6.1 e 6.6.2 as barras são horizontais ou verticais. Isso faz com que os coeficientes de rigidez locais, nas direções locais, sejam horizontais ou verticais, podendo ser somados diretamente para determinar os coeficientes de rigidez globais da estrutura. Esta seção mostra os procedimentos necessários para considerar uma barra inclinada.

O mesmo exemplo mostrado na Seção 6.2 (Figura 6.3) vai ser estudado nesta seção para mostrar os cálculos dos coeficientes de rigidez globais quando uma das barras é inclinada. O caso básico (0) desse exemplo, mostrado na Figura 6.5, não sofre a

influência da barra inclinada, visto que somente a barra horizontal tem carregamento.

O cálculos dos coeficientes de rigidez globais dos casos básicos (1), (2) e (3) são explicados nas Figuras 6.38, 6.39 e 6.40. Esse cálculo continua sendo feito somando-se os valores dos coeficientes de rigidez locais das barras que são mobilizadas na configuração deformada imposta em cada caso. Entretanto, para uma barra inclinada, a imposição de uma deslocabilidade na direção horizontal ou vertical acarreta deformações axiais e transversais combinadas. Por outro lado, esforços axiais e transversais na barra inclinada devem ser projetados para as direções horizontal e vertical para compor um coeficiente de rigidez global.

Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH

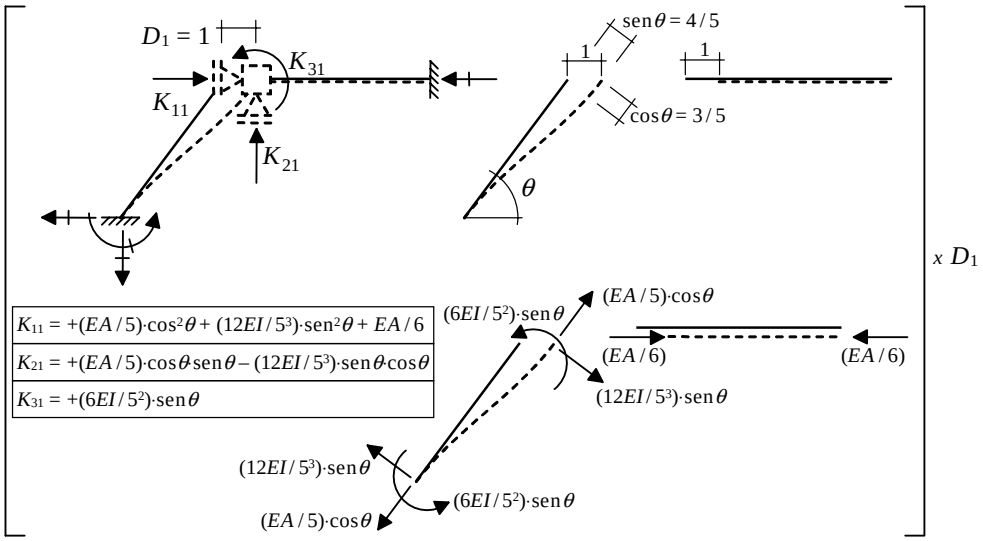


Figura 6.38 – Cálculo dos coeficientes de rigidez do caso (1) da estrutura da Figura 6.3.

O caso básico (1) da solução da estrutura da Figura 6.3 está detalhado na Figura 6.38. Observa-se nessa figura que o deslocamento horizontal $D_1 = 1$ imposto, quando projetado nas direções dos eixos locais da barra inclinada, tem uma componente axial igual a $\cos\theta$ e uma componente transversal igual a $\text{sen}\theta$, sendo θ o ângulo que a barra inclinada faz com o eixo horizontal da estrutura. Dessa forma, a barra inclinada é mobilizada tanto axialmente quanto transversalmente.

Com base nas componentes axial e transversal do deslocamento imposto, é possível determinar as forças e os momentos que devem atuar nas extremidades da barra inclinada para ela alcançar o equilíbrio na configuração deformada imposta. Os valores das forças e dos momentos são obtidos em função dos coeficientes de rigi-

dez locais da barra e estão indicados na Figura 6.38 nas direções dos seus eixos locais (com seus sentidos físicos reais).

Resta calcular os coeficientes de rigidez globais para o caso (1). Para determinar os coeficientes K_{11} e K_{21}, é necessário projetar as forças axial e transversal que atuam no topo da barra inclinada nas direções horizontal e vertical desses coeficientes. O coeficiente de rigidez K_{11} é obtido pela soma das projeções horizontais das forças axial e transversal com a força axial que atua na barra horizontal. O coeficiente de rigidez K_{21} é obtido pela soma das projeções verticais das forças axial e transversal no topo da barra inclinada, sendo que não há uma contribuição da barra horizontal para esse coeficiente. Finalmente, o coeficiente de rigidez K_{31} é calculado pela soma dos momentos que atuam nas extremidades das barras inclinada e horizontal, considerando os seus sentidos reais.

Os valores desses coeficientes estão mostrados na Figura 6.38 em função dos parâmetros de rigidez axial EA e de rigidez à flexão EI. Os valores numéricos dos coeficientes, indicados na Figura 6.6, foram calculados considerando o módulo de elasticidade do material $E = 1{,}2 \cdot 10^7$ kN / m², a área $A = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ m² e o momento de inércia $I = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ m⁴ da seção transversal das barras.

Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH

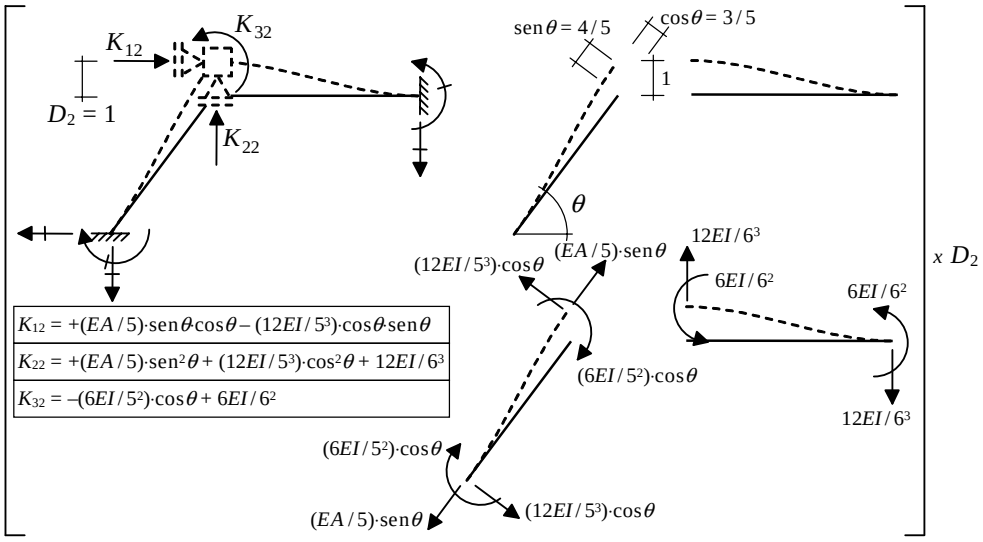


Figura 6.39 – Cálculo dos coeficientes de rigidez do caso (2) da estrutura da Figura 6.3.

A Figura 6.39 mostra o caso básico (2) da solução dessa estrutura. As projeções nas direções dos eixos locais da barra inclinada do deslocamento vertical $D_2 = 1$ resultam em uma componente axial igual a $\text{sen}\theta$ e em uma componente transversal igual a $\cos\theta$.

Utilizando os coeficientes de rigidez locais da barra inclinada, determinam-se as forças e os momentos que atuam nas suas extremidades para essa configuração deformada imposta.

O coeficiente de rigidez global K_{12} é obtido pela soma das projeções horizontais das forças axial e transversal no topo da barra inclinada, sendo que a barra horizontal não contribui para esse coeficiente (não foi mobilizada axialmente). O coeficiente de rigidez global K_{22} é calculado pela soma das projeções verticais das forças axial e transversal da barra inclinada com a força transversal da barra horizontal. O coeficiente de rigidez global K_{32} é obtido pela soma (com sinal) dos momentos que atuam nas duas barras nas extremidades que se tocam. Os valores finais desses três coeficientes estão indicados na Figura 6.7.

Caso (3) – Deslocabilidade D_3 isolada no SH

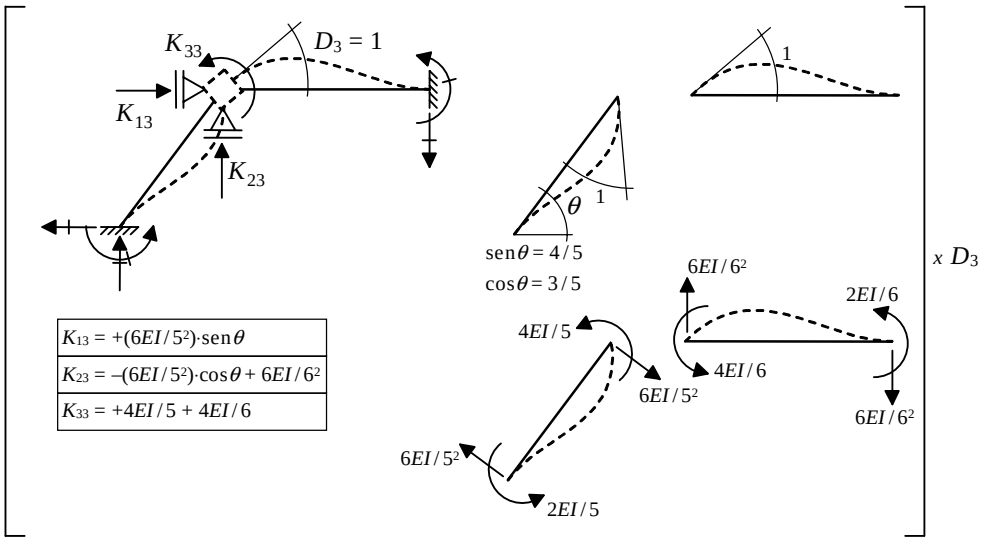


Figura 6.40 – Cálculo dos coeficientes de rigidez do caso (3) da estrutura da Figura 6.3.

O caso básico (3) do exemplo da barra inclinada é mais simples pois a rotação $D_3 = 1$ imposta provoca apenas configurações deformadas elementares (não compostas) nas duas barras. Para obter os coeficientes de rigidez globais desse caso basta projetar a contribuição da barra inclinada nas direções dos eixos globais e somá-la com a contribuição da barra horizontal. Isso está mostrado na Figura 6.40. Os valores finais desses coeficientes estão indicados na Figura 6.8.

Determinação do diagrama de momentos fletores finais

O sistema de equações de equilíbrio do Método dos Deslocamentos para o exemplo da barra inclinada já foi mostrado nas Seções 6.2 e 6.3. A solução dessas equações resulta nos valores das deslocabilidades da estrutura:

$D_1 = +0{,}45 \cdot 10^{-3}$ m;

$D_2 = -1{,}05 \cdot 10^{-3}$ m;

$D_3 = -0{,}75 \cdot 10^{-3}$ rad.

Com base nesses valores, é possível determinar o diagrama de momentos fletores finais da estrutura, o que é feito pela superposição dos diagramas dos casos básicos indicada na Figura 6.41.

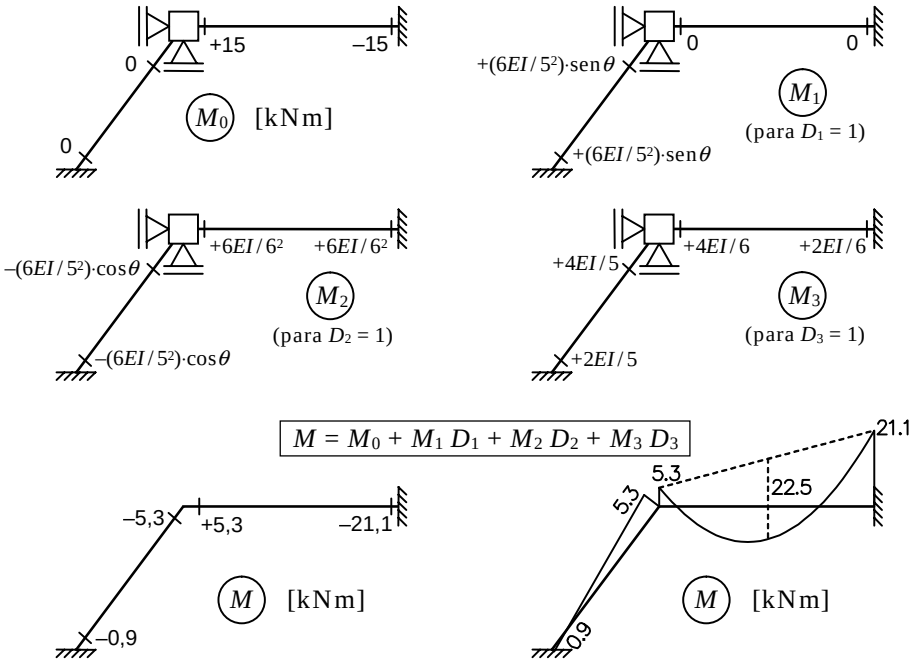


Figura 6.41 – Diagrama de momentos fletores finais da estrutura da Figura 6.3.

Observa-se pelo exemplo desta seção que a solução de uma estrutura com barra inclinada é um pouco mais complexa do que a solução de uma estrutura só com barras horizontais e verticais. No caso de barras inclinadas, os coeficientes de rigidez locais, nas direções locais, não podem ser somados diretamente para compor os coeficientes de rigidez globais. O procedimento adotado para determinar a contribuição dos coeficientes de rigidez locais de uma barra inclinada é dividido em duas etapas. Primeiro, uma deslocabilidade global do tipo deslocamento que é

imposta é decomposta em uma componente axial e outra transversal em relação à barra inclinada. Segundo, os coeficientes de rigidez locais gerados independentemente para as componentes axial e transversal da deslocabilidade são projetados nas direções da deslocabilidade global da estrutura (horizontal ou vertical).

Esse procedimento pode ser implementado de uma forma genérica em um programa de computador para a análise de estruturas pelo Método dos Deslocamentos. Isso será mostrado no Capítulo 9 como um dos procedimentos do Método da Rigidez Direta.

Os exemplos mostrados neste capítulo salientam a característica mais marcante do Método dos Deslocamentos: *a soma de contribuições de coeficientes de rigidez (locais) de barras para compor um coeficiente de rigidez global da estrutura*. Essa característica permite a concepção de algoritmos simples para a análise de estruturas. Isso é explorado na implementação de programas de computador, que em geral utilizam esse método. O Capítulo 9 mostra o algoritmo que é utilizado para montagem da matriz de rigidez global em função das matrizes de rigidez locais das barras que compõem a estrutura.

Entretanto, a resolução manual de uma estrutura pelo método é dificultada pelo número excessivo de equações de equilíbrio geradas (uma para cada deslocabilidade). A presença de barras inclinadas também torna a análise manual de estruturas muito trabalhosa. Pode-se concluir que a solução manual de uma estrutura pelo Método dos Deslocamentos para uma estrutura genérica (com muitas barras, sendo algumas inclinadas) é muito difícil de ser realizada.

Realmente, atualmente não se concebe mais analisar uma estrutura sem o auxílio de um programa de computador. Entretanto, algumas vezes é necessário analisar manualmente uma estrutura. Isso é feito, em geral, para se adquirir sensibilidade sobre o comportamento da estrutura ou para entender a metodologia de análise do Método dos Deslocamentos. Com esses objetivos, o próximo capítulo considera uma série de simplificações que são adotadas para viabilizar a resolução manual de uma estrutura por esse método.

7. MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS COM RESTRIÇÕES NAS DEFORMAÇÕES

O Método dos Deslocamentos, conforme apresentado no capítulo anterior, tem uma metodologia de cálculo bem mais simples do que a metodologia do Método das Forças, apresentado no Capítulo 5. Alguns aspectos podem ser enumerados para caracterizar esse fato. Por exemplo, no Método dos Deslocamentos só existe uma opção para a escolha do Sistema Hipergeométrico (estrutura cinematicamente determinada utilizada nos casos básicos), enquanto que no Método das Forças existem várias opções para a escolha do Sistema Principal (estrutura estaticamente determinada utilizada nos casos básicos). Também pode ser observado que o cálculo dos valores dos coeficientes de rigidez do sistema de equações finais de equilíbrio do Método dos Deslocamentos é muito mais simples (soma direta de coeficientes de rigidez de barras) do que o cálculo dos coeficientes de flexibilidade do Método das Forças (integrais de energia de deformação). Esses dois fatores justificam o fato da maioria dos programas de computador para análise de estruturas adotar o Método dos Deslocamentos em suas implementações.

Entretanto, a aplicação do método (na forma apresentada no capítulo anterior) para a resolução manual de uma estrutura é muito trabalhosa. Isso se deve ao número excessivo de incógnitas (deslocabilidades) que resulta da solução, mesmo para estruturas simples, e à complexidade na consideração de barras inclinadas.

Na verdade, a forma apresentada no capítulo anterior para o Método dos Deslocamentos é dirigida para uma solução por computador. A formalização do método para uma implementação computacional será vista no Capítulo 9, onde é apresentado o Método da Rigidez Direta.

Este capítulo faz uma apresentação do Método dos Deslocamentos de uma forma clássica, voltada para a resolução manual sem auxílio de computador, procurando diminuir ao máximo o número de deslocabilidades. Essa é forma em que o método era apresentado em livros tradicionais de análise de estruturas reticuladas, como o de Süssekind (1977-3).

Para tanto, são introduzidas simplificações no comportamento das barras com respeito às suas deformações. Isto é, são adotadas restrições nas deformações das barras, como, por exemplo, a hipótese de que as barras não se deformam axialmente. Essa hipótese também é adotada comumente na resolução manual pelo Método das Forças quando se despreza a parcela de energia de deformação axial no cálculo dos coeficientes de flexibilidade e termos de carga.

Resumindo, este capítulo apresenta o Método dos Deslocamentos com restrições nas deformações de barras com os seguintes objetivos:

- Reduzir o número de deslocabilidades da estrutura, visando principalmente uma resolução manual.
- Caracterizar o comportamento de pórticos (quadros) com respeito aos efeitos de deformações axiais e de deformações transversais por flexão das barras.

Embora a motivação inicial seja reduzir o número de deslocabilidades de uma estrutura, o segundo objetivo é o mais importante na presente abordagem. O elementos estruturais de um pórtico real têm deformações axiais muito menores do que as deformações transversais por flexão. Portanto, a consideração de barras sem deformação axial (chamadas de *barras inextensíveis*) é uma aproximação razoável para o comportamento de um quadro. A hipótese de barras inextensíveis possibilita o entendimento do conceito de *contraventamento* ou *travejamento* de pórticos, que é muito importante no projeto de estruturas. A apresentação desse conceito é um dos principais objetivos deste capítulo.

Além disso, este capítulo apresenta alguns macetes de cálculo, tal como eliminação de trechos em balanço, que também reduzem o número de incógnitas na solução pelo Método dos Deslocamentos, sem introduzir nenhuma simplificação quanto ao comportamento das estruturas.

7.1. Classificação das simplificações adotadas

Pode-se classificar as simplificações adotadas para diminuir o número de deslocabilidades na solução de uma estrutura reticulada em quatro tipos:

- "Eliminação" de trechos em balanço;
- Consideração de barras inextensíveis;
- Eliminação de deslocabilidades do tipo rotação de nós quando todas as barras adjacentes são articuladas no nó;
- Consideração de barras infinitamente rígidas.

A primeira simplificação é, na verdade, um macete de cálculo, visto que trechos em balanço de pórticos podem ter seus esforços internos determinados isostaticamente (basta calcular os esforços a partir das extremidades livres do balanço).

A Figura 7.1 mostra um exemplo dessa simplificação. A estrutura é dividida em duas partes: o trecho em balanço e o restante. O balanço é calculado como uma estrutura isostática engastada no ponto de contato com o restante do pórtico. O pórtico, sem o balanço, é calculado para uma força e um momento obtidos pelo transporte da força que atua no balanço para o ponto de contato.

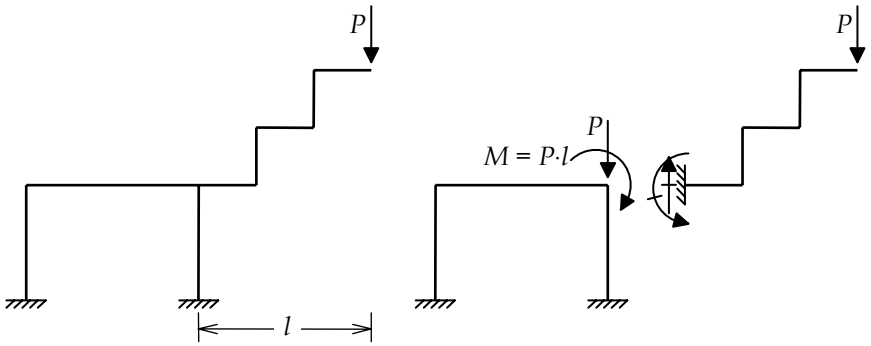


Figura 7.1 – Separação do trecho em balanço de um pórtico plano.

A conseqüência da solução do pórtico da Figura 7.1 com a "eliminação" do trecho em balanço é evidente. Considerando que cada nó sem restrição de apoio tem 3 deslocabilidades, a estrutura completa com balanço tem 21 deslocabilidades. A mesma estrutura sem o balanço tem apenas 6 deslocabilidades.

É obvio que o cálculo de deslocamentos nos pontos do balanço depende da resposta do restante da estrutura. Entretanto, esse cálculo pode ser feito por superposição de efeitos, somando-se aos deslocamentos do balanço, considerado como engastado, o movimento de corpo rígido associado aos deslocamentos e à rotação do ponto de contato do restante do pórtico com o balanço.

7.2. Consideração de barras inextensíveis

Uma simplificação comumente adotada na resolução manual de estruturas pelo Método dos Deslocamentos é a de que as barras não se deformam axialmente. Essa simplificação é chamada de *hipótese de barras inextensíveis* e está fundamentada no fato de que as barras usuais de um pórtico têm em geral uma deformação axial muito menor do que as deformações transversais devidas ao efeito de flexão. Um exemplo disso foi mostrado na Seção 4.3.1.1 do Capítulo 4.

Deve-se observar que a solução de uma estrutura com base nessa hipótese difere um pouco da solução sem a simplificação. Portanto, deve-se tomar cuidado com a adoção dessa hipótese, que só se justifica para a resolução manual de pórticos planos pequenos.

A consideração de barras sem deformação axial, com o objetivo de diminuir o número de deslocabilidades de uma estrutura reticulada, está sempre associada à hipótese de pequenos deslocamentos. A combinação dessas duas simplificações tem como conseqüência uma redução drástica no número de deslocabilidades do tipo translação, não afetando o número de deslocabilidades do tipo rotação. Isso é explicado em seguida.

Considere o pórtico da Figura 7.2, cujas colunas (barras verticais) por hipótese não têm deformação axial. Com essa hipótese, a distância entre um nó superior de um lado da estrutura e o nó correspondente na base não pode se alterar. Como os nós da base são fixos, os nós superiores têm seus movimentos restringidos a um arco de círculo centrado no nó correspondente da base, tal como indica a Figura 7.2-a. Esses arcos de círculo são os *lugares geométricos* (LG) que definem as possíveis posições que os nós superiores do pórtico podem ocupar quando se considera as colunas inextensíveis.

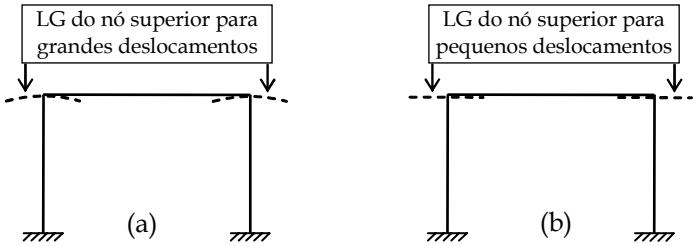


Figura 7.2 – Lugares geométricos (LG) dos nós superiores de um pórtico com colunas inextensíveis.

Adotando-se também a hipótese de pequenos deslocamentos, pode-se aproximar o arco de círculo por uma tangente ao círculo, tal como indicado na Figura 7.2-b. Dessa forma, o LG de um nó superior é uma reta horizontal transversal ao eixo da coluna correspondente.

Pode-se generalizar a conseqüência da combinação da hipótese de barras inextensíveis com a hipótese de pequenos deslocamentos da seguinte maneira:

- *Hipótese de barras inextensíveis* (com pequenos deslocamentos): os dois nós extremos de uma barra só podem se deslocar relativamente na direção transversal ao eixo da barra.

Com base nessa hipótese, analisa-se a configuração deformada do pórtico da Figura 7.3. As três barras do pórtico são inextensíveis e a solicitação é uma carga horizontal P aplicada no topo.

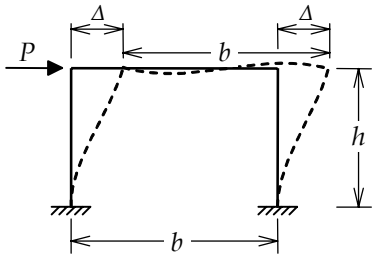


Figura 7.3 – Configuração deformada (ampliada exageradamente) de um pórtico com barras inextensíveis para uma carga horizontal no topo.

Observe na Figura 7.3 que os nós superiores na configuração deformada têm a mesma cota vertical h (em relação à base) da configuração indeformada, embora as colunas apresentem deslocamentos transversais por flexão. Aparentemente as colunas deveriam ter se alongado para isso ser possível. De maneira análoga, os dois nós superiores continuam tendo a mesma distância b entre si na configuração deformada (os nós superiores têm o mesmo deslocamento horizontal Δ), embora a viga tenha se deformado transversalmente.

Essas aparentes inconsistências só fazem sentido se os deslocamentos realmente forem pequenos. Na verdade, o que se considera com a hipótese de barras inextensíveis (com pequenos deslocamentos) é: *a distância, na direção do eixo indeformado, entre os dois nós extremos de uma barra não se altera quando esta se deforma transversalmente por flexão.*

A consideração de barras inextensíveis para a estrutura da Figura 7.3 resulta na redução do número de deslocabilidades do tipo translação. A Figura 7.4-a indica as deslocabilidades dessa estrutura para o caso de barras extensíveis e a Figura 7.4-b indica as deslocabilidades para o caso de barras inextensíveis. Neste caso, como os LG's dos dois nós superiores são retas horizontais, esses nós não têm deslocamentos verticais. Portanto, $D_2 = 0$ e $D_5 = 0$, isto é, duas deslocabilidades do tipo translação são eliminadas. Além disso, os dois nós superiores têm deslocamentos horizontais que são iguais, portanto $D_4 = D_1$. Isso elimina mais uma deslocabilidade do tipo translação, pois o mesmo parâmetro de deslocabilidade horizontal está associado aos dois nós superiores. Portanto, o número de deslocabilidades é reduzido de 6 para 3.

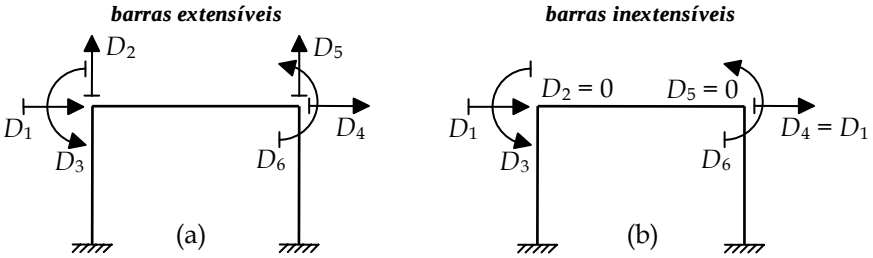


Figura 7.4 – Redução do número de deslocabilidades para o pórtico da Figura 7.3.

Como foi dito, a consideração de barras inextensíveis não afeta as deslocabilidades do tipo rotação. Essa hipótese apenas reduz o número de deslocabilidades do tipo translação.

Entretanto, essa vantagem é acompanhada de uma desvantagem, que é a complexidade na identificação das deslocabilidades do tipo translação. A Seção 7.2.2 resume as regras que são utilizadas para determinar deslocabilidades do tipo translação em pórticos planos com barras inextensíveis.

Com a simplificação de barras inextensíveis é feita uma renumeração das deslocabilidades resultantes. É costume numerar primeiro as deslocabilidades do tipo rotação e depois as deslocabilidades do tipo translação. Para a estrutura da Figura 7.3, isso resulta na numeração mostrada na Figura 7.5. A Figura 7.5-a indica as deslocabilidades com a notação adotada, e a Figura 7.5-b indica a interpretação física das deslocabilidades.

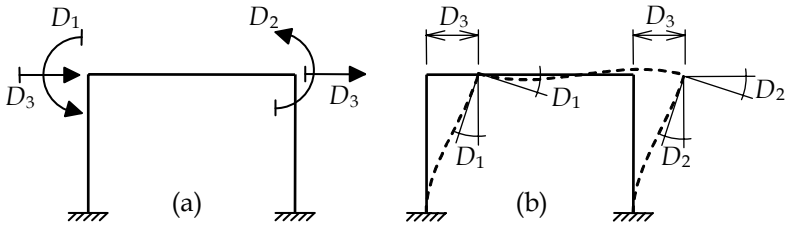


Figura 7.5 – Renumeração das deslocabilidades para o pórtico da Figura 7.3.

No restante deste livro a seguinte terminologia será adotada (Süssekind 1977-3):

- *Deslocabilidades internas*: são as deslocabilidades do tipo rotação.
- *Deslocabilidades externas*: são as deslocabilidades do tipo translação.
- *di*: número total de deslocabilidades internas.
- *de*: número total de deslocabilidades externas.

Na estrutura da Figura 7.5, D_1 e D_2 são deslocabilidades internas, D_3 é uma deslocabilidade externa, *di* = 2 e *de* = 1.

7.2.1. Exemplo de solução de pórtico com barras inextensíveis

Para exemplificar a solução de um pórtico plano com barras inextensíveis pelo Método dos Deslocamentos, o exemplo adotado na Seção 6.6.2 será analisado novamente. O objetivo é fazer uma comparação com a solução com barras extensíveis do capítulo anterior. A Figura 7.6 mostra o modelo estrutural desse exemplo.

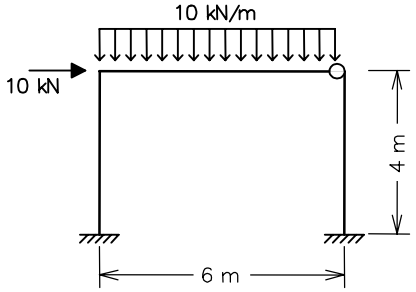


Figura 7.6 – Exemplo de pórtico com barras inextensíveis e articulação na viga.

Assim como na Seção 6.6.2, a articulação do nó superior direito é considerada na extremidade direita da barra horizontal (da viga). A Seção 7.3 vai mostrar outras possibilidades para considerar essa articulação.

As três barras inextensíveis têm a mesma seção transversal, com momento de inércia I, e material com módulo de elasticidade E. Na Seção 6.6.2 foi adotada uma relação entre a área e o momento de inércia da seção transversal dada por $A/I = 2$ m^{-2}. A hipótese de barras inextensíveis é análoga a considerar um valor infinito para essa relação.

A Figura 7.7 mostra as deslocabilidades e o correspondente Sistema Hipergeométrico (SH) da estrutura da Figura 7.6. Observa-se nessa figura que o SH apresenta apenas três apoios fictícios.

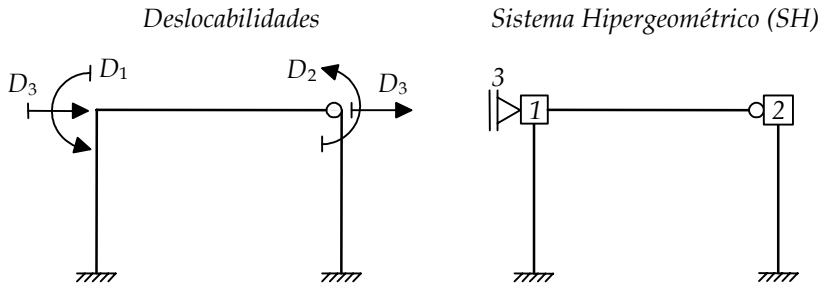


Figura 7.7 – Deslocabilidades e Sistema Hipergeométrico da estrutura da Figura 7.6.

Com respeito às deslocabilidades internas, as chapas *1* e *2* do SH fixam as rotações D_1 e D_2 dos nós superiores. Observa-se que a chapa *2* impede a rotação da seção do topo da coluna, pois a articulação interna está sendo considerada (modelada) na extremidade direita da viga. Vê-se que a consideração de barras inextensíveis não altera a adição de apoios para o impedimento de deslocabilidades internas: na criação do SH, uma chapa fictícia é adicionada para cada rotação livre.

Por outro lado, a adição de apoios no SH para impedir deslocabilidades externas requer uma análise adicional. Como os nós superiores não têm deslocamentos verticais (colunas inextensíveis), não é necessário adicionar apoios fictícios para impedir esses deslocamentos. Além disso, apenas um apoio (o apoio *3*) é necessário para fixar o deslocamento horizontal D_3 dos dois nós superiores. Como a viga é inextensível, o apoio *3* adicionado no nó superior esquerdo também impede o deslocamento horizontal do nó superior direito. Na verdade, o apoio *3* pode ser colocado indistintamente em qualquer um dos dois nós superiores. Nas duas situações o movimento horizontal dos nós superiores fica impedido.

