



Universidade Federal de Juiz de Fora

Faculdade de Engenharia

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional

Apostila de Resistência dos Materiais I

Prof. João Chafi Hallack
Prof. Afonso Celso de Castro Lemonge(afonso.lemonge@ufjf.edu.br)
Prof. Flávio de Souza Barbosa (flavio.barbosa@ufjf.edu.br)
Profa. Patrícia Habib Hallak (patriciahallak@yahoo.com)

Maio de 2013

Sumário

1 Introdução **6**

1.1 Aspectos gerais do curso 6

1.1.1 Objetivos Gerais 6

1.1.2 Ementa 6

1.1.3 Programa e distribuição das aulas 6

1.2 Visão geral do conteúdo do curso 7

1.2.1 Um conceito de cálculo estrutural 11

1.2.2 Pressupostos e hipóteses básicas da Resistência dos Materiais 13

1.2.3 Exercícios 15

2 Revisão de Esforços Internos e Características Geométricas de Figuras Planas **16**

2.1 Esforços Internos 16

2.1.1 Métodos das Seções 16

2.1.2 Esforços Internos 17

2.1.3 Classificação dos Esforços Simples 20

2.1.4 Casos Particulares Importantes 22

2.1.5 Exercícios 26

2.1.6 Diagramas 26

2.1.7 Exercícios 37

2.2 Características Geométricas de Superfícies Planas 38

2.2.1 Centróides e Centros de Gravidade 38

2.2.2 Momentos de Inércia 40

2.2.3 Momento Polar de Inércia 43

2.2.4 Produto de Inércia 44

2.2.5 Momentos e produto de inércia em relação a eixos inclinados e momentos principais de inércia 47

2.2.6 Exercícios 50

3 Introdução à Análise de Tensões e Deformações **52**

3.1 Estudo das tensões 52

3.1.1 Introdução 52

3.1.2 Exercícios 55

3.1.3 O Tensor de tensões 60

3.1.4 Exercícios 63

3.2 Estudo das deformações 64

3.2.1 Introdução 64

3.2.2 Componentes de Deformação 65

3.3 Relações entre tensões e deformações 68

3.3.1 O Teste ou Ensaio de Tração: . . . 68
3.3.2 Ensaio de Compressão . . . 73
3.3.3 O ensaio de torção . . . 74
3.3.4 Lei de Hooke generalizada . . . 74
3.3.5 Exercícios . . . 76
3.4 Tensões em Barras de Eixo Reto . . . 76
3.4.1 Introdução . . . 76
3.4.2 Relações gerais entre esforços internos e tensões . . . 77
3.4.3 Exemplos . . . 79

4 Solicitação por esforço normal 82
4.1 Introdução . . . 82
4.2 Exemplos . . . 83
4.3 Exercícios . . . 88

5 Solicitação por momento torsor 98
5.1 Introdução . . . 98
5.2 Análise de tensões e deformações na torção . . . 100
5.3 Cálculo do ângulo de torção . . . 102
5.4 Torque Aplicado ao eixo na Transmissão de Potência . . . 103
5.5 Exercícios . . . 104
5.6 Torção em tubos de paredes delgadas . . . 109
5.7 Exercícios . . . 112

6 Solicitação por momento fletor 118
6.1 Introdução . . . 118
6.2 Flexão normal . . . 120
6.2.1 Cálculo das Tensões Normais . . . 120
6.3 Exercícios . . . 124
6.4 Várias formas da seção transversal . . . 129
6.4.1 Seções simétricas ou assimétricas em relação à LN . . . 129
6.4.2 Seções simétricas à LN - Seções I . . . 130
6.5 Exercícios . . . 131
6.6 Vigas de dois materiais . . . 134
6.6.1 Exemplo . . . 137
6.6.2 Exercícios . . . 138
6.7 Flexão Inelástica . . . 139
6.7.1 Exemplos de aplicação . . . 146
6.7.2 Exercícios . . . 150

7 Solicitação por Esforço Cortante em Vigas 155
7.1 Introdução . . . 155
7.2 Tensões de Cisalhamento em Vigas de Seção Retangular Constante . . . 157
7.3 Tensões de Cisalhamento em Vigas de Seção de Diferentes Formas . . . 160
7.4 Exercícios . . . 162

8 Deflexão em vigas de eixo reto **168**
8.1 Definição 168
8.2 Equação diferencial da LE 169
8.3 Exercícios 179
8.4 Tabelas 185

9 Problemas estaticamente indeterminados **190**
9.1 Exemplos 190
9.1.1 Exercícios 193

Agradecimentos

Esta apostila possui diversas partes extraídas da apostila de Resistência dos Materiais do Prof. João Chafi Hallack que dedicou parte de sua vida acadêmica ao magistério da disciplina Resistência dos Materiais na UFJF e a quem gostaríamos de agradecer pelas diversas contribuições presentes neste material. O Estudante Diego Fernandes Balbi contribuiu na revisão desta apostila realizada no primeiro semestre de 2012.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Aspectos gerais do curso

1.1.1 Objetivos Gerais

Fornecer ao aluno conhecimentos básicos das propriedades mecânicas dos sólidos reais, com vistas à sua utilização no projeto e cálculo de estruturas. Os objetivos do curso são: Capacitar o aluno ao cálculo de tensões e deformações causadas pelos esforços simples, no regime da elasticidade, bem como à resolução de problemas simples de dimensionamento, avaliação e verificação.

1.1.2 Ementa

Princípios e Objetivos da Resistência dos Materiais. Métodos de Análise. Tensões e Deformações. Tração e Compressão Simples. Cisalhamento Simples. Torção. Flexão Pura em Vigas. Tensões de Cisalhamento em Vigas. Deslocamentos em Vigas.

1.1.3 Programa e distribuição das aulas

1. Introdução (2 aulas)
2. Tensões (4 aulas)
3. Deformações (2 aulas)
4. Relações entre tensões e deformações (2 aulas)
5. Tensões e deformações em barras
   (a) Solicitação por esforço normal (6 aulas)
   (b) Solicitação por momento torsor (6 aulas)

(c) Solicitação por momento fletor (10 aulas)

(d) Solicitação por esforço cortante (6 aulas)

6. Linha elástica em vigas sujeitas à flexão (6 aulas)

7. Provas, atividades extras (12 aulas)

1.2 Visão geral do conteúdo do curso

Este capítulo visa dar uma visão geral sobre o estudo de resistência dos materiais e suas hipóteses básicas, da organização deste texto e da forma com que cada capítulo abrange o conteúdo da disciplina.

O estudo da Resistência dos Materiais tem por objetivo fornecer conhecimentos básicos das propriedades mecânicas de sólidos reais, visando utilizá-los no projeto, modelagem e cálculo de estruturas.

Por esta razão, em muitos cursos de Engenharia (Civil, Mecânica, Naval, Elétrica, etc) esta disciplina é intitulada *Introdução à Mecânica dos Sólidos* ou simplesmente *Mecânica dos Sólidos*.

A boa compreensão dos conceitos que envolvem a mecânicas de sólidos está intimamente ligada ao estudo de duas grandezas físicas: que são a tensão e a deformação, que serão abordadas durante todo o tempo neste curso.

Estas duas grandezas físicas são fundamentais nos procedimentos que envolvem o cálculo de uma estrutura. Mas o que é uma estrutura? Estrutura é a parte resistente de uma construção e é constituída de diversos elementos estruturais que podem ser classificados como:

- blocos - os blocos são elementos estruturais nos quais tem-se as três dimensões (imaginando-se um retângulo envolvente) com valores significativos numa mesma ordem de grandeza. Alguns exemplos são mostrados nas Figuras 1.1.

- placas - são elementos estruturais para os quais uma das dimensões (espessura) é bastante inferior às demais. Alguns exemplos são mostrados nas Figuras 1.2 e 1.3. As "placas " curvas são denominadas de cascas. Exemplos nas Figuras 1.4.

- barras - são elementos estruturais para os quais duas das dimensões (largura e altura) são bastante inferiores à terceira (comprimento). Podem ser retas (vigas, pilares, tirantes e escoras) ou curvas (arcos). Alguns exemplos são mostrados na Figura 1.5 onde tem-se a concepção



(a) Forma e armação de um bloco de coroamento



(b) Bloco de coroamento concretado – Cortesia do Prof. Pedro Kopschitz

Figura 1.1: Exemplos de elementos estruturais do tipo bloco



(a) Laje maciça de uma edificação – Cortesia do Prof. Pedro Kopschitz



(b) Laje nervurada de uma edificação – Cortesia do Prof. Pedro Kopschitz

Figura 1.2: Exemplos de elementos estruturais do tipo placa



(a) Museu de Arte Moderna de São Paulo - Vista 1



(b) Museu de Arte Moderna de São Paulo - Vista 2

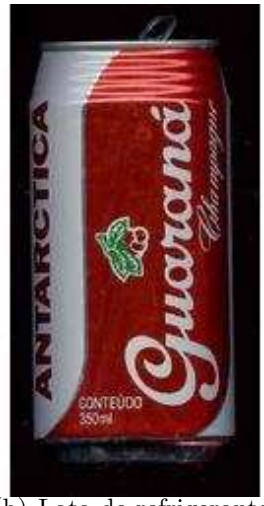
Figura 1.3: Exemplos de elementos estruturais do tipo placa

estrutural de um edifício resindencial com elementos de barras e placas no mesmo modelo e, na 1.6 onde tem-se a concepção estrutural de um edifício industrial modelado com elementos de barras metálicas.

- elementos de forma geométrica de difícil definição - estes elementos estruturais apresentam dificuldades na descrição de seu comportamento



(a) Avião Embraer 190

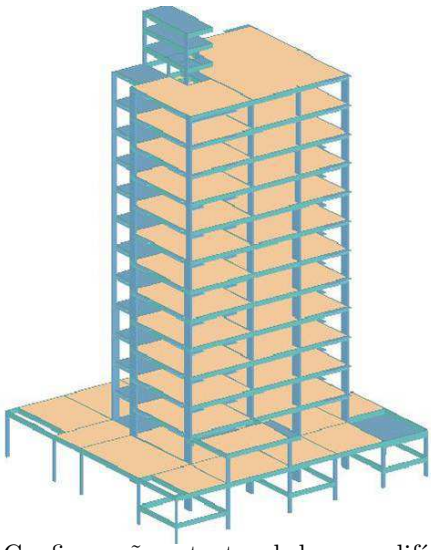


(b) Lata de refrigerante

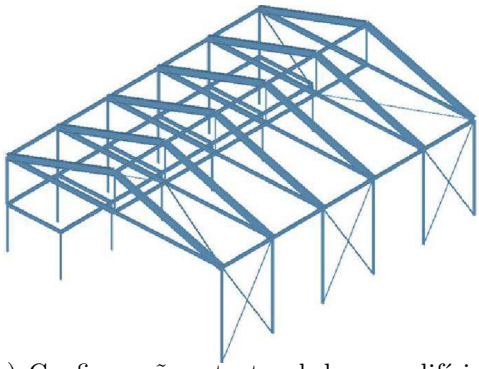


(c) Navio

Figura 1.4: Exemplos de elementos estruturais do tipo casca



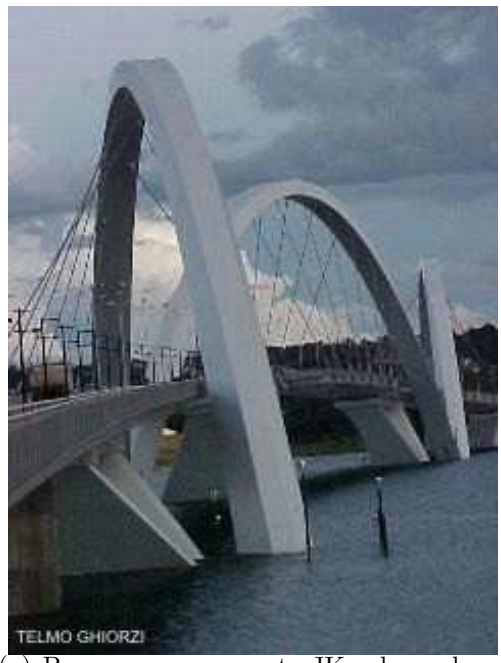
(a) Configuração estrutural de um edifício residencial