Esse exemplo mostra que a criação do SH (e a identificação das deslocabilidades) de um pórtico com barras inextensíveis não é tão direta como é para o caso de barras extensíveis. Com barras extensíveis, cada nó superior do pórtico tem três deslocabilidades (dois deslocamentos e uma rotação). Portanto, a criação do SH é

simples: basta adicionar três apoios fictícios por nó (veja a Figura 6.29). Já no caso de barras inextensíveis, a criação do SH do exemplo é feita em duas fases. Na primeira, são inseridas duas chapas para impedir as deslocabilidades internas. Na segunda é feita uma análise para identificar que é necessário inserir apenas um apoio fictício no SH para fixar a deslocabilidade externa.

Essa análise adicional é o preço que se paga para diminuir o número de deslocabilidades quando se adota a hipótese de barras inextensíveis. Isso pode ser relativamente complexo no caso geral, principalmente quando existirem barras inclinadas. A Seção 7.2.2 a seguir estabelece regras gerais para a adição de apoios fictícios no SH para impedir deslocabilidades externas de pórticos planos com barras inextensíveis.

Uma vez obtido o SH da estrutura da Figura 7.6, a metodologia de cálculo do Método dos Deslocamentos segue o procedimento padrão de superposição de casos básicos. Como a estrutura tem três deslocabilidades, existem quatro casos básicos: o caso (0) isola o efeito da solicitação externa no SH e os demais casos isolam, individualmente, os efeitos das deslocabilidades. Isso é mostrado a seguir.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

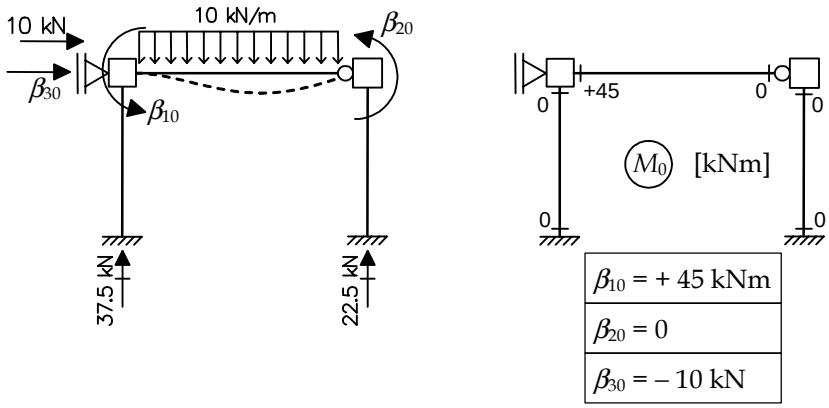


Figura 7.8 – Caso (0) da estrutura da Figura 7.6.

A Figura 7.8 mostra que o caso (0) desse exemplo é semelhante ao do exemplo da Seção 6.6.2 com barras extensíveis. A principal diferença está na transmissão dos esforços cortantes das extremidades da viga para esforços normais nas colunas. Como não foram adicionados apoios fictícios no SH para impedir os deslocamentos verticais dos nós superiores, a viga vai buscar apoio na base da estrutura. Isto é, os cortantes que devem atuar nas extremidades da viga (com os dois nós extremos engastados) são fornecidos pelas reações verticais dos apoios originais da base da estrutura. Vê-se que as colunas, por serem inextensíveis, têm que transmitir, via esforço axial, as reações da base para os cortantes nas extremidades da viga.

Essa análise leva a concluir que as colunas inextensíveis têm esforços normais indefinidos *a priori*. Isto é, os esforços normais nas colunas são conseqüência dos esforços cortantes na viga. De fato, como a barra não tem deformação axial, o seu esforço axial pode assumir qualquer valor.

Visto de uma outra forma, as colunas inextensíveis são requisitadas a transmitir (via esforço normal) os esforços cortantes das extremidades da viga em substituição aos apoios fictícios que não foram necessários para criar o SH.

Observa-se também que a determinação das reações nos apoios do SH (tanto reais quanto fictícios) é feita com base na configuração deformada que é imposta. No caso (0) mostrado na Figura 7.8, as reações verticais da base foram determinadas pelos valores dos esforços cortantes que devem atuar nas extremidades da viga para que ela tenha uma configuração deformada com todos os nós fixos e a solicitação externa atuando.

Isso é uma característica do Método dos Deslocamentos. É sempre assim: *conhece-se a configuração deformada e, então, se determinam os esforços e reações de apoio*.

Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH

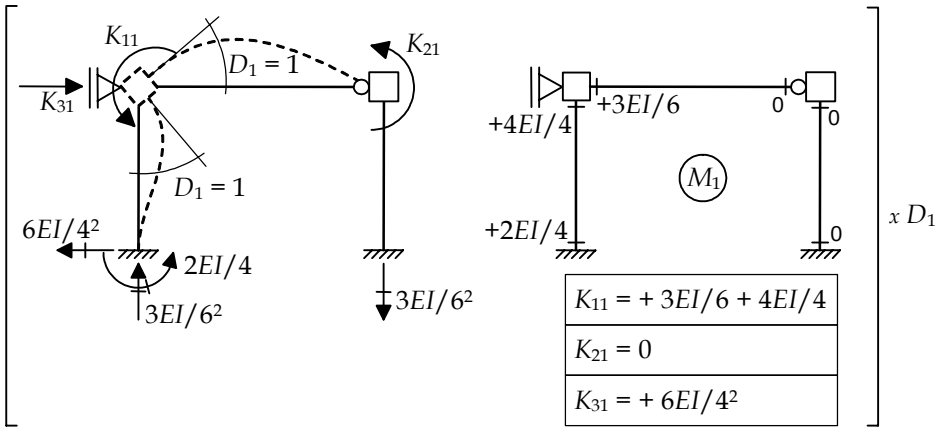


Figura 7.9 – Caso (1) da estrutura da Figura 7.6.

O caso (1) desse exemplo está mostrado na Figura 7.9. Os coeficientes de rigidez globais correspondentes a esse caso também estão indicados na figura. Como no caso (0) acima, as reações verticais dos apoios da base são determinadas pelos esforços cortantes que devem atuar nas extremidades da viga, que são transmitidos via esforços normais pelas colunas.

Essa transmissão pode ser entendida com base na Figura 7.10, que mostra as barras do caso (1) isoladas, indicando os esforços que atuam nas suas extremidades. Observa-se que o coeficiente K_{11} é obtido pela soma dos momentos que devem atuar nas extremidades da viga e da coluna que sofrem a rotação $D_1 = 1$ que é imposta.

O coeficiente K_{21} é nulo pois a viga é articulada na direita, não aparecendo um momento na chapa 2. O coeficiente K_{31} corresponde ao esforço cortante no topo da coluna da esquerda. E, finalmente, observa-se que os esforços cortantes nas extremidades da viga correspondem aos esforços normais nas colunas.

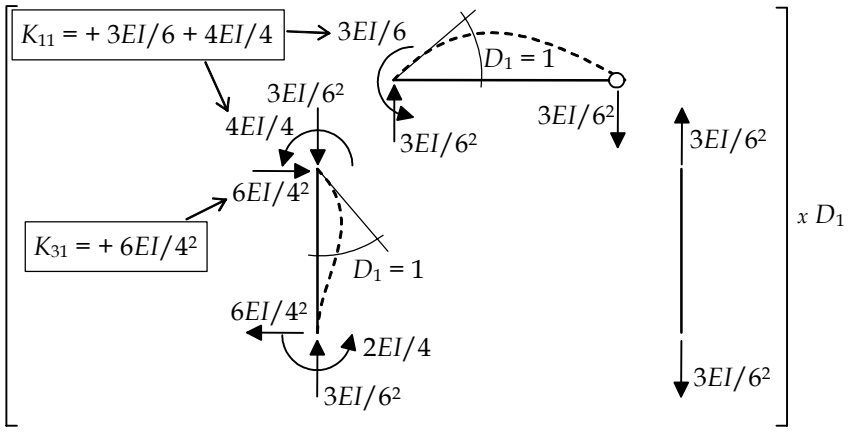


Figura 7.10 – Isolamento das barras no caso (1) da estrutura da Figura 7.6.

É interessante comparar esse caso com o correspondente para barras extensíveis, indicado na Figura 6.33. Para barras extensíveis, como existem apoios fictícios no SH que impedem os deslocamentos verticais dos nós superiores, os cortantes nas extremidades da viga não são transmitidos para as colunas e "morrem" logo nos apoios adjacentes.

Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH

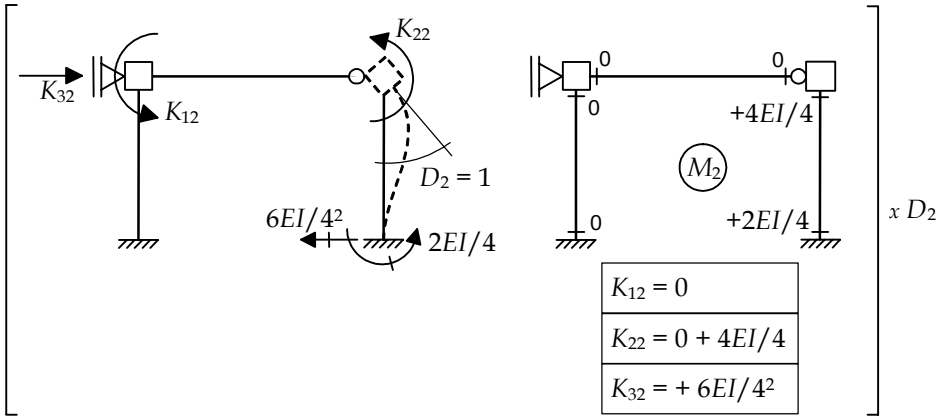


Figura 7.11 – Caso (2) da estrutura da Figura 7.6.

A Figura 7.11 indica o caso (2) desse exemplo, com os correspondentes coeficientes de rigidez globais. A característica mais importante a ser observada nesse caso é que o coeficiente de rigidez K_{32} corresponde ao esforço cortante no topo da coluna da direita. Isto é, o apoio 3, que fica na esquerda do pórtico, está recebendo o esforço cortante da coluna do outro lado. Esse esforço cortante está sendo transmitido via esforço normal pela viga, tal como é mostrado na Figura 7.12.

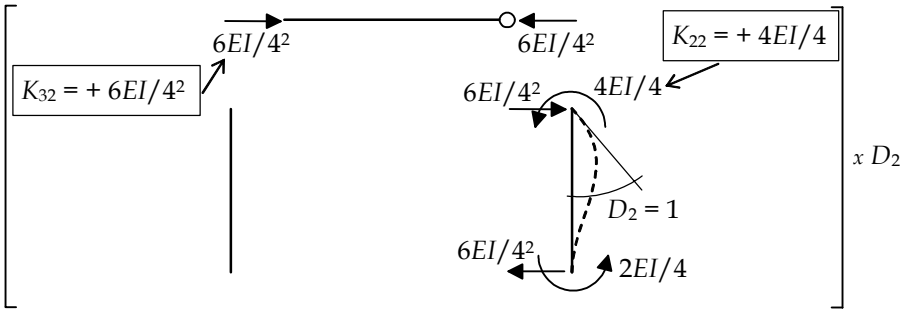


Figura 7.12 – Isolamento das barras no caso (2) da estrutura da Figura 7.6.

Observe que a configuração deformada do SH nesse caso é a mesma que no caso correspondente para barras extensíveis mostrado na Figura 6.36. Entretanto, naquele caso a viga não é solicitada a esforço normal, pois existe um apoio adjacente ao nó superior direito que impede o seu deslocamento horizontal.

Esse tipo de análise evidencia a complexidade adicional da resolução pelo Método dos Deslocamentos para barras inextensíveis. A grande vantagem desse método era justamente a simplicidade nos procedimentos, que podiam ser facilmente automatizados. Por isso, na implementação computacional do método, considera-se em geral barras sem nenhuma restrição nas deformações, embora isso acarrete um maior número de incógnitas. A análise com a hipótese de barras inextensíveis, como dito, só se justifica na resolução manual.

Existe uma maneira alternativa para se determinar o valor do coeficiente de rigidez K_{32}, que é baseada no equilíbrio global do SH. O ponto de partida dentro da metodologia do Método dos Deslocamentos é sempre a configuração deformada imposta. Com base na configuração deformada do caso (2), na qual é imposta uma rotação $D_2 = 1$, os esforços cortantes e momentos fletores de todas as barras ficam determinados. Por conseguinte, as reações de apoio na base da estrutura também ficam determinadas. Nesse caso, como mostra a Figura 7.11, a reação horizontal na coluna da esquerda é nula e a reação horizontal na coluna da direita é igual a $6EI/4^2$, da direita para a esquerda Finalmente, o coeficiente de rigidez K_{32} é determinado impondo que o somatório de todas as forças horizontais seja nulo.

Essa maneira alternativa nem sempre é possível de ser aplicada. Nesse caso foi possível pois existia apenas uma incógnita com relação ao equilíbrio na direção

horizontal. Essa alternativa por equilíbrio global do SH vai ser salientada em outros exemplos no restante do capítulo.

Caso (3) – Deslocabilidade D_3 isolada no SH

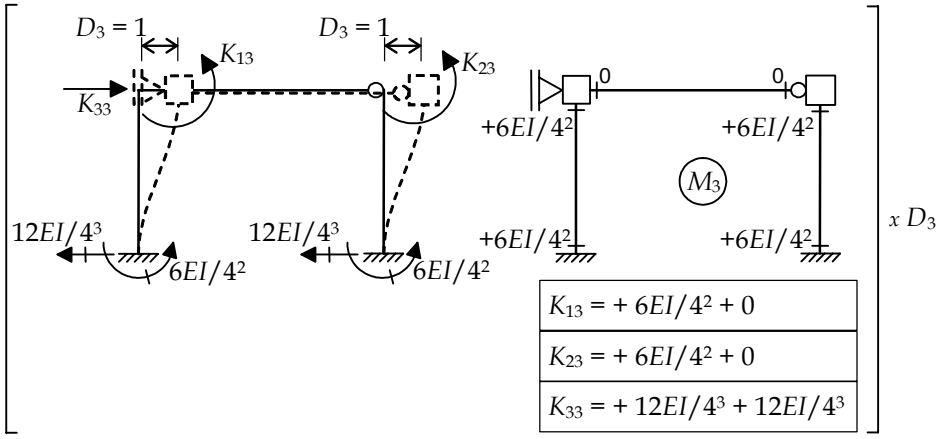


Figura 7.13 – Caso (3) da estrutura da Figura 7.6.

O último caso desse exemplo é mostrado na Figura 7.13. O caso (3) mostra que a análise para barras inextensíveis pode ser bastante diferente da análise para barras extensíveis. Com barras inextensíveis, quando é imposto um deslocamento $D_3 = 1$ no caso (3), os dois nós superiores sofrem o mesmo movimento horizontal, pois a viga nunca pode ter seu comprimento alterado. Isso significa que um deslocamento imposto em um nó pode acarretar um deslocamento de outro nó, o que nunca acontece para o caso de barras extensíveis.

Dessa forma, as duas colunas são mobilizadas (se deformam) quando o deslocamento $D_3 = 1$ é imposto. Por outro lado, a viga não se deforma pois as rotações nas extremidades estão fixas, tendo apenas um movimento de corpo rígido.

A Figura 7.14 explica a determinação dos coeficientes de rigidez globais desse caso. Como se vê nessa figura, os coeficientes de rigidez K_{13} e K_{23} correspondem aos momentos fletores que devem atuar no topo das colunas quando é imposto um deslocamento horizontal unitário no topo, mantendo a rotação fixa. O coeficiente de rigidez K_{33} corresponde aos esforços cortantes no topo das colunas, sendo que o esforço cortante da coluna da direita é transmitido ao apoio fictício *3* do SH via esforço normal na viga.

Alternativamente, o coeficiente de rigidez K_{33} pode ser determinado pelo equilíbrio global do SH. Para tanto, as reações horizontais na base do pórtico ficam determinadas *a priori* pela configuração deformada das colunas (iguais a $12EI/4^3$, da direita para esquerda). A imposição de somatório nulo das forças horizontais resulta em $K_{33} = +24EI/4^3$.

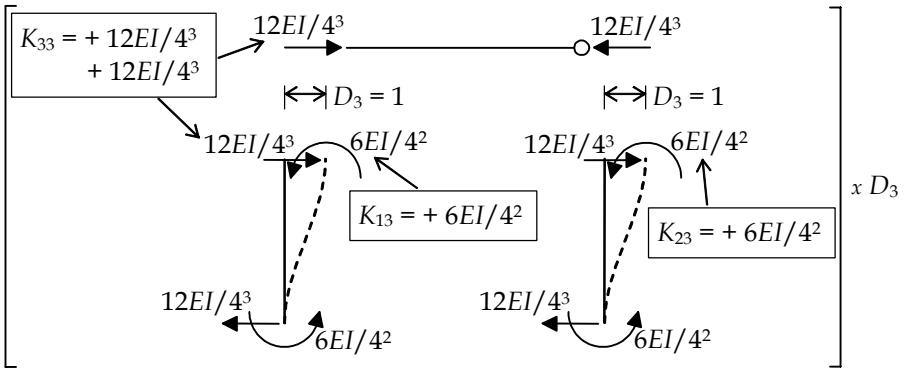


Figura 7.14 – Isolamento das barras no caso (3) da estrutura da Figura 7.6.

Equações de equilíbrio e determinação do diagrama de momentos fletores finais

O sistema de equações de equilíbrio do Método dos Deslocamentos para esse exemplo é mostrado abaixo com a correspondente solução para as deslocabilidades (em função de $1/EI$):

$$\begin{Bmatrix}\beta_{10}\\ \beta_{20}\\ \beta_{30}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}D_1\\ D_2\\ D_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix}+45\\ 0\\ -10\end{Bmatrix}+EI\begin{bmatrix}3/2 & 0 & 3/8\\ 0 & 1 & 3/8\\ 3/8 & 3/8 & 3/8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}D_1\\ D_2\\ D_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}D_1 = -67{,}78/EI\\ D_2 = -56{,}66/EI\\ D_3 = +151{,}06/EI\end{cases}.$$

Observa-se que os valores das deslocabilidades para a solução com barras inextensíveis são ligeiramente diferentes dos valores das deslocabilidades correspondentes na solução com barras extensíveis da Seção 6.6.2 do Capítulo 6. A rotação D_1 da presente solução corresponde à rotação D_3 = –68,75/EI do exemplo da Seção 6.6.2. A rotação D_2 acima corresponde à rotação D_6 = –51,45/EI para barras extensíveis. Finalmente, o deslocamento horizontal D_3 da solução com barras inextensíveis tem um valor intermediário entre os valores das deslocabilidades horizontais (D_1 = +156,55/EI e D_4 = +137,25/EI) dos nós superiores do pórtico com barras extensíveis.

A configuração deformada final da estrutura e o diagrama de momentos fletores, obtido pela superposição dos diagramas dos casos básicos dada pela Equação (6.4), estão indicados na Figura 7.15. Comparando essa figura com a Figura 6.37 da solução com barras extensíveis, observa-se que os momentos fletores finais das duas soluções são próximos.

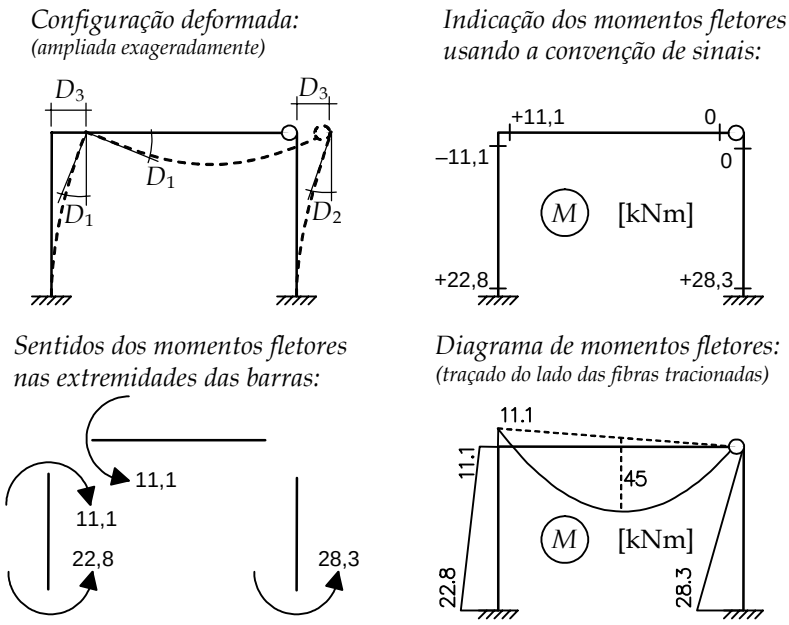


Figura 7.15 – Configuração deformada e diagrama de momentos fletores da estrutura da Figura 7.6.

Na comparação entre as soluções do pórtico analisado com e sem a consideração da hipótese de barras inextensíveis, deve-se levar em conta que na Seção 6.6.2 foi adotada uma relação entre a área e o momento de inércia da seção transversal dada por $A/I = 2\ m^{-2}$, que é um valor pequeno em relação a valores utilizados em estruturas usuais. Quanto maior for esta relação para uma barra, mais próxima ela estará do comportamento inextensível. Apesar disso, as diferenças entre as duas soluções analisadas não são muito grandes. Isso demonstra que a hipótese de barras inextensíveis fornece uma boa aproximação para a solução de pórticos feita manualmente.

7.2.2. Regras para determinação de deslocabilidades externas de pórticos planos com barras inextensíveis

No exemplo resolvido na seção anterior foi visto que a identificação das deslocabilidades externas quando se adota a hipótese de barras inextensíveis requer uma análise adicional para identificar as possíveis translações que os nós de um pórtico podem sofrer. O exemplo estudado é relativamente simples, pois só tem uma barra horizontal e duas verticais.

O objetivo desta seção é estabelecer regras para a identificação de deslocabilidades externas (translações) de um pórtico plano qualquer com barras inextensíveis, incluindo barras inclinadas.

Na verdade, como vai ser visto, a maneira mais simples de se determinar as deslocabilidades externas de um pórtico com barras inextensíveis é introduzindo os apoios fictícios para a criação do SH: *a cada apoio necessário para fixar uma translação nodal é identificada uma deslocabilidade externa*.

As regras apresentadas a seguir são chamadas de *regras de triangulação*. Para entender essas regras, considere o pórtico com duas barras inextensíveis mostrado na Figura 7.16.

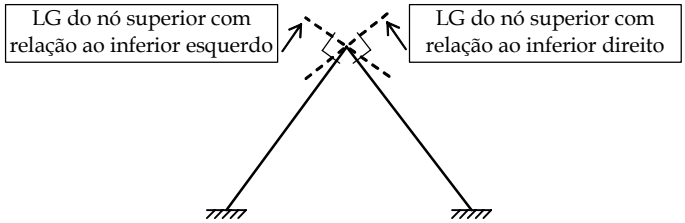


Figura 7.16 – Triangulação formada por um nó ligado a dois nós fixo por duas barras.

De acordo com a hipótese de barras inextensíveis, o nó superior da estrutura da Figura 7.16 só pode se deslocar relativamente ao nó inferior esquerdo perpendicularmente à barra da esquerda. Isso define um lugar geométrico (LG) para o nó superior. Outro LG é definido com relação ao nó inferior direito: ele só pode se deslocar transversalmente à barra da direita. Como o movimento do nó superior tem que satisfazer simultaneamente aos seus dois LG's, o deslocamento do nó é nulo. Isto é, a única posição possível do nó na configuração deformada da estrutura é a sua posição original. Portanto, o nó superior não tem deslocabilidades externas.

Com base nesse raciocínio, para impedir deslocabilidades externas de um pórtico plano com barras inextensíveis, são definidas duas regras para a adição de apoios fictícios no SH:

1. Um nó que estiver ligado a dois nós fixos à translação por duas barras inextensíveis não alinhadas (formando um triângulo) também fica fixo à translação. Portanto, não é necessário adicionar um apoio fictício a esse nó. Caso o nó só esteja ligado a um nó fixo por uma barra, ou a dois nós fixos por duas barras alinhadas, deve-se adicionar um apoio para impedir o deslocamento na direção transversal ao eixo dessa(s) barra(s).
2. Um conjunto de barras inextensíveis agrupadas em uma triangulação se comporta como um corpo rígido para translações. Portanto, deve-se procurar adicionar apoios para impedir o movimento de corpo rígido do conjunto.

Alguns exemplos da aplicação dessas regras são apresentados a seguir para a determinação do SH de pórticos com barras inextensíveis. As deslocabilidades não são indicadas: cada uma é identificada por um apoio fictício necessário para fixar os nós da estrutura.

Esses exemplos são analisados apenas com respeito às deslocabilidades externas. Entretanto, as chapas fictícias que são adicionadas para impedir deslocabilidades internas também são indicadas. Uma chapa fictícia é adicionada para cada nó que tem a sua rotação livre. Os apoios fictícios são numerados da seguinte maneira: primeiro numeram-se as chapas que impedem as deslocabilidades internas; em seguida os apoios que impedem as deslocabilidades externas são numerados.

O primeiro exemplo corresponde a um pórtico com dois pavimentos. Existem três situações: pavimentos sem barras diagonais (Figura 7.17), primeiro pavimento com uma diagonal e segundo pavimento sem diagonal (Figura 7.18), e os dois pavimentos com diagonal (Figura 7.19).

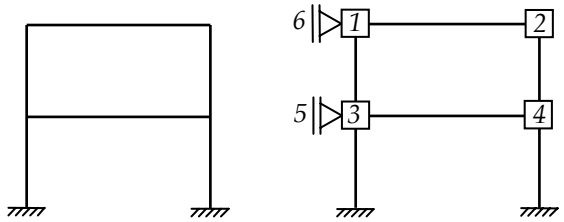


Figura 7.17 – SH de um pórtico com dois pavimentos sem barras diagonais.

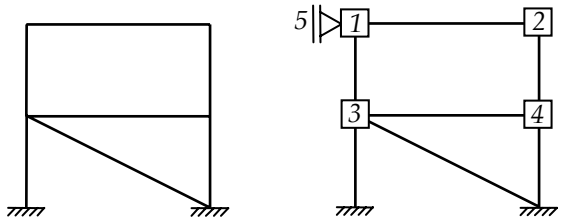


Figura 7.18 – SH de um pórtico com dois pavimentos e uma diagonal no primeiro pavimento.

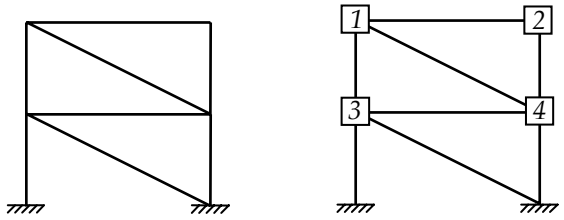


Figura 7.19 – SH de um pórtico com dois pavimentos e uma diagonal em cada pavimento.

No pórtico da Figura 7.17, pela regra 1, é necessário adicionar o apoio *5* para impedir o movimento horizontal do nó da esquerda do primeiro pavimento (o nó que tem a chapa *3*). Isso faz com que, também pela regra 1, o nó da direita desse pavimento não tenha deslocamento. Isto é, o nó com a chapa *4* tem seus movimentos impedidos pois está ligado por duas barras inextensíveis e não alinhadas a dois nós

fixos à translação (o nó com o apoio *5* e o nó da base na direita), formando uma triangulação. Portanto, não é necessário inserir mais apoios fictícios nesse pavimento. Observe que o apoio *5* pode ser colocado tanto no nó da esquerda quanto no da direita para impedir o deslocamento horizontal desse pavimento (os nós do pavimento não têm deslocamentos verticais pois as colunas são inextensíveis).

Por raciocínio análogo, no segundo pavimento do pórtico da Figura 7.17, é necessário adicionar apenas o apoio *6* para fixar os nós desse pavimento. Parte-se da condição de que os nós do primeiro pavimento já estão fixos.

Para essa estrutura, contabilizando o número de chapas e apoios fictícios que foram inseridos para criar o SH, o número de deslocabilidades internas é $di = 4$ e o número de deslocabilidades externas é $de = 2$.

No pórtico com uma diagonal no primeiro pavimento mostrado na Figura 7.18 já existe uma triangulação formada pelos dois nós da base com o nó que tem a chapa *3*. Portanto, pela regra 1, este nó já está fixo e não é necessário adicionar um apoio para impedir a translação horizontal do primeiro pavimento. Para o segundo pavimento, o comportamento é igual ao da estrutura anterior, e é necessário adicionar o apoio *5* fixar os nós do pavimento. Nesse caso, $di = 4$ e $de = 1$.

No último pórtico dessa série, o pórtico com duas diagonais mostrado na Figura 7.19, observa-se que, pela regra 1 de triangulação, não é necessário inserir nenhum apoio para impedir deslocabilidades externas ($di = 4$ e $de = 0$). Esse pórtico, por não ter deslocabilidades do tipo translação, é chamado de *pórtico indeslocável* (Süssekind 1977-3).

As barras inclinadas dos exemplos acima têm a função de impedir deslocamentos horizontais dos pavimentos. Essas barras são chamadas de barras de *contraventamento* ou *travejamento*, em uma alusão ao fato que essas barras enrijecem a estrutura para resistir a cargas laterais de vento. Na verdade, elas aumentam a rigidez do pórtico não somente para resistir a cargas laterais, mas também a cargas verticais que também podem provocar deslocamentos horizontais, dependendo da configuração do pórtico.

O conceito de contraventamento de pórticos, isto é, *de inserção de barras diagonais em painéis da estrutura*, é muito importante no projeto estrutural, principalmente no caso de estruturas metálicas que têm as peças estruturais mais esbeltas do que no caso de estruturas de concreto armado, por exemplo. É necessário *contraventar* uma estrutura para impedir o aparecimento de grandes deslocamentos horizontais. Um pórtico sem barras inclinadas de contraventamento pode apresentar, apenas por causa das deformações por flexão das barras, deslocamentos horizontais muito grandes, incompatíveis com o bom funcionamento de uma estrutura civil.

É necessário entender que sempre vão aparecer deslocamentos horizontais em um pórtico, mesmo com barras de contraventamento, pois estas também se deformam axialmente. Entretanto, como a deformação axial de uma barra usual de uma es-

trutura é muito menor do que as deformações transversais por flexão, os deslocamentos horizontais são muito menores quando se projeta uma estrutura com barras de contraventamento.

Um outro exemplo de um pórtico contraventado é mostrado na Figura 7.20. É interessante observar que, para tornar esta estrutura indeslocável, só é necessário introduzir uma barra inclinada por pavimento (em apenas um compartimento ou baia por pavimento). Isto é, como as vigas do pavimento são inextensíveis, basta que um nó do pavimento tenha o seu movimento horizontal impedido para que todos os outros nós do pavimento também tenham seus deslocamentos horizontais impedidos. Na estrutura da Figura 7.20, por triangulação, o nó com a chapa *7* está fixo. Também por triangulação, todos os outros nós do pavimento ficam fixos. Para o pavimento superior, o mesmo raciocínio se aplica. Partindo do fato de que os nós do primeiro pavimento estão fixos, observa-se que a única diagonal do segundo pavimento é suficiente para contraventar esse pavimento.

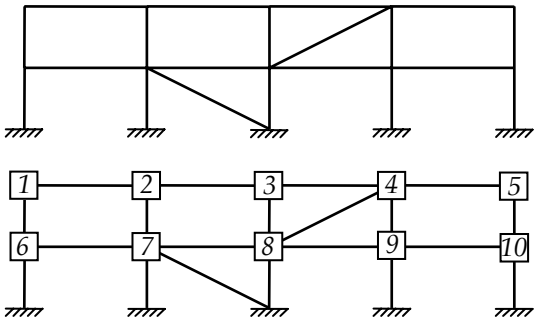


Figura 7.20 – SH de um pórtico com dois pavimentos e contraventado em uma baia por pavimento.

No contraventamento de pórticos, é comum colocar duas diagonais com inclinações opostas por pavimento. Isso porque, dependendo do sentido das cargas laterais, uma diagonal vai trabalhar à compressão e a outra à tração. Esse procedimento é adotado para evitar que o contraventamento deixe de surtir efeito no caso da diagonal que trabalha à compressão perder a estabilidade quando submetida a valores altos de esforços axiais (a perda de estabilidade de barras submetidas a esforços de compressão é um fenômeno que se denomina *flambagem*). A Figura 7.21 mostra o exemplo de um pórtico com dois pavimentos contraventado com dois tirantes por pavimento. Um tirante contraventa o pavimento para cargas laterais da esquerda para direita e o outro tirante para cargas laterais no sentido oposto.

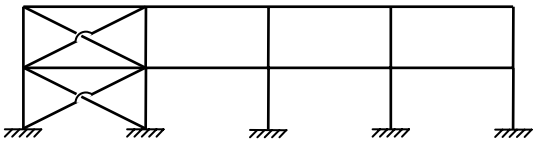


Figura 7.21 – Pórtico com dois pavimentos contraventado com dois tirantes por pavimento.