(b) Configuração estrutural de um edifício industrial

Figura 1.5: Exemplos de elementos estruturais do tipo barra

físico mas não são menos numerosos que os demais. Num conceito amplo de estrutura estes elementos podem fazer parte da estrutura de uma turbina de um avião, um esqueleto humano ou a estrutura de um estádio de futebol. Os exemplos são mostrados nas Figuras 1.7. A engenharia de estruturas e materiais aliadas ao desenvolvimento



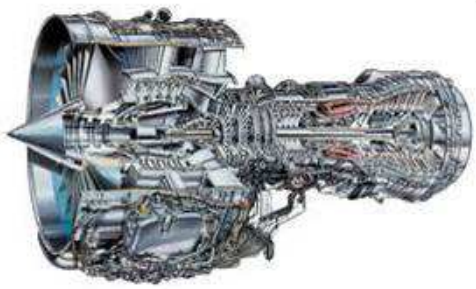
(a) Barras curvas - ponte JK sobre o lago Paranoá - Brasília



(b) Ponte com viga de seção variável - Rouen, França

Figura 1.6: Exemplos de elementos estruturais do tipo barra

dos ecursos computacionais de alto desempenho têm tornado possível a concepção e execução de projetos de alta complexidade como os edifícios de grandes alturas. Alguns deles já construídos são mostrados na Figura 1.8. Da esquerda para a direita, tem-se os seguintes edifícios:1 - Burj Khalifa, Dubai, Emirados Arabes, 828 m; 2 - Taipei World Financial Center, Taipei, China, 508 m; 3 - Shangai World Financial Center, Shangai, China, 492 m; 4 - International Commerce Center, Kowloon, Hong Kong, 484 m; 5 - Petronas Tower, Kuala Lumpur, Malaysis, 452 m; 6 - Nanjing Greeland Financial Complex, Nanjing, China, 450m; 7 - Willis Tower, Chicago, EUA, 442 m; 8 - Trump International Hotel and Tower, Chicago, EUA, 423 m; 9 - Jin Mao Building, Shangai, China, 421 m.



(a) Turbina do avião Airbus A380)



(b) Estádio Olímpico de Pequim

Figura 1.7: Exemplos de elementos estruturais complexos

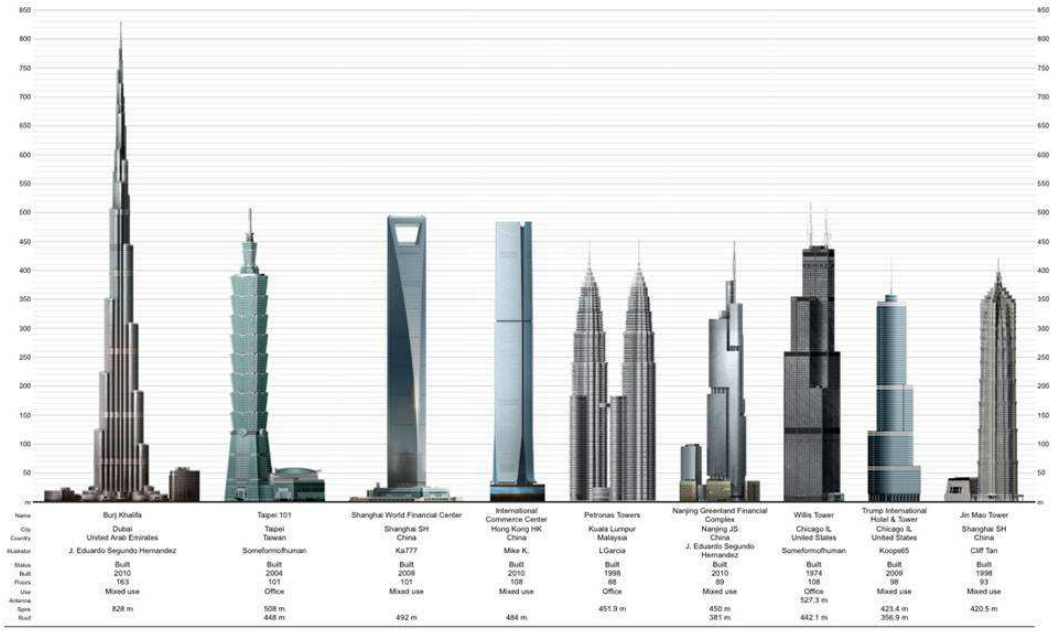


Figura 1.8: Edifícios altos ao redor do mundo.

O curso de Resistência dos Materiais I procura dar ênfase ao estudo do elemento estrutural do tipo barra conforme se observa no capítulo3.

1.2.1 Um conceito de cálculo estrutural

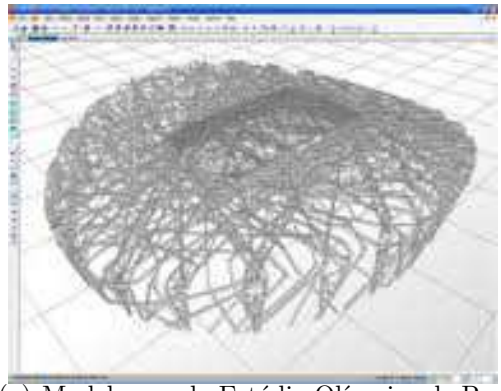
A idéia de cálculo estrutural pode ser dividida em três frentes de trabalho não independentes:

- **Fase 1 - Ante-projeto da estrutura**: Nesta fase uma concepção inicial do projeto é criada. A estrutura pode ser um edifício, um navio, um avião, uma prótese óssea, uma ponte, etc. As dimensões das peças estruturais são arbitradas segundo critérios técnicos e empíricos.

- **Fase 2 - Modelagem**. Modelar um fenômeno físico é descrever seu comportamento através de equações matemáticas. Neste processo parte-se normalmente de um modelo que reúne as principais propriedades do fenômeno que se deseja modelar. No caso de estruturas, os modelos estruturais são constituídos de elementos estruturais. A partir do conhecimento do comportamento dos elementos estruturais e do carregamento envolvido são determinadas as deformações e tensões a que a estrutura está submetida. No caso de barras, uma boa parte desta tarefa pode ser realizada com o auxílio dos conhecimentos a

serem obtidos na disciplina Resistência dos Materiais e na disciplina Análise Estrutural. Para outros tipos de elementos estruturais, devido à complexidade dos cálculos, serão necessários estudos mais aprofundados em mecânica dos sólidos e métodos numéricos que viabilizem a solução do problema. O método numérico mais conhecido na modelagem estrutural é o Método dos Elementos Finitos (MEF).

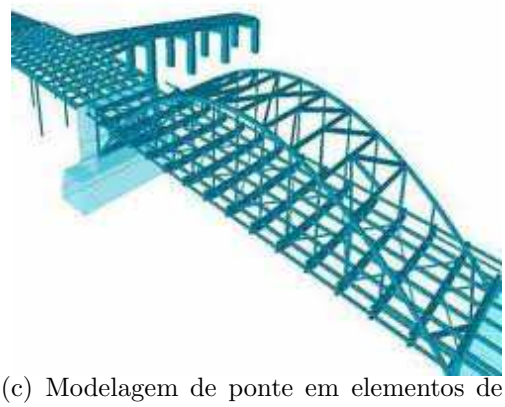
Em alguns casos, por se tratarem de elementos estruturais complexos mas que ocorrem com bastante freqüência nas estruturas, vários estudos já foram realizados e apontam aproximações de boa qualidade. Estas aproximações normalmente são apresentados em forma de Tabelas ou ábacos, mas são restritas a uma série de hipóteses simplificadoras e atendem somente alguns casos específicos, como por exemplo as Tabelas para cálculo de esforços em lajes retangulares. A Figura 1.9 mostra alguns exemplos de modelagens de configurações estruturais como a usada no Estádio Olímpico de Pequim e dois tipos de pontes.



(a) Modelagem do Estádio Olímpico de Pequim



(b) Modelagem de ponte em elementos de barra



(c) Modelagem de ponte em elementos de barra

Figura 1.9: Exemplos de modelagens de estruturas em elementos de barra

- **Fase 3 - Dimensionamento das peças**. Nesta fase é necessário o conhecimento de questões específicas de cada material que constitui

a estrutura (aço, madeira, alumínio, compósito, concreto, etc). Este conhecimento será adquirido em cursos específicos como Concreto I e II e Estruturas Metálicas. Nesta fase é possível que se tenha necessidade de retornar à Fase 1 pois os elementos estruturais podem ter sido sub ou super dimensionados. Neste caso parte-se para um processo recursivo até que o grau de refinamento requerido para o projeto seja alcançado.

O cálculo de uma estrutura depende de três critérios:

- **Estabilidade**: Toda estrutura deverá atender às equações universais de equilíbrio estático.
- **Resistência**: Toda estrutura deverá resistir às tensões internas geradas pelas ações solicitantes.
- **Rigidez**: Além de resistir às tensões internas geradas pelas ações solicitantes, as estruturas não podem se deformar excessivamente.

1.2.2 Pressupostos e hipóteses básicas da Resistência dos Materiais

A Resistência dos Materiais é uma ciência desenvolvida a partir de *ensaios experimentais* e de *análises teóricas.*

Os ensaios ou testes experimentais, em laboratórios, visam determinar as características físicas dos materiais, tais como as propriedades de resistência e rigidez, usando corpos de prova de dimensões adequadas.

As análises teóricas determinam o comportamento mecânico das peças em modelos matemáticos idealizados, que devem ter razoável correlação com a realidade. Algumas hipóteses e pressupostos são admitidos nestas deduções e são eles:

1. **Continuidade Física**:

   A matéria apresenta uma estrutura contínua, ou seja, são desconsiderados todos os vazios e porosidades.

2. **Homogeneidade**:

   O material apresenta as mesmas características mecânicas, elasticidade e de resistência em todos os pontos.

3. **Isotropia**:

O material apresenta as mesmas características mecânicas elásticas em todas as direções. Ex: As madeiras apresentam, nas direções das fibras, características mecânicas e resistentes distintas daquelas em direção perpendicular e portanto não é considerada um material isótropo.

4. **Equilíbrio**:

   Se uma estrutura está em equilíbrio, cada uma de suas partes também está em equilíbrio.

5. **Pequenas Deformações**:

   As deformações são muito pequenas quando comparadas com as dimensões da

   estrutura.

6. **Saint-Venant**:

   Sistemas de forças estaticamente equivalentes causam efeitos idênticos em pontos suficientemente afastados da região de aplicação das cargas.

7. **Seções planas**:

   A seção transversal, após a deformação, permanece plana e normal à linha média (eixo deformado).

8. **Conservação das áreas**:

   A seção transversal, após a deformação, conserva as suas dimensões primitivas.

9. **Lei de Hooke**:

   A força aplicada é proporcional ao deslocamento.

$$F = kd \tag{1.1}$$

   onde: F é a força aplicada; k é a constante elástica de rigidez e d é o deslocamento;

10. **Princípio da Superposição de efeitos**:

    Os efeitos causados por um sistema de forças externas são a soma dos efeitos produzidos por cada força considerada agindo isoladamente e independente das outras.

A fim de compensar as incertezas na avaliação das cargas, na determinação das propriedades dos materiais, nos pressupostos ou nas simplificações, é previsto nas Normas Técnicas a adoção de coeficientes de segurança. Consiste em se majorar as cargas e se reduzir a resistência dos materiais. Os diversos critérios adotados para escolha dos coeficientes de segurança adequados são estudados ao longo do curso de Engenharia Civil. Adota-se neste texto um coeficiente de segurança único que reduz a capacidade de carga da estrutura.

1.2.3 Exercícios

1. Dê um conceito para estrutura.
2. Descreva os tipos de elementos estruturais.
3. Conceitue cálculo estrutural.
4. Quais são as hipóteses básicas e/ou pressupostos da Resistência dos Materiais?

Capítulo 2

Revisão de Esforços Internos e Características Geométricas de Figuras Planas

2.1 Esforços Internos

2.1.1 Métodos das Seções

Seja uma barra de comprimento L, em equilíbrio sob a ação das forças externas (cargas e reações) $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,...,$\vec{F}_n$, quaisquer no espaço. Na figura 2.1 foi representado o caso particular de uma barra de eixo reto e seção constante, sujeita as forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ e $\vec{F}_5$, mas os conceitos são válidos no caso de estruturas em geral.

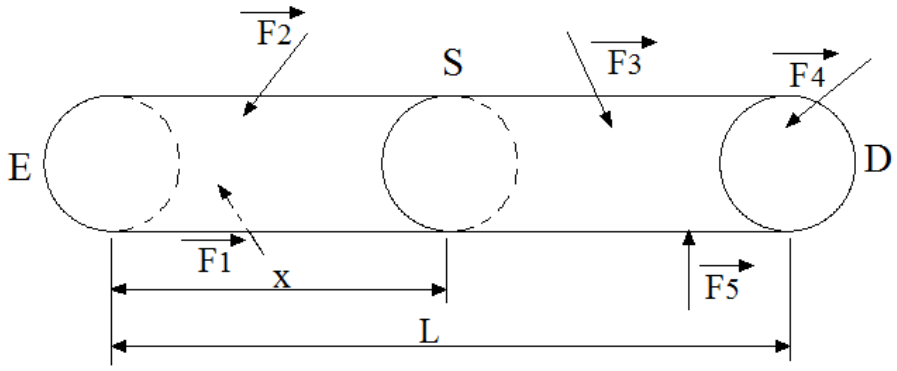


Figura 2.1: Barra de eixo reto.

Imagine que esta barra é constituída por um número muito grande de elementos de volume, de seção transversal igual à secão da barra e de comprimento elementar dx (como um pão de forma fatiado), como mostra a figura 2.2. Estes elementos de volume são limitados por um número muito grande de seções transversais, distantes entre si dx unidades de comprimento. Um elemento de volume genérico δ limitado pela seção S, de abscissa x ($0 \leq x \leq L$) e de S´ de abcissa $x + dx$.

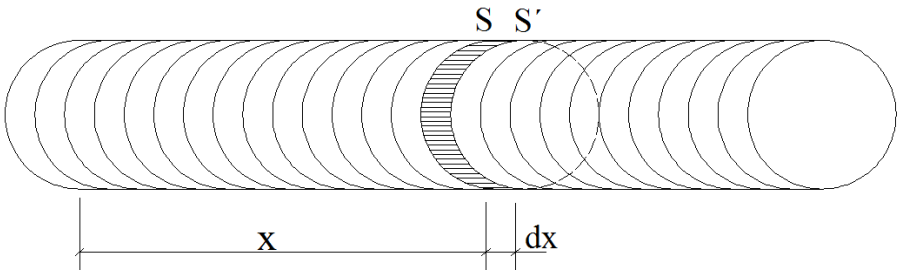


Figura 2.2: Barra de eixo reto e elementos infinitesimais dx.

Devido a grande dificuldade de analisar a transmissão de forças, internamente, de cada molécula para suas vizinhas, será analisado a transmissão de esforços, internamente, de cada elemento de volume para seus vizinhos. Este método de analise é valido somente para barras e é chamado de **Métodos das Seções**.

2.1.2 Esforços Internos

Para determinar os esforços transmitidos na seção genérica S, considera-se a barra desmembrada por esta seção em duas partes, E e D, como mostra a figura zreffigp42. Cada uma delas está em equilíbrio sob a ação das forças $\vec{F_i}$ e de uma infinidade de forças moleculares em S.

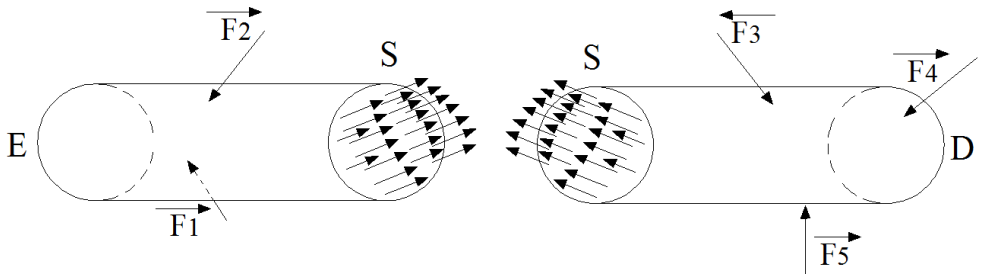


Figura 2.3: Parte a esquerda (E) e a direita (D) da seção S e conjunto de forças infinitesimais.

Seja o sistema de forças moleculares em S reduzido ao baricentro da seção como mostra a figura 2.4 (direções e sentidos quaisquer no espaço).Destacam-se nessas figuras:

- Em E, resultante $\vec{R}$ e momento resultante $\vec{M}$.
- Em D, resultante $\vec{R'}$ e momento resultante $\vec{M'}$.

Assim, analisando o equilíbrio das partes E e D, conclui-se:

- Sistema de forças $\vec{F_i}$, em E equivale a ($\vec{R'}$, $\vec{M'}$)

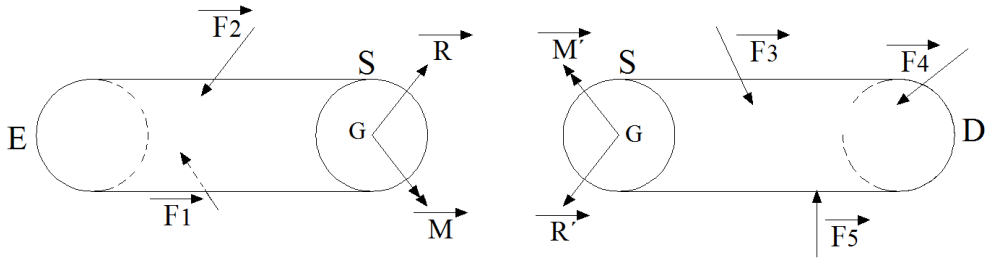


Figura 2.4: Redução do sistema de forças ao baricientro da seção

- Sistema de forças $\vec{F_i}$, em D equivale a $(\vec{R},\ \vec{M})$

Portanto $\vec{R'} = -\vec{R}$ e $\vec{M'} = -\vec{M}$. O par de forças opostas $\vec{R'}$ e $\vec{R}$ e o par de momentos opostos $\vec{M'}$ e $\vec{M}$ **são os esforços internos de S.**

Os esforços internos serão decompostos segundo os referenciais mostrados na figura 2.5. Afim de melhor analisar os seus efeitos físicos.

- Parte E: para decomposição de $\vec{R}$ e $\vec{M}$
- Parte D: para decomposição de $\vec{R'}$ e $\vec{M'}$
- Eixo x normal a S, eixos y e z no plano de S

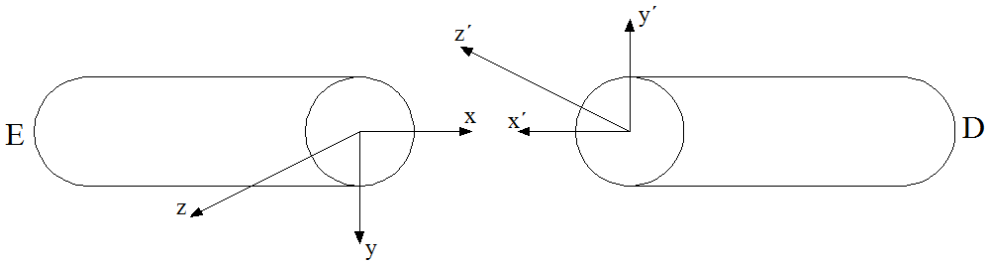


Figura 2.5: Referenciais para decomposição dos esforços internos

$$\vec{R} = \vec{R_x} + \vec{R_y} + \vec{R_z} = \vec{R_i} + \vec{R_j} + \vec{R_k}$$

$$\vec{M} = \vec{M_x} + \vec{M_y} + \vec{M_z} = \vec{M_i} + \vec{M_j} + \vec{M_k}$$

As componentes são os **esforços simples** ou **esforços solicitantes**, que podem ser expressos por seus valores algébricos:

- R_x = Soma do valor algébrico das componentes segundo o eixo x das forças $\vec{F_i}$ à **direita** de S (R_y e R_z tem definições semelhantes).
- M_x = Soma do valor algébrico dos momentos segundo o eixo x das forças $\vec{F_i}$ à **direita** de S (M_y e M_z tem definições semelhantes).

Adotando o referencial oposto para decomposição de $\vec{R}'$ e $\vec{M}'$ os valores algébricos serão os mesmos, bastando, nas definições acima, trocar **direita** por **esquerda**. Assim, cada esforço simples fica definido por **um só** valor algébrico e pode ser calculado com as forças situadas à **direita** ou à **esquerda** da seção.

Observação 1:

Seja uma barra AB, de comprimento L, com um carregamento qualquer. Mostrada na figura 2.6. Seja uma seção S, genérica de abscissa x ($0 \leq x \leq L$).

Seja Es um determinado esforço simples na seção S. $Es = f_x$ é a equação deste esforço simples e o gráfico desta função é o diagrama do referido esforço. As equações e os diagramas dos esforços simples serão exaustivamente estudados mais adiante neste capítulo.

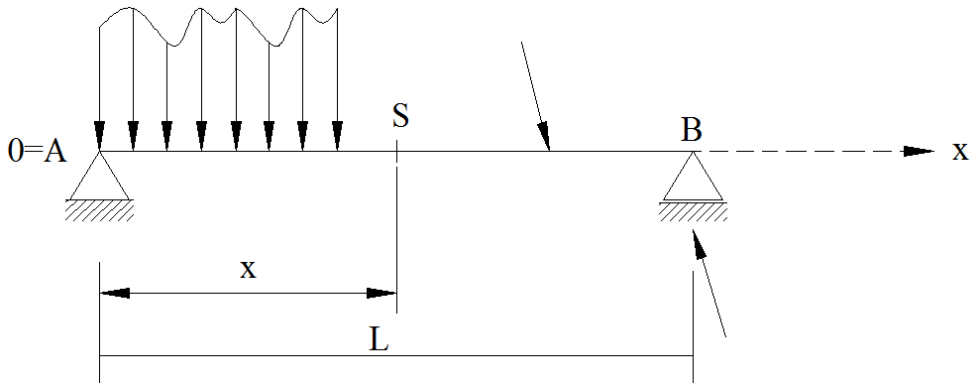


Figura 2.6: Viga biapoiada com carregamento qualquer.

Observação 2:

Considerando que $\vec{R}' = -\vec{R}$ e $\vec{M}' = -\vec{M}$, o equilíbrio das partes E e D será representado como mostra a figura 2.7.

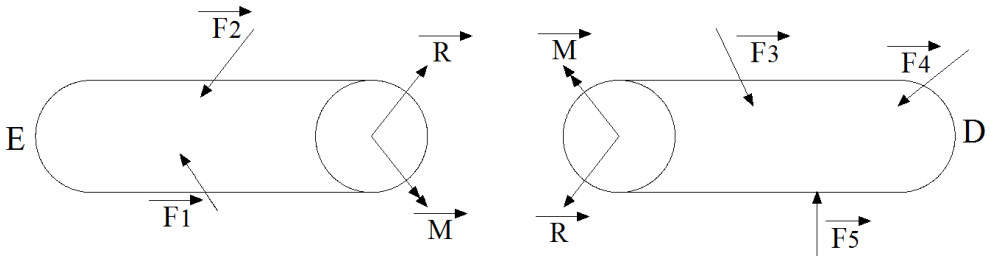


Figura 2.7: Equilíbrio entre as partes.

Observação 3:

Se na seção S, de abscissa x, os esforços são $\vec{R}$ (R_x, R_y, R_z) e $\vec{M}$ (M_x, M_y, M_z), então na seção S', de absicissa $x = dx$, os esforços serão iguais a $\vec{R} + \vec{d_R}$ ($R_x + d_{Rx}$, $R_y + d_{Ry}$, $R_z + d_{Rz}$) e $\vec{M} + \vec{d_M}$ ($M_x + d_{Mx}$, $M_y + d_{My}$, $M_z + d_{Mz}$).