A seqüência de pórticos mostrados nas Figuras 7.22 a 7.25 analisa a criação do SH para uma estrutura com três painéis no segundo pavimento, mas sem as colunas centrais no primeiro pavimento.

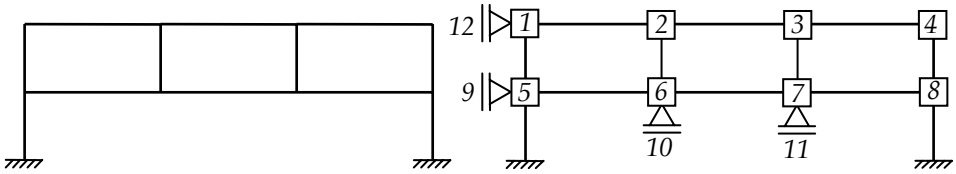


Figura 7.22 – SH de um pórtico com três painéis sem diagonais.

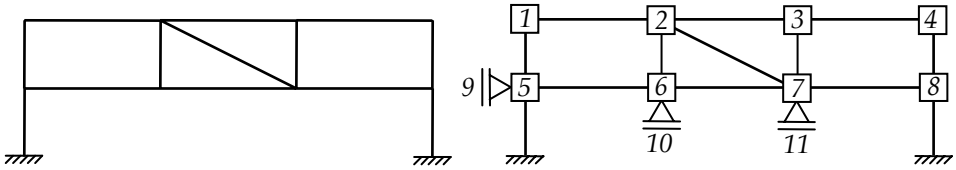


Figura 7.23 – SH de um pórtico com três painéis e uma diagonal no painel central.

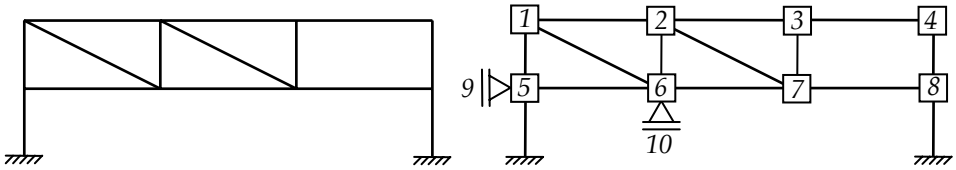


Figura 7.24 – SH de um pórtico com três painéis e duas diagonais.

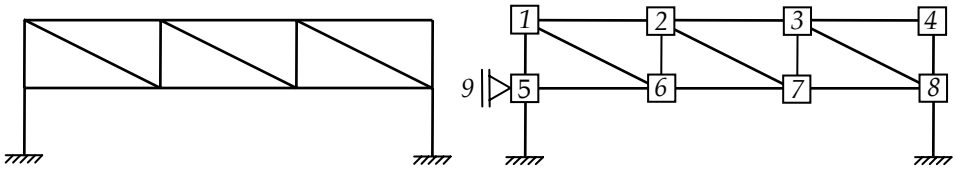


Figura 7.25 – SH de um pórtico com três painéis e três diagonais.

O primeiro pórtico, mostrado na Figura 7.22, não tem barras inclinadas nos painéis. Nesse caso, o apoio *9* adicionado no nó da esquerda do primeiro pavimento é suficiente para impedir o movimento horizontal de todos os nós desse pavimento. Entretanto, somente os nós que têm as chapas *5* e *8* têm os deslocamentos verticais fixos, pois não existem colunas no pavimento inferior para restringir os deslocamentos verticais dos outros nós. Portanto, os apoios *10* e *11* são inseridos para impedir esses deslocamentos verticais. Para o segundo pavimento, como não existem barras inclinadas, é necessário inserir o apoio *12* para impedir o deslocamento ho-

rizontal do pavimento. Os deslocamentos verticais de todos os nós do segundo pavimento são nulos pois eles estão ligados por colunas (inextensíveis) aos nós do primeiro pavimento, que estão todos fixos. Portanto, mais nenhum apoio é necessário para criar o SH. O resultado em termos do número de deslocabilidades é $di = 8$ e $de = 4$.

O segundo pórtico dessa série (Figura 7.23) tem uma diagonal no painel central do seu segundo pavimento. Após a inserção dos apoios *10* e *11*, essa barra inclinada é suficiente para impedir as translações dos nós do segundo pavimento. Isso porque, por triangulação, o nó que tem a chapa *2* fica fixo à translação pois está ligado aos nós (fixos) que têm as chapas *6* e *7* por duas barras não alinhadas. Os demais nós do segundo pavimento também ficam fixos por triangulação, resultando em $di = 8$ e $de = 3$.

É interessante observar que, após a adição do apoio *10*, o apoio *11* do SH da Figura 7.23 poderia ter sido colocado alternativamente fixando o movimento horizontal do nó que tem a chapa *1*. Nesse caso, por triangulação, os nós que têm as chapas *2*, *7*, *3* e *4* (nesta ordem) também ficariam fixos. Isso mostra que, quando se adota a hipótese de barras inextensíveis, não existe só um SH possível, embora as alternativas sejam semelhantes, como no caso da estrutura da Figura 7.23.

Conforme observado anteriormente, essa hipótese elimina em parte a vantagem que o Método dos Deslocamentos tem na facilidade de automatização dos seus procedimentos. A própria análise que se faz nesta seção, explorando as regras de triangulação, mostra que não é simples criar um algoritmo para identificar deslocabilidades externas em um pórtico com barras inextensíveis.

A Figura 7.24 mostra o terceiro pórtico da seqüência, com diagonal nos dois painéis da esquerda. Nesse caso, após a adição do apoio *10*, o nó que tem a chapa *1* fica fixo por causa da barra inclinada no painel da esquerda. Depois disso, assim como para o SH da Figura 7.23, os demais nós também ficam fixos, resultando em $di = 8$ e $de = 2$.

Finalmente, na Figura 7.25 vê-se o SH do pórtico com diagonal nos três painéis. Intuitivamente (pela seqüência de pórticos estudada), é de se imaginar que o número de deslocabilidades externas desse pórtico seja $de = 1$. Entretanto, mesmo depois de adicionar o apoio *9* para prender o movimento horizontal do primeiro pavimento, não é possível encontrar outro nó que se ligue a dois nós fixos por duas barras não alinhadas. A única maneira de demonstrar que $de = 1$ é lançando mão da regra 2, que até agora não foi utilizada. Observe que o conjunto de barras dos três painéis forma uma triangulação completa. Esse conjunto, pela regra 2, tem um comportamento de corpo rígido para translações. Para prender os movimento de corpo rígido desse conjunto, considerando que os deslocamentos verticais dos nós do topo das colunas inextensíveis do primeiro pavimento são nulos, vê-se que só é necessário fixar o movimento horizontal em um ponto, o que é feito pelo apoio *9*. Aliás, esse apoio poderia ser colocado em qualquer nó da triangulação.

Dois exemplos adicionais são considerados para exemplificar a criação de SH para pórticos planos com barras inextensíveis. Eles estão mostrados nas Figuras 7.26 e 7.27.

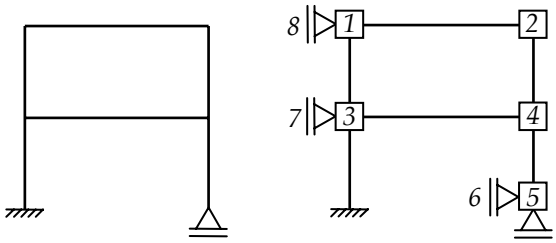


Figura 7.26 – SH de um pórtico com um apoio simples do 1º gênero.

O pórtico da Figura 7.26 é semelhante ao pórtico da Figura 7.17, com exceção de que o suporte da direita é um apoio simples que só restringe o deslocamento vertical do nó (apoio do 1º gênero). Nesse caso, na criação do SH, tanto a deslocabilidade interna quanto o deslocamento horizontal desse nó têm que ser fixados (chapa *5* e apoio *6*).

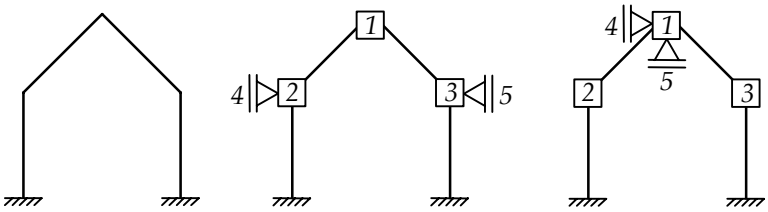


Figura 7.27 – Duas opções para SH de um pórtico com vigas inclinadas.

Por último, a Figura 7.27 mostra um pórtico com duas vigas inclinadas, mas sem uma barra horizontal que una os nós no topo das colunas. Pela regra 1 de triangulação, é preciso inserir o apoio *4* e o apoio *5* para impedir os deslocamentos horizontais desses nós, tal como indicado no centro da figura. O nó que tem a chapa *1* fica fixo após a inserção desses apoios. Alternativamente, conforme indicado à direita da figura, pode-se fixar os movimentos do nó com a chapa *1* com os apoios *4* (horizontal) e *5* (vertical). Isso fixa, por triangulação, os dois outros nós.

7.3. Simplificação para articulações completas

Na Seção 7.2.1 foi analisado um pórtico simples com barras inextensíveis e uma articulação (rótula) interna. Essa articulação, embora tenha sido considerada na extremidade direita da viga (veja a Figura 7.6), também articulou a seção no topo da coluna da direita. De fato, o momento fletor final no topo da coluna também é nulo (veja a Figura 7.15). Esse resultado é óbvio: uma rótula, na qual convergem duas barras, articula as seções adjacentes de ambas as barras.

Mas fica a pergunta: e se a seção no topo da coluna também tivesse sido modelada com uma rótula? Pela observação acima, isso seria uma redundância, visto que uma única rótula já é suficiente para articular a seção da extremidade direita da viga e a seção no topo da coluna.

Entretanto, conforme será mostrado nesta seção, essa redundância pode resultar na diminuição de uma deslocabilidade interna na solução do problema: a rotação do nó completamente articulado. Isso se configura em um macete de cálculo que não modifica os resultados.

Para justificar esse "truque" de cálculo, a rótula da estrutura da Seção 7.2.1 vai ser modelada de mais duas formas diferentes, uma com a coluna articulada e outra com a viga e a coluna articuladas. Portanto, ao todo são mostradas três maneiras de se considerar a articulação da estrutura da Figura 7.6:

(a) Viga articulada na extremidade direita e coluna direita não articulada (já mostrado na Seção 7.2.1).

(b) Coluna direita articulada no topo e viga não articulada (Seção 7.3.1).

(c) Viga e coluna articuladas no nó superior direito (Seção 7.3.2).

7.3.1. Pórtico com articulação no topo de uma coluna

Como dito, a mesma estrutura analisada na Seção 7.2.1 vai ser analisada nesta seção. A diferença é que nesta seção a articulação interna vai ser considerada no topo da coluna direita, tal como indicado na Figura 7.28, ao invés de considerá-la na extremidade direita da viga. A solução *(b)* com a rótula no topo da coluna é semelhante à solução *(a)* comentada na Seção 7.2.1. Portanto, apenas alguns pontos em que as duas soluções diferem entre si serão salientados.

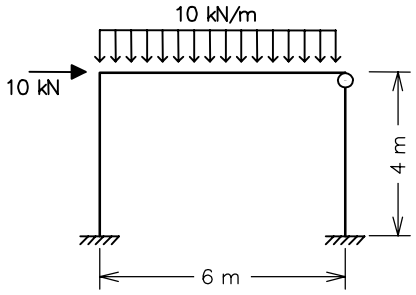


Figura 7.28 – Exemplo de pórtico com barras inextensíveis e articulação em coluna.

As deslocabilidades da estrutura são basicamente as mesmas da solução *(a)* (veja a Figura 7.7), excetuando-se o fato de que a rotação D_2 agora corresponde à rotação da seção da extremidade direita da viga. Como conseqüência, a chapa 2 do SH da

solução *(b)* fica acima da rótula no topo da coluna da direita. Isso pode ser visto nas figuras dos casos básicos dessa solução, mostrados a seguir.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

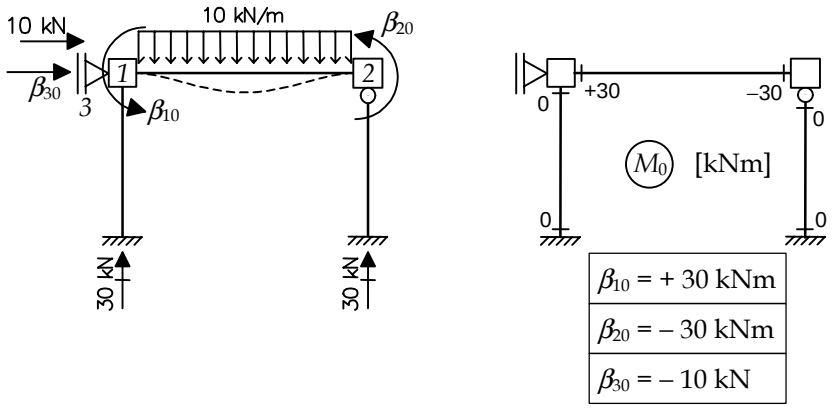


Figura 7.29 – Caso (0) da estrutura da Figura 7.28.

O caso (0) da solução *(b)*, mostrado na Figura 7.29, difere do caso (0) da solução *(a)* (Figura 7.8) nos momentos de engastamento da viga, que agora é considerada sem articulação. Por conseguinte, os termos de carga β_{10} e β_{20} mostrados na Figura 7.29 correspondem à solução de viga biengastada. O termo de carga β_{30} é igual ao da solução *(a)*.

Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH

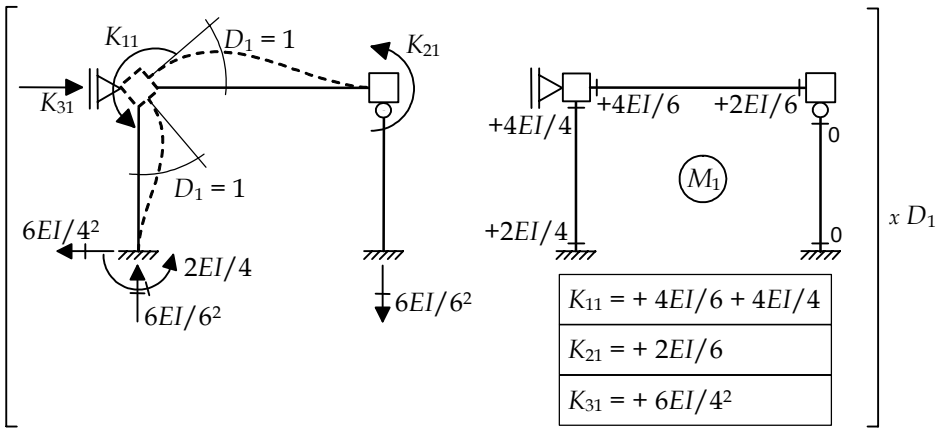


Figura 7.30 – Caso (1) da estrutura da Figura 7.28.

O caso (1) da solução *(b)* com articulação na coluna (Figura 7.30) também difere do caso (1) da solução *(a)* (Figura 7.9) somente na viga, que agora se comporta como

uma barra biengastada. Isso altera os coeficientes de rigidez K_{11} e K_{21}. Este último é nulo na solução *(a)* e diferente de zero na solução *(b)*.

Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH

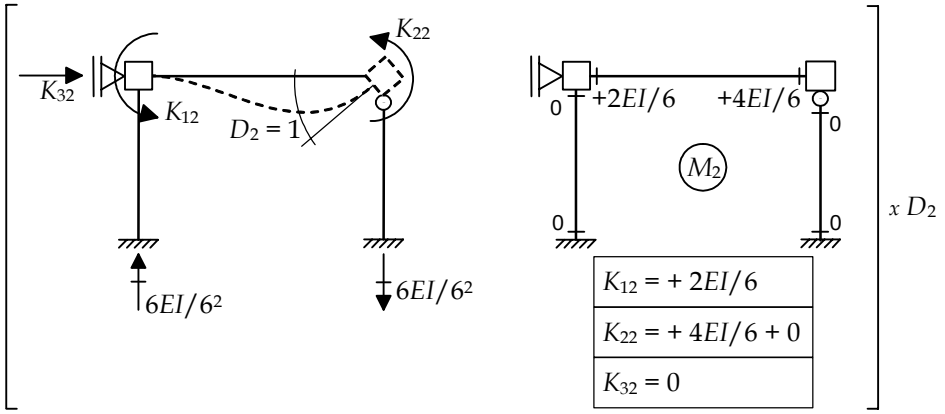


Figura 7.31 – Caso (2) da estrutura da Figura 7.28.

O caso (2) das soluções com articulação na viga (Figura 7.11) e com articulação na coluna (Figura 7.31) são bastante diferentes. Na primeira solução, a rotação $D_2 = 1$ é imposta no topo da coluna e, na segunda, a rotação $D_2 = 1$ é imposta na seção da extremidade direita da viga. Com isso, o coeficiente de rigidez K_{12} não é mais nulo como é na solução *(a)* e o coeficiente de rigidez global K_{22} agora corresponde ao coeficiente de rigidez à rotação da viga, e não da coluna como é na solução *(a)*.

Uma outra diferença marcante é o fato da coluna da direita não sofrer flexão na solução *(b)*, não aparecendo também esforço cortante nessa coluna. Dessa forma, o coeficiente de rigidez global K_{32}, que está associado ao esforço cortante no topo da coluna, é nulo na solução *(b)*.

Também se observa que não existem reações de apoio horizontais no caso (2) da Figura 7.31, mostrando de forma alternativa que, por equilíbrio global de forças na direção horizontal, o coeficiente K_{32} é igual a zero.

Caso (3) – Deslocabilidade D_3 isolada no SH

Finalmente, o caso (3) da solução *(b)*, mostrado na Figura 7.32, difere do caso (3) da solução *(a)* apenas no comportamento da coluna da direita. Com isso, o coeficiente de rigidez global K_{23} é nulo na solução *(b)* pois o topo da coluna é articulado. O coeficiente de rigidez K_{33} também é diferente pois o esforço cortante na coluna da direita agora corresponde ao de uma barra com engaste na base e articulação no topo.

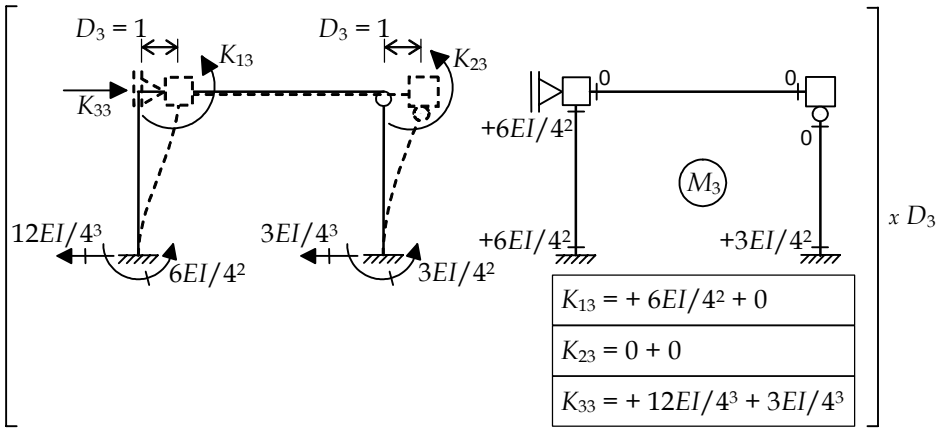


Figura 7.32 – Caso (3) da estrutura da Figura 7.28.

Equações de equilíbrio

Com base nos casos básicos da solução *(b)* para o exemplo que está sendo analisado, monta-se o correspondente sistema de equações de equilíbrio. Isso está indicado abaixo juntamente com os valores obtidos para as deslocabilidades (em função de $1/EI$):

$$\begin{Bmatrix} +30 \\ -30 \\ -10 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 5/3 & 1/3 & 3/8 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 3/8 & 0 & 15/64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} D_1 = -67{,}78/EI \\ D_2 = +78{,}88/EI \\ D_3 = +151{,}06/EI \end{Bmatrix} .$$

Nota-se que os valores obtidos para a rotação D_1 e para o deslocamento horizontal D_3 são os mesmos obtidos na solução *(a)* (Seção 7.2.1). Entretanto, o valor obtido para a rotação D_2 difere do valor obtido anteriormente. Isso era esperado, haja vista que essa rotação tem interpretações físicas diferentes nas duas soluções, tal como indicado na Figura 7.33. Essa figura mostra as configurações deformadas da solução *(a)* – viga articulada – e da solução *(b)* – coluna articulada.

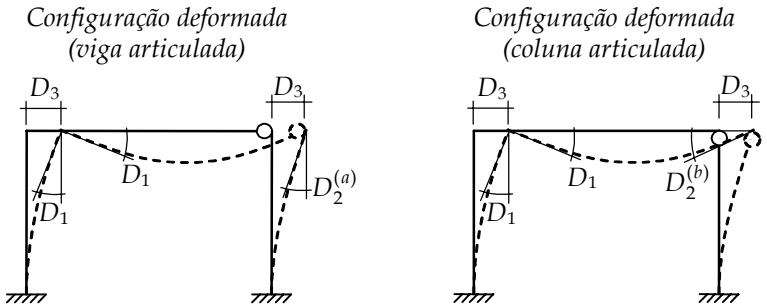


Figura 7.33 – Configurações deformadas das estruturas das Figuras 7.6 e 7.28.

Observa-se na Figura 7.33 que a rotação D_2 da solução *(a)* é no sentido horário, correspondendo ao valor negativo $D_2^{(a)} = -56{,}66/EI$, enquanto que na solução *(b)* o sentido é anti-horário, compatível com o valor positivo $D_2^{(b)} = +78{,}88/EI$. Fica claro na figura que $D_2^{(a)}$ corresponde à rotação da seção do topo da coluna quando a articulação pertence à viga e que $D_2^{(b)}$ corresponde à rotação na extremidade direita da viga para o caso da articulação pertencer à coluna. Portanto, os valores de D_2 tinham mesmo que ser diferentes nas duas soluções.

Apesar disso, como não podia deixar de ser, os resultados finais para os esforços internos (e reações de apoio) obtidos pela solução *(b)* são os mesmos da solução *(a)*. Por exemplo, pode-se verificar que a superposição dos diagramas de momentos fletores ($M = M_0 + M_1 \cdot D_1 + M_2 \cdot D_2 + M_3 \cdot D_3$) da solução *(b)* resulta no mesmo diagrama da solução *(a)* mostrado na Figura 7.15.

7.3.2. Pórtico com articulação dupla na viga e coluna

Finalmente, o pórtico analisado nas Seções 7.2.1 e 7.3.1 será analisado nesta seção considerando que tanto a viga quanto a coluna da direita contêm uma rótula no nó superior direito – solução *(c)*. Conforme mencionado anteriormente, o objetivo dessa análise é justificar um "truque" de cálculo que "elimina" a deslocabilidade interna de um nó com articulação completa (com as seções adjacentes rotuladas).

O modelo estrutural da solução *(c)* está mostrado na Figura 7.34, onde a articulação completa do nó superior direito está indicada. As Figuras 7.35, 7.36, 7.37 e 7.38 mostram os casos (0), (1), (2) e (3), respectivamente.

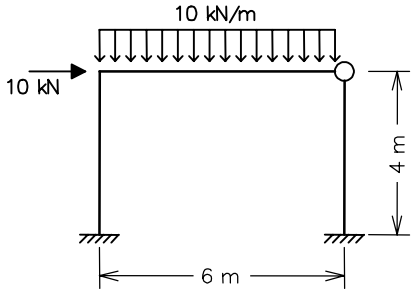


Figura 7.34 – Exemplo de pórtico com barras inextensíveis e articulação dupla na viga e coluna.

Quase todos os casos básicos da solução *(c)* têm aspectos semelhantes aos da solução *(a)* ou da solução *(b)*. Por exemplo, o caso (0) mostrado na Figura 7.35 tem os mesmos resultados do caso (0) da solução *(a)* (Figura 7.8).

Salienta-se o fato de que tudo o que se refere à deslocabilidade D_2 na solução *(c)* é nulo. Dessa forma, o termo de carga β_{20} é igual a zero. O coeficiente de rigidez K_{21} do caso (1) (Figura 7.36), que é semelhante ao caso (1) da solução *(a)* (Figura 7.9),

também é nulo. Analogamente, no caso (3) (Figura 7.38), que é semelhante ao caso (3) da solução *(b)* (Figura 7.32), o coeficiente $K_{23} = 0$.

O único caso básico da solução *(c)* que não tem semelhante nas outras soluções é o caso (2), mostrado na Figura 7.37. Observa-se nesse caso que não existe resistência do SH para a rotação $D_2 = 1$ que é imposta. Portanto, os coeficientes de rigidez desse caso são nulos, assim como os momentos fletores (ou qualquer outro esforço interno), pois as barras não têm deformação.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

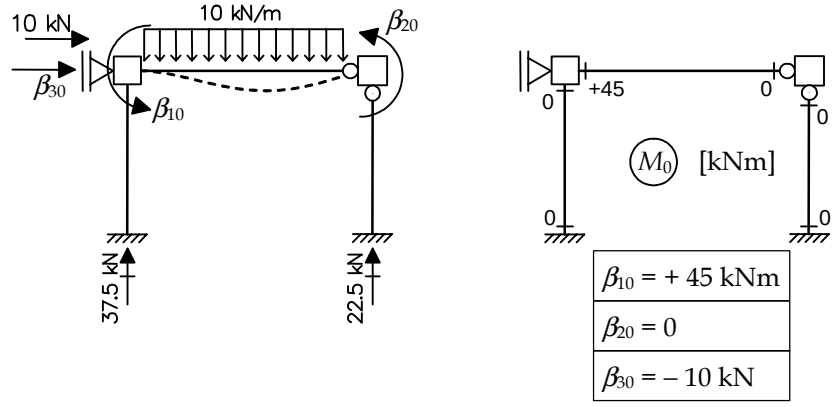


Figura 7.35 – Caso (0) da estrutura da Figura 7.34.

Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH

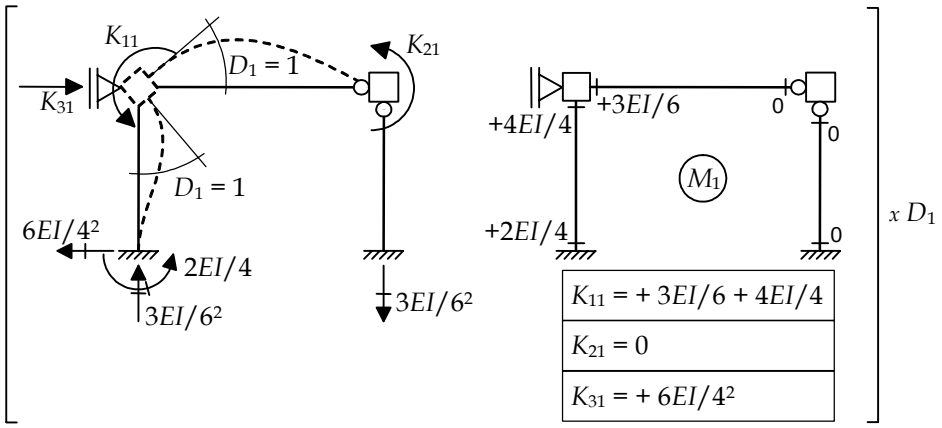


Figura 7.36 – Caso (1) da estrutura da Figura 7.34.

Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH

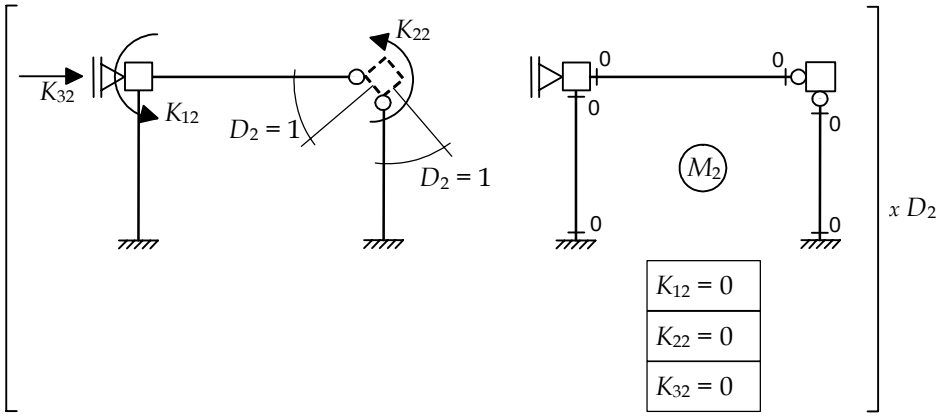


Figura 7.37 – Caso (2) da estrutura da Figura 7.34.

Caso (3) – Deslocabilidade D_3 isolada no SH

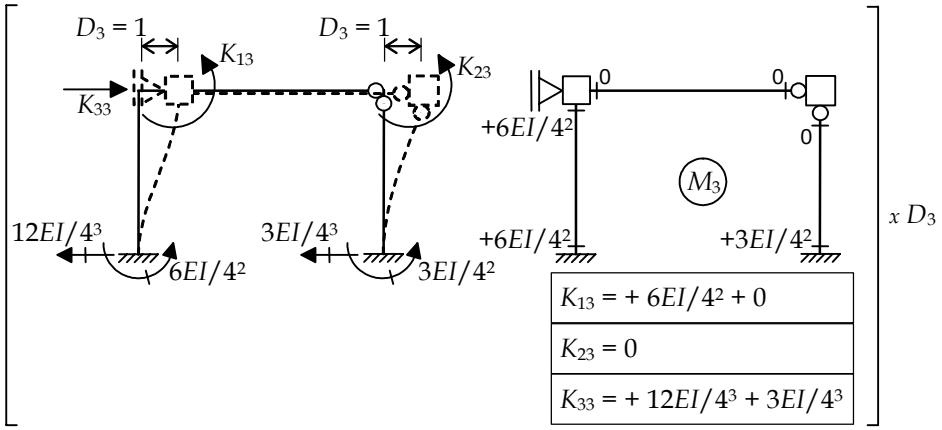


Figura 7.38 – Caso (3) da estrutura da Figura 7.34.

Equações de equilíbrio

O sistema de equações de equilíbrio da solução *(c)* é indicado abaixo:

$$\begin{Bmatrix} +45 \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 3/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/8 & 0 & 15/64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Observa-se que a matriz de rigidez global desse sistema de equações é singular pois tem a segunda linha e a segunda coluna nulas. Isso quer dizer que esse sistema, pelo menos na forma como está apresentado, não tem solução. Na verdade, isso é consistente com o fato da articulação estar sendo considerada de forma redundante.

Entretanto, se a segunda linha da equação for eliminada, bem como a influência da deslocabilidade D_2 (eliminando a segunda coluna da matriz), isso resulta em um sistema de equações que tem solução para D_1 e D_3:

$$\begin{Bmatrix} +45 \\ -10 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 3/2 & 3/8 \\ 3/8 & 15/64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} D_1 = -67{,}78/EI \\ D_3 = +151{,}06/EI \end{Bmatrix}.$$

Nota-se que os valores de D_1 e D_3 são os mesmos obtidos nas soluções *(a)* e *(b)*. Os momentos fletores (ou qualquer outro esforço interno ou reações de apoio) também resultam nos mesmos valores obtidos nas outras soluções. Também se observa que na solução *(c)* a superposição envolve apenas três casos: $M = M_0 + M_1 \cdot D_1 + M_3 \cdot D_3$.

Este é justamente o macete de cálculo: *simplesmente desconsidera-se a deslocabilidade interna de um nó completamente articulado*. Esta é a terceira simplificação adotada quando se resolve manualmente uma estrutura pelo método dos deslocamentos. Como visto na análise desta seção, essa simplificação não modifica os resultados, apenas deixa uma deslocabilidade interna indefinida.

Quando se adota essa simplificação, entretanto, devem-se tomar alguns cuidados. Por exemplo, só se pode fazer a simplificação quando realmente todas as barras que chegam no nó têm as seções adjacentes articuladas. Por exemplo, a Figura 7.39 mostra um exemplo em que somente uma barra é articulada em um nó e um exemplo correspondente onde todas as barras são articuladas nesse nó. Os SH's dos dois casos estão também indicados na figura. No primeiro caso, a deslocabilidade interna do nó com articulação tem que ser considerada e, no segundo caso, essa deslocabilidade pode ser eliminada.

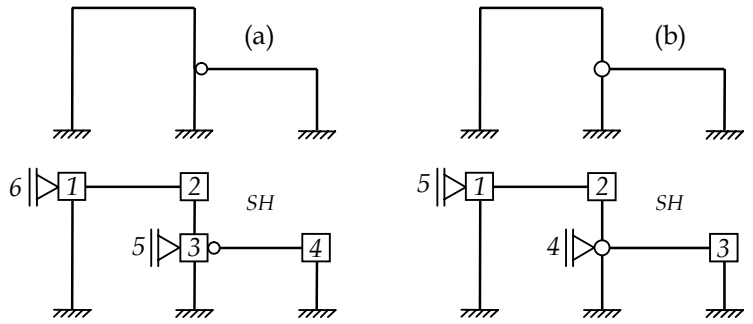


Figura 7.39 – Estrutura em que não se pode desconsiderar a rotação do nó da articulação (a) e estrutura em que a simplificação pode ser feita (b).