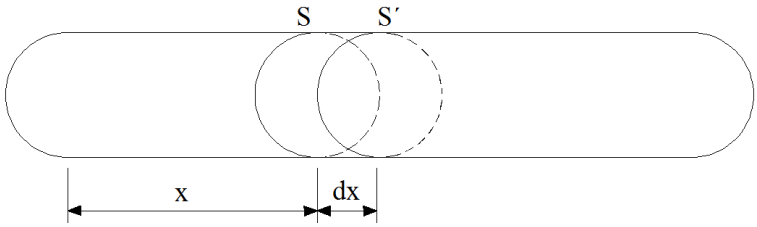


Figura 2.8: Seções S e S'

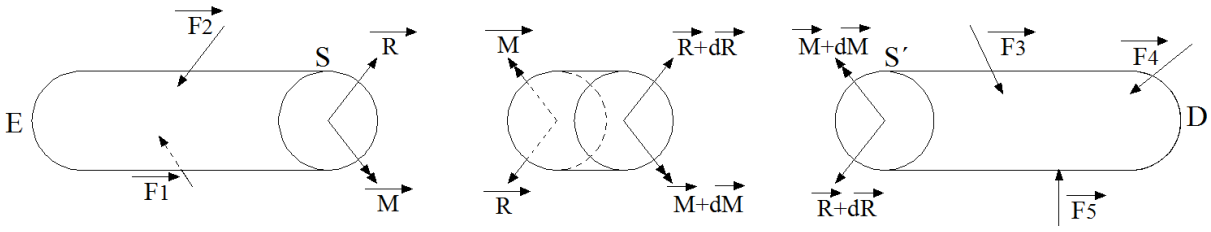


Figura 2.9: Diagrama de corpo livre do elemento entre S e S'

O diagrama de corpo livre que representa o equilíbrio de elemento de volume limitado pelas seções S e S', de comprimento elementar dx, mostrado na figura 2.9 ajudará a entender os efeitos dos esforços simples. Se não houver carga aplicada diretamente no elemento, então $\vec{dR} = 0$. Para simplificar, nas figuras a seguir considera-se $\vec{dM} = 0$, mas apenas para caracterizar qualitativamente os efeitos físicos dos esforços. Esta simplificação não pode ser feita em deduções que calculem valores de esforços.

2.1.3 Classificação dos Esforços Simples

1º) $R_x = N$ é o esforço normal (tração se positivo e compressão se negativo). Causa o alongamento (na tração) ou encurtamento (na compressão) da dimensão d_x do elemento de volume, como está representado nas figuras 2.10 e 2.11

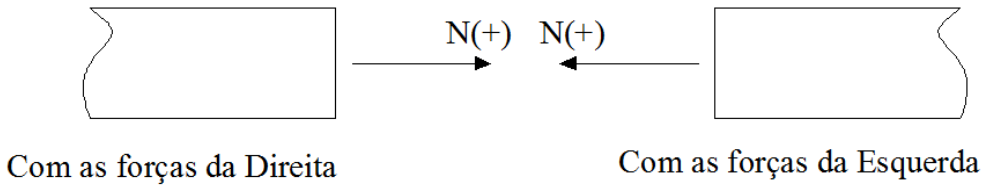


Figura 2.10: Esforço normal

2º) $R_y = Q_y$ e $R_z = Q_z$ são os esforços cortantes . Causam o deslizamento de uma face do elemento de volume em relação a outra. O esforço cortante resultante é a soma vetorial $\vec{Q} = \vec{Q_y} + \vec{Q_z}$.

- As figuras 2.12 e 2.13 mostram a convenção de sinais e efeito de Q_y (vista de frente).

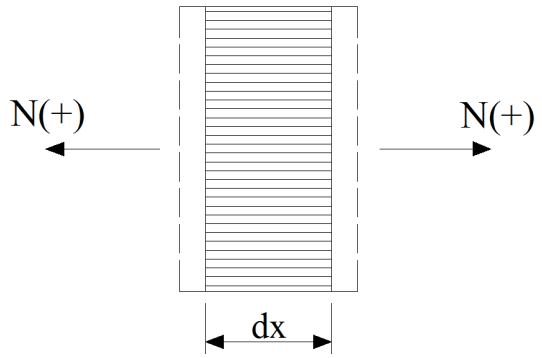


Figura 2.11: Esforço normal

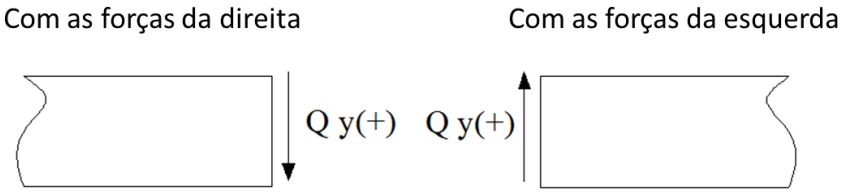


Figura 2.12: Esforço cortante Q_y

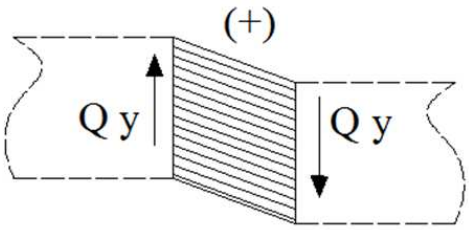


Figura 2.13: Esforço cortante Q_y

- As figuras 2.14 e 2.15 mostram a convenção de sinais e efeito de Q_z (vista de cima).

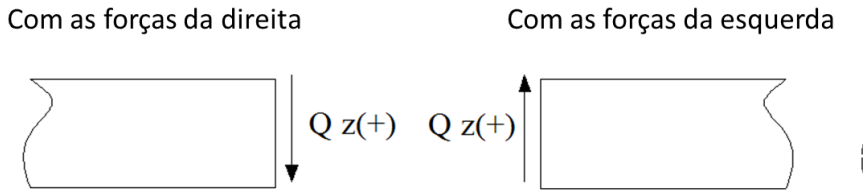


Figura 2.14: Esforço cortante Q_z

3º) $M_x = T =$ Momento Torsor. Causa rotação em torno do eixo x, de uma face do elemento de volume em relação a outra. Os efeitos deste esforço está representado na figura 2.16
4º) $M_y = MF_y$ e $M_z = MF_z$ são os momentos fletores. Causam a rotação em torno do eixo y ou do eixo z de uma face do elemento de volume em

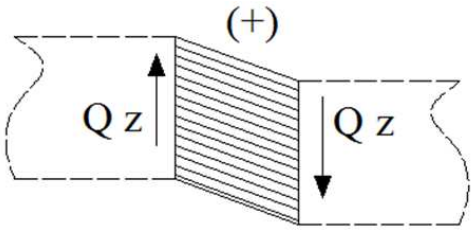


Figura 2.15: Esforço cortante Q_z

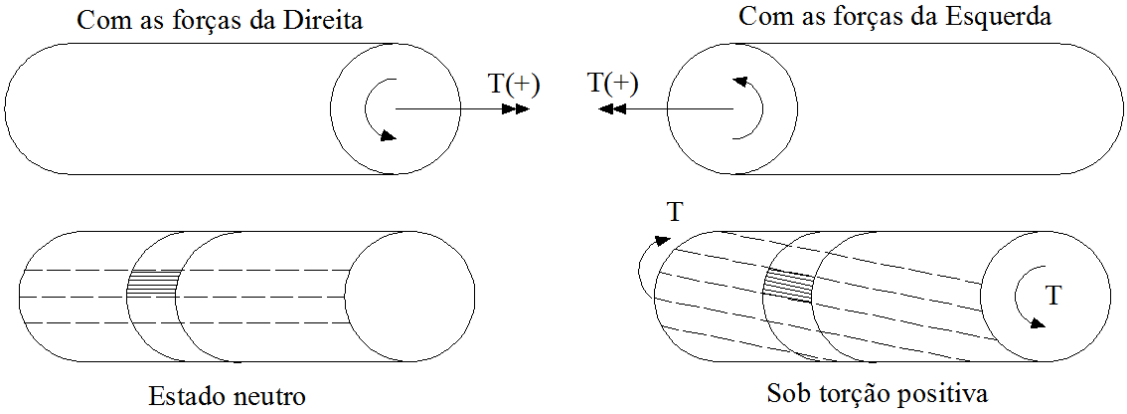


Figura 2.16: Momento torsor

relação a outra (Flexão). O momento fletor resultante é a soma vetorial $\vec{MF} = \vec{M}_y + \vec{M}_z$.

- As figuras 2.17 e 2.18 mostram a convenção de sinais e efeito de M_z (Vista de frente). O momento fletor M_z positivo causa tração nas fibras inferiores e compressão nas fibras superiores.

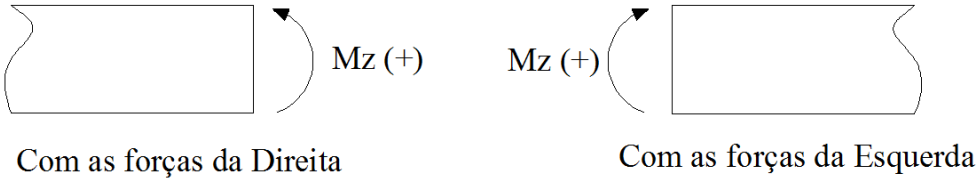


Figura 2.17: Momento fletor M_z

- As figuras 2.19 e 2.20 mostram a convenção de sinais e efeito de M_y (Vista de cima). O momento fletor M_y positivo causa tração nas fibras posteriores e compressão nas fibras anteriores.

2.1.4 Casos Particulares Importantes

1º) Estruturas planas com carga no próprio plano:

São estruturas formadas por barras cujos eixos estão situados no mesmo plano xy, assim como as cargas e reações. A figura 2.21 ilustra um exemplo

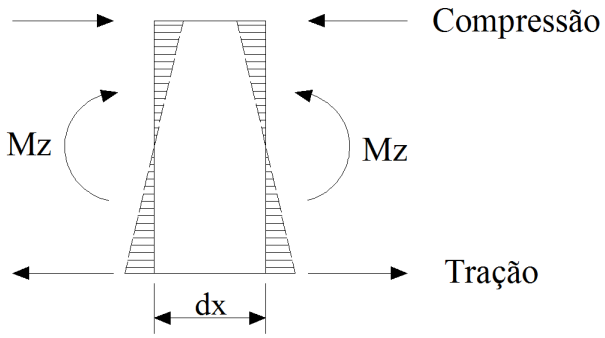


Figura 2.18: Momento fletor M_z

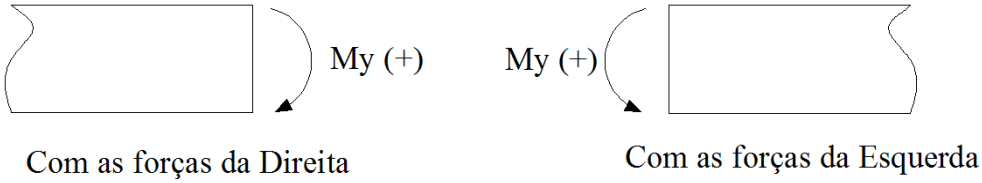


Figura 2.19: Momento fletor M_y

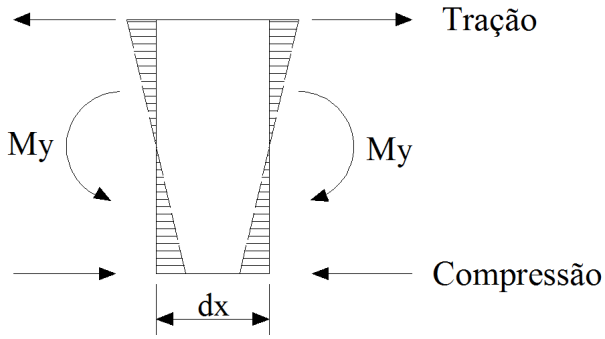


Figura 2.20: Momento fletor M_y

deste caso.