Outro macete de cálculo pode ser feito no caso de um apoio simples do 2º gênero (apoio que fixa deslocamentos e libera a rotação) no qual converge apenas uma barra. O "truque" consiste em interpretar a liberação da rotação como uma articulação da barra, considerando o apoio como um engaste. Isso é exemplificado na Figura 7.40. Dessa forma, elimina-se a deslocabilidade interna do nó do apoio.

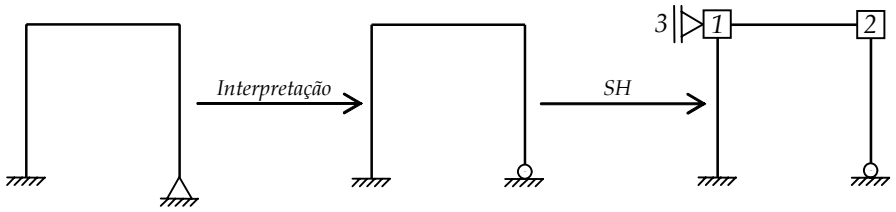


Figura 7.40 – Simplificação para o caso de apoio do 2º gênero no qual só converge uma barra.

Nos exemplos mostrados neste e no próximo capítulo, essa interpretação estará sendo feita implicitamente, sem que se desenhe o apoio como um engaste e a barra articulada na extremidade do apoio. Entretanto, será dessa forma que a barra estará sendo considerada.

Essa simplificação também deve ser usada com cuidado. A Figura 7.41 mostra um exemplo em que duas barras convergem para um nó com um apoio do 2º gênero, sem que exista uma articulação. Nesse caso, o "truque" não é possível e a deslocabilidade interna do nó do apoio deve ser considerada.

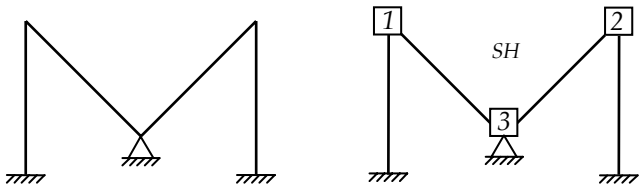
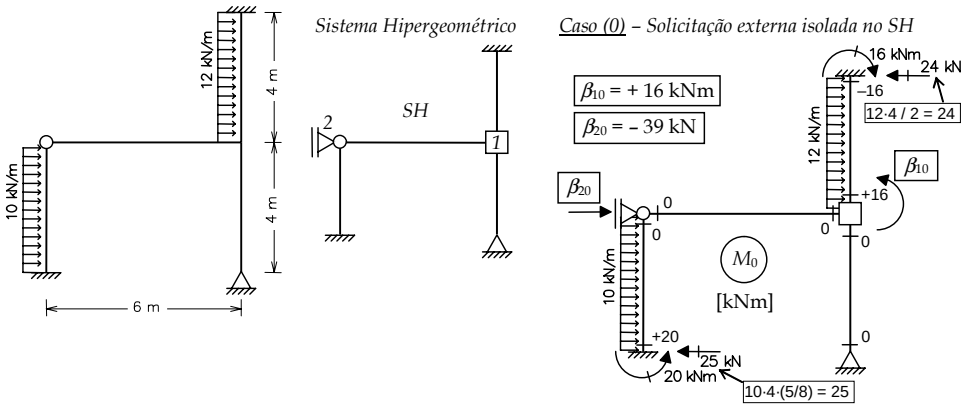
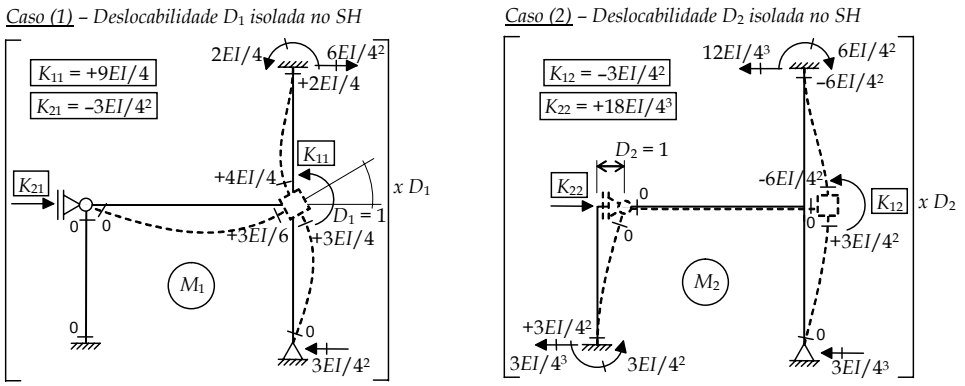


Figura 7.41 – Situação em que não é possível adotar a simplificação para apoio do 2º gênero.

7.3.3. Exemplo de solução de pórtico com duas articulações

Esta seção mostra um exemplo de solução de uma estrutura com barras inextensíveis em que se adota a simplificação para nós completamente articulados. O modelo estrutural e sua solução estão mostrados na Figura 7.42. Todas as barras têm a mesma inércia à flexão *EI*, onde *E* é o módulo de elasticidade do material e *I* é o momento de inércia da seção transversal das barras. Existe uma articulação interna e uma articulação externa (apoio do 2º gênero no qual converge apenas uma barra). De acordo com a simplificação que foi introduzida na seção anterior, nos dois nós correspondentes a essas articulações as deslocabilidades internas não serão consideradas.





Equações de equilíbrio:

$$\begin{cases}\beta_{10}+K_{11}D_1+K_{12}D_2=0\\ \beta_{20}+K_{21}D_1+K_{22}D_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{Bmatrix}+16\\-39\end{Bmatrix}+\frac{EI}{32}\cdot\begin{bmatrix}+72&-6\\-6&9\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}D_1\\D_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}D_1=+\dfrac{720}{153\cdot EI}\\ D_2=+\dfrac{21696}{153\cdot EI}\end{cases}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M=M_0+M_1\cdot D_1+M_2\cdot D_2$$

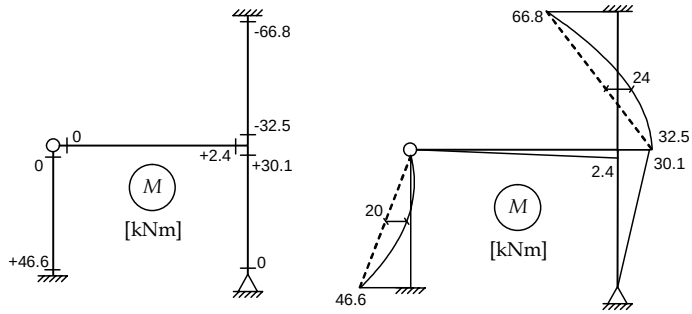


Figura 7.42 – Solução de um pórtico com uma articulação interna e outra externa.

Na solução mostrada na Figura 7.42, deve-se observar que o termo de carga β_{20} e os coeficientes de rigidez K_{21} e K_{22} podem ser calculados de duas maneiras. Eles podem ser determinados pela soma dos esforços cortantes que atuam nas colunas no nível do pavimento ou podem ser calculados impondo-se o equilíbrio global do SH na direção horizontal ($\Sigma F_x = 0$).

Por exemplo, no caso (0) pela soma dos cortantes nas colunas no nível do pavimento, $\beta_{20} = -10\cdot4\cdot(3/8) - 12\cdot4/2 = -39$ kN. Pelo equilíbrio global, deve-se considerar todas as forças horizontais atuantes, inclusive as resultantes das cargas distribuídas: $\Sigma F_x = \beta_{20} + 10\cdot4 + 12\cdot4 - 10\cdot4\cdot(5/8) - 12\cdot4/2 = 0$. Isso resulta no mesmo valor para β_{20}.

7.4. Consideração de barras infinitamente rígidas

O último tipo de simplificação adotada para reduzir o número de deslocabilidades na solução de um pórtico pelo Método dos Deslocamentos é a consideração de barras com rigidez infinita, isto é, de barras que não têm nenhuma deformação. Essa consideração não é feita para todas as barras de um pórtico e só faz sentido para um caso especial de análise simplificada do comportamento global do pórtico.

Por exemplo, na análise de um prédio para cargas laterais (de vento, por exemplo), pode-se considerar que o conjunto de lajes e vigas de um pavimento do prédio forma um diafragma rígido quando o pórtico se desloca lateralmente. Em outras palavras, em situações especiais o pavimento pode ser considerado como um elemento infinitamente rígido em comparação com as colunas do prédio (elementos estruturais que têm deformações transversais por flexão).

Para entender como a consideração de pavimentos ou barras rígidas influencia a determinação das deslocabilidades de um pórtico, o exemplo da Figura 7.43 vai ser analisado. Nesse pórtico as colunas são inextensíveis, com uma inércia à flexão EI constante. A viga é considerada como uma barra infinitamente rígida. A solicitação externa é uma carga horizontal P atuando no pavimento rígido.

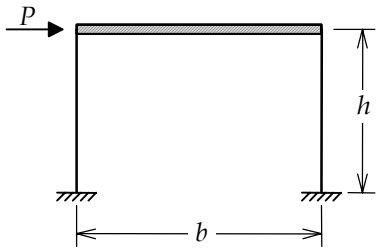


Figura 7.43 – Pórtico com uma viga infinitamente rígida.

Considerando que as colunas do pórtico da Figura 7.43 são inextensíveis, os nós do pavimento do pórtico só podem se deslocar na direção horizontal. Isso impede a rotação da viga como um corpo rígido. Portanto, o único movimento que a viga infinitamente rígida pode ter é o deslocamento horizontal mostrado na Figura 7.44.

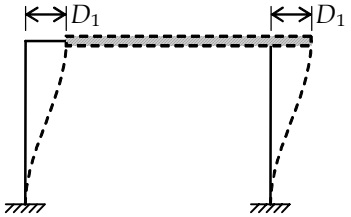


Figura 7.44 – Configuração deformada da estrutura da Figura 7.43.

Vê-se na configuração deformada mostrada na Figura 7.44 que os nós do pavimento não sofrem rotações pois a viga se desloca horizontalmente mantendo-se reta (é uma barra que não pode se deformar). Dessa forma, a estrutura só tem uma deslocabilidade, que é o deslocamento horizontal D_1 do pavimento.

Através dessa análise pode-se avaliar como a consideração de barras infinitamente rígidas influencia na redução do número de deslocabilidades de um pórtico. Se as barras do pórtico adotado como exemplo não tivessem nenhuma restrição quanto às suas deformações, o número total de deslocabilidades seria 6 (3 em cada nó do pavimento). Considerando as três barras sem deformação axial, o número de deslocabilidades reduz para 3 (veja a Figura 7.5). Finalmente, com a consideração da viga infinitamente rígida, o número de deslocabilidades se reduz a 1.

É evidente que tanto a hipótese de barras inextensíveis quanto a consideração de barra com rigidez infinita modificam os resultados da solução de um pórtico quando comparados com a solução sem essas simplificações. As restrições nas deformações de barras devem ser consideradas tendo com objetivo uma análise simplificada, em geral relacionada com a resolução manual de uma estrutura.

Outro ponto a ser considerado é que a identificação das deslocabilidades de pórticos com barras infinitamente rígidas só pode ser feita caso a caso. Muitas vezes é necessário visualizar *a priori* (através de esboços, por exemplo) a configuração deformada de uma estrutura para identificar suas deslocabilidades. Seria muito difícil estabelecer regras a para determinação de deslocabilidades de pórticos que têm pelo menos uma barra rígida, tal como foi feito na Seção 7.2.2 para pórticos com apenas barras inextensíveis.

Apesar disso, para pórticos simples com poucas barras infinitamente rígidas, não é difícil identificar as deslocabilidades. Assim como para pórticos só com barras inextensíveis, a maneira mais simples de se determinar as deslocabilidades de um pórtico com barras inextensíveis e rígidas é introduzindo os apoios fictícios para a criação do SH: *a cada apoio necessário para fixar os nós da estrutura é identificada uma*

deslocabilidade. Isso vai ser considerado nos exemplos que contêm barras infinitamente rígidas deste capítulo.

Voltando ao pórtico da Figura 7.43, a sua solução recai na superposição dos casos (0) e (1) mostrados nas Figuras 7.45 e 7.46. O SH desse exemplo está mostrado na Figura 7.45, onde só foi necessário adicionar um apoio fictício (o apoio *1*) para fixar a estrutura, podendo-se identificar dessa forma a deslocabilidade D_1. Como os nós superiores da estrutura não têm rotações, não é necessário inserir chapas fictícias (que fixam deslocabilidades internas) no SH.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

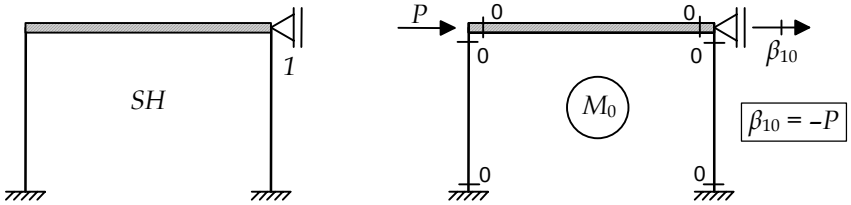


Figura 7.45 – Sistema Hipergeométrico (SH) e caso (0) da estrutura da Figura 7.43.

Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH

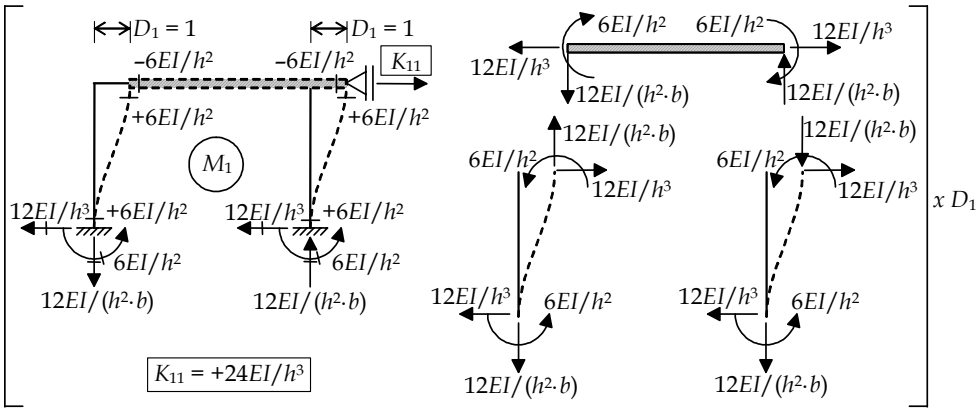


Figura 7.46 – Caso (1) da estrutura da Figura 7.43.

O fato de não existirem chapas fictícias no SH faz com que a determinação dos esforços nas barras no caso (1) (Figura 7.46) exija uma análise mais detalhada. Como sempre no Método dos Deslocamentos, o ponto de partida para a solução de cada caso básico é a configuração deformada que é imposta. Nesse caso, é imposto um deslocamento $D_1 = 1$. As colunas do pórtico são deformadas de tal maneira que há um deslocamento transversal nos nós superiores, sem que eles girem. A viga se desloca como um corpo rígido.

Com base na configuração deformada das colunas no caso (1), os esforços cortantes e momentos fletores nas suas extremidades são conhecidos (coeficientes de rigidez de barra – veja a Figura 4.30 do Capítulo 4). Por outro lado, o fato da viga não ter deformação por flexão não acarreta a condição de momentos fletores nulos. Assim como para colunas inextensíveis os esforços normais não são conhecidos *a priori*, os momentos fletores na viga rígida também não podem ser determinados antecipadamente. De fato, a viga rígida pode ter qualquer distribuição para momentos fletores, já que ela sempre se mantém reta. Assim, os momentos fletores na viga rígida devem ser determinados para satisfazer o equilíbrio da estrutura.

Isso pode ser entendido com base no isolamento das barras no caso (1), tal como indicado na Figura 7.46. A viga rígida tem que ter momentos nas suas extremidades de forma a estabelecer o equilíbrio de momentos nos nós superiores. Assim, os sentidos dos momentos fletores que atuam nas seções da viga são sempre opostos aos sentido dos momentos nas colunas. Utilizando a convenção de sinais do Método dos Deslocamentos, os momentos fletores do diagrama M_1 têm sinais positivos nas colunas e negativos na viga, resultando em um somatório de momentos nulos em cada nó.

Essa análise pode ser vista de uma outra maneira. A presença da viga rígida fez com que não fosse necessário inserir chapas fictícias no SH para impedir deslocabilidades internas. Então, a viga rígida tem que fazer o papel das chapas fictícias. Esse papel é feito equilibrando os momentos fletores que atuam nas colunas para a configuração deformada imposta.

O isolamento das barras na Figura 7.46 também mostra que devem aparecer esforços cortantes nas extremidades da viga rígida, que são transmitidos via esforço normal nas colunas para os apoios da base.

A determinação do coeficiente de rigidez K_{11} pode ser feita de duas maneiras. Ele pode ser obtido pela soma dos esforços cortantes no topo das colunas ou pelo equilíbrio global de forças horizontais. De ambas as maneiras, o valor resultante é $K_{11} = +24EI/h^3$.

Equação de equilíbrio e determinação do diagrama de momentos fletores finais

Com base na superposição dos casos básicos (0) e (1), é estabelecido o equilíbrio da estrutura original. Isso é feito obrigando o efeito final do apoio fictício na estrutura ser igual a zero:

$$\beta_{10} + K_{11} D_1 = 0 \qquad \Rightarrow -P + \left(24EI / h^3\right) \cdot D_1 = 0 \,.$$

A solução dessa equação de equilíbrio resulta no valor da deslocabilidade da estrutura:

$$D_1 = +\frac{P \cdot h^3}{24EI} \,.$$

Finalmente, o diagrama de momentos fletores, mostrado na Figura 7.47, é obtido com base na relação $M = M_0 + M_1 \cdot D_1$, onde nesse exemplo $M_0 = 0$. É interessante observar que os valores dos momentos fletores independem da largura b do pórtico.

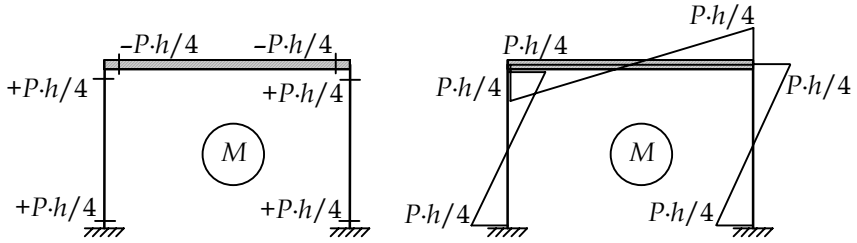


Figura 7.47 – Diagrama de momentos fletores da estrutura da Figura 7.43.

7.4.1. Exemplo de solução de pórtico com dois pavimentos

Esta seção analisa uma estrutura com dois pavimentos rígidos, mostrada na Figura 7.48. As colunas são inextensíveis, com uma inércia à flexão *EI* constante.

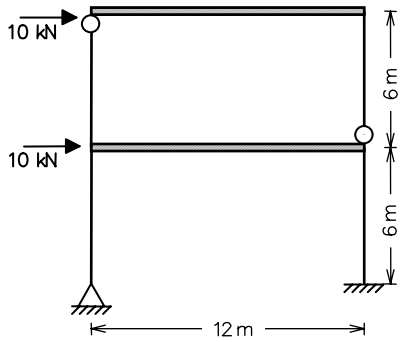


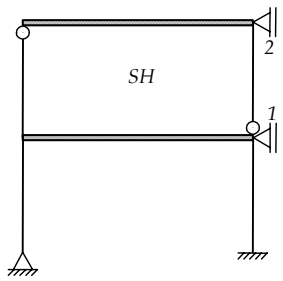
Figura 7.48 – Pórtico com dois pavimentos rígidos.

Diferentes condições de articulação são consideradas para as colunas. A coluna do segundo pavimento à esquerda é articulada no topo. No mesmo pavimento, a coluna da direita é articulada na base. A coluna da esquerda no primeiro pavimento é considerada articulada na base (apoio do 2º gênero). A única coluna que não tem articulação é a coluna do primeiro pavimento à direita.

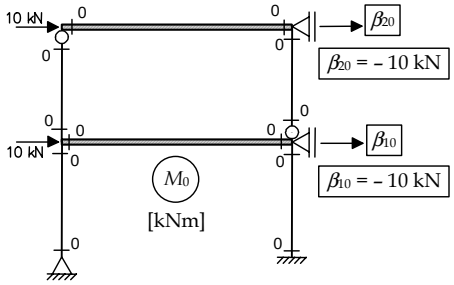
A solução dessa estrutura pelo Método dos Deslocamentos está mostrada na Figura 7.49. As únicas deslocabilidades são os deslocamentos horizontais D_1 e D_2 dos dois pavimentos. Isso é identificado pelos apoios fictícios *1* e *2* do SH, necessários para fixar os deslocamentos horizontais dos pavimentos. Como os nós da estrutura não têm deslocamentos verticais (colunas inextensíveis) e as vigas são infinita-

mente rígidas, não são necessários mais apoios para prender a estrutura. Portanto, só existem duas deslocabilidades.

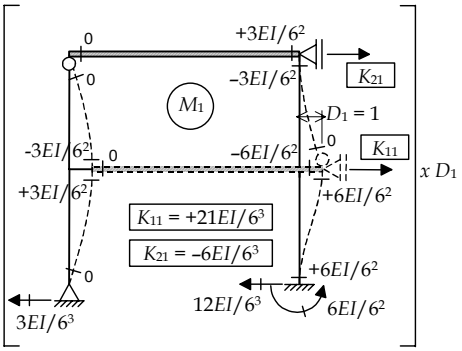
Sistema Hipergeométrico



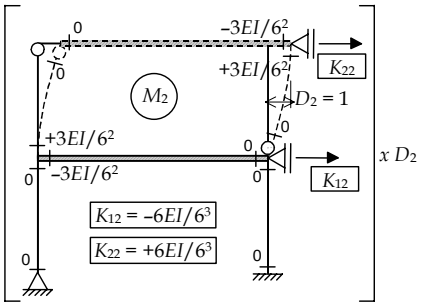
Caso (0) – Solicitação externa isolada no SH



Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH



Caso (2) – Deslocabilidade D_2 isolada no SH



Equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \beta_{10} + K_{11}D_1 + K_{12}D_2 = 0 \\ \beta_{20} + K_{21}D_1 + K_{22}D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -10 \\ -10 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{216} \cdot \begin{bmatrix} +21 & -6 \\ -6 & +6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = +\dfrac{288}{EI} \\ D_2 = +\dfrac{648}{EI} \end{cases}$$

Momentos Fletores Finais:

$$M = M_0 + M_1 \cdot D_1 + M_2 \cdot D_2$$

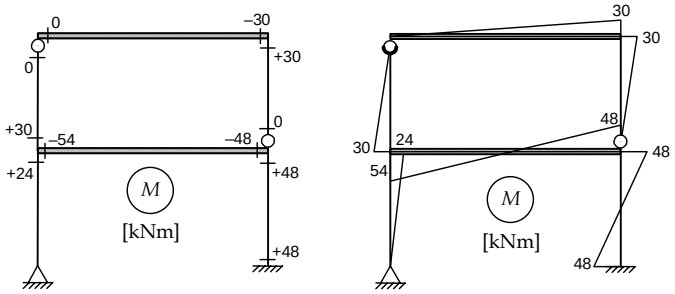


Figura 7.49 – Solução da estrutura da Figura 7.48.

Na solução do pórtico com dois pavimentos mostrada na Figura 7.49, observa-se que no caso (0) os momentos fletores são nulos pois as colunas não têm deformações nem cargas no seu interior. Nesse caso, as forças horizontais aplicadas são transmitidas via esforço normal nas vigas rígidas diretamente para os apoios fictícios do SH. As reações nos apoios fictícios são os termos de carga β_{10} e β_{20}.

Nos casos (1) e (2), o ponto de partida são as deformações conhecidas que são impostas para as colunas. Essas deformações induzem momentos fletores e esforços cortantes nas extremidades das colunas (coeficientes de rigidez de barras com e sem articulação – veja as Figuras 4.30, 4.32 e 4.34 do Capítulo 4). Os momentos fletores que aparecem nas extremidades das vigas rígidas são tais que equilibram os momentos nas extremidades das colunas. Isto é, os momentos fletores dos diagramas M_1 e M_2 que aparecem nas extremidades das vigas rígidas têm valores e sinais que fazem com que o somatório dos momentos em cada nó seja nulo.

Os coeficientes de rigidez dessa estrutura (K_{11}, K_{21}, K_{12} e K_{22}) correspondem aos esforços cortantes nas colunas em cada pavimento. Por exemplo, o coeficiente K_{11} é calculado, no caso (1), pela soma dos cortantes nas extremidades das colunas no primeiro pavimento: $K_{11} = +3EI/6^2 + 3EI/6^2 + 3EI/6^2 + 12EI/6^2 = +21EI/6^2$. No mesmo caso, o coeficiente K_{21} é obtido pela soma dos cortantes no topo das colunas do segundo pavimento: $K_{21} = -3EI/6^2 - 3EI/6^2 = -6EI/6^2$. Para essa estrutura não é possível determinar os coeficientes de rigidez impondo-se apenas o equilíbrio global da estrutura na direção horizontal pois em cada caso existem duas incógnitas para uma equação de equilíbrio.

7.4.2. Exemplo de barra rígida com giro

Nos dois exemplos anteriores, as barras infinitamente rígidas sofriam um deslocamento horizontal sem rotação. Nesta seção é considerado um pórtico, mostrado na Figura 7.50, que tem uma barra rígida que sofre um giro. Esse pórtico tem a coluna da esquerda considerada infinitamente rígida, sendo que a viga e a outra coluna são flexíveis (com inércia à flexão igual a EI) e inextensíveis.

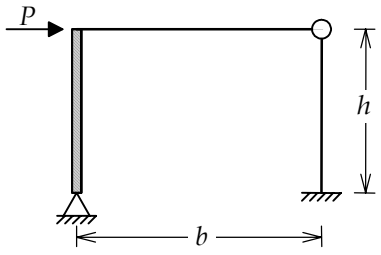


Figura 7.50 – Pórtico com uma coluna infinitamente rígida que sofre um giro.

Como a coluna rígida da estrutura da Figura 7.50 está articulada na base (apoio do 2º gênero), existe a possibilidade dessa barra girar, tendo como centro de rotação o ponto do apoio. Isso é indicado na Figura 7.51, que mostra a única configuração deformada possível para esse pórtico. Como o ângulo entre a coluna rígida e a viga não pode se alterar (ligação rígida sem articulação), o giro θ_1 da coluna induz uma rotação igual na extremidade esquerda da viga.

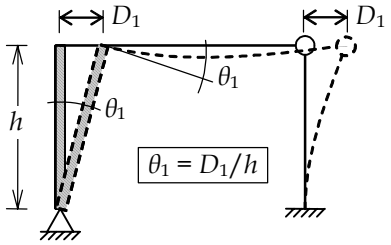


Figura 7.51 – Configuração deformada da estrutura da Figura 7.50.

Considerando que os deslocamentos são pequenos, o ângulo θ_1 pode ser aproximado pela sua tangente. Portanto, $\theta_1 = D_1/h$, sendo h o comprimento da coluna rígida. Observa-se que um deslocamento D_1 da esquerda para a direita induz uma rotação θ_1 no sentido horário.

A hipótese de pequenos deslocamentos também permite que se considere que o movimento do nó no topo da coluna rígida não tenha uma componente vertical. Como a rotação θ_1 do nó está associada ao seu deslocamento horizontal D_1, só existe um parâmetro que define o movimento do nó. Portanto, esse nó só tem uma deslocabilidade. Pode-se adotar para esse parâmetro tanto o deslocamento horizontal D_1 quanto a rotação θ_1.

Nesse exemplo o deslocamento horizontal D_1 foi adotado como deslocabilidade pois também corresponde ao deslocamento horizontal do nó superior direito. Como esse nó tem uma articulação completa, a única deslocabilidade resultante da estrutura é D_1. A Figura 7.52 mostra o SH correspondente, onde somente o apoio fictício *1* é necessário para prender completamente a estrutura.

Caso (0) – Solicitação externa (carregamento) isolada no SH

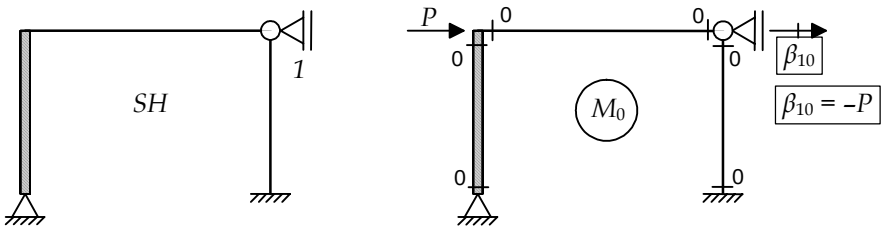


Figura 7.52 – Sistema Hipergeométrico (SH) e caso (0) da estrutura da Figura 7.50.

O caso (0) desse exemplo também está mostrado na Figura 7.52. Como as barras flexíveis não estão deformadas pois não têm carga no seu interior, não aparecem momentos fletores nessas barras. Portanto, também não aparece momento fletor na coluna rígida. A carga P aplicada é transmitida via esforço na viga para o apoio *1* do SH, resultando no termo de carga $\beta_{10} = -P$.

Caso (1) – Deslocabilidade D_1 isolada no SH

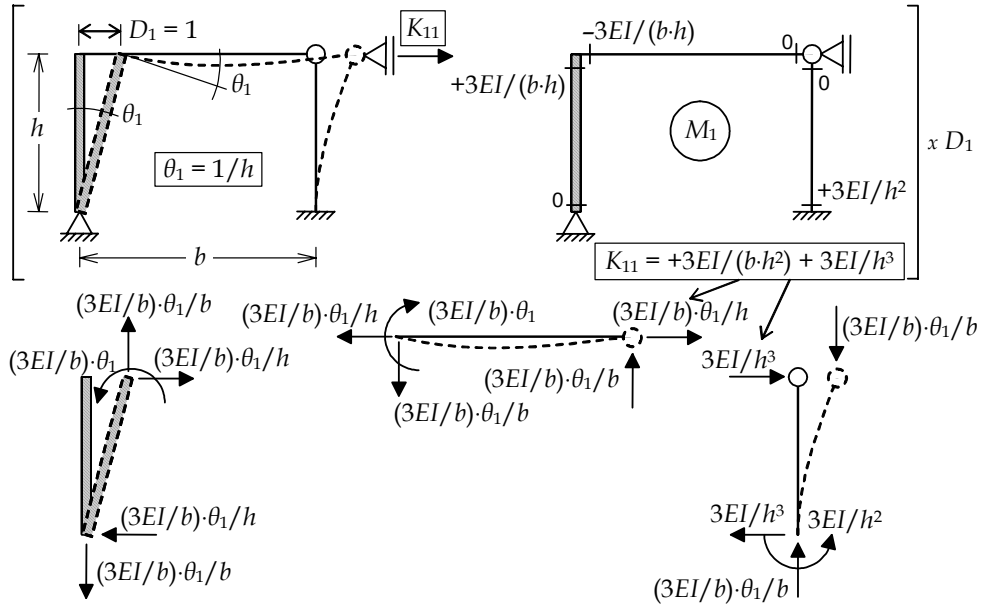


Figura 7.53 – Caso (1) da estrutura da Figura 7.50.

O caso (1) dessa solução, mostrado na Figura 7.53, merece atenção especial. É imposta uma configuração deformada tal que $D_1 = 1$. Isso provoca uma rotação $\theta_1 = 1/h$, no sentido horário, na extremidade esquerda da viga. Com base nessa rotação imposta à viga, todos os esforços atuantes nas barras do SH ficam determinados no caso (1).

Isso pode ser entendido analisando o equilíbrio das barras isoladas, conforme mostrado na Figura 7.53. A rotação θ_1 imposta na extremidade esquerda da viga provoca um momento nessa extremidade igual a $(3EI/b)\cdot\theta_1$ no sentido horário. No diagrama M_1, isso corresponde ao valor negativo $-3EI/(b\cdot h)$ na seção esquerda da viga. Para que haja equilíbrio de momentos no nó superior esquerdo, aparece um momento fletor no topo da coluna rígida igual a $+3EI/(b\cdot h)$. Os esforços cortantes nas extremidades da viga e da coluna rígida são calculados de forma a equilibrar essas barras. Portanto, esses esforços são sempre iguais em valores e com sentidos opostos, formando conjugados que equilibram os momentos nas barras.

Por outro lado, o momento fletor e os esforços cortantes nas extremidades da coluna flexível da direita ficam determinados pela condição de deslocamento horizontal unitário imposto no topo (veja os coeficientes de rigidez de barra com articulação mostrados na Figura 4.32 do Capítulo 4).

Para completar o equilíbrio das barras isoladas no caso (1) desse exemplo, é necessário determinar os esforços normais em todas as barras. Como indica a Figura 7.53, os esforços normais são determinados por último, de forma a equilibrar os esforços cortantes nas barras.

A Figura 7.53 também indica o valor do coeficiente de rigidez K_{11}, que corresponde à soma dos esforços cortantes no topo das colunas.