Então:

- Então, são nulos os esforços $R_Z = R_Q = 0$, $M_x = T = 0$, $M_y = MF_y = 0$.
- Esforço normal $N = R_x$.
- Esforço cortante(único) $Q = Q_y$.
- Momento fletor(único) $MF = M_z$.

2º) Barra reta com cargas transversais:

O mesmo que o caso anterior, com esforço normal $N = R_x = 0$. Este caso está mostrado na figura 2.23.

3º) Barra reta com cargas axiais:

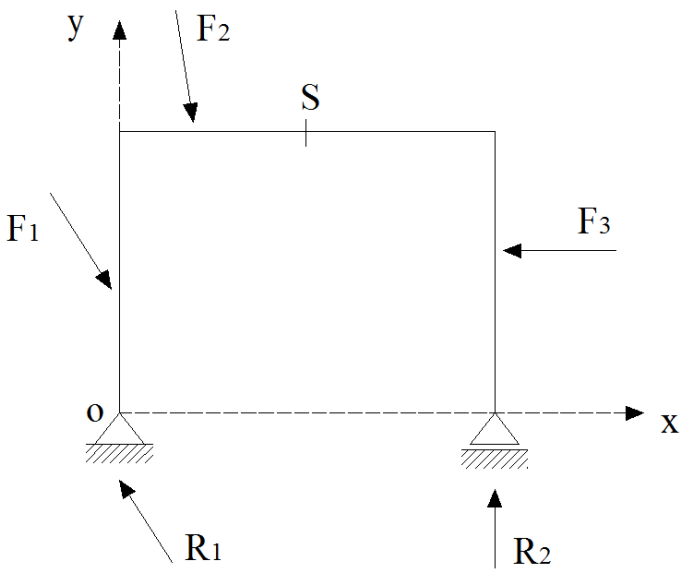


Figura 2.21: Estrutura plana com carga no próprio plano.

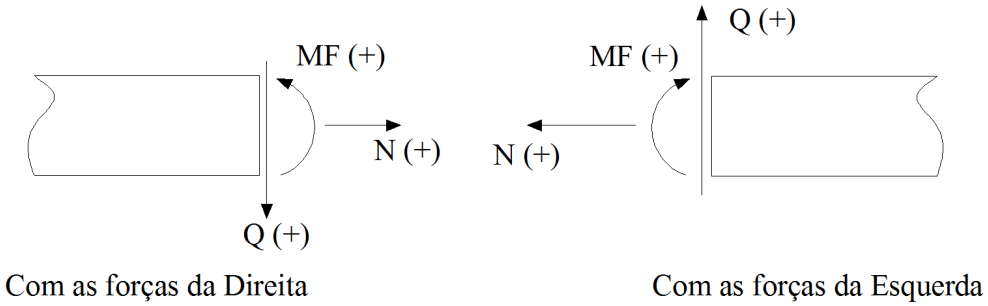


Figura 2.22:

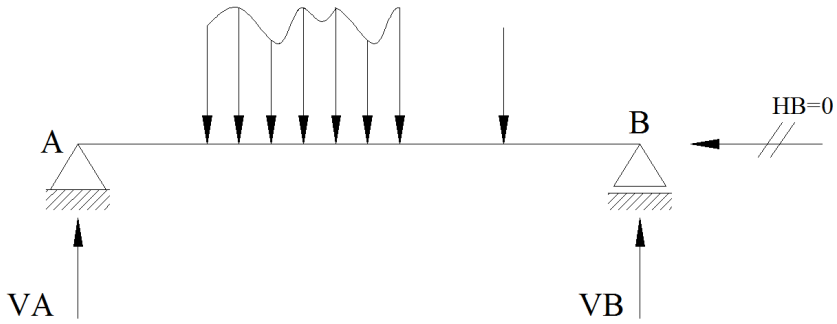


Figura 2.23: Barra reta com cargas transversais.

Esforço normal $N = R_x$, demais esforços nulos. Este caso está mostrado na figura 2.24.

4º) Barra reta com cargas paralelas ao eixo, mas não axiais (pilar com carga excêntrica):

- Esforço normal: $N = R_x$.
- Momentos fletores: $MF_y = M_y$ e $MF_z = M_z$.

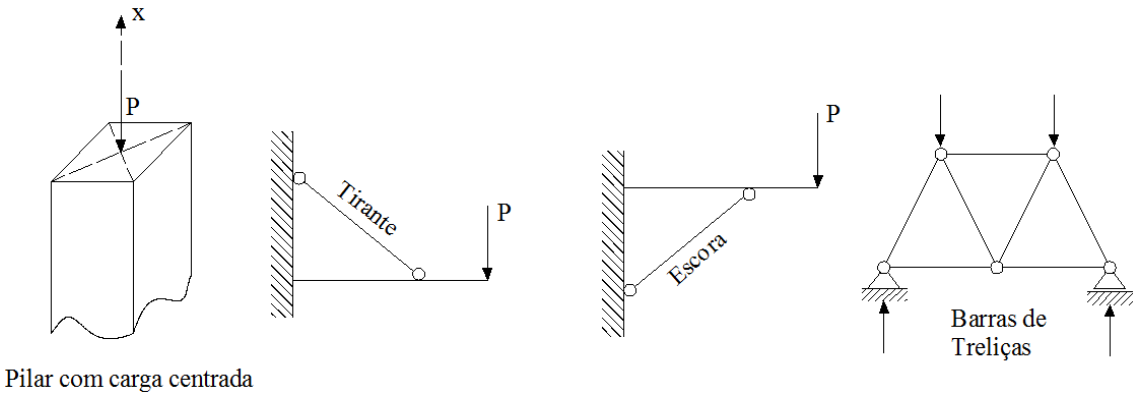


Figura 2.24: Barra reta com cargas axiais.

- Demais esforços nulos.

Este caso está ilustrado na figura 2.25.

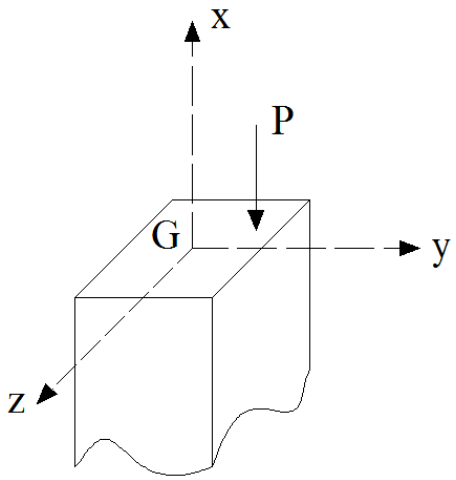


Figura 2.25: Barra reta com cargas paralelas ao eixo, mas não axiais

2.1.5 Exercícios

1. Calcular as reações de apoio e os esforços simples nas seções E e F da viga representada representada na figura 2.26.

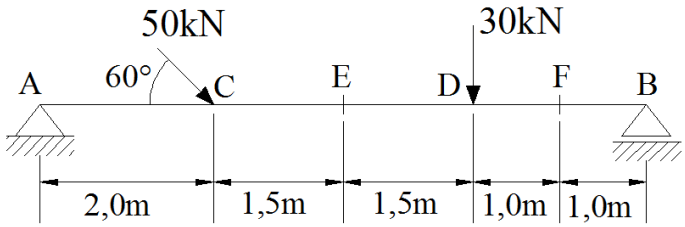


Figura 2.26: Figura do exercício 1

Resposta:

Reações: $V_A = 39,5\text{kN}$, $V_B = 33,8\text{kN}$, $H_B = 25,0\text{kN}$.

Esforços Simples: $N_E = N_F - 25,0\text{kN}$, $Q_E = -3,8\text{kN}$, $Q_F = -33,8\text{kN}$, $M_E = 73,3\text{kNm}$, $M_F = 33,8\text{kNm}$.

2. Calcular as reações de apoio e os esforços simples nas seções E e F da viga representada representada na figura 2.27.

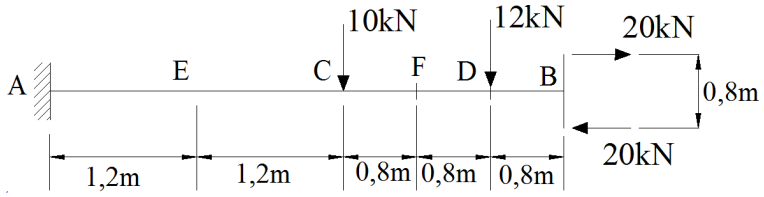


Figura 2.27: Figura do exercício 2

Resposta:

Reações: $V_A = 22,0\text{kN}$, $M_A = 88,0\text{kNm}$, $H_A = 0$.

Esforços Simples: $N_E = N_F = 0$, $Q_E = 22,0\text{kN}$, $Q_F = 12,0\text{kN}$, $M_E = -61,6\text{kNm}$, $M_F = -25,6\text{kNm}$.

3. Calcular as reações de apoio e os esforços simples nas seções E e F da viga representada representada na figura 2.28.

Resposta: Reações: $V_A = 25,0\text{kN}$, $V_B = 5,0\text{kN}$, $H_A = 18\text{kN}$.

Esforços Simples: $N_E = N_F = 18,0kN$, $Q_E = Q_F = -5,0\text{kN}$, $M_E = 35,0\text{kNm}$, $M_F = 5,0\text{kNm}$.

2.1.6 Diagramas

Nota-se, face ao exposto até o momento, que os esforços internos variam ao longo da viga. Nesta seção, deseja-se estabeler as equações dos esforços

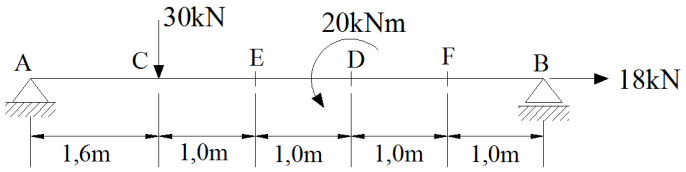
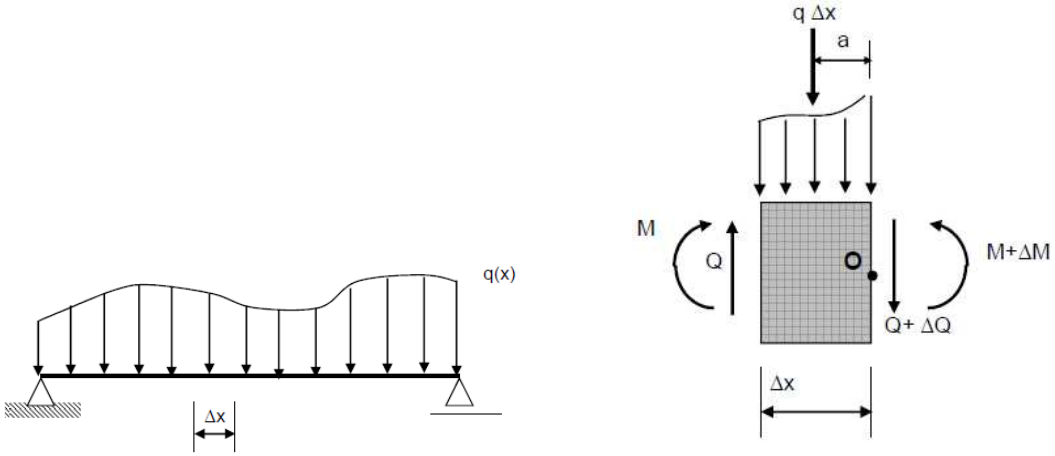


Figura 2.28: Figura do exercício 3

internos para alguns casos específicos de carregamento e mostrar a representação gráfica dessas equações. Para tal, estabelece-se inicialmente as equações fundamentais da estática. Analisa-se, portanto, uma fatia infinitesimal da viga da figura 2.29(a), que está mostrada na figura 2.29(b).