Equação de equilíbrio e determinação do diagrama de momentos fletores finais

Com base no termo de carga β_{10} e no coeficiente de rigidez K_{11}, pode-se determinar o valor da deslocabilidade D_1, o que é feito a partir da equação de equilíbrio mostrada abaixo:

$$\beta_{10} + K_{11} D_1 = 0 \qquad \Rightarrow -P + \left[\frac{3EI}{h^3} \cdot \left(\frac{b+h}{b} \right) \right] \cdot D_1 = 0 \qquad \Rightarrow D_1 = + \frac{P \cdot h^3}{3EI} \cdot \left(\frac{b}{b+h} \right).$$

Finalmente, os momento fletores finais na estrutura podem ser determinados utilizando a superposição de efeitos $M = M_0 + M_1 \cdot D_1$, onde $M_0 = 0$. O diagrama de momentos fletores finais está mostrado na Figura 7.54.

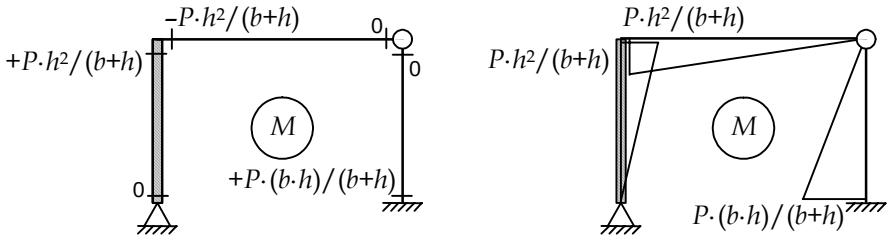


Figura 7.54 – Diagrama de momentos fletores da estrutura da Figura 7.50.

8. PROCESSO DE CROSS

O Processo de Cross, ou Método da Distribuição de Momentos (White *et al.* 1976), é um método relativamente simples para o cálculo de momentos fletores em vigas contínuas, pórticos planos, grelhas e até em pórticos espaciais. Este processo é baseado no Método dos Deslocamentos e só se aplica para estruturas sem deslocabilidades externas (do tipo translação), isto é, ele só se aplica a estruturas com barras inextensíveis e que só tenham deslocabilidades do tipo rotação. Apesar desta limitação, o método criado por Hardy Cross na década de 1930 ("Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments," *Transactions*, ASCE, Paper no. 1793, vol. 96, 1936) ainda é utilizado hoje para o cálculo de estruturas.

O trabalho de Cross teve um impacto inicial muito grande pois possibilitou a solução manual de estruturas hiperestáticas em um momento em que estruturas de concreto armado estavam se tornando muito comuns. O concreto armado propicia a criação de pórticos com ligações contínuas, com alto grau de hiperestaticidade. A aplicação prática do Processo de Cross diminuiu bastante pois atualmente se faz uso de programas de computador para a análise de estruturas, que geralmente utilizam o Método dos Deslocamentos (embora alguns programas utilizem o Processo de Cross como procedimento de análise de vigas contínuas). Apesar do uso do Método da Distribuição de Momentos ter caído nas últimas décadas, a sua apresentação neste livro tem um objetivo acadêmico, pois ele tem um apelo intuitivo muito forte e, por isso, serve para uma melhor compreensão do comportamento à flexão de estruturas reticuladas.

Este capítulo foi escrito baseado nos livros de White, Gergely e Sexsmith (1976) e de Süssekind (1977-3). Existem muitas outras referências clássicas para o Processo de Cross que não são mencionadas. Entretanto, devido à sua relevância no Brasil, não se pode deixar de mencionar o livro do professor Jayme Ferreira da Silva Junior (*Método de Cross*, McGraw-Hill, 1975).

O capítulo começa com uma seção de apresentação de uma interpretação física do Processo de Cross, como foi introduzido de forma muito conveniente por White *et al.* As duas seções seguintes apresentam os dois pontos básicos que fundamentam o método:

- A distribuição de um momento aplicado em um nó de um pórtico por parcelas de momentos fletores equilibrantes nas barras adjacentes (Seção 8.2).
- A solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio do Método dos Deslocamentos para uma estrutura que só tem rotações como deslocabilidades (Seção 8.3).

Deve-se observar que o Processo de Cross também pode ser aplicado a estruturas com deslocabilidades externas, isto é, com translações nodais. Isso é feito aplicando-se a metodologia do Método dos Deslocamentos mostrada nos Capítulos 6 e 7 considerando como incógnitas apenas as deslocabilidades externas. Isso resulta em uma série de casos básicos, sendo cada um deles resolvido pelo Processo de Cross. A Seção 8.6 vai apresentar esta metodologia.

8.1. Interpretação física do Método da Distribuição de Momentos

White, Gergely e Sexsmith (1976) apresentaram de forma brilhante um experimento físico que serve para entender intuitivamente o Processo de Cross. A Figura 8.1 mostra imagens desse experimento.

Pela Figura 8.1, o Método da Distribuição de Momentos pode ser entendido com a aplicação física de sucessivos travamentos e liberações de rotações nodais de uma viga contínua com três vãos. Inicialmente a viga tem todas as suas rotações nodais travadas (Figura 8.1-a). Em seguida se aplica uma carga concentrada na posição média do vão central (Figura 8.1-b). Como todos os nós têm as suas rotações artificialmente fixadas, o efeito inicial da carga só é sentido no vão central. Isto é, os dois vãos extremos não sofrem nenhuma deformação, portanto não apresentam momentos fletores. Nesta situação existe um desequilíbrio de momentos fletores nos dois nós intermediários (este desequilíbrio está sendo artificialmente equilibrado por momentos externos aplicados pelas travas que fixam as rotações).

Se a rotação do segundo nó da esquerda para a direita for liberada, o nó gira até atingir uma situação de equilíbrio (Figura 8.1-c). Nesta situação os momentos fletores nas seções adjacentes desse nó têm que estar em equilíbrio pois a trava liberada não pode introduzir nenhum momento externo. O primeiro e o segundo vãos da viga se deformam em conseqüência da liberação da rotação, acarretando em uma modificação na distribuição de momentos fletores nos vãos. Enquanto isso o terceiro vão permanece indeformado e sem momentos fletores.

No passo seguinte do processo, o segundo nó é travado novamente e o terceiro nó tem sua rotação liberada (Figura 8.1-d). O resultado é uma modificação da configuração deformada apenas nos dois vãos adjacentes ao nó liberado (o primeiro vão permanece com a deformação do passo anterior) e uma nova distribuição de momentos fletores nos vãos afetados.

A repetição desse processo de sucessivos passos de travamento de um nó e liberação de um outro nó vai acarretar em uma acomodação da viga em uma situação em que não é mais necessário travar as rotações nodais pois o equilíbrio de momentos fletores nos nós é atingido. Esta situação final é mostrada na Figura 8.1-e.

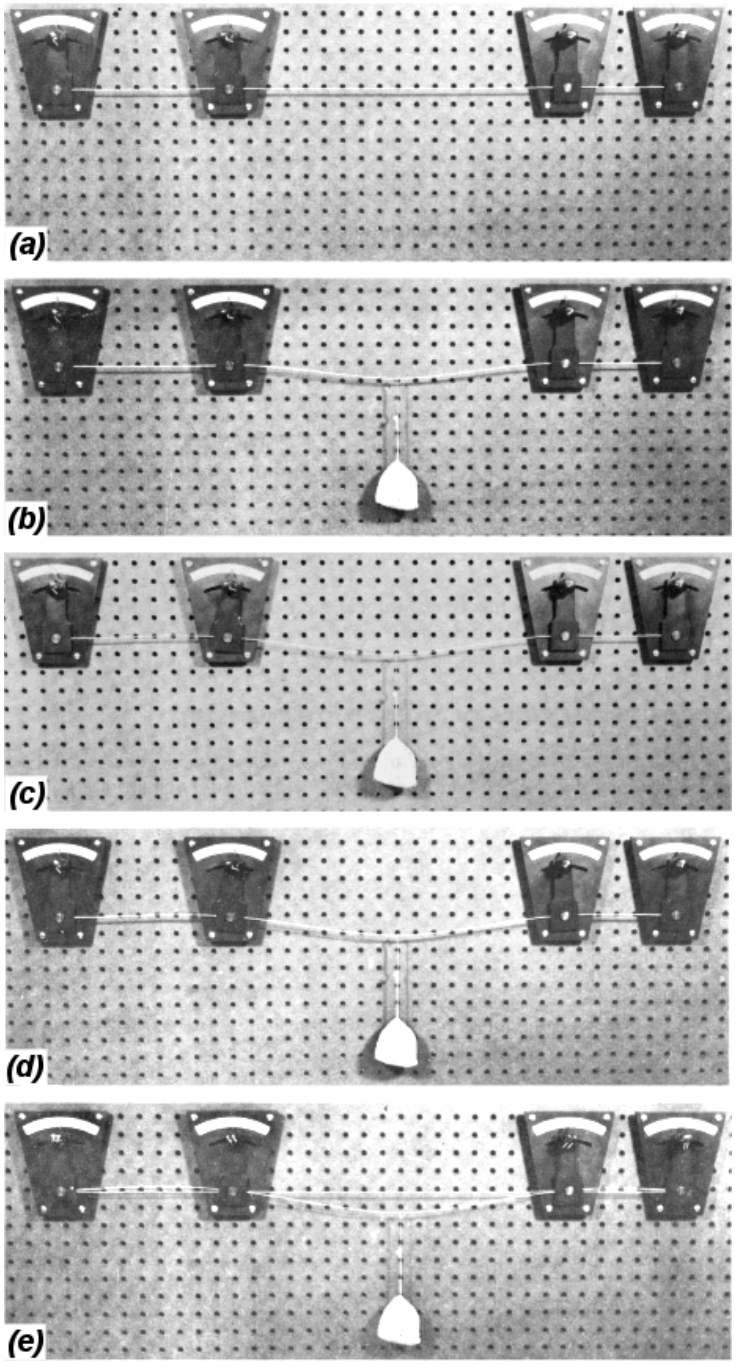


Figura 8.1 – Experimento físico para interpretação física do Processo de Cross (imagens reproduzidas do livro de White, Gergely e Sexsmith, 1976).

Pode-se salientar alguns aspectos importantes desse experimento:

- Em cada passo do processo iterativo, apenas um nó tem a rotação liberada, sendo que todos os outros nós têm as rotações fixadas.
- Quando um nó é equilibrado através da liberação de sua rotação, as barras adjacentes ao nó se deformam, ocorrendo uma redistribuição de momentos fletores nessas barras e afetando o equilíbrio dos nós adjacentes.
- Após cada passo a rotação do nó liberado é fixada com o valor acumulado dos incrementos de rotação de todos os passos anteriores.
- O equilíbrio de um nó que tem a sua rotação travada só é atingido artificialmente através da aplicação de um momento externo pela trava.
- Quando os momentos fletores nas seções adjacentes a um nó estão em equilíbrio, não é necessário travar o nó. Neste caso, a trava liberada não exerce nenhum momento externo no nó.

Com base nesse experimento, pode-se adiantar dois pontos chaves do Processo de Cross. O primeiro é a distribuição de momentos fletores nas barras adjacentes de um nó que tem a sua rotação liberada. A próxima seção faz uma análise dessa redistribuição de momentos fletores. O outro ponto chave é o próprio processo iterativo e incremental de determinação das rotações nodais. A Seção 8.3 analisa a solução incremental do sistema de equações de equilíbrio de uma viga contínua. Após a análise desses dois pontos chaves, o Processo de Cross vai ser formalizado na Seção 8.4.

8.2. Distribuição de momentos fletores em um nó

Considere o quadro da Figura 8.2 que tem barras inextensíveis, todas com igual valor para o parâmetro de rigidez à flexão *EI*. O pórtico tem um nó central com a rotação livre e um momento externo M_E aplicado. Todos os outros nós têm suas rotações fixas (engastes). Apenas uma das barras tem uma articulação na extremidade oposta ao nó central.

Para se analisar a distribuição do momento M_E por momentos fletores nas barras da estrutura da Figura 8.2, o Método dos Deslocamentos vai ser empregado. Como as barras são inextensíveis, a estrutura só tem uma deslocabilidade, que é a rotação do nó central (veja o Capítulo 7). O Sistema Hipergeométrico (SH) e os casos básicos da solução pelo método estão mostrados na Figura 8.3.

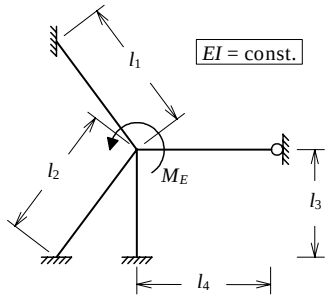


Figura 8.2 – Aplicação de um momento externo em um nó com rotação liberada.

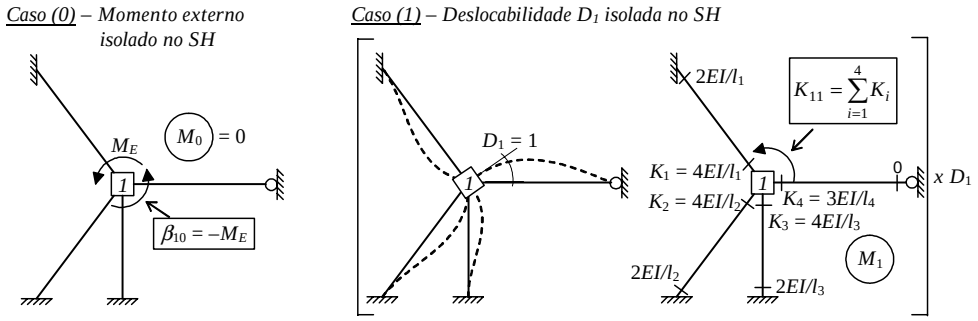


Figura 8.3 – Casos básicos da solução pelo Método dos Deslocamentos da estrutura da Figura 8.2.

Na solução mostrada na Figura 8.3, é utilizada a seguinte notação:

$K_i \rightarrow$ coeficiente de rigidez à rotação da barra *i*.

Os valores para rigidez à rotação de barras com *EI* constante foram deduzidos na Seção 4.4.2 do Capítulo 4:

$K_i = 4EI/l_i \rightarrow$ barra sem articulação;

$K_i = 3EI/l_i \rightarrow$ barra com articulação na extremidade oposta à extremidade que sofre o giro.

A equação de equilíbrio resultante da solução pelo Método dos Deslocamentos para esta estrutura é:

$$\beta_{10} + K_{11} D_1 = 0 \,,$$

onde os valores do termo de carga β_{10} e coeficiente de rigidez global K_{11} estão indicados na Figura 8.3.

A solução dessa equação resulta no valor da deslocabilidade rotação D_1:

$$D_1 = \frac{M_E}{\sum K_i} \,.$$

A determinação dos momentos fletores finais nas barras é feita por superposição dos efeitos dos casos (0) e (1): $M = M_0 + M_1 \cdot D_1$, sendo que M_0 é nulo. Com base nos valores obtidos acima, tem-se os valores dos momentos fletores finais mostrados na Figura 8.4 nas seções extremas das barras. Esses valores estão definidos em função do parâmetro γ_i de cada barra, sendo

$\gamma_i \rightarrow$ coeficiente de distribuição de momento da barra *i*.

O coeficiente de distribuição de momento de uma barra com relação a um nó é a razão entre o coeficiente de rigidez à rotação da barra e o somatório dos coeficientes de rigidez à rotação de todas as barras que convergem no nó:

$$\gamma_i = \frac{K_i}{\sum K_i} . \tag{8.1}$$

O somatório de todos os coeficientes de distribuição de momento de todas as barras adjacentes a um nó, com respeito a este nó, é unitário:

$$\sum_i \gamma_i = 1 . \tag{8.2}$$

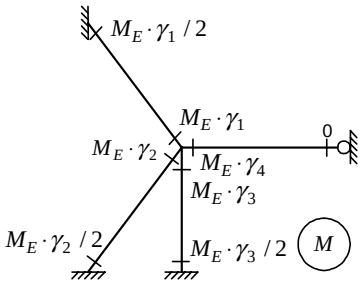


Figura 8.4 – Momentos fletores finais nas extremidades das barras da estrutura da Figura 8.2.

Observa-se também pela Figura 8.4 que a distribuição do momento externo aplicado no nó acarreta em momentos fletores nas outras extremidades das barras. O valor do momento fletor na outra extremidade é igual à metade do valor na extremidade adjacente ao nó equilibrado, para o caso de barra sem articulação, ou igual a zero, para o caso de barra articulada.

Define-se, então, o *coeficiente de transmissão de momento* da barra *i*:

$t_i = 1/2 \rightarrow$ coeficiente de transmissão de momento para barra com *EI* constante e sem articulação.

$t_i = 0 \rightarrow$ coeficiente de transmissão de momento para barra com extremidade oposta articulada.

Para o caso da barra sem articulação, o valor $1/2$ corresponde à relação entre os coeficientes de rigidez $2EI/l$ e $4EI/l$ devidos a uma rotação imposta.

Conclui-se que *o momento externo M_E aplicado no nó é distribuído nas barras por momentos fletores nas seções adjacentes ao nó, chamados de parcelas equilibrantes, que são proporcionais aos coeficientes de distribuição de momento no nó*:

$$M_i = M_E \cdot \gamma_i \,. \tag{8.3}$$

Nas seções das barras opostas ao nó aparecem momentos fletores, chamados de parcelas transmitidas, que são iguais ao produto das parcelas equilibrantes pelo coeficiente de transmissão de momento de cada barra.

No caso de barras que não têm seção transversal constante, os coeficientes de rigidez à rotação não correspondem aos valores $4EI/l$ ou $3EI/l$, assim como o coeficiente de transmissão de momento da barra sem articulação não é igual a $1/2$. O apêndice B (veja a Seção B.6) apresenta uma metodologia que possibilita a determinação dos coeficientes de rigidez à rotação de barras que pode ser aplicada para uma barra que não tem a seção transversal constante.

De uma forma genérica, quando a inércia à flexão *EI* varia ao longo do comprimento de uma barra, o coeficiente de transmissão de momento da barra pode ser avaliado pelos coeficientes de rigidez à rotação da barra conforme indicado na Figura 8.5 (Süssekind 1977-3).

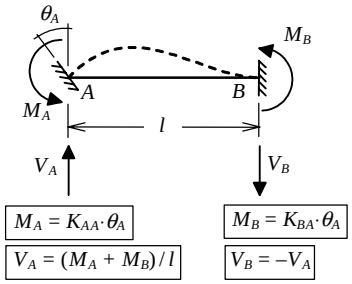


Figura 8.5 – Coeficientes de rigidez à rotação de uma barra com inércia à flexão *EI* variável.

Utilizando a notação adotada na Figura 8.5, para uma rotação θ_A imposta na extremidade A de uma barra, enquanto a outra extremidade B permanece fixa, o coeficiente de transmissão de momento de A para B, t_{AB}, é igual à razão entre o valor do momento fletor M_B na extremidade oposta e o valor do momento fletor M_A na extremidade que sofre o giro. Ou seja,

$$t_{AB} = \frac{K_{BA}}{K_{AA}}, \tag{8.4}$$

sendo K_{AA} e K_{BA} coeficientes de rigidez à rotação indicados na Figura 8.5.

8.3. Solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio

Conforme apresentado na Seção 8.1, o Método da Distribuição de Momentos é um processo iterativo de sucessivos passos de travamento de um nó e liberação de um outro nó. Esta seção procura dar uma interpretação matemática para o processo, mostrando que ele se constitui em uma solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio do Método dos Deslocamentos.

Isso vai ser mostrado com auxílio de um exemplo, que é uma viga contínua com três vãos mostrada na Figura 8.6. A viga tem uma inércia à flexão EI = 2,4 x 10^4 kNm^2. O primeiro apoio simples do 2º gênero (apoio que fixa deslocamentos e libera a rotação) está sendo considerado como uma articulação na extremidade da barra, sendo que a rotação do nó do primeiro apoio não está sendo considerada como incógnita (veja a Seção 7.3.2 do Capítulo 7). Portanto, a viga só tem duas deslocabilidades, que são as rotações D_1 e D_2 das seções dos dois apoios internos.

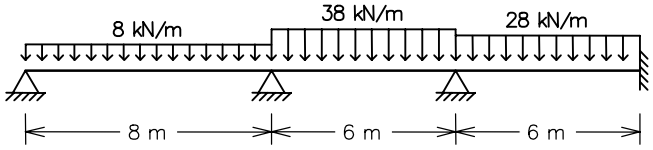


Figura 8.6 – Viga contínua com duas deslocabilidades.

A solução da viga da Figura 8.6 pelo Método dos Deslocamentos resulta no seguinte sistema de equações de equilíbrio (veja os Capítulos 6 e 7):

$$\begin{cases} (-64+114)+(3EI/8+4EI/6)\cdot D_1+(2EI/6)\cdot D_2=0 \\ (-114+84)+(2EI/6)\cdot D_1+(4EI/6+4EI/6)\cdot D_2=0 \end{cases}$$

Substituindo o valor fornecido para EI e passando os termos de carga para o lado direito do sinal de igual, tem-se:

$$\begin{cases} +25000\cdot D_1 \quad +8000\cdot D_2=-50 & (8.5) \\ +8000\cdot D_1+32000\cdot D_2=+30 & (8.6) \end{cases}$$

A solução direta do sistema formado pelas equações (8.5) e (8.6) resulta nos seguintes valores para as rotações D_1 e D_2:

$D_1=-2{,}5000\cdot 10^{-3}\,\text{rad}$;

$D_2=+1{,}5625\cdot 10^{-3}\,\text{rad}$.

Uma alternativa para a solução do sistema de equações de equilíbrio acima é uma solução iterativa do tipo Gauss-Seidel. Esta solução é o segundo ponto chave para o Método de Distribuição de Momentos (o primeiro é a distribuição de momentos em um nó mostrada na Seção 8.2). A solução iterativa é iniciada admitindo um valor nulo para D_2 e encontrando um valor para D_1 com base na equação (8.5):

$$+25000 \cdot D_1 + 8000 \cdot (0) = -50 \quad \Rightarrow \quad D_1 = -2{,}0000 \cdot 10^{-3}\,\text{rad}\,.$$

O segundo passo da solução iterativa consiste em utilizar este valor encontrado para D_1 na equação (8.6) para determinar um valor para D_2:

$$+8000 \cdot (-2{,}0000 \cdot 10^{-3}) + 8000 \cdot D_2 = +30 \quad \Rightarrow \quad D_2 = +1{,}4375 \cdot 10^{-3}\,\text{rad}\,.$$

No terceiro passo, a equação (8.5) é utilizada novamente com o último valor obtido para D_2 para determinar um novo valor para D_1, resultando em:

$$+25000 \cdot D_1 + 8000 \cdot (+1{,}4375 \cdot 10^{-3}) = -50 \quad \Rightarrow \quad D_1 = -2{,}4600 \cdot 10^{-3}\,\text{rad}\,.$$

A Tabela 8.1 indica os resultados da solução iterativa após quatro ciclos completos de passagem pelo par de equações (8.5) e (8.6). Os valores exatos da solução direta também estão mostrados na tabela. Pode-se verificar que os valores obtidos pela solução iterativa são bastante próximos dos valores exatos. Na verdade, a solução exata sempre pode ser atingida, para um determinado grau de precisão desejado, bastando para isso executar um número suficiente de ciclos.

Tabela 8.1 – Solução iterativa das equações (8.5) e (8.6).

	D_1 [rad]	D_2 [rad]
Valores iniciais	–	0
Primeiro ciclo	$-2{,}0000 \cdot 10^{-3}$	$+1{,}4375 \cdot 10^{-3}$
Segundo ciclo	$-2{,}4600 \cdot 10^{-3}$	$+1{,}5525 \cdot 10^{-3}$
Terceiro ciclo	$-2{,}4968 \cdot 10^{-3}$	$+1{,}5617 \cdot 10^{-3}$
Quarto ciclo	$-2{,}4997 \cdot 10^{-3}$	$+1{,}5624 \cdot 10^{-3}$
Valores exatos	$-2{,}5000 \cdot 10^{-3}$	$+1{,}5625 \cdot 10^{-3}$

O processo de solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio mostrado acima é uma interpretação matemática do experimento mostrado na Seção 8.1. Isso é mostrado em seguida, com base na Figura 8.7.

Pode-se imaginar que a situação inicial, designada *Estágio 0*, corresponde a uma configuração de engastamento dos nós interiores da viga contínua da Figura 8.6, isto é, com rotações fixadas com valores nulos. No *Estágio 1*, ocorre uma liberação da rotação D_1, enquanto a rotação D_2 é mantida nula. Este estágio corresponde ao resultado do primeiro passo da solução iterativa, resultando no primeiro valor encontrado para D_1. No *Estágio 2*, a rotação D_1 é fixada com o valor obtido no estágio anterior e a rotação D_2 é liberada exatamente como feito no segundo passo da solução iterativa. O *Estágio 3* corresponde a um congelamento da rotação D_2 com o valor obtido no estágio anterior e uma liberação da rotação D_1. No *Estágio 4*, a rotação D_1 é fixada e a rotação D_2 é liberada. Esse processo continua até atingir a convergência das rotações dos nós. Isso ocorre quando os incrementos de rotação dos nós são desprezíveis.

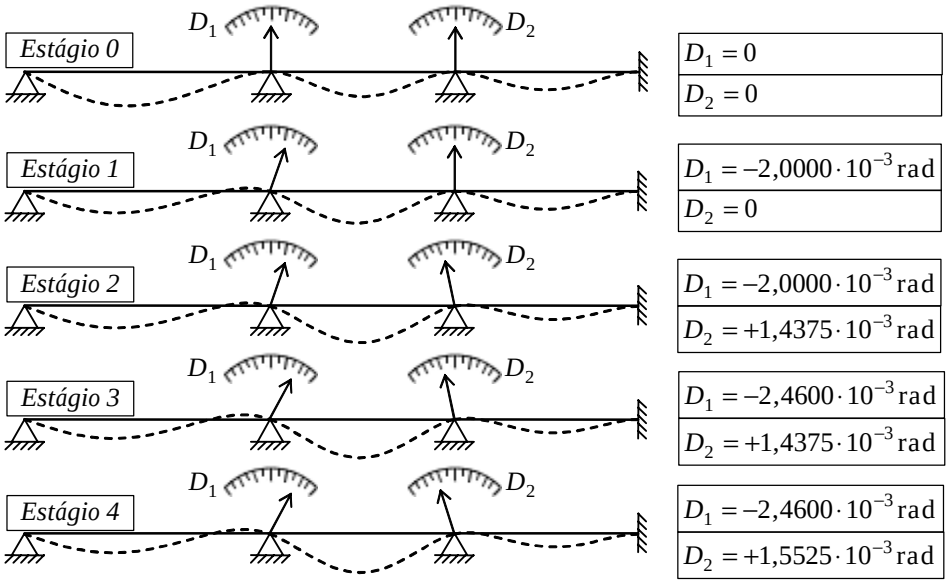


Figura 8.7 – Interpretação física da solução iterativa do sistema de equações de equilíbrio da viga da Figura 8.6 (configurações deformadas com fator de amplificação igual a 150).

Deve-se observar que em cada estágio da solução iterativa mostrada na Figura 8.7 os momentos fletores nas barras da viga poderiam ser determinados com base nos no valores correntes da rotações D_1 e D_2. Dessa forma, pode-se acompanhar a evolução da distribuição dos momentos fletores nas barras e o desequilíbrio de momentos fletores nos nós ao longo do processo.

A analogia da solução iterativa indicada na Figura 8.7 com o experimento mostrado na Seção 8.1 é evidente. Em cada estágio do processo iterativo, apenas um nó tem a rotação liberada. O nó liberado gira até atingir um estado de equilíbrio. O incremento de rotação corresponde ao valor do desequilíbrio de momentos fletores no nó. Com o giro do nó, as barras adjacentes se deformam, ocorrendo uma redistribuição de momentos fletores nessas barras e afetando o equilíbrio do nó adjacente. No estágio seguinte, a rotação do nó liberado é fixada com o valor acumulado de rotação de todos os estágios anteriores. O equilíbrio de momentos fletores no nó fixado é alterado pela liberação da rotação do nó adjacente. O nó que tem a sua rotação fixada artificialmente só fica equilibrado com a aplicação de um momento externo. O processo iterativo continua até que a estrutura atinja uma situação de equilíbrio global, onde não é necessário aplicar momentos externos nos nós interiores.

8.4. Formalização do Processo de Cross

O Método da Distribuição de Momentos pode ser visto como a junção de duas idéias apresentadas nas Seções 8.2 e 8.3. A solução do método segue a mesma linha do processo iterativo mostrado na seção anterior. A diferença é que as rotações não são calculadas em cada estágio do processo. Ao invés disso, é feito um acompanhamento detalhado da evolução dos valores dos momentos fletores nas extremidades de todas as barras. Os valores dos momentos fletores nas barras são determinados em cada estágio com base na distribuição de parcelas equilibrantes que foi estudada na Seção 8.2.

Inicialmente, o Processo de Cross é mostrado para uma estrutura que tem apenas um nó a equilibrar. Em seguida, na Seção 8.4.2, o processo é formalizado com auxílio da viga contínua estudada na Seção 8.3.

8.4.1. Processo de Cross para um pórtico com uma deslocabilidade

O Processo de Cross é formulado nesta seção para um pórtico que só tem uma rotação nodal livre. O objetivo aqui é mostrar que, utilizando o princípio básico de distribuição de momento externo aplicado em um nó dado pela expressão (8.3), pode-se determinar os valores das parcelas equilibrantes de momentos fletores nas barras diretamente (não é necessário calcular a rotação do nó).

Considere o pórtico mostrado na Figura 8.8 que tem barras inextensíveis e rigidez à flexão *EI* constante para todas as barras. As barras estão numeradas conforme mostrado na figura, sendo que a barra 1 tem uma articulação na base.

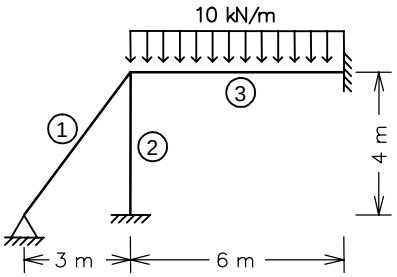


Figura 8.8 – Pórtico com uma deslocabilidade interna.

Os coeficientes de rigidez à rotação das três barras do exemplo com relação ao nó central livre são:

$K_1 = 3EI/5$, $K_2 = 4EI/4$ e $K_3 = 4EI/6$.

Utilizando a expressão (8.1) pode-se determinar os coeficientes de distribuição de momento das três barras no nó livre:

$$\gamma_1 = \frac{K_1}{K_1+K_2+K_3} = 0{,}26\,,\ \gamma_2 = \frac{K_2}{K_1+K_2+K_3} = 0{,}44 \text{ e } \gamma_3 = \frac{K_3}{K_1+K_2+K_3} = 0{,}30\,.$$

A Figura 8.9 mostra o estágio inicial do Processo de Cross para o pórtico estudado. A figura também indica os valores dos coeficientes de distribuição de momento das três barras com relação ao nó central. Neste estágio, o nó tem a rotação fixada com valor nulo, isto é, o nó está completamente engastado. Nesta situação, as barras descarregadas não apresentam momentos fletores e a barra carregada tem momentos fletores de engastamento perfeito, que são obtidos da Figura 4.43 do Capítulo 4. Observa-se que os momentos fletores nas seções adjacentes ao nó central não estão equilibrados.

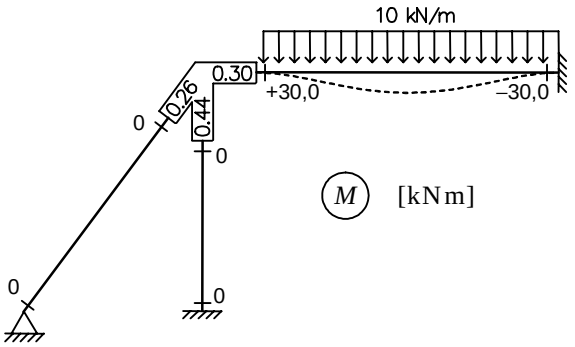


Figura 8.9 – Estágio inicial do Processo de Cross para o pórtico da Figura 8.8.

No segundo estágio do processo, o nó central tem a rotação liberada (Figura 8.10). De acordo com o que foi visto na Seção 8.2, o momento total desequilibrante no nó (com valor de +30,0 kNm) é equilibrado por parcelas equilibrantes de momentos fletores nas três barras adjacentes ao nó.

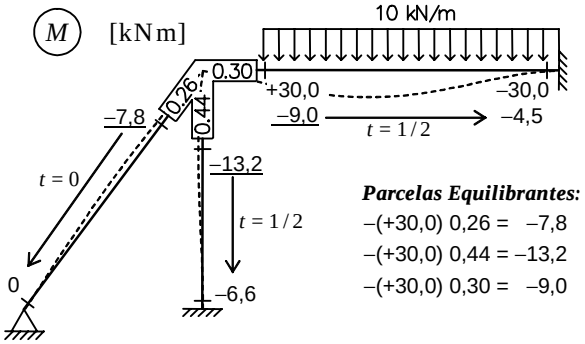


Figura 8.10 – Estágio final do Processo de Cross para o pórtico da Figura 8.8.