(a) Viga biapoiada (b) Elemento infinitesimal

Figura 2.29: Viga biapoiada e elemento infinitesimal

Estabelecendo as equações de equilibrio para esta viga, tem-se:

- $\sum F_V = 0$

  $Q - (Q + \Delta Q) - q(x)\Delta x = 0$

  $\Delta Q = q(x)\Delta(x)$

  $q(x) = \frac{\Delta Q}{\Delta x}$

  $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x}$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -q(x) \tag{2.1}$$

- $\sum M_0 = 0$

  $M - (M + \Delta M) + Q\Delta x - q(x)\Delta x k \Delta x = 0$

  $-\Delta M + Q\Delta x - q\Delta x^2 k = 0/\Delta x$

  $lim_{\Delta x \to 0}(\frac{\Delta M}{\Delta x} - Q + q\Delta x k)$

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x) \tag{2.2}$$

As equações 2.1 e 2.2 são conhecidas como equações fundamentais da estática e mostram que a primeira derivada da equação do esforço cortante é a carga distribuída enquanto a primeiro derivada da equação de momento fletor é o próprio cortante.

Nos diagramas as variações desses esforços em cada seção são representados perpendicularmente ao longo do eixo do elemento. O exemplos a seguir ilustram a construção desses diagramas para alguns casos simples .

Exemplo 1 - Viga biapoaiada com carga concentrada

Para viga biapoaida da figura 2.30, deseja-se primeiramente escrever como os esforços internos variam ao longo do eixo do elemento, ou seja, pretende-se estabelecer as equações de cada esforço em função da coordenada x.

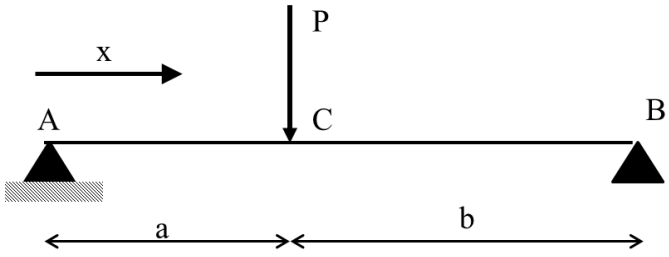


Figura 2.30: Viga biapoiada com carga concentrada

A figura 2.31 é o diagrama de corpo livre da viga, onde $L = a + b$. Esta será dividida nos trechos AC, do apoio da esquerda até a carga, e CB, da carga até o apoio da direita.

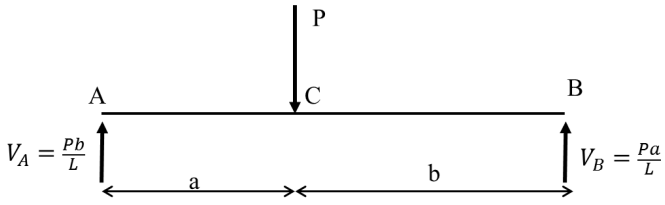
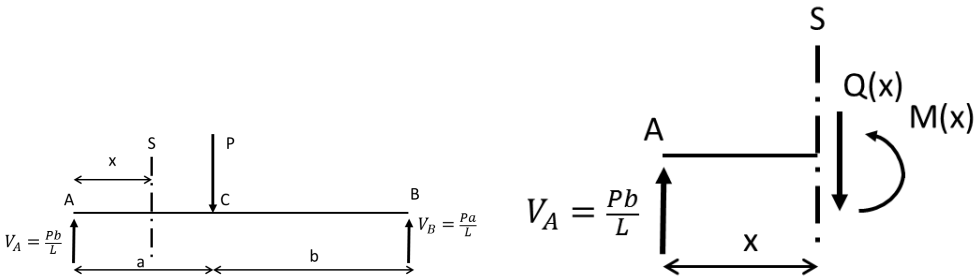


Figura 2.31: Viga biapoiada com carga concentrada

1. Equações dos esforços internos para o trecho AC

   Secciona-se o trecho em uma seção S, como ilustra da figura 2.32a e faz-se o equilíbrio de uma das partes seccionadas (parte da esquerda



(a) Viga biapoiada e seção de corte (b) Equilíbrio da parte da esquerda

Figura 2.32: Seção de corte e equilíbrio da parte da esquerda

ou parte da direita). A figura 2.32b ilustra, por exemplo, o diagrama de corpo livre da parte da esquerda.

As equações de equilíbrio para a figura 2.32b conduz a:

- Momento

$$M(x) = \frac{Pbx}{L} \tag{2.3}$$

$x = 0 \rightarrow M = 0$

$x = a \rightarrow M = \frac{Pab}{L}$

- Cortante

$$Q = \frac{Pb}{L} \tag{2.4}$$

A figura 2.33 ilustra os diagramas de momento (DMF) e cortante (DEC) para este trecho, referente as equações 2.3 e 2.4, respectivamente.

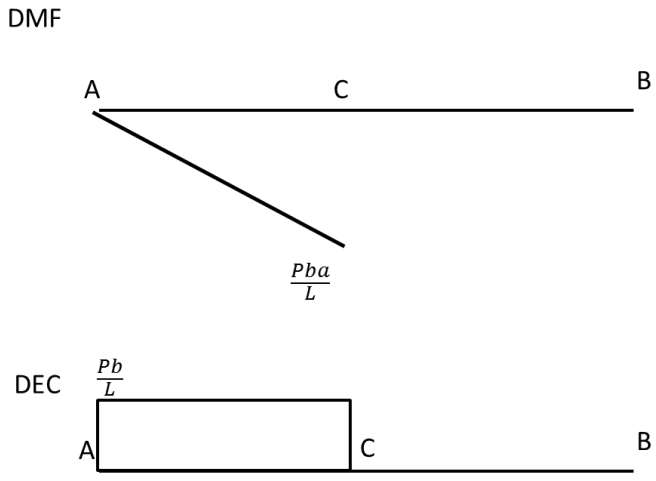
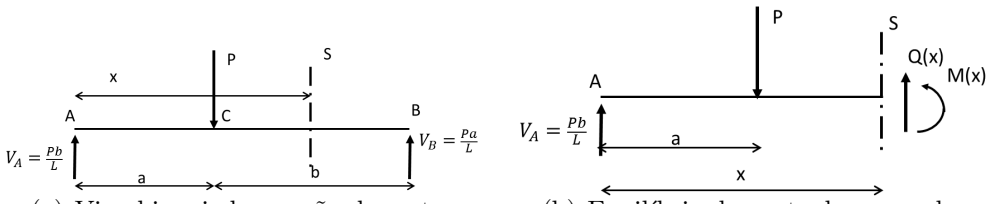


Figura 2.33: Diagramas de momento fletor e esforço cortante para o trecho AC

2. Equações dos esforços internos para o trecho CB

Secciona-se o trecho em uma seção S, como ilustra da figura 2.34a e faz-se o equilíbrio de uma das partes seccionadas (parte da esquerda ou parte da direita). A figura 2.34b ilustra, por exemplo, o diagrama de corpo livre da parte da esquerda.



(a) Viga biapoiada e seção de corte (b) Equilíbrio da parte da esquerda

Figura 2.34: Seção de corte e equilíbrio da parte da esquerda

As equações de equilíbrio para a figura 2.34b conduz a:

- Momento

$$M(x) = \frac{Pbx}{L} - P(x-a) \tag{2.5}$$

$x = a \rightarrow M = \frac{Pab}{L}$
$x = L \rightarrow M = 0$

- Cortante

$$Q = -\frac{Pa}{L} \tag{2.6}$$

A figura 2.35 ilustra os diagramas de momento (DMF) e cortante (DEC) para toda a viga. Os diagramas referentes ao trecho CB representaam as equações 2.5 e 2.6.

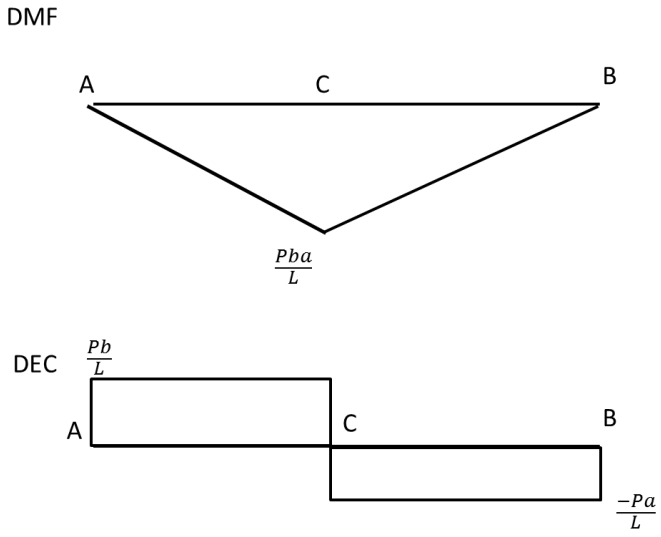


Figura 2.35: Diagramas de momento fletor e esforço cortante para toda a viga

Enumera-se alguns pontos importantes dos diagrama ilustrados na figura 2.35:

1. Para os trecho AC e CB $q = 0$. De acordo com as expressões 2.1 e 2.2, as equações do cortante em cada trechos são valores constantes e as equações de momento são lineares. Estes fatos são observados na figura 2.35.

2. Na seção C, ponto de aplicação da carga, o DEC apresenta uma descontinuidade no valor da carga concentrada aplicada.

Exemplo 2 - Viga biapoaiada com carga distribuida

A viga biapoiada da figura 2.36, cujo diagrama de corpo livre é apresentado na figura 2.37, é seccionada na seção S.

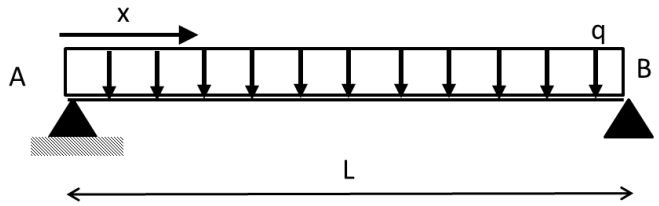


Figura 2.36: Viga biapoiada

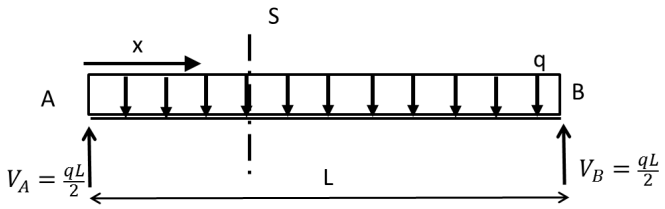


Figura 2.37: Diagrama de corpo livre

As equações dos esforços internos para a parte da esquerda esboçada na figura 2.38 são:

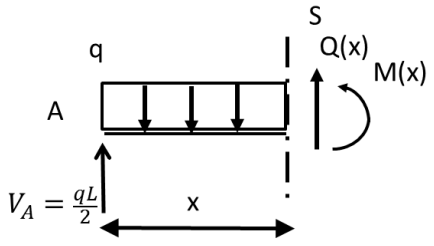


Figura 2.38: Parte a esquerda da seção de corte

- Equação de momento fletor

$$M(x) = \frac{qL}{2}x - qx\frac{x}{2} \Longrightarrow M(x) = \frac{qL^2}{2}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) \tag{2.7}$$

$x = 0$ e $x = L \rightarrow M = 0$
$x = \frac{L}{2} \rightarrow M = \frac{qL^2}{8}$

- Equação de esforço cortante

$$Q(x) = \frac{qL}{2} - qx \tag{2.8}$$

$x = 0 \rightarrow Q = \frac{qL}{2}$ $x = L \rightarrow Q = -\frac{qL}{2}$
$x = \frac{L}{2} \rightarrow Q = 0$

Os gráficos de momento (DMF) e cortante (DEC) refentes as equações 2.7 e 2.8 estão apresentados nas figuras 2.39.