As parcelas equilibrantes (indicadas na Figura 8.10) são proporcionais aos valores dos coeficientes de distribuição de momento e têm sentido contrário ao momento desequilibrante. O sentido contrário é indicado pelo sinal contrário das parcelas equilibrantes em relação ao momento desequilibrante, o que é consistente com a convenção de sinais adotada no Processo de Cross, que é a mesma do Método dos Deslocamentos.

Também conforme visto na Seção 8.2, o equilíbrio do nó central acarreta em um transporte das parcelas equilibrantes para os outros nós das barras. As parcelas transmitidas de momentos fletores são determinadas pelos coeficientes de transmissão de momento (t) indicados na Figura 8.10.

As parcelas equilibrantes e transmitidas de momentos fletores nas barras que são obtidas no segundo estágio do processo se acumulam aos momentos fletores do estágio inicial de engastamento perfeito. Este acúmulo é consistente com o acúmulo de rotações nodais que é uma característica do processo iterativo mostrado na Seção 8.3. Os valores finais acumulados de momentos fletores nas extremidades das barras do pórtico estudado são mostrados na Figura 8.11. O diagrama de momentos fletores, desenhado com ordenadas do lado da fibra tracionada, também está indicado na figura.

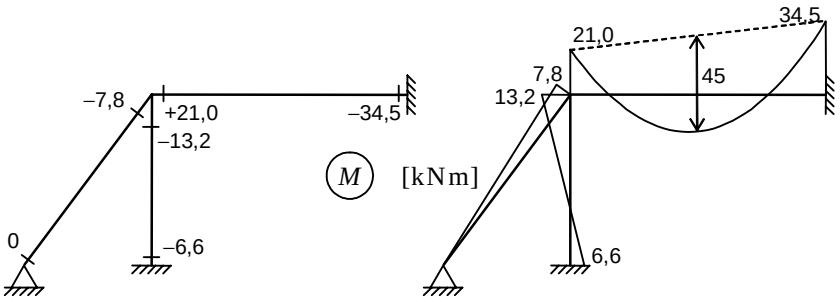


Figura 8.11 – Diagrama final de momentos fletores para o pórtico da Figura 8.8.

Observa-se pela análise do pórtico desta seção que a aplicação do Processo de Cross para uma estrutura com apenas uma deslocabilidade é muito simples. Os momentos fletores nas barras são determinados sem que se precise calcular rotações. Esta simplicidade é mantida para o caso de se ter mais do que uma deslocabilidade, conforme vai ser visto em seguida.

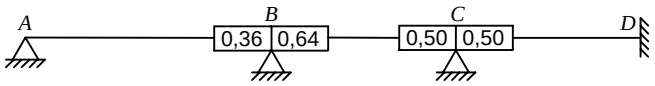
8.4.2. Processo de Cross para uma viga com duas deslocabilidades

No exemplo da seção anterior, após o estágio inicial foi necessário apenas um passo para equilibrar o nó e terminar o processo iterativo. Isso porque existia apenas um nó a equilibrar. Quando a estrutura tem mais do que uma deslocabilidade, isto

é, quando a estrutura tem mais do que um nó a equilibrar, a mesma metodologia de equilíbrio nodal baseado nos coeficientes de distribuição de momento é aplicada. Neste caso, entretanto, as parcelas transmitidas de momentos fletores no equilíbrio de um nó acarretam em desequilíbrio de nós adjacentes já equilibrados.

Portanto, para atingir a convergência final do processo é necessário repetir ciclos de equilíbrio nodal até que as parcelas transmitidas sejam desprezíveis. Este é justamente o processo iterativo que foi mostrado na Seção 8.3. A única diferença é que no Processo de Cross formalizado nesta seção as rotações dos nós equilibrados não são calculadas. Ao invés disso, os valores dos momentos fletores nas barras são determinados em cada estágio.

Para exemplificar a metodologia de cálculo do Processo de Cross para estruturas com mais do que uma deslocabilidade, a mesma viga contínua estudada na Seção 8.3 (Figura 8.6) vai ser analisada. A Figura 8.12 indica todos os estágios dessa solução. Apenas os dois nós interiores são equilibrados (a primeira barra é considerada articulada na extremidade esquerda). É adotada uma precisão de 0,1 kNm para momentos fletores. Isto é, adota-se uma casa decimal para representar os valores dos momentos fletores.



Estágio 0	0	–64,0	+114,0	–114,0	+84,0	–84,0
Estágio 1	0	–18,0	–32,0 →	–16,0		
Estágio 2	0		+11,5 ←	+23,0	+23,0 →	+11,5
Estágio 3	0	–4,1	–7,4 →	–3,7		
Estágio 4	0		+0,9 ←	+1,9	+1,8 →	+0,9
Estágio 5	0	–0,3	–0,6 →	–0,3		
Estágio 6	0		0 ←	+0,1	+0,2 →	+0,1
Final	0	–86,4	+86,4	–109,0	+109,0	–71,5

Figura 8.12 – Processo de Cross para a viga contínua da Figura 8.6 (momentos em kNm).

Os coeficientes de distribuição de momento estão indicados em cada nó na Figura 8.12. Os cálculos destes coeficientes para o primeiro nó são:

$$\gamma_{BA} = \frac{3EI/8}{3EI/8 + 4EI/6} = 0{,}36 \text{ e } \gamma_{BC} = \frac{4EI/6}{3EI/8 + 4EI/6} = 0{,}64 .$$

Para o segundo nó, tem-se:

$$\gamma_{CB} = \gamma_{CD} = \frac{4EI/6}{4EI/6 + 4EI/6} = 0{,}50 .$$

O processo mostrado na Figura 8.12 inicia no *Estágio 0*, que corresponde a uma situação de engastamento perfeito. Os valores dos momentos fletores iniciais nas barras são determinados com base na Figura 4.43 do Capítulo 4. Observa-se que existe desequilíbrio de:

$$-64{,}0 + 114{,}0 = +50{,}0 \text{ kNm}$$

no primeiro nó. O segundo nó tem um desequilíbrio de:

$$-114{,}0 + 84{,}0 = -30{,}0 \text{ kNm}.$$

No *Estágio 1*, o primeiro nó é equilibrado. No caso geral de uma estrutura com várias deslocabilidades, não existe uma ordem preferencial para equilíbrio dos nós: qualquer nó desequilibrado pode ser o próximo a ser equilibrado. Entretanto, *o processo converge mais rapidamente se em cada estágio o nó que tiver o maior desequilíbrio em módulo naquele instante for o nó a ser equilibrado* (Süssekind 1977-3). O equilíbrio do primeiro nó resulta nas seguintes parcelas equilibrantes:

$$-(+50{,}0) \cdot 0{,}36 = -18{,}0 \text{ kNm};$$
$$-(+50{,}0) \cdot 0{,}64 = -32{,}0 \text{ kNm}.$$

Conforme está mostrado na Figura 8.12, após o equilíbrio do nó as parcelas equilibrantes são sublinhadas para indicar que os momentos fletores acima naquele nó estão em equilíbrio (somados dão um valor nulo). O equilíbrio desse nó não transmite momento fletor para a esquerda pois a extremidade oposta da barra à esquerda é articulada. A parcela transmitida para a direita é igual à metade da parcela equilibrante ($t = 1/2$):

$$-32{,}0 \cdot 1/2 = -16{,}0 \text{ kNm}.$$

Esta parcela transmitida vai se somar ao momento fletor na seção à esquerda do segundo nó. Como este nó ainda não foi equilibrado, o seu desequilíbrio total agora é:

$$-114{,}0 + 84{,}0 - 16{,}0 = -46{,}0 \text{ kNm}.$$

No *Estágio 2*, o equilíbrio do segundo nó resulta em parcelas equilibrantes iguais (as parcelas aparecem sublinhadas na Figura 8.12):

$$-(-46{,}0) \cdot 0{,}50 = +23{,}0 \text{ kNm}.$$

As parcelas transmitidas nesse equilíbrio são iguais também:

$$+23{,}0 \cdot 1/2 = +11{,}5 \text{ kNm}.$$

A parcela transmitida para a direita vai para a seção do engaste. A única conseqüência é que esta parcela se soma ao momento fletor inicial na seção do engaste (que absorve qualquer valor de momento fletor). A parcela transmitida para a esquerda, por sua vez, desequilibra o primeiro nó já equilibrado. Não tem problema: é só começar um novo ciclo de equilíbrio nodal, iterando até convergir.

O desequilíbrio de +11,5 kNm no primeiro nó é equilibrado no *Estágio 3*. As parcelas equilibrantes são:

– (+11,5) · 0,36 = –4,1 kNm;
– (+11,5) · 0,64 = –7,4 kNm.

Estes valores foram aproximados de tal maneira que, utilizando uma casa decimal, resultasse em uma soma exatamente igual a –11,5 kNm, dessa forma forçando o equilíbrio de momentos fletores dentro da precisão desejada.

Observa-se que um procedimento semelhante é feito no *Estágio 4*, que equilibra a parcela transmitida de –3,7 kNm. Os valores das parcelas equilibrantes de +1,9 kNm e +1,8 kNm foram obtidos de maneira a somar exatamente +3,7 kNm, mesmo que em princípio eles devessem ser iguais (os dois coeficientes de distribuição de momento no nó são iguais a 0,50). Com esse procedimento, os momentos fletores finais do processo vão satisfazer o equilíbrio com o número de casas decimais especificado para precisão.

No *Estágio 4* as parcelas transmitidas para a esquerda e para a direita são iguais (+0,9 kNm). Como se está utilizando apenas uma casa decimal para representar os valores de momentos, o arredondamento da metade de +1,9 kNm poderia ter sido para cima ou para baixo. *Optou-se por arredondar para baixo pois isso vai fazer o processo iterativo convergir mais rapidamente.* Observe que as diferenças de valores são muito pequenas (da ordem da precisão especificada).

No último estágio (*Estágio 6*) ocorre o mesmo que no *Estágio 4*. As parcelas equilibrantes de +0,1 kNm e +0,2 kNm não são iguais, mas equilibram o momento desequilibrante de –0,3 kNm com uma casa decimal. Neste estágio, a parcela transmitida para a esquerda (metade de +0,1 kNm) foi arredondada para um valor nulo. Dessa forma o primeiro nó permaneceu em equilíbrio e o processo termina.

Deve-se observar que as parcelas transmitidas sempre decrescem em módulo, o que garante a convergência do processo iterativo. Isso se deve a dois motivos. Primeiro, as parcelas equilibrantes decrescem em módulo em relação ao momento desequilibrante em cada nó pois os coeficientes de distribuição de momento são no máximo iguais a uma unidade (em geral, menores do que uma unidade). Segundo, porque os coeficientes de transmissão de momento também são menores do que uma unidade.

Os valores dos momentos finais nas extremidades de todas as barras, mostrados no final da tabela da Figura 8.12, são determinados com base no acúmulo (soma com sinal) dos momentos fletores de todos os estágios do processo. O diagrama de momentos fletores na viga contínua é mostrado na Figura 8.13 desenhado do lado da fibra tracionada.

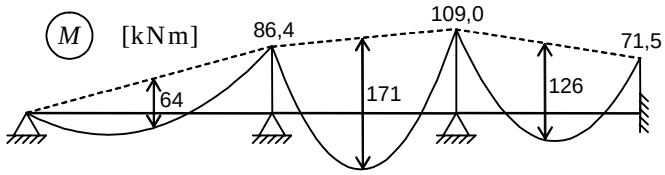


Figura 8.13 – Diagrama de momentos fletores da viga contínua da Figura 8.6.

8.5. Aplicação do Processo de Cross a quadros planos

A metodologia do Processo de Cross apresentada na seção anterior pode ser aplicada diretamente para pórticos planos indeslocáveis (sem translações nodais). Isso vai ser exemplificado com a solução do quadro plano mostrado na Figura 8.14. O objetivo desta solução é obter o diagrama de momentos fletores do quadro pelo Processo de Cross utilizando uma precisão de 1 KNm, isto é, sem nenhuma casa decimal. Todas as barras do pórtico são inextensíveis e têm a mesma inércia à flexão *EI* para todas as seções.

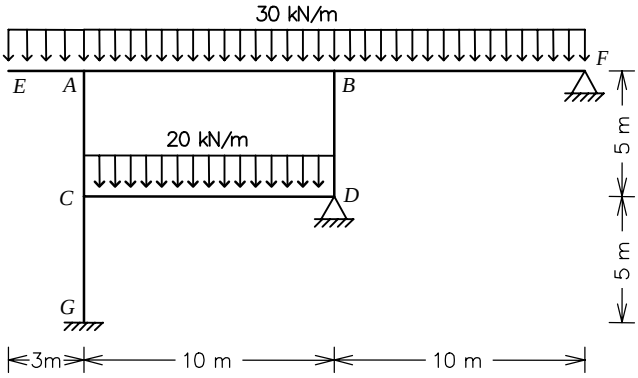


Figura 8.14 – Exemplo de pórtico plano para solução pelo Processo de Cross.

Conforme estudado no Capítulo 7, o pórtico da Figura 8.14 só tem deslocabilidades internas (rotações nodais). As deslocabilidades do nó *E* não são consideradas pois o nó corresponde a uma extremidade livre de balanço. A rotação do nó *F* não está sendo considerada como deslocabilidade pois a barra superior da direita está sendo considerada articulada no nó *F* (veja a Seção 7.3.2). Dessa forma, o quadro têm quadro deslocabilidades internas, que são as rotações dos nós *A*, *B*, *C* e *D*.

A solução iterativa do Processo de Cross do quadro da Figura 8.14 está mostrada na Figura 8.15. Esta figura indica os coeficientes de distribuição de momento de cada barra para cada nó a ser equilibrado. No nó *A*, somente as barras *AB* e *AC* são consideradas para a determinação dos coeficientes pois a barra *AE* é um balanço. Os cálculos dos coeficientes para este nó são:

$$\gamma_{AB} = \frac{4EI/10}{4EI/10 + 4EI/5} = \frac{1}{3} \text{ e } \gamma_{AC} = \frac{4EI/5}{4EI/10 + 4EI/5} = \frac{2}{3}.$$

Para o nó B, os cálculos dos coeficientes são:

$$\gamma_{BA} = \frac{4EI/10}{4EI/10 + 3EI/10 + 4EI/5} = 0{,}27, \ \gamma_{BF} = \frac{3EI/10}{4EI/10 + 3EI/10 + 4EI/5} = 0{,}20 \text{ e}$$

$$\gamma_{BD} = \frac{4EI/5}{4EI/10 + 3EI/10 + 4EI/5} = 0{,}53.$$

No nó C, tem-se:

$$\gamma_{CA} = \gamma_{CG} = \frac{4EI/5}{4EI/5 + 4EI/10 + 4EI/5} = 0{,}40 \text{ e } \gamma_{CD} = \frac{4EI/10}{4EI/5 + 4EI/10 + 4EI/5} = 0{,}20.$$

Finalmente, os coeficientes de distribuição de momento para o nó *D* são:

$$\gamma_{DB} = \frac{4EI/5}{4EI/10 + 4EI/5} = \frac{2}{3} \text{ e } \gamma_{DC} = \frac{4EI/10}{4EI/10 + 4EI/5} = \frac{1}{3}.$$

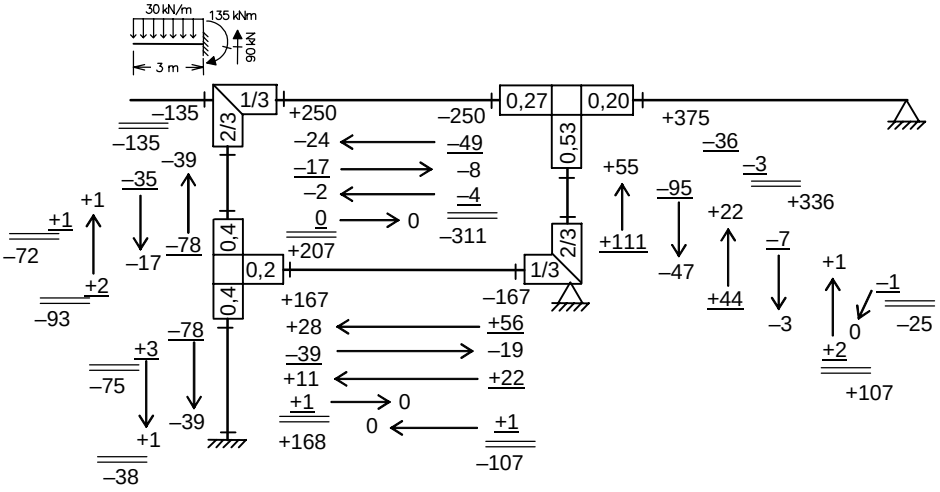


Figura 8.15 – Processo de Cross para o quadro plano da Figura 8.14 (momentos em kNm).

O Processo de Cross mostrado na Figura 8.15 é iniciado com o cálculo dos momentos de engastamento perfeito das barras carregadas. Nas barras *AB*, *BF* e *CD*, os momentos de engastamento são obtidos da Figura 4.43 do Capítulo 4. Observa-se que os momentos fletores iniciais da barra *CD* foram arredondados para a precisão desejada. O momento de engastamento no nó *A* da barra *EA* é calculado conforme indica o detalhe no topo esquerdo da Figura 8.15 (cálculo isostático de reações de engastamento de uma barra em balanço com uma carga uniformemente distribuí-

da). O momento fletor desta barra em *A* é negativo pois atua na extremidade da barra no sentido horário.

Em cada passo do processo vai se procurar sempre equilibrar o nó que tem o maior momento desequilibrante em módulo. No estágio inicial, os nós *C* e *D* têm o valor máximo em módulo de momento desequilibrante e optou-se por equilibrar o nó *D* (momento desequilibrante igual a –167 kNm) no primeiro passo. Considerando os coeficientes de distribuição de momento neste nó, tem-se como parcelas equilibrantes +111 kNm, na barra *DB*, e +56 kNm, na barra *DC*. As parcelas transmitidas são +55 kNm (arredondada para baixo), para o nó *B*, e +28 kNm, para o nó *C*.

No passo seguinte, o nó *C* é o que tem o maior momento desequilibrante em módulo (+167 + 28 = +195 kNm). O equilíbrio deste nó acarreta na transmissão de momentos para os nós *A* e *D* (que passa a ficar desequilibrado novamente). O próximo nó a ser equilibrado é o nó *B*, em seguida o nó *A*, e assim sucessivamente até que os momentos transmitidos sejam menores do que 1 kNm (a precisão desejada).

A Figura 8.15 mostra os momentos fletores finais nas extremidades de todas as barras. Os valores finais são calculados superpondo os valores dos momentos de todos os estágios do processo. O diagrama de momentos fletores finais deste exemplo é indicado na Figura 8.16.

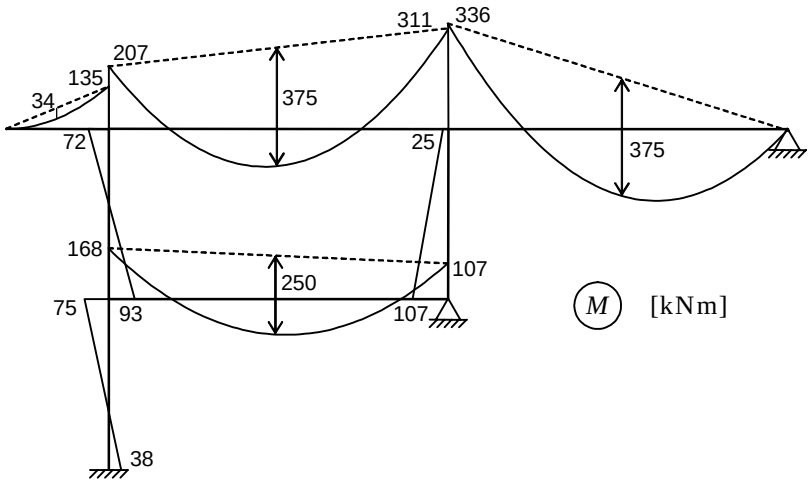


Figura 8.16 – Diagrama de momentos fletores do quadro plano da Figura 8.14.

10. CARGAS ACIDENTAIS E MÓVEIS; LINHAS DE INFLUÊNCIA

10.1. Introdução

Diversas estruturas são solicitadas por cargas móveis. Exemplos são pontes rodoviárias e ferroviárias ou pórticos industriais que suportam pontes rolantes para transporte de cargas. Os esforços internos nestes tipos de estrutura não variam apenas com a magnitude das cargas aplicadas, mas também com a posição de atuação das cargas. Portanto, o projeto de um elemento estrutural, como uma viga de ponte, envolve a determinação das posições das cargas móveis que produzem valores extremos dos esforços nas seções do elemento.

No projeto de estruturas submetidas a cargas fixas, a posição de atuação de cargas acidentais de ocupação também influencia na determinação dos esforços dimensionantes. Por exemplo, o momento fletor máximo em uma determinada seção de uma viga contínua com vários vãos não é determinado pelo posicionamento da carga acidental de ocupação em todos os vãos. Posições selecionadas de atuação da carga acidental vão determinar os valores limites de momento fletor na seção. Assim, o projetista terá que determinar, para cada seção a ser dimensionada e para cada esforço dimensionante, as posições de atuação das cargas acidentais que provocam os valores extremos (máximos e mínimos de um determinado esforço).

Uma alternativa para este problema seria analisar a estrutura para várias posições das cargas móveis ou acidentais e selecionar os valores extremos. Este procedimento não é prático nem eficiente de uma maneira geral, exceto para estruturas e carregamentos simples. O procedimento geral e objetivo para determinar as posições de cargas móveis e acidentais que provocam valores extremos de um determinado esforço em uma seção de uma estrutura é feito com auxílio de Linhas de Influência.

Linhas de Influência (*LI*) descrevem a variação de um determinado efeito (por exemplo, uma reação de apoio, um esforço cortante ou um momento fletor em uma seção) em função da posição de uma carga unitária que passeia sobre a estrutura. Assim, a *LI* de momento fletor em uma seção é a representação gráfica ou analítica do momento fletor, na seção de estudo, produzida por uma carga concentrada unitária, geralmente de cima para baixo, que percorre a estrutura. Isso é exemplificado na figura 10.1, que mostra a *LI* de momento fletor em uma seção *S* indicada. Nesta figura, a posição da carga unitária $P = 1$ é dada pelo parâmetro x, e uma ordenada genérica da *LI* representa o valor do momento fletor em *S* em função de x, isto é, $LIM_S = M_S(x)$. Em geral, os valores positivos dos esforços nas linhas de influência são desenhados para baixo e os valores negativos para cima.

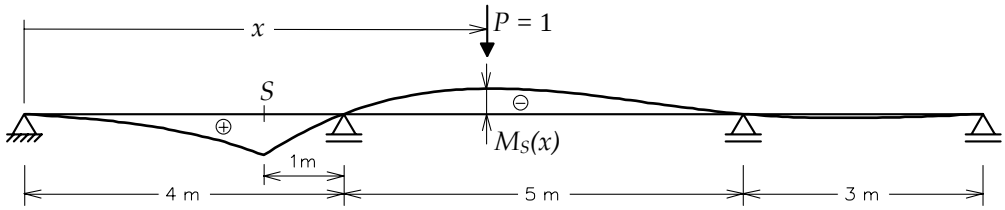


Figura 10.1 – Linha de Influência de momento fletor em uma seção de uma viga contínua.

Com base no traçado de *LI*'s, é possível obter as chamadas *envoltórias limites* de esforços que são necessárias para o dimensionamento de estruturas submetidas a cargas móveis ou acidentais. As envoltórias limites de momento fletor em uma estrutura descrevem, para um conjunto de cargas móveis ou acidentais, os valores máximos e mínimos de momento fletor em cada uma

das seções da estrutura, de forma análoga ao que descreve o diagrama de momentos fletores para um carregamento fixo. Assim, o objetivo da Análise Estrutural para o caso de cargas móveis ou acidentais é a determinação de envoltórias de máximos e mínimos de momentos fletores, esforços cortantes etc., o que possibilitará o dimensionamento da estrutura submetida a este tipo de solicitação. As envoltórias são, em geral, obtidas por interpolação de valores máximos e mínimos, respectivamente, de esforços calculados em um determinado número de seções transversais ao longo da estrutura.

A determinação de valores máximos e mínimos de um esforço interno em uma seção de estudo é exemplificada para o caso do momento fletor na seção S da figura anterior. O carregamento permanente, constituído do peso próprio da estrutura, é representado por uma carga uniformemente distribuída g, tal como indica a figura 10.2.

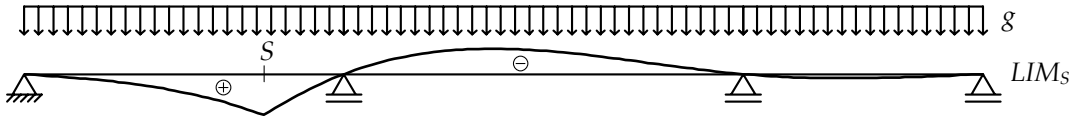


Figura 10.2 – Carga permanente uniformemente distribuída atuando em uma viga contínua.

Considerando que a ordenada de LIM_S (= $M_S(x)$) é função de uma carga concentrada unitária, o valor do momento fletor em S devido ao carregamento permanente pode ser obtido por integração do produto da carga infinitesimal gdx por $M_S(x)$ ao longo da estrutura:

$$M_S^g = \int_0^{12} M_S(x) \cdot g dx = \int_0^{12} LIM_S \cdot g dx$$

Considere que existe um carregamento acidental de ocupação que é representado por uma carga uniformamente distribuída q. Por ser acidental, a carga q pode atuar parcialmente ao longo da estrutura. O que se busca são as posições de atuação da carga q que maximizam ou minimizam o momento fletor em S. O valor máximo de M_S é obtido quando a carga q está posicionada sobre ordenadas positivas da LIM_S, e o valor mínimo é obtido quando a carga q está posicionada sobre ordenadas negativas da LIM_S. Isso é mostrado nas figuras 10.3 e 10.4.

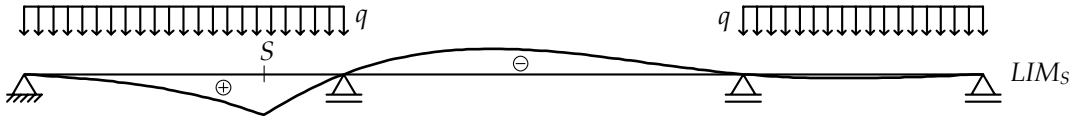


Figura 10.3 – Posicionamento de carga acidental uniformemente distribuída para provocar máximo momento fletor em uma seção.

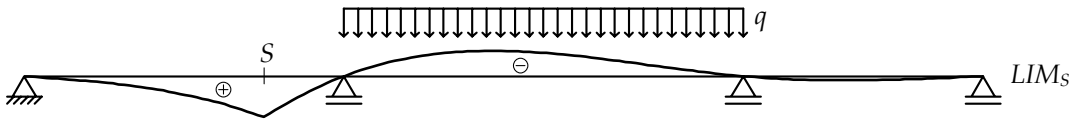


Figura 10.4 – Posicionamento de carga acidental uniformemente distribuída para provocar mínimo momento fletor em uma seção.

Os valores máximos e mínimos de M_S devidos somente ao carregamento acidental podem ser obtidos por integração do produto $LIM_S \cdot qdx$ nos trechos positivos e negativos, respectivamente, da linha de influência:

$$\left(M_S^q\right)_{máx} = \int_0^4 LIM_S \cdot q dx + \int_9^{12} LIM_S \cdot q dx$$

$$\left(M_S^q\right)_{mín} = \int_4^9 LIM_S \cdot q dx$$

Assim, os valores máximos e mínimos finais de M_S provocados pelo carregamento permanente e pelo carregamento acidental são:

$$(M_S)_{máx} = M_S^g + \left(M_S^q\right)_{máx}$$

$$(M_S)_{mín} = M_S^g + \left(M_S^q\right)_{mín}$$

Observe que, no caso geral, o valor máximo final de um determinado esforço em uma seção não é necessariamente positivo, nem o valor mínimo final é necessariamente negativo. Isto vai depender da magnitude dos valores provocados pelos carregamentos permanente e acidental. Quando máximos e mínimos tiverem o mesmo sinal, o esforço dimensionante será o que tiver a maior magnitude. Quando máximos e mínimos tiverem sentidos opostos, principalmente no caso de momento fletor, ambos podem ser dimensionantes.

10.2. Linhas de influência para uma viga biapoiada

A determinação das expressões analíticas de linhas de influência é relativamente simples para o caso de estruturas isostáticas. Neste caso, um enfoque baseado no equilíbrio explícito da estrutura submetida a uma carga concentrada unitária pode ser utilizado para determinar as linhas de influência. Tome por exemplo a viga biapoiada mostrada na figura 10.5. O equilíbrio de forcas verticais e de momentos em relação ao ponto A, por exemplo, determina os valores das reações de apoio $V_A = (l–x) / l$ e $V_B = x / l$. Estas equações nada mais são do que as próprias expressões analíticas das linhas de influência das reações de apoio, pois expressam a variação de V_A e V_B em função da posição x da carga concentrada unitária.

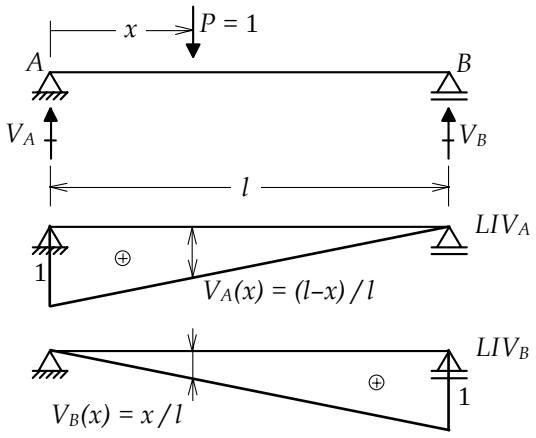


Figura 10.5 – Linhas de Influência de reações de apoio em uma viga biapoiada.

A imposição direta do equilíbrio também pode ser utilizada para determinar as linhas de influência do esforço cortante e do momento fletor em uma seção genérica S da viga biapoiada, tal como mostrado na figura 10.6. Para isso, duas situações são consideradas, uma quando a carga concentrada unitária está à esquerda da seção S e outra quando a carga está à direita:

Esforço cortante

$P = 1$ à esquerda de S $(x < a) \Rightarrow Q_S = –V_B \therefore LIQ_S = –LIV_B = –x / l.$

$P = 1$ à direita de S $(x > a) \Rightarrow Q_S = +V_A \therefore LIQ_S = +LIV_A = (l–x) / l.$

Momento fletor

$P = 1$ à esquerda de S $(x \le a) \Rightarrow M_S = +b \cdot V_B \therefore LIM_S = +b \cdot LIV_B = b \cdot x / l.$

$P = 1$ à direita de S $(x \ge a) \Rightarrow M_S = +a \cdot V_A \therefore LIM_S = +a \cdot LIV_A = a \cdot (l–x) / l.$

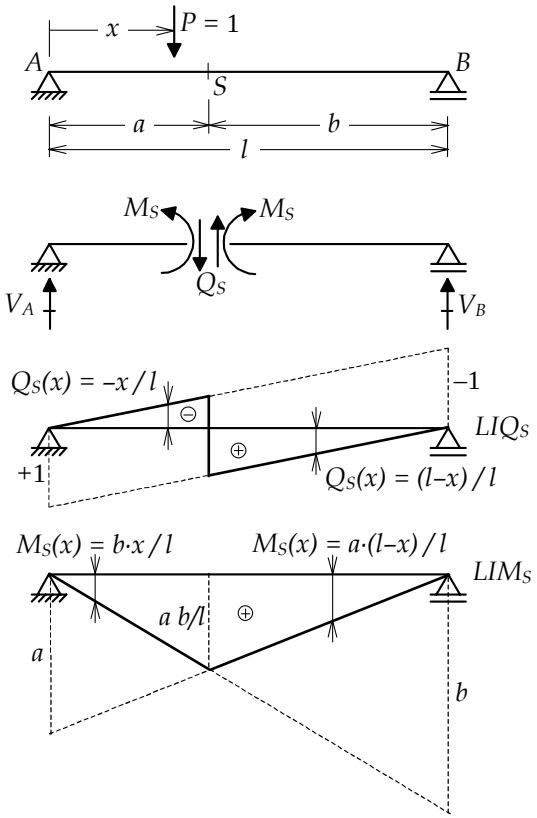


Figura 10.6 – Linhas de Influência de esforço cortante e momento fletor em uma seção da viga biapoiada.

10.3. Método cinemático para o traçado de LI

O Princípio dos Deslocamentos Virtuais (*PDV*) oferece um método alternativo para o traçado de linhas de influência. Considere que a viga biapoiada da seção anterior sofreu um campo de deslocamentos virtuais *v(x)*, conforme indicado na figura 10.7, onde o apoio da esquerda é deslocado virtualmente para baixo de uma unidade de distância. Como a viga biapoiada é isostática, o movimento do apoio vai impor um deslocamento de corpo rígido para a viga. Isto é, a viga permanece reta e não existem deformações internas. Deve-se observar que, por uma questão de consistência com a convenção adotada para o traçado de *LI*'s, está sendo considerado como positivo um deslocamento transversal *v(x)* para baixo, e negativo para cima.

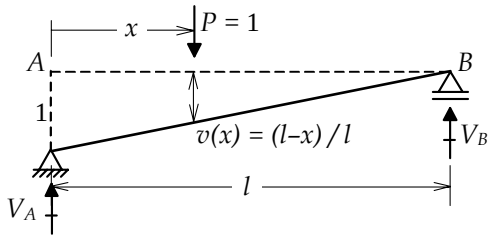


Figura 10.7 – Campo de deslocamentos virtuais para determinar LI de reação de apoio de uma viga biapoiada.

O *PDV* diz que o trabalho virtual produzido pelas forças externas (reais) da estrutura pelos correspondentes deslocamentos externos virtuais é igual à energia de deformação internal virtual, que no caso é nula (não existem deformações internas virtuais). Portanto, o trabalho virtual das forças externas é nulo, isto é:

$$-V_A \cdot 1 + P \cdot v(x) + V_B \cdot 0 = 0 \Rightarrow V_A(x) = (l-x)/l.$$

Vê-se que a aplicação do *PDV* resultou na expressão analítica encontrada anteriormente para a LIV_A. Não podia deixar de ser desta maneira, pois o *PDV* nada mais é do que uma forma alternativa para se impor condições de equilíbrio.

As linhas de influência do esforço cortante e do momento fletor em uma seção S da viga biapoiada também podem ser determinadas pelo *PDV*. O campo de deslocamentos virtuais para a obtenção de LIQ_S está mostrado na figura 10.8.

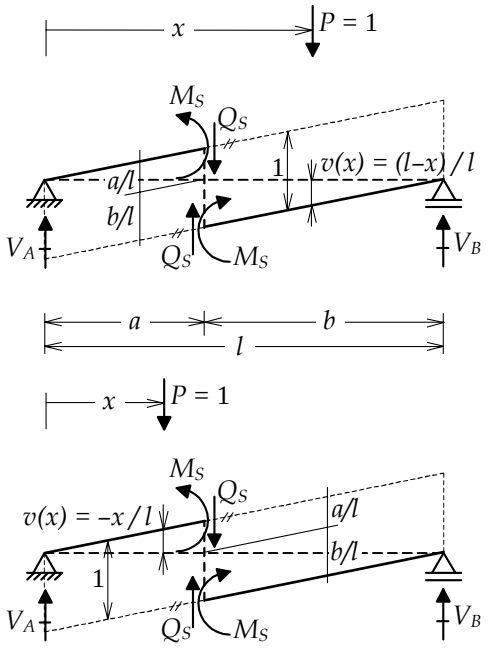


Figura 10.8 – Campo de deslocamentos virtuais para determinar LI de esforço cortante em uma seção de uma viga biapoiada.

O campo de deslocamentos virtuais da figura 10.8 é tal que a viga é cortada na seção S e é imposto um deslocamento transversal relativo nesta seção igual a uma unidade de distância. Com a seção cortada, por ser a viga isostática, ela se transforma em um mecanismo (em uma cadeia cinemática) que não oferece resistência ao movimento imposto. Portanto, os movimentos virtuais dos dois segmentos de viga após o corte são de corpo rígido (sem deformação virtual interna). Além disso, as inclinações dos dois segmentos de viga à esquerda e à direita de S devem permanecer iguais para que não haja rotação relativa nesta seção, desta forma evitando que o momento fletor M_S produza trabalho virtual. Nota-se também na figura 10.8 que o deslocamento transversal relativo na seção S é contrário às direções positivas do esforço cortante Q_S, isto é, o segmento à esquerda de S sobe de a/l, enquanto o segmento à direita desce de b/l.

A aplicação do *PDV* à estrutura da figura 10.8 resulta em:

$P = 1$ à esquerda de S ($x < a$):

$$-Q_S \cdot a/l - Q_S \cdot b/l + M_S \cdot 1/l - M_S \cdot 1/l - P \cdot x/l + V_A \cdot 0 + V_B \cdot 0 = 0 \Rightarrow Q_S(x) = -x/l.$$

$P = 1$ à direita de S ($x > a$):

$$-Q_S \cdot a/l - Q_S \cdot b/l + M_S \cdot 1/l - M_S \cdot 1/l + P \cdot (l-x)/l + V_A \cdot 0 + V_B \cdot 0 = 0 \Rightarrow Q_S(x) = (l-x)/l.$$

Como pode-se notar, estas expressões são as mesmas obtidas anteriormente para a LIQ_S por aplicação de condições de equilíbrio diretamente.

O campo de deslocamentos virtuais para determinar a linha de influência de momento fletor em uma seção S da viga biapoiada é mostrado na figura 10.9. Este campo de deslocamentos é tal que a continuidade de rotação da viga é liberada na seção S e é imposta uma rotação relativa unitária ($\theta = 1$ rad) nesta seção (consideram-se pequenos deslocamentos, isto é, um arco de cír-

culo é aproximado por sua corda). Nota-se na figura 10.9 que o segmento de viga à esquerda da seção S sofre um giro com um ângulo igual a b/l no sentido horário, que é contrário à direção positiva de M_S na extremidade do segmento. Observa-se também que o segmento à direita de S gira de a/l no sentido anti-horário, que é contrário à direção positiva de M_S na porção da direita.

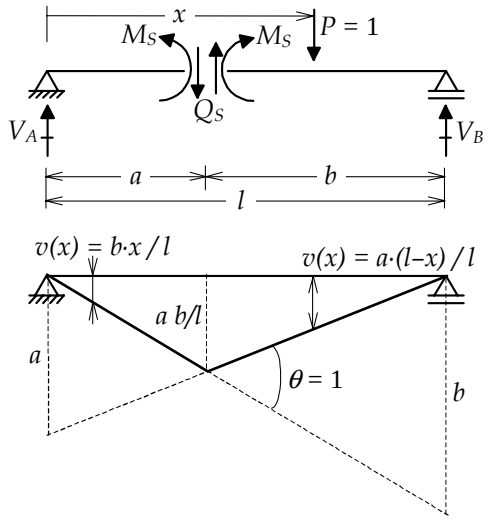


Figura 10.9 – Campo de deslocamentos virtuais para determinar LI de momento fletor em uma seção de uma viga biapoiada.

Aplicando o *PDV* à estrutura da figura 10.9, obtem-se:

$P = 1$ à esquerda de S ($x \le a$):

$$+Q_S \cdot a \cdot b / l - Q_S \cdot a \cdot b / l - M_S \cdot b / l - M_S \cdot a / l + P \cdot b \cdot x / l + V_A \cdot 0 + V_B \cdot 0 = 0 \Rightarrow M_S(x) = b\, x / l.$$

$P = 1$ à direita de S ($x \ge a$):

$$+Q_S \cdot a \cdot b / l - Q_S \cdot a \cdot b / l - M_S \cdot b / l - M_S \cdot a / l + P \cdot a \cdot (l - x) / l + V_A \cdot 0 + V_B \cdot 0 = 0 \Rightarrow M_S(x) = a\,(l - x)/l.$$

Isso resulta nas mesmas expressões para LIM_S obtidas anteriormente.

Pode-se resumir a a obtenção de linhas de influência de um efeito (reação de apoio, esforço cortante ou momento fletor) na viga biapoiada por aplicação do *PDV* da seguinte maneira (Süssekind, J.C., *Curso de Análise Estrutural*, Editora Globo, 1977):

Para se traçar a linha de influência de um efeito E (esforço ou reação), procede-se da seguinte forma:

- *rompe-se o vínculo capaz de transmitir o efeito E cuja linha de influência se deseja determinar;*
- *na seção onde atua o efeito E, atribui-se à estrutura, no sentido oposto ao de E positivo, um deslocamento generalizado unitário, que será tratado como sendo muito pequeno;*
- *a configuração deformada (elástica) obtida é a linha de influência.*

O deslocamento generalizado que se faz referência depende do efeito em consideração, tal como indicado na figura 10.10. No caso de uma reação de apoio, o deslocamento generalizado é um deslocamento absoluto da seção do apoio. Para um esforço cortante, o deslocamento generalizado é um deslocamento transversal relativo na seção do esforço cortante. E para um momento fletor, o deslocamento generalizado é uma rotação relativa entre as tangentes à elástica adjacentes à seção do momento fletor.

Esta maneira de se determinar linhas de influência, embora só tenha sido mostrada para uma viga biapoiada, se aplica para qualquer tipo de estrutura, inclusive estrutura hiperestática. Este método foi formulado por Müller-Breslau no final do século 19 e por isso é chamado de Princípio de Müller-Breslau (White, R.N., Gergely, P. e Sexsmith, R.G., *Structural Enginnering*, John

Wiley, New York, 1976; Süssekind, J.C., *Curso de Análise Estrutural*, Editora Globo, 1977), também conhecido como *método cinemático para o traçado de LI*.

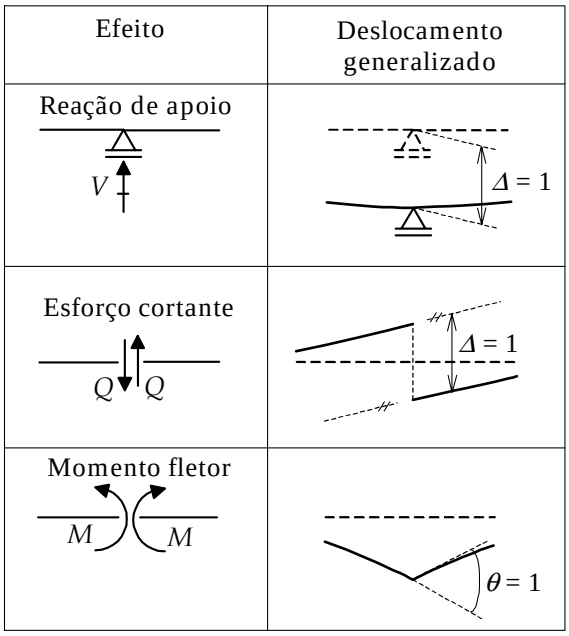


Figura 10.10 – Deslocamentos generalizados utilizados no método cinemático para traçado de LI.

A demonstração do Princípio de Müller-Breslau para estruturas hiperestáticas vai ser feita utilizando-se o Teorema de Betti, que é uma conseqüência do *PDV*. Considere as duas vigas contínuas hiperestáticas com mesmo comprimento mostradas na figura 10.11. A viga (1) tem uma carga concentrada unitária $P_1 = 1$, aplicada a uma distância x do início da viga. A viga (2) difere da primeira pela inexistência do primeiro apoio, sendo que nesta posição é aplicada uma carga concentrada P_2 que provoca, no seu ponto de aplicação, um deslocamento para baixo de uma unidade de distância.

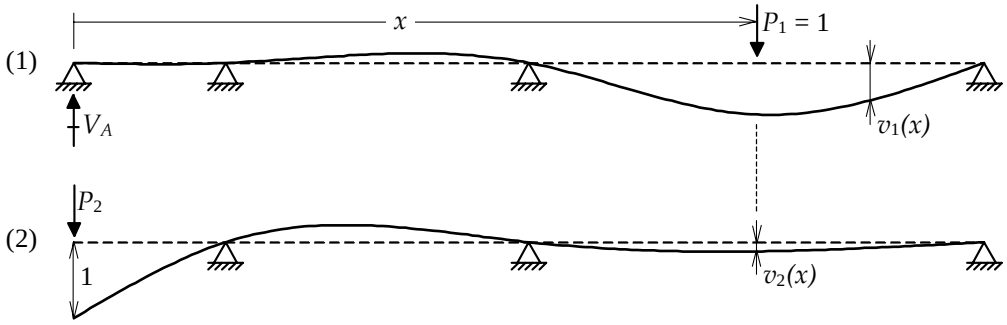


Figura 10.11 – Aplicação do Teorema de Betti a duas vigas contínuas.

O *PDV* é aplicado para as vigas (1) e (2) da figura 10.11, sendo que os campos de deslocamentos virtuais utilizados são os deslocamentos da outra viga, isto é, o campo de deslocamentos virtuais imposto à viga (1) é a elástica $v_2(x)$ da viga (2) e para a viga (2) é imposta a elástica $v_1(x)$ como campo de deslocamentos virtuais. Considerando um comportamento elástico-linear, as expressões do *PDV* para as duas vigas são:

$$\sum F_1 v_2 = \int \frac{M_1 M_2}{EI}\,dx + \int \frac{Q_1 Q_2}{GA_c}\,dx$$

$$\sum F_2 v_1 = \int \frac{M_2 M_1}{EI}\,dx + \int \frac{Q_2 Q_1}{GA_c}\,dx$$

Nestas expressões, o somatório do lado esquerdo do sinal de igualdade representa o trabalho virtual das forças externas, isto é, $\Sigma F_1 v_2$ é o trabalho das forças da viga (1) com os correspondentes deslocamentos externos da viga (2), e $\Sigma F_2 v_1$ é o inverso. As integrais do lado direito do sinal de igualdade representam a energia de deformação virtual interna. A primeira integral é a energia de deformação por flexão e a segunda é a energia de deformação por cisalhamento. M_1 e Q_1 são os diagramas de momento fletor e esforço cortante da viga (1), e M_2 e Q_2 são os diagramas da viga (2). O parâmetro E é o módulo de elasticidade do material, o parâmetro G é o módulo de cisalhamento, I é momento de inércia da seção transversal e A_c é a área efetiva para cisalhamento da seção transversal. Observa-se que as energia de deformação virtual interna das duas expressões são iguais. Portanto:

$$\sum F_1 v_2 = \sum F_2 v_1 \, .$$

Esta é a expressão do Teorema de Betti, que só é válido para estruturas elásticas-lineares: *o trabalho da forças externas de uma estrutura com os correspondentes deslocamentos externos de outra estrutura é igual ao trabalho das forças externas da outra estrutura com os correspondentes deslocamentos da primeira.*

Aplicando o Teorema de Betti para as duas vigas da figura 10.11, tem-se:

$$-V_A \cdot 1 + P_1 \cdot v_2(x) = P_2 \cdot 0 \Rightarrow V_A(x) = v_2(x) \;\therefore\; LIV_A = v_2(x).$$

Como a elástica $v_2(x)$ da viga (2) corresponde justamente à imposição de um deslocamento unitário na direção oposta à reação de apoio V_A (com a liberação do vínculo associado), fica demonstrado que o Princípio de Müller-Breslau também é válido para vigas hiperestáticas. Demonstrações análogas poderiam ser feitas para linhas de influência de esforço cortante e momento fletor, ou mesmo para outros tipos de estruturas, como pórticos hiperestáticos.

Um fato importante a ser destacado, e que transparece da figura 10.11, é que as linhas de influência para estruturas hiperestáticas são formadas por trecho curvos, enquanto que para estruturas isostáticas elas são formadas por trechos retos, conforme mencionado anteriormente.

O método cinemático fornece uma explicação intuitiva para isso. No caso de estruturas isostáticas, a liberação do vínculo associado ao efeito que se quer determinar a *LI* resulta em um estrutura hipostática, que se comporta como uma cadeia cinemática quando o deslocamento generalizado é imposto. Como a cadeia cinemática não oferece resistência alguma ao deslocamento imposto, as barras da estrutura sofrem movimentos de corpo rígido, isto é, permanecem retas. Assim, as *LI* para estruturas isostáticas são formadas por trechos retos.

Entretanto, a liberação do vínculo no caso de uma estrutura hiperestática resulta em uma estrutura que ainda oferece resistência ao deslocamento generalizado imposto. Isto significa que a estrutura sofre deformações internas para se ajustar ao deslocamento imposto, isto é, as barras se flexionam. Se forem desprezadas deformações por cisalhamento e considerando barras prismáticas (seções transversais constantes), a equação diferencial que governa o comportamento de barras à flexão é a Equação de Navier:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \, ,$$

onde $v(x)$ é o deslocamento transversal da barra, $q(x)$ é a taxa de carregamento transversal distribuído, E é o módulo de elasticidade do material e I é o momento de inércia da seção transversal. Como no caso do método cinemático para o traçado de *LI* a taxa de carregamento distribuído é nula, a elástica resultante (que é a própria *LI*) é regida pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{d^4 LI}{dx^4} = 0 \, .$$

Portanto, no caso geral, as *LI*'s para estruturas hiperestáticas são formadas por trechos curvos que são descritos matematicamente por polinômios do 3º grau.

O método cinemático é bastante útil para a determinação do aspecto de uma *LI*, isto é, quando se deseja obter apenas a forma da *LI*. Isto é freqüente utilizado no projeto de estruturas submetidas a cargas acidentais uniformemente distribuídas, conforme foi exemplificado na seção 10.1. No exemplo mostrado, a forma da *LI* de momento fletor na seção de estudo é suficiente para determinar os posicionamentos da carga acidental que maximizam ou minimizam o momento fletor na seção. Os valores máximos e mínimos do momento fletor na seção não precisam ser calculados necessariamente com base na *LI*; qualquer outro método poderia ser utilizado. Assim, somente os aspectos da *LI*'s possibilitam a determinação de valores máximos e mínimos de esforços ao longo da estrutura.

Para exemplificar formas típicas de *LI*'s, as figuras 10.12 a 10.17 mostram *LI*'s para uma viga Gerber isostática e para uma viga contínua hiperestática. As figuras 10.12 e 10.13 mostram *LI*'s de reações de apoio.

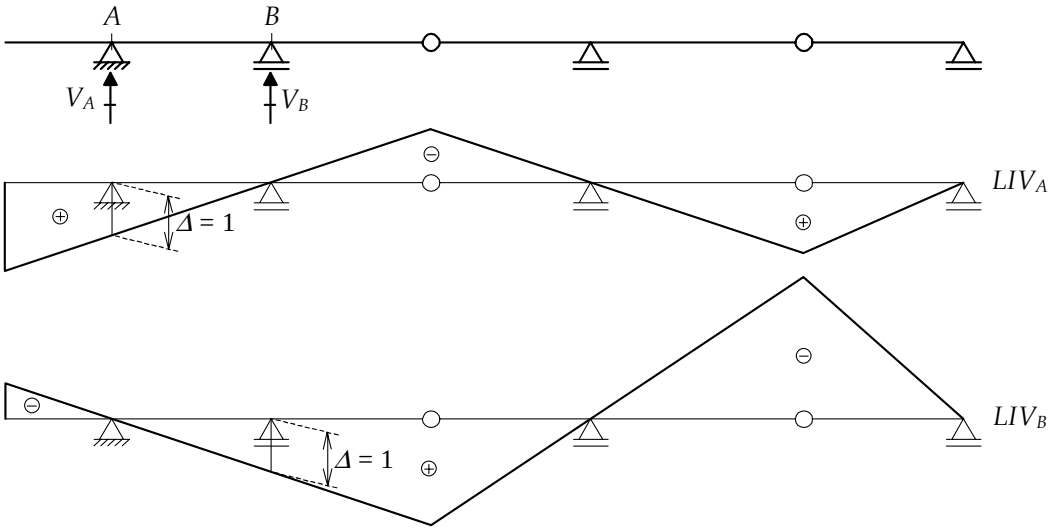


Figura 10.12 – Linhas de influência de reações de apoio para uma viga Gerber isostática.

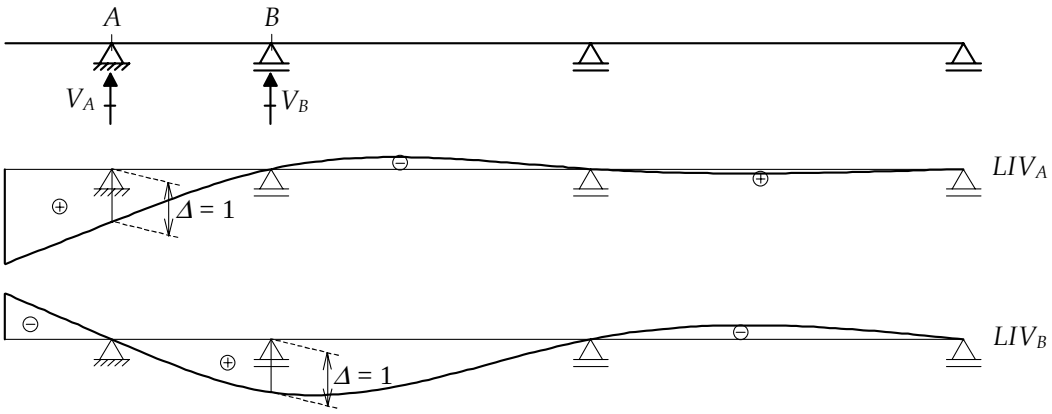


Figura 10.13 – Linhas de influência de reações de apoio para uma viga contínua hiperestática.

As figuras 10.14 e 10.15 mostram *LI*'s de esforços cortantes. No caso de seções de apoio, como existe uma descontinuidade da *LI* nestes pontos, sempre são consideradas seções imediatamente à esquerda e à direita dos pontos dos apoios. Observa-se nestas figuras que as linhas de influência de esforços cortantes para seções de um determinado vão entre apoios têm um comportamento típico. Assim, a seção A_{dir} do primeiro vão após o balanço tem *LI* de esforço cortante com descontinuidade localizada próxima ao apoio *A*, sendo que fora do vão a *LI* é igual às *LI*'s das seções S_1 e B_{esq}, ou de qualquer outra seção do mesmo vão. Em outras palavras, duas seções

de um mesmo vão têm *LI*'s de esforço cortante diferindo apenas pela localização da descontinuidade, que fica sobre a seção.

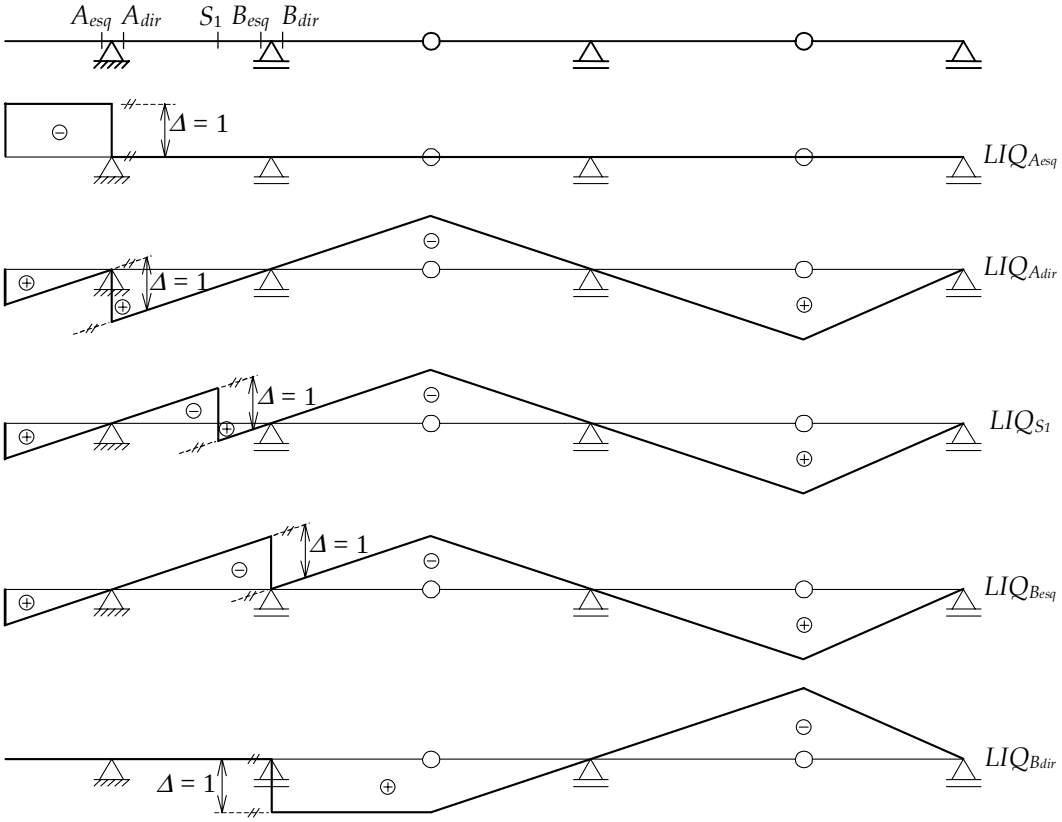


Figura 10.14 – Linhas de influência de esforços cortantes para uma viga Gerber isostática.

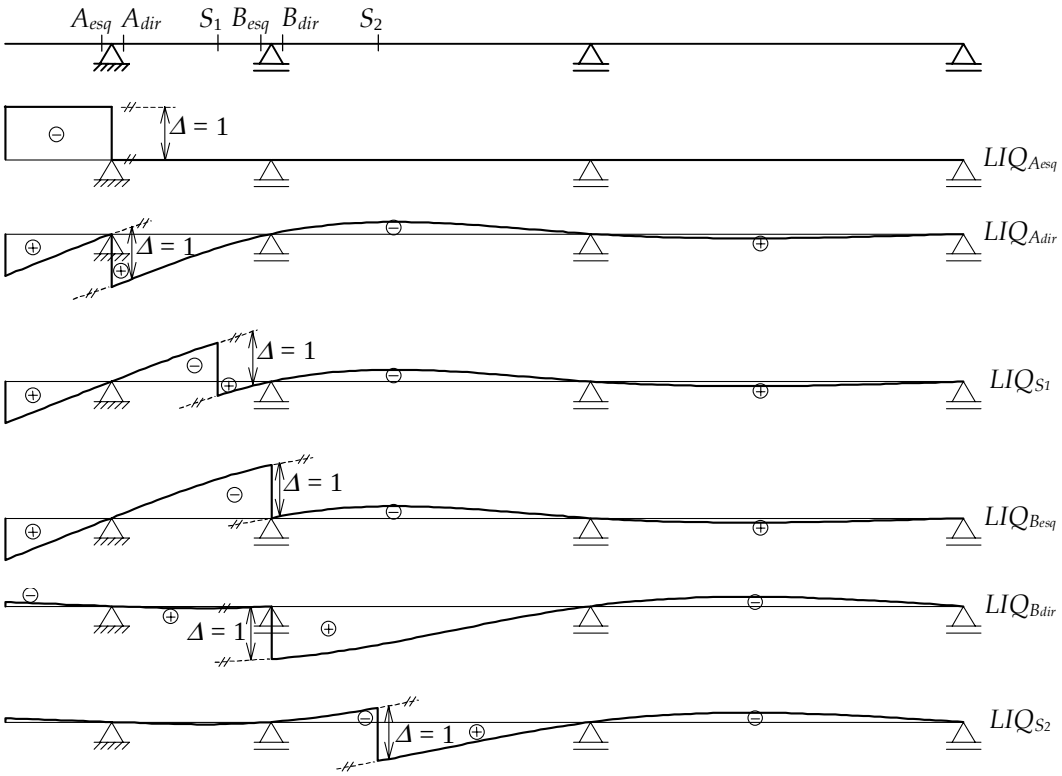


Figura 10.15 – Linhas de influência de esforços cortantes para uma viga contínua hiperestática.

E, finalmente, as figuras 10.16 e 10.17 mostram *LI*'s de momentos fletores.

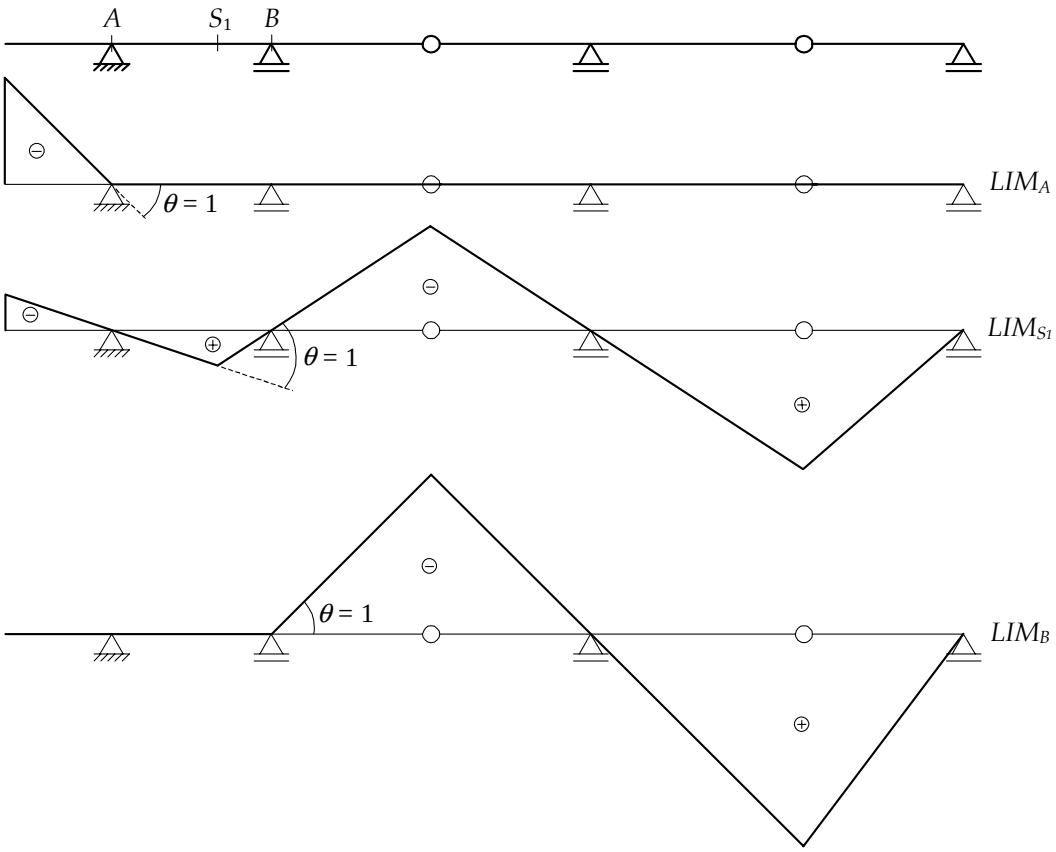


Figura 10.16 – Linhas de influência de momentos fletores para uma viga Gerber isostática.

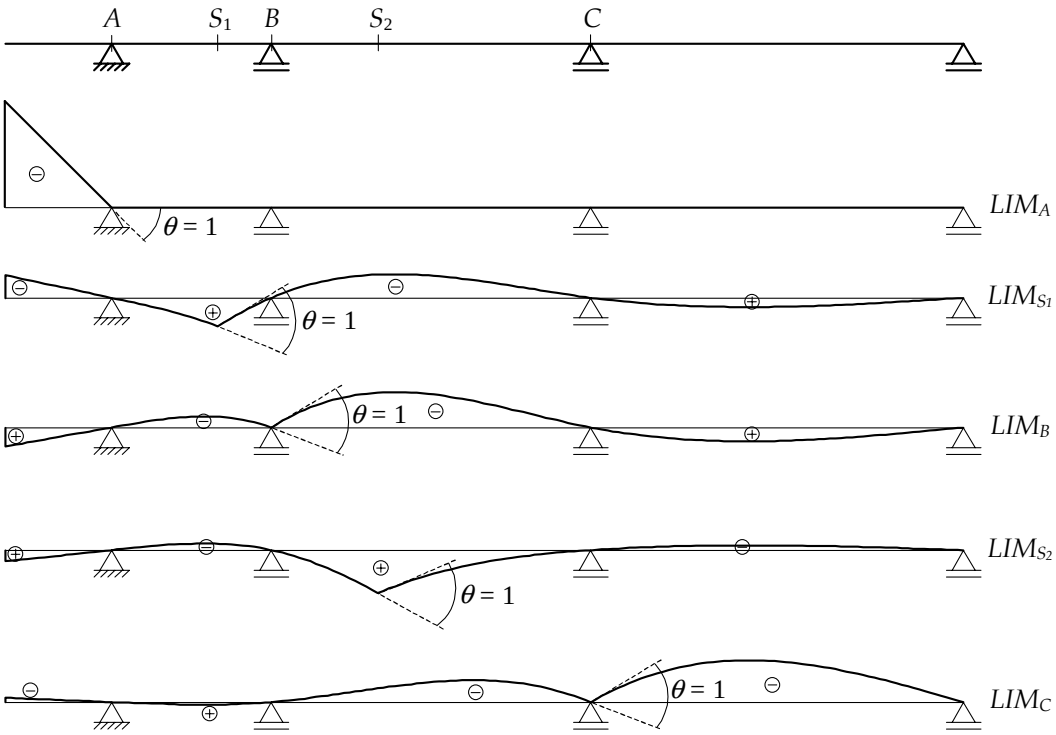


Figura 10.17 – Linhas de influência de momentos fletores para uma viga contínua hiperestática.

10.4. Metodologia para cálculo de LI's pelo método cinemático

A seção anterior mostrou que o Princípio de Müller-Breslau é útil para a determinação qualitativa dos aspectos de linhas de influência. Entretanto, este método cinemático também pode ser utilizado para determinar equações e valores de *LI*'s de uma maneira geral. A metodologia descrita a seguir foi apresentada pelo Prof. B. Ernani Diaz (Revista *RBE*, 1984), que demonstrou que o método cinemático pode ser implementado computacionalmente, com poucas modificações, em qualquer programa genérico para análise de estruturas reticuladas.

A determinação de uma *LI* baseada no método cinemático é feita pela superposição de duas configurações deformadas (elásticas) para uma mesma estrutura. Isto é exemplificado para o caso da *LI* de esforço cortante em uma seção genérica de uma viga contínua, que é indicada na figura 10.18.