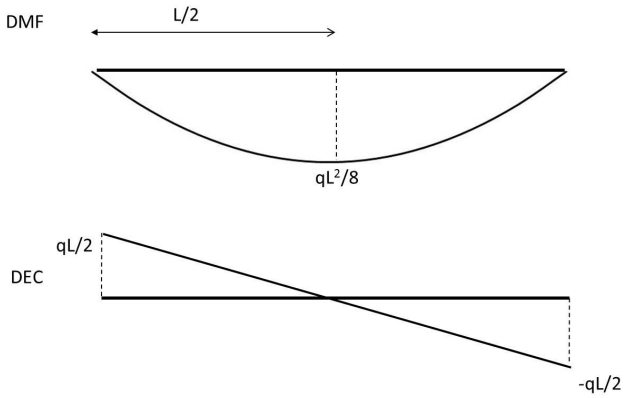


Figura 2.39: Diagramas de momento fletor e esforço cortante

Sabendo-se que a derivada do momento fletor é o esforço cortante, pode-se observar que:

- A seção de momento máximo corresponde à seçao de cortante nulo (seção no meio do vão)
- A equação de momento fletor 2.7 é uma parábola enquanto a equação de esforço cortante 2.8 é uma reta.

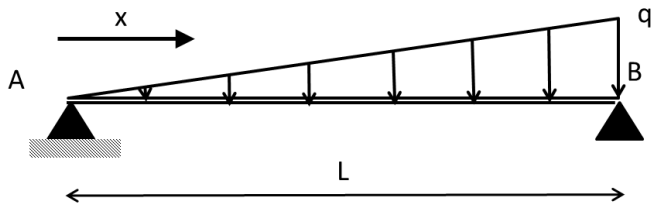


Figura 2.40: Viga biapoiada com carga triangular

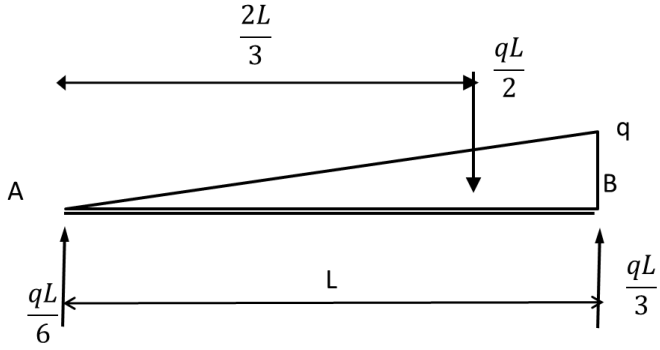


Figura 2.41: Diagrama de corpo livre e reações de apoio

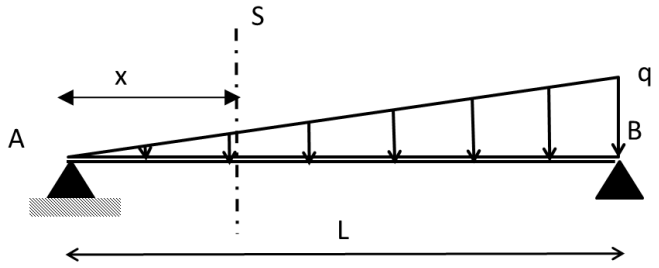


Figura 2.42: Seção de corte

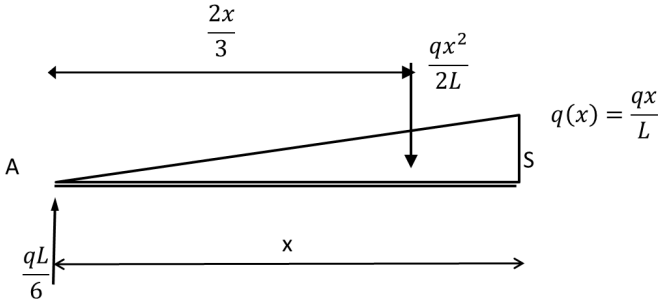


Figura 2.43: Parte a esquerda da seção de corte

Exemplo 3 - Viga biapoaiada com carga triangular

A viga biapoiada da figura 2.40, cujo diagrama de corpo livre é apresentado na figura 2.41, é seccionada na seção S, como ilustra a figura 2.42.

A figura 2.43 mostra a parte a esquerda da seção S, onde a função do carregamento $q(x)$ é $q(x) = \frac{qx}{2}$.

Pelo equilíbrio do elemento da figura 2.43 tem-se as equações de momento e cortante para este problema, que são:

- Momento

$$M(x) = \frac{ql^2}{6}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^3}{L^3}\right) \tag{2.9}$$

- Cortante

$$Q(x) = \frac{ql}{6}\left(1 - \frac{3x^2}{L^2}\right) \tag{2.10}$$

A seção de momento máximo é aquela que apresenta cortante nulo e é obtida igualando a expressão 2.10 a zero, ou seja:

$$Q(x) = \frac{ql}{6}\left(1 - \frac{3x^2}{L^2}\right) = 0 \Longrightarrow x = L\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Retornando este valor na expressão 2.9 tem-se:

$$M_{max} = 0,064qL^2$$

Os gráficos de momento (DMF) e cortante (DEC) refentes as equações 2.9 e 2.10 estão apresentados nas figuras 2.44.

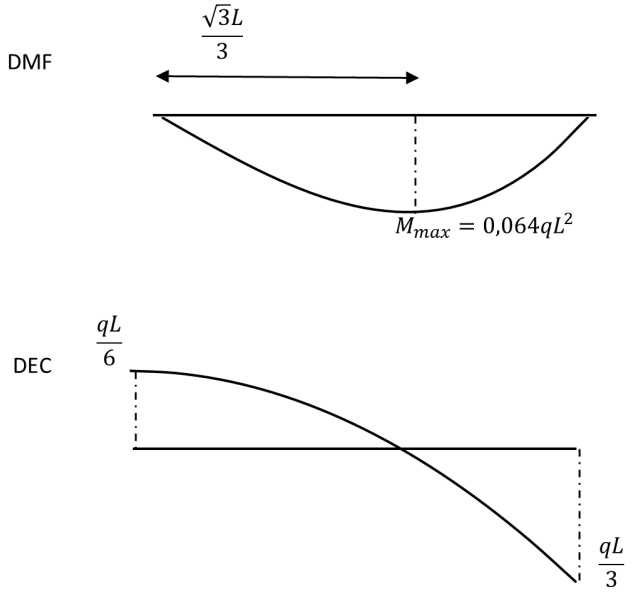


Figura 2.44: Diagramas de momento fletor e esforço cortante

Exemplo 4 - Viga biapoaiada com carga momento

A figura 2.45 mostra uma viga biapoiada com uma carga momento e a figura 2.46 mostra seu diagrama de corpo livre com as respectivas reações de apoio.

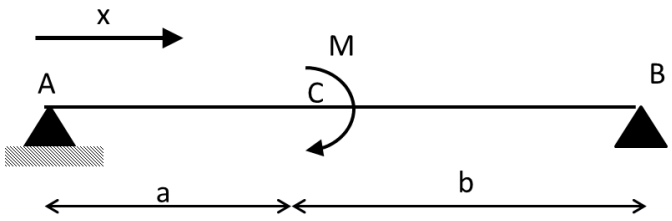


Figura 2.45: Viga biapoiada com carga momento

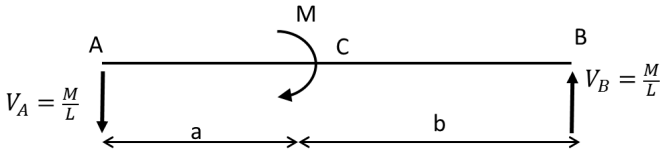


Figura 2.46: Diagrama de corpo livre

Para se obter as equações de momento fletor e esforço cortante, deve-se seccionar a viga em duas seções distintas, a primeira entre o apoio A e a seção C e a segunda entre a seção C e o apoio B. A figura 2.47 ilustra essas seções denominadas, respectivamente, de seções S_1 e S_2.

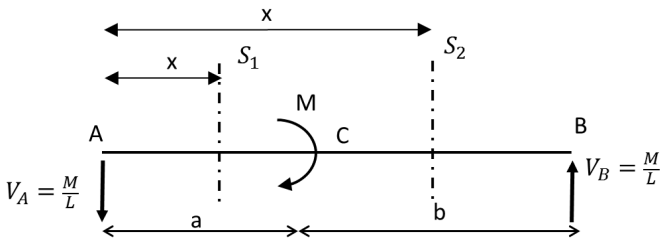


Figura 2.47: Seção de corte

As equações de momento fletor e esforço cortante serão desenvolvidas separadamente para cada trecho a partir do equilíbrio da parte a esquerda de cada seção. Desta forma, tem-se:

1. Trecho AC

   - Momento

$$M(x) = -\frac{Mx}{L} \tag{2.11}$$

$x = 0 \rightarrow M = 0$

$x = a \rightarrow M = -\frac{Ma}{L}$

- Cortante

$$Q(x) = -\frac{M}{L} \tag{2.12}$$

2. Trecho CA

- Momento

$$M(x) = -\frac{Mx}{L} + M \tag{2.13}$$

$x = a \rightarrow M = \frac{Mb}{L}$

$x = a + b \rightarrow M = 0$

- Cortante

$$Q(x) = -\frac{M}{L} \tag{2.14}$$

A figura 2.48 mostra os DMF e o DEC para este problema. Pode-se observar que:

- O DMF tem equações do 1^o grau enquanto o DEC apresenta valor constante, o que está de acordo com as equações 2.2 e 2.1, pois $q = 0$ para cada trecho.
- Na seção C, seção de aplicação da carga momento, há uma descontinuidade no DMF igual ao valor da própria carga momento.

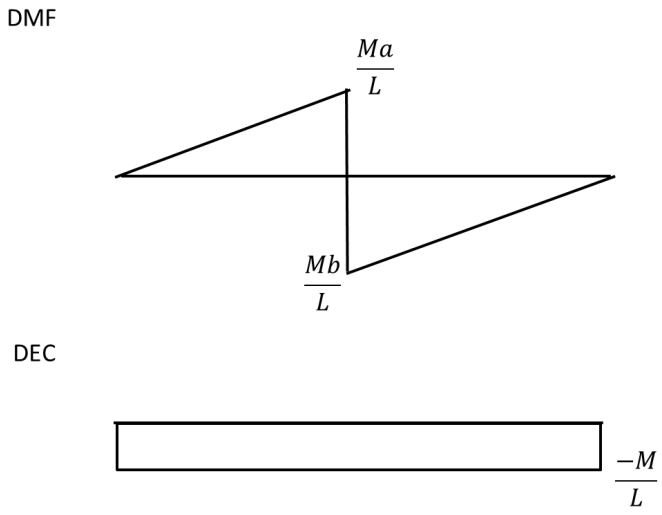
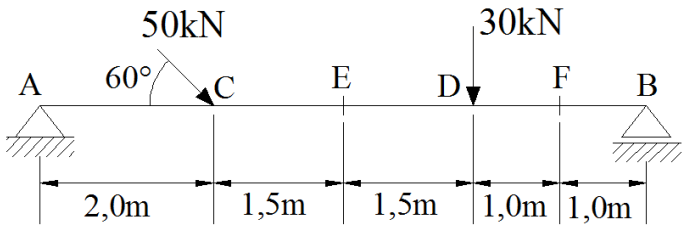


Figura 2.48: Diagrama de momento e cortante

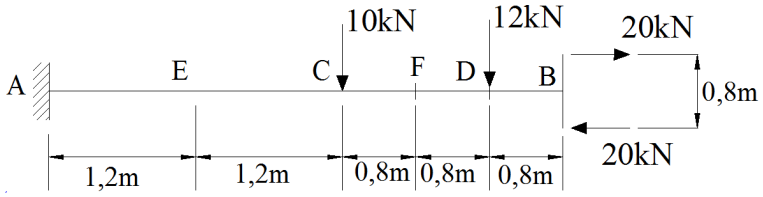
2.1.7 Exercícios

Para todos os exercícios, esboçar os diagramas de esforços internos.

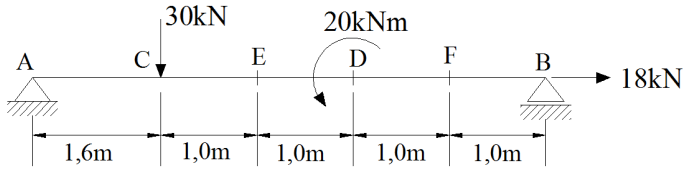
1.