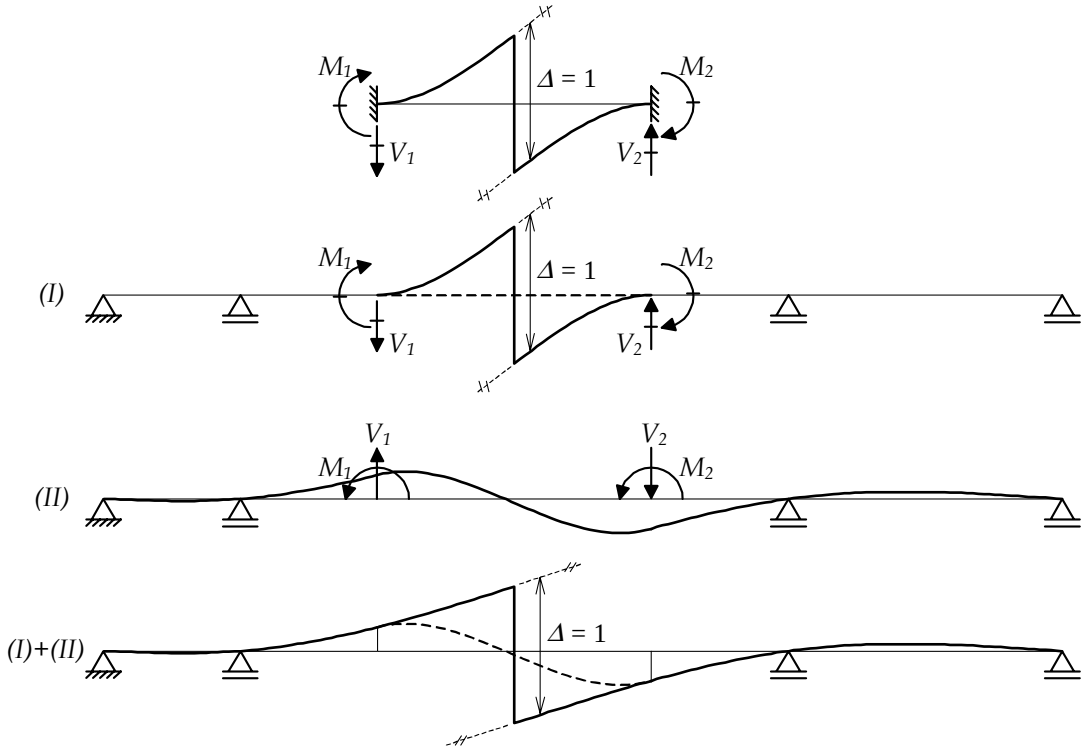


Figura 10.18 – Determinação de LI de esforço cortante de uma seção de uma viga contínua por superposição de efeitos.

Nesta figura, a viga contínua é submetida a dois tipos de solicitações, mostradas nos casos *(I)* e *(II)*. O caso *(I)* corresponde a um deslocamento generalizado (para o traçado da *LI*) imposto localizadamente à barra que contém a seção de estudo. No exemplo da figura, considerou-se deliberadamente que a barra em questão não abrange todo o vão central entre apoios. Dessa forma, está se considerando uma situação mais geral. O campo de deslocamentos imposto no caso *(I)* fica restrito à barra da seção de estudo pois ele corresponde a uma situação de engastamento perfeito da barra, isto é, como se ela fosse biengastada. Pode-se notar que esta situação corresponde ao caso (0) da metodologia de cálculo do Método dos Deslocamentos (capítulo 5). Assim, as reações de apoio (V_1, M_1, V_2 e M_2) da barra biengastada submetida ao deslocamento generalizado imposto são os chamados termos de carga (β_{i0}) do Método dos Deslocamentos.

O caso *(II)* da superposição considera o efeito global do deslocamento generalizado imposto. Este efeito global é determinado pelo cálculo da elástica global da estrutura devida a uma solicitação onde as reações de engastamento do caso *(I)* são aplicadas aos nós extremos da barra em questão com seus sentidos opostos, tal como indica a figura 10.18. Estas forças e momentos, com os sentidos opostos, são chamados de *cargas equivalentes nodais* para a solicitação do caso

(I). Nota-se que, na superposição dos dois casos, as forças e momentos aplicados aos nós da barra se cancelam, resultando somente no deslocamento generalizado imposto à viga como um todo.

Dessa forma, pode-se observar que a metodologia adotada para o cálculo da *LI* pelo método cinemático segue o formalismo do Método da Rigidez Direta: no caso *(I)* e' considerado o efeito da solicitação externa e no caso *(II)* a estrutura é resolvida globalmente solicitada por cargas equivalentes nodais. A única novidade é que a solicitação externa neste caso é um deslocamento generalizado imposto à barra que contém a seção de estudo com as extremidades engastadas. Por esse motivo, qualquer programa de computador que implemente o Método da Rigidez Direta (procedimento padrão) e determine valores da elástica pode ser facilmente modificado para calcular *LI*'s pelo método cinemático.

Portanto, para implementar computacionalmente este método, é necessário fornecer soluções de engastamento perfeito para linhas de influência típicas em uma barra. Estas soluções devem conter as reações de engastamento perfeito e a equação da elástica devida a um deslocamento generalizado imposto. Isso é feito a seguir para *LI*'s de esforço cortante e momento fletor em uma seção genérica de uma viga biengastada.

10.5. Linha de influência de esforço cortante em viga biengastada

A figura 10.19 mostra a solução de uma viga biengastada à qual é imposto um deslocamento generalizado para o traçado de *LI* de esforço cortante em uma seção genérica. A barra é considerada prismática, com módulo de elasticidade *E* e momento de inércia da seção transversal *I*.

A convenção de sinais adotada para reações de apoio é tal que reações forças verticais são positivas quando orientadas para cima e negativas para baixo. Reações momentos são positivas quando no sentido anti-horário e negativas quando no sentido horário. A convenção de sinais para a elástica é tal que deslocamentos tranversais *v(x)* são positivos quando para baixo e negativos para cima. Como dito anteriormente, a inversão da convenção para deslocamentos transversais se deve a um costume de se indicar ordenadas positivas de linhas de influência para baixo.

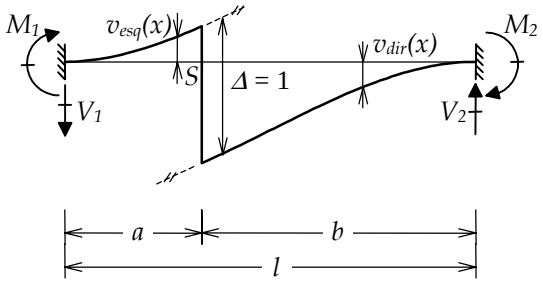


Figura 10.19 – Solução de uma viga biengastada para determinação de LI de esforço cortante em uma seção.

A solução para a elástica da viga da figura 10.19 foi obtida considerando a seguinte equação diferencial (equação de Navier com taxa nula de carregamento transversal distribuído) e as seguintes condições de contorno e de continuidade:

Equação diferencial

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = 0$$

Condições de contorno

$$v(0) = 0 \qquad v(l) = 0$$

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 \qquad \frac{dv(l)}{dx} = 0$$

Condições de continuidade (à esquerda e à direita da seção considerada)

$$v_{dir}(a) - v_{esq}(a) = 1$$

$$\frac{dv_{dir}(a)}{dx} = \frac{dv_{esq}(a)}{dx}$$

Isso resulta na seguinte solução para a elástica da viga, isto é, para a linha de influência do esforço cortante em uma seção genérica:

$$LIQ_S = v_{esq}(x) = -3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3 \qquad \text{para } 0 \le x < a$$

$$LIQ_S = v_{dir}(x) = 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3 \qquad \text{para } a < x \le l$$

Na figura 10.19, as reações de apoio são mostradas com o sentido físico correspondente à *LI* indicada. Considerando a convenção de sinais adotada, as reações de engastamento têm os seguintes valores:

$$V_1 = -12 \cdot \frac{EI}{l^3} \qquad V_2 = 12 \cdot \frac{EI}{l^3}$$

$$M_1 = -6 \cdot \frac{EI}{l^2} \qquad M_2 = -6 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

10.6. Linha de influência de momento fletor em viga biengastada

A determinação da *LI* de momento fletor em uma seção qualquer da viga biengastada é análoga ao que foi feito para a *LI* de esforço cortante. Isto é mostrado na figura 10.20.

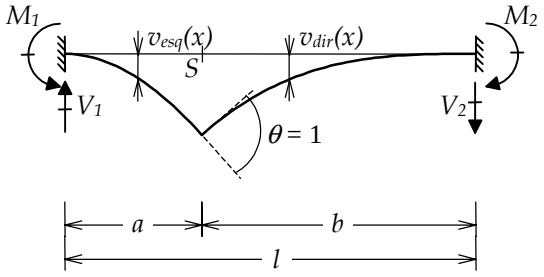


Figura 10.20 – Solução de uma viga biengastada para determinação de LI de momento fletor em uma seção.

A equação diferencial e as condições de contorno são as mesmas da *LI* de esforço cortante. Apenas as condições de continuidade são diferentes:

Condições de continuidade (à esquerda e à direita da seção considerada)

$$v_{esq}(a) = v_{dir}(a)$$

$$\frac{dv_{esq}(a)}{dx} - \frac{dv_{dir}(a)}{dx} = 1$$

A solução para a linha influência de momento fletor é mostrada abaixo:

$$LIM_S = v_{esq}(x) = x \cdot \left[\left(2 - \frac{3a}{l} \right) \cdot \left(\frac{x}{l} \right) - \left(1 - \frac{2a}{l} \right) \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \qquad \text{para } 0 \le x \le a$$

$$LIM_S = v_{dir}(x) = x \cdot \left[-1 + \left(2 - \frac{3a}{l} \right) \cdot \left(\frac{x}{l} \right) - \left(1 - \frac{2a}{l} \right) \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] + a \qquad \text{para } a \le x \le l$$

E, finalmente, as reações de engastamento perfeito têm os seguintes valores (consistentes com a convenção de sinais adotada):

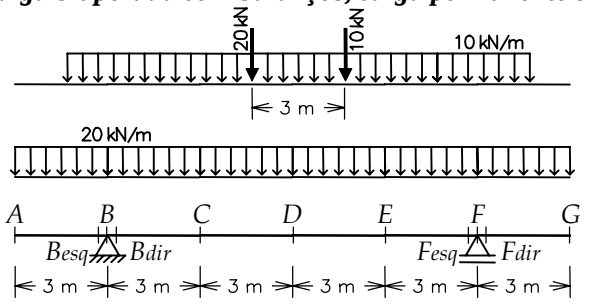
$$V_1 = \left(6 - \frac{12a}{l} \right) \cdot \frac{EI}{l^2} \qquad V_2 = \left(-6 + \frac{12a}{l} \right) \cdot \frac{EI}{l^2}$$

$$M_1 = \left(4 - \frac{6a}{l} \right) \cdot \frac{EI}{l} \qquad M_2 = \left(2 - \frac{6a}{l} \right) \cdot \frac{EI}{l}$$

Na figura 10.20, as reações estão indicadas com o sentido físico correspondente à *LI* exemplificada.

10.7. Exemplo de determinação de envoltórias de esforços internos

Viga biapoiada com balanços, carga permanente e carga móvel

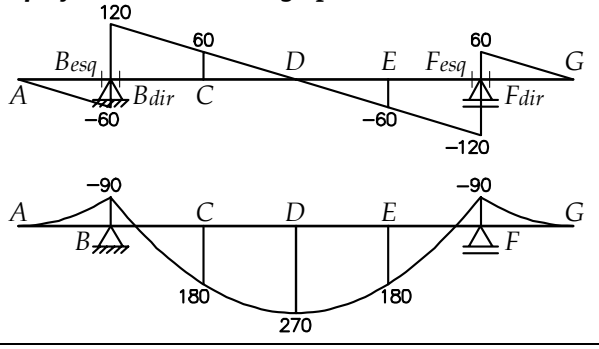


Carga Móvel

Carga Permanente

Estrutura e seções transversais para envoltórias

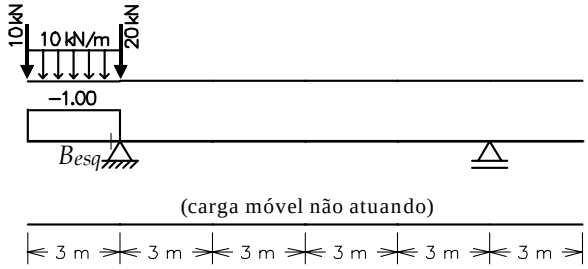
Esforços internos da carga permanente



Carga Permanente: Esforços Cortantes [*kN*]

Carga Permanente: Momentos Fletores [*kNm*]

Determinação dos esforços cortantes mínimos e máximos da carga móvel



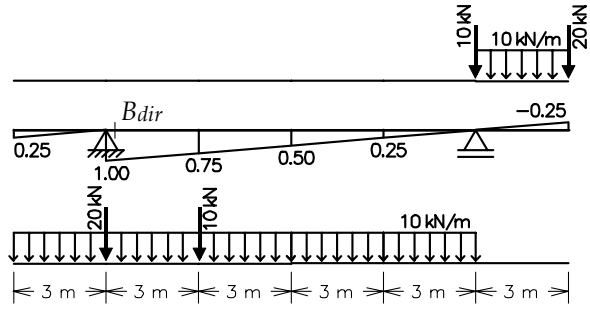
Posição da carga móvel para Q_{Besq} mínimo

LIQ_{Besq}

Posição da carga móvel para Q_{Besq} máximo

$$\left(Q_{Besq}\right)_{mín.}^{c.m.} = \left[20\cdot(-1.00)+10\cdot(-1.00)+10\cdot 3\cdot(-1.00)\right] = -60.00kN$$

$$\left(Q_{Besq}\right)_{máx.}^{c.m.} = 0$$



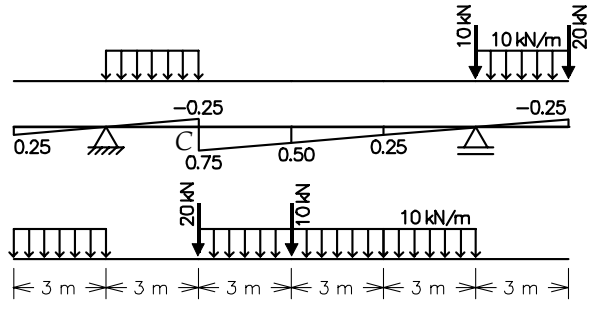
Posição da carga móvel para Q_{Bdir} mínimo

LIQ_{Bdir}

Posição da carga móvel para Q_{Bdir} máximo

$$\left(Q_{Bdir}\right)_{mín.}^{c.m.} = \left[20\cdot(-0.25)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(-0.25)\right] = -8.75kN$$

$$\left(Q_{Bdir}\right)_{máx.}^{c.m.} = \left[20\cdot(1.00)+10\cdot(0.75)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(0.25)+10\cdot 0.5\cdot 12\cdot(1.00)\right] = +91.25kN$$



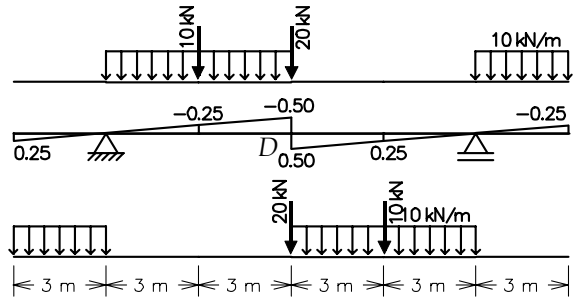
Posição da carga móvel para Q_C mínimo

LIQ_C

Posição da carga móvel para Q_C máximo

$$\left(Q_C\right)_{mín.}^{c.m.} = \left[20\cdot(-0.25)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(-0.25)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(-0.25)\right] = -12.50kN$$

$$\left(Q_C\right)_{máx.}^{c.m.} = \left[20\cdot(0.75)+10\cdot(0.50)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(0.25)+10\cdot 0.5\cdot 9\cdot(0.75)\right] = +57.50kN$$



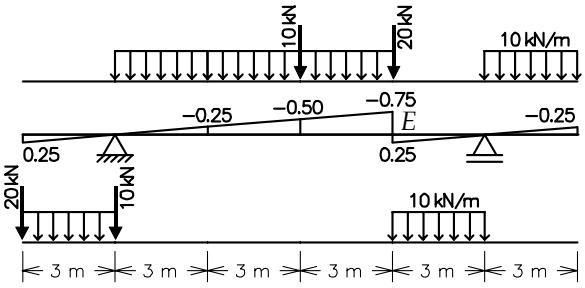
Posição da carga móvel para Q_D mínimo

LIQ_D

Posição da carga móvel para Q_D máximo

$$(Q_D)^{c.m.}_{mín.} = [20\cdot(-0.50)+10\cdot(-0.25)+10\cdot 0.5\cdot 6\cdot(-0.50)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(-0.25)] = -31.25kN$$

$$(Q_D)^{c.m.}_{máx.} = [20\cdot(0.50)+10\cdot(0.25)+10\cdot 0.5\cdot 6\cdot(0.50)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(0.25)] = +31.25kN$$



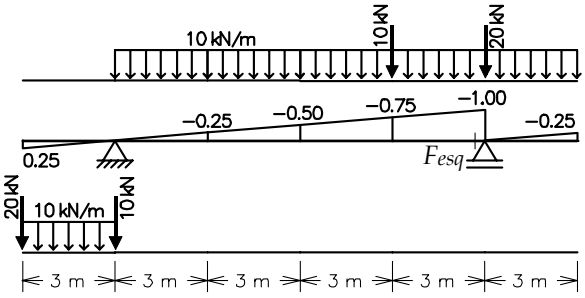
Posição da carga móvel para Q_E mínimo

LIQ_E

Posição da carga móvel para Q_E máximo

$$(Q_E)^{c.m.}_{mín.} = [20\cdot(-0.75)+10\cdot(-0.50)+10\cdot 0.5\cdot 9\cdot(-0.75)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(-0.25)] = -57.50kN$$

$$(Q_E)^{c.m.}_{máx.} = [20\cdot(0.25)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(0.25)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(0.25)] = +12.50kN$$



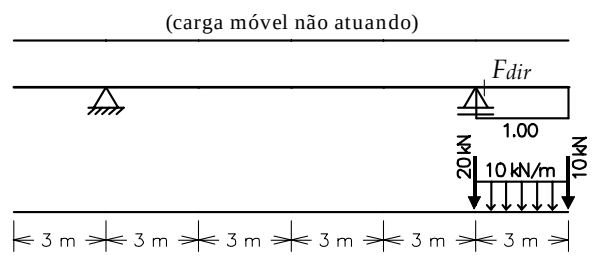
Posição da carga móvel para Q_{Fesq} mínimo

LIQ_{Fesq}

Posição da carga móvel para Q_{Fesq} máximo

$$(Q_{Fesq})^{c.m.}_{mín.} = [20\cdot(-1.00)+10\cdot(-0.75)+10\cdot 0.5\cdot 12\cdot(-1.00)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(-0.25)] = -91.25kN$$

$$(Q_{Fesq})^{c.m.}_{máx.} = [20\cdot(0.25)+10\cdot 0.5\cdot 3\cdot(0.25)] = +8.75kN$$



Posição da carga móvel para Q_{Fdir} mínimo

LIQ_{Fdir}

Posição da carga móvel para Q_{Fdir} máximo

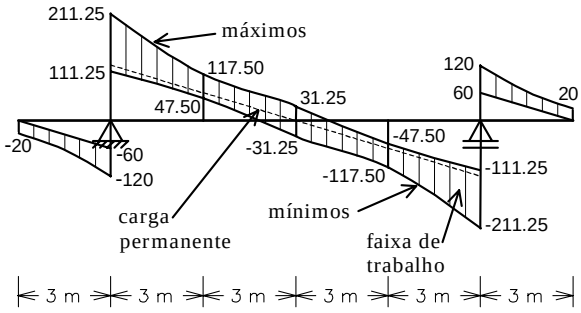
$$(Q_{Fdir})^{c.m.}_{mín.} = 0$$

$$(Q_{Fdir})^{c.m.}_{máx.} = [20\cdot(1.00)+10\cdot(1.00)+10\cdot 3\cdot(1.00)] = +60.00kN$$

Envoltórias de Esforços Cortantes

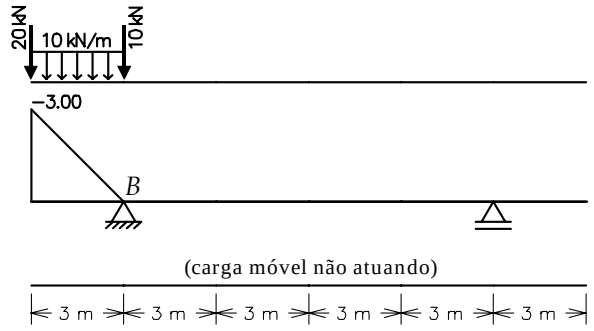
Envoltórias de Esforços Cortantes [*kN*]					
Seção	Carga Permanente	Carga Móvel		Envoltórias	
		mínimo	máximo	mínimo	máximo
A	0	-20.00 *	0	-20.00	0
Besq	-60	-60.00	0	-120.00	-60.00
Bdir	+120	-8.75	+91.25	+111.25	+211.25
C	+60	-12.50	+57.50	+47.50	+117.50
D	0	-31.25	+31.25	-31.25	+31.25
E	-60	-57.50	+12.50	-117.50	-47.50
Fesq	-120	-91.25	+8.75	-211.25	-111.25
Fdir	+60	0	+60.00	+60.00	+120.00
G	0	0	+20.00 *	0	+20.00

* O esforço cortante devido à carga móvel na extremidade livre do balanço corresponde à carga de 20 kN posicionada sobre esta seção.



Envoltórias: Esforços Cortantes [*kN*]

Determinação dos momentos fletores mínimos e máximos da carga móvel



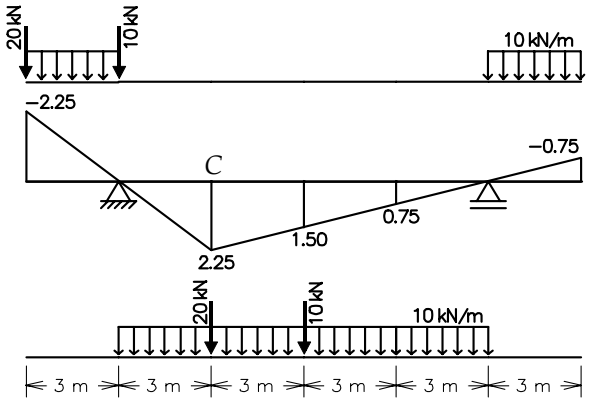
Posição da carga móvel para M_B mínimo

LIM_B

Posição da carga móvel para M_B máximo

$$(M_B)^{c.m.}_{mín.} = [20 \cdot (-3.00) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-3.00)] = -105.00 kNm$$

$$(M_B)^{c.m.}_{máx.} = 0$$



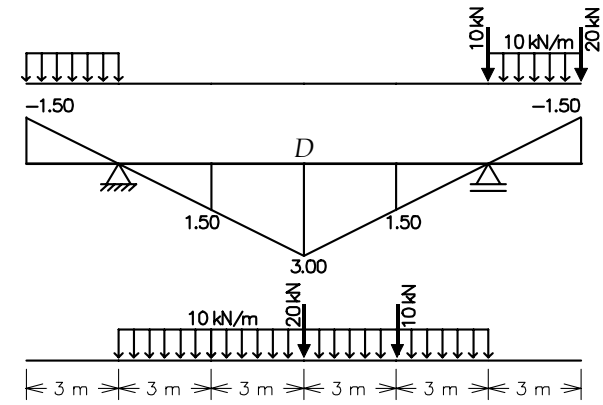
Posição da carga móvel para M_C mínimo

LIM_C

Posição da carga móvel para M_C máximo

$$(M_C)^{c.m.}_{mín.} = [20\cdot(-2.25)+10\cdot0.5\cdot3\cdot(-2.25)+10\cdot0.5\cdot3\cdot(-0.75)] = -90.00kNm$$

$$(M_C)^{c.m.}_{máx.} = [20\cdot(2.25)+10\cdot(1.50)+10\cdot0.5\cdot12\cdot(2.25)] = +195.00kNm$$



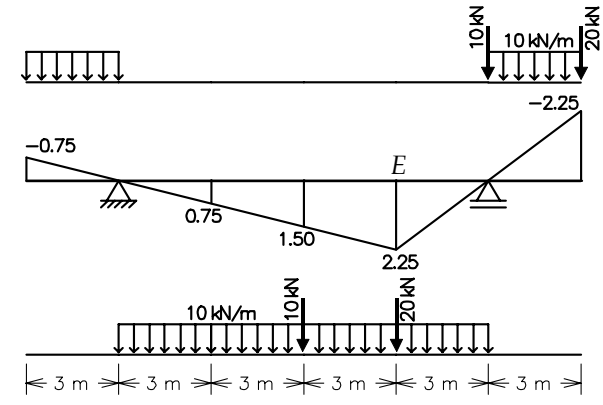
Posição da carga móvel para M_D mínimo

LIM_D

Posição da carga móvel para M_D máximo

$$(M_D)^{c.m.}_{mín.} = [20\cdot(-1.50)+10\cdot0.5\cdot3\cdot(-1.50)+10\cdot0.5\cdot3\cdot(-1.50)] = -75.00kNm$$

$$(M_D)^{c.m.}_{máx.} = [20\cdot(3.00)+10\cdot(1.50)+10\cdot0.5\cdot12\cdot(3.00)] = +255.00kNm$$



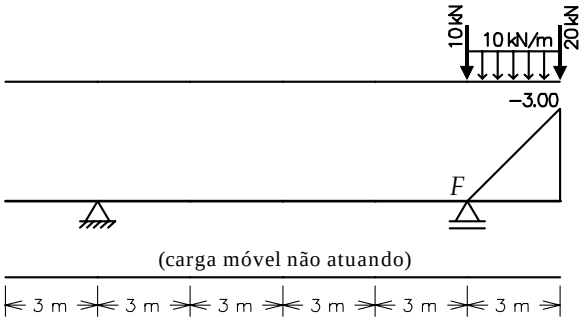
Posição da carga móvel para M_E mínimo

LIM_E

Posição da carga móvel para M_E máximo

$$(M_E)^{c.m.}_{mín.} = [20\cdot(-2.25)+10\cdot0.5\cdot3\cdot(-0.75)+10\cdot0.5\cdot3\cdot(-2.25)] = -90.00kNm$$

$$(M_E)^{c.m.}_{máx.} = [20\cdot(2.25)+10\cdot(1.50)+10\cdot0.5\cdot12\cdot(2.25)] = +195.00kNm$$



Posição da carga móvel para M_F mínimo

LIM_F

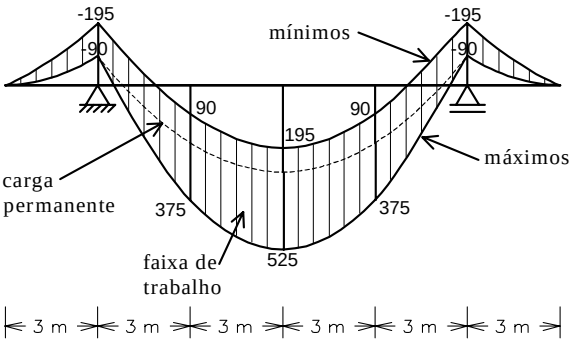
Posição da carga móvel para M_F máximo

$$(M_F)^{c.m.}_{mín.} = [20 \cdot (-3.00) + 10 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot (-3.00)] = -105.00 kNm$$

$$(M_F)^{c.m.}_{máx.} = 0$$

Envoltórias de Momentos Fletores

Envoltórias de Momento Fletor [*kNm*]					
Seção	Carga Permanente	Carga Móvel		Envoltórias	
		mínimo	máximo	mínimo	máximo
A	0	0	0	0	0
B	-90	-105	0	-195	-90
C	+180	-90	+195	+90	+375
D	+270	-75	+255	+195	+525
E	+180	-90	+195	+90	+375
F	-90	-105	0	-195	-90
G	0	0	0	0	0



Envoltórias:
Momentos Fletores [*kNm*]

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Assan 1999 — A.E. Assan, *Método dos Elementos Finitos – Primeiros Passos*, Editora da Unicamp, Campinas, São Paulo, 1999.

Beaufait 1977 — F.W. Beaufait, *Basic Concepts of Structural Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

Beer & Johnston 1996 — F.P. Beer e E. R. Johnston Jr, *Resistência dos Materiais*, Terceira Edição, MAKRON Books, São Paulo, 1996.

Boresi & Chong 1987 — A.P. Borsei e K. P. Chong, *Elasticity in Engineering Mechanics*, Elsevier Science, 1987.

Campanari 1985 — F.A. Campanari, *Teoria das Estruturas*, Vols. 1, 2, 3 e 4, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1985.

Candreva 1981 — P. Candreva, *Considerações sobre Equilíbrio e Compatibilidade Estrutural*, Editora do Grêmio Politécnico, São Paulo, 1981.

Cook *et al.* 1989 — R.D. Cook, D.S. Malkus e M.E. Plesha, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

Diaz 1984 — Ernani Diaz, B., "Observação sobre a determinação de linhas de influência com auxílio de programas de análise de estruturas", *Revista RBE*, 1984.

Felippa 2001 — C.A. Felippa, *Introduction to Finite Element Methods*, Notas de Aula da disciplina "Introduction to Finite Elements Methods (ASEN 5007), Aerospace Engineering Sciences Department, University of Colorado at Boulder", http://caswww.colorado.edu/courses.d/IFEM.d/Home.html, 2001.

Felton & Nelson 1996 — L.P. Felton e R.B. Nelson, *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1996.

Féodosiev 1977 — V. Féodosiev, *Resistência dos Materiais*, Edições Lopes da Silva, Porto, Portugal, 1977.

Fleming 1997	J.F. Fleming, *Analysis of Structural Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1997.
Gomes & Velho 1998	J. Gomes e L. Velho, *Computação Gráfica – Vol. 1*, Série de Computação e Matemática – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, Rio de Janeiro, 1998.
Hibbeler 1998	R.C. Hibbeler, *Structural Analysis*, Quarta Edição, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1998.
Hibbeler 1999	R.C. Hibbeler, *Mecânica – Estática*, Oitava Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1999.
Hibbeler 2000	R.C. Hibbeler, *Resistência dos Materiais*, Terceira Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2000.
Gorfin & Oliveira 1975	B. Gorfin e M.M. Oliveira, *Estruturas Isostáticas*, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1975.
Little 1973	R.W. Little, *Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
Malvern 1969	L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continous Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
McGuire & Gallagher 1979	W. McGuire e R.H. Gallaguer, *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1979.
McGuire *et al.* 2000	W. McGuire, R.H. Gallaguer e R.D. Ziemian, *Matrix Structural Analysis*, Segunda Edição, John Wiley & Sons, New York, 2000.
Meriam & Kraige 1999	J.L. Meriam e L.G. Kraige, *Mecânica – Estática*, Quarta Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1994.
Przemieniecki 1968	J.S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
Rubinstein 1970	M.F. Rubinstein, *Structural Systems - Statics, Dynamics and Stability*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.

Soriano 2003	H.L. Soriano, *Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas*, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
Süssekind 1977-1	J.C. Süssekind, *Curso de Análise Estrutural – Vol. 1: Estruturas Isostáticas*, Editora Globo, Porto Alegre, 1977.
Süssekind 1977-2	J.C. Süssekind, *Curso de Análise Estrutural – Vol. 2: Deformações em Estruturas e Método das Forças*, Editora Globo, Porto Alegre, 1977.
Süssekind 1977-3	J.C. Süssekind, *Curso de Análise Estrutural – Vol. 3: Método das Deformações e Processo de Cross*, Editora Globo, Porto Alegre, 1977.
Tauchert 1974	T. R. Tauchert, *Energy Principles in Structural Mechanic*s, McGraw-Hill, New York, 1974.
Telles 1994-1	P.C.S. Telles, *História da Engenharia no Brasil: Séculos XVI a XIX*, Segunda Edição, Clavero, Rio de Janeiro, 1994
Telles 1984-2	P.C.S. Telles, *História da Engenharia no Brasil: Séculos XX*, Clavero, Rio de Janeiro, 1984.
West 1989	H.H. West, *Analysis of Structures: An Integration of Classical and Modern Methods*, Segunda Edição, John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1989.
White *et al.* 1976	R.N. White, P. Gergely e R.G. Sexsmith, *Structural Engineering – Combined Edition – Vol. 1: Introduction to Design Concepts and Analysis – Vol. 2: Indeterminate Structures*, John Wiley & Sons, New York, 1976.
Timoshenko 1983	S.P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, Dover Publications, New York, 1983.
Timoshenko & Gere 1994	S.P. Timoshenko e J.E. Gere, *Mecânica dos Sólidos*, Vols. 1, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1994.
Timoshenko & Goodier 1980	S.P. Timoshenko e J.N. Goodier, *Teoria da Elasticidade*, Terceira Edição, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1980.

Timoshenko & Young 1965	S.P. Timoshenko e D.H. Young, *Theory of Structures*, Segunda Edição, McGraw-Hill, New York, 1965.
Villaça & Taborda 1998	S.F. Villaça e L.F. Taborda Garcia, *Introdução à Teoria da Elasticidade*, Terceira Edição, COPPE/UFRJ, 1998.
Zienkiewicz & Taylor 2000	O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor, *The Finite Element Method – Vol. 1: The Basis*, Quinta Edição, Butterworth-Heinemann, Oxford, Massachusetts, 2000.