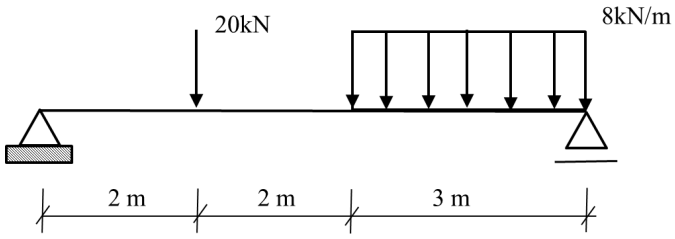
2.



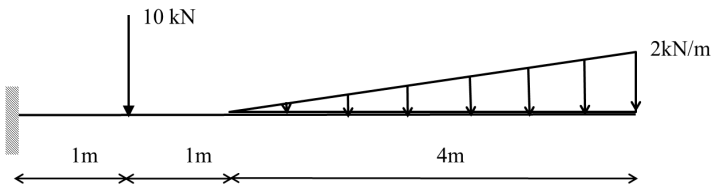
3.



4.



5.



2.2 Características Geométricas de Superfícies Planas

2.2.1 Centróides e Centros de Gravidade

Freqüentemente considera-se a força peso dos corpos como cargas concentradas atuando num único ponto, quando na realidade o que se passa é que o peso é uma força distribuída, isto é, cada pequena porção de matéria tem o seu próprio peso. Esta simplificação pode ser feita quando se aplica a força concentrada num ponto especial denominado centróide. Terá importância também a determinação de um ponto de uma superfície e não somente de um corpo tridimensional que terá uma distribuição homogênea de área em torno de si. A este ponto especial denomina-se Centro de Gravidade (CG).

Demonstra-se que as coordenadas deste ponto são obtidas, no caso geral, tomando-se um elemento de área dA da figura 2.49 cujos centróides são (z_{el}; y_{el}). Assim, fazendo a integração em toda a área A, obtem-se o centróide $\bar{z}$ e $\bar{y}$ da figura por integração.

$$\bar{z} = \frac{\int z_{el} dA}{\int dA} \tag{2.15}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_{el} dA}{\int dA} \tag{2.16}$$

A integral $\int z_{el} dA$ é conhecida como momento estático de 1^a ordem ou momento estatico de área em relação ao eixo y. Analogamente, a integral $\int z_{el} dA$ define o momento Estático de 1^a ordem ou momento estático de área em relação ao eixo y.

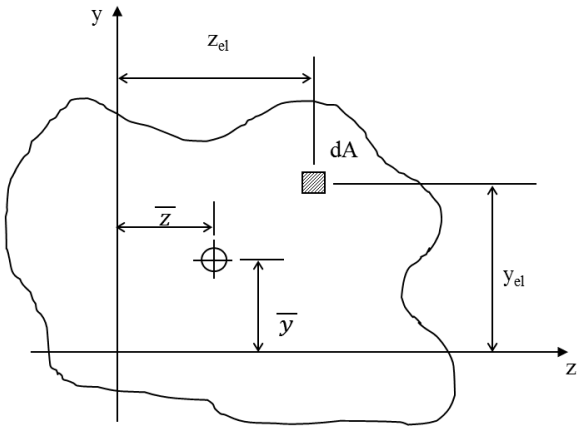


Figura 2.49: Figura plana com geometria qualquer para cálculo do CG

Tabela 2.1: Tabela para o cálculo do CG

figura	$\bar{z}$	$\bar{y}$	A	$\bar{z}A$	$\bar{y}A$
retângulo	60	110	12000	720000	1320000
triângulo	40	40	3600	144000	144000
$\sum$	-	-	15600	86400	1464000

As equações 2.17 e 2.18 permitem calcular o centróide ou CG de figuras planas por integração. Todavia, muitas figuras são resultantes de soma ou diferença de outras figuras conhecidas e para estas a determinação do CG pode ser feita por composição de figuras.

Um exemplo é a figura 2.50, resultante da soma de um retângulo com um triângulo ou da diferença de um outro retângulo e um triângulo.

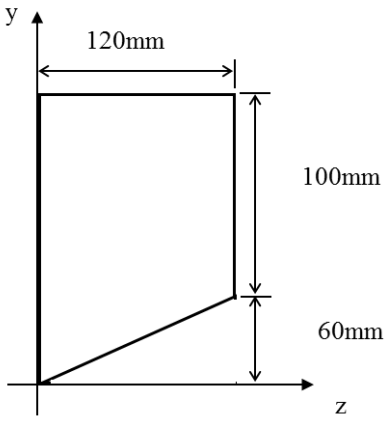


Figura 2.50: Figura plana para cálculo do CG.

Optando-se pela soma dos elementos, sabe-se que o CG do retângulo e do triângulo em relação aos eixos z e y são conhecidos. Como trata-se de figuras conhecidas as integrais 2.17 e 2.18 tornam-se:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \tag{2.17}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \tag{2.18}$$

onde n é o número de figuras conhecidas.

Assim, o cálculo do CG é feito com auxílio da tabela 2.1.

$$\bar{z} = \frac{\sum \bar{z} A}{\sum A} = 55,38mm$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y} A}{\sum A} = 93,85mm$$

2.2.2 Momentos de Inércia

Momento de inércia é uma grandeza que mede a resistência que uma determinada área oferece quando solicitada ao giro em torno de um determinado eixo. Normalmente é representado pelas letras I e J. Assim a resistência que a figura 2.51 oferece ao giro em torno do eixo z é representada pela equação 2.19 e em torno do eixo y é representada pela equação 2.20. Nestas equações dA é um elemento de área infinitesimal, z é a distância do elemento de área ao eixo y e y é a distância do elemento de área ao eixo z.

$$J_z = \int y^2 dA \tag{2.19}$$

$$J_y = \int z^2 dA \tag{2.20}$$

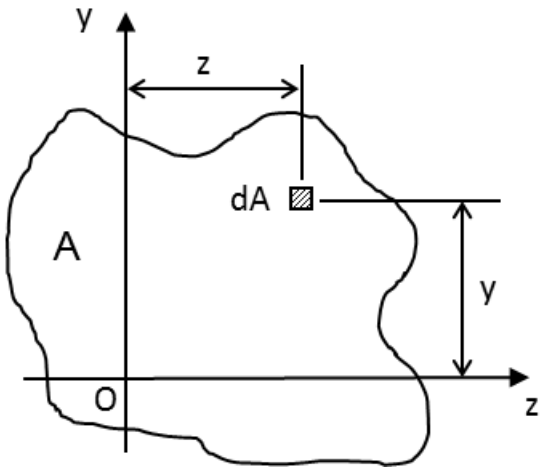


Figura 2.51: Figura plana com geometria qualquer para cálculo dos momentos de inércia

Teorema dos eixos paralelos

Freqüentemente necessita-se do momento de inércia de uma área em relação a um eixo qualquer (este eixo será qualquer para a figura em si, mas especial para a seção da qual a referida figura faz parte). Para evitar o cálculo constante de integrais, desenvolve-se nesta seção uma expressão para o cálculo do momento de inércia em relação a este eixo qualquer a partir do valor do momento de inércia em relação a outro eixo, já conhecido.

Utiliza-se para tal a figura 2.52, onde o eixo BB passa, necessariamente, pelo CG da figura. O eixo AA é um eixo qualquer da figura e tem como restrição o fato de ser paralelo ao eixo BB.

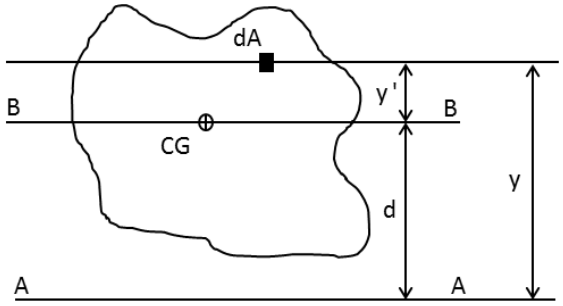


Figura 2.52: Figura plana com geometria qualquer

Observando-se adequadamente as distância entre os eixos indicadas na figura, pode-se escrever:

$J_{AA} = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA = \int y'^2 dA + \int 2y' dA + \int d^2 dA$

Nota-se que:

- A integral $\int y'^2 dA$ é o momento de inércia em torno do eixo que passa pelo CG da figura.
- A integral $\int 2y' dA$ é igual a zero pois refere-se ao momento estático em torno do CG da figura.
- A integral dA resulta na área da figura.
- d é a distância entre os eixos AA e BB

Portanto;

$$J_{AA} = J_{BB} + d^2 A \tag{2.21}$$

Para eixos horizontais, tem-se:

$$J_z = J_{\bar{z}} + d^2 A \tag{2.22}$$

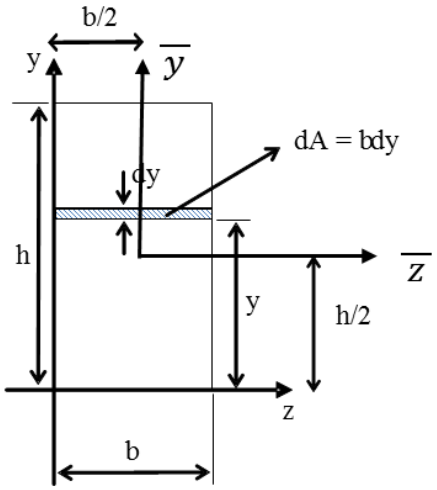
$$J_y = J_{\bar{y}} + d^2 A \tag{2.23}$$

onde $\bar{z}$ e $\bar{y}$ são eixos que passam pelo CG da figura.

Momentos de inércia para figuras retangulares e triangulares

Com base nas equações 2.19, 2.20, 2.22 e 2.23, desenvolvem-se neste item os momentos de inércia para figuras básicas, como o retângulo e o triângulo. Nestes desenvolvimentos, os eixos que passam pelo CG das figuras são denominados de $\bar{z}$ e $\bar{y}$, enquanto aqueles que passam pelas bases e pelas laterais são denominados de z e z. Além disso, são desenvolvidos valores em relação aos eixos z e $\bar{z}$, e, por analogia, apresentam-se os valores em relação aos eixos y e $\bar{y}$

- **Retângulo**



$$J_z = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{J_z = \frac{bh^3}{3}}$$

$$\boxed{J_y = \frac{b^3 h}{3}}$$

$$J_z = J_{\bar{z}} + d^2 A \rightarrow \frac{bh^3}{3} = J_{\bar{z}} + \frac{h^2}{4} bh$$

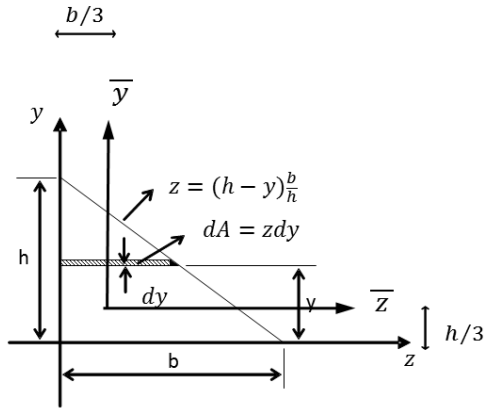
$$\Downarrow$$

$$\boxed{J_{\bar{z}} = \frac{bh^3}{12}}$$

$$\boxed{J_{\bar{y}} = \frac{b^3 h}{12}}$$

Figura 2.53: Momentos de inércia de um retângulo

- **Triângulo**



$$J_z = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b(h-y)}{h} dy$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{J_z = \frac{bh^3}{12}}$$

$$\boxed{J_y = \frac{b^3 h}{12}}$$

$$J_z = J_{\bar{z}} + d^2 A \rightarrow \frac{bh^3}{12} = J_{\bar{z}} + \frac{h^2}{9} \frac{bh}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{J_{\bar{z}} = \frac{bh^3}{36}}$$

$$\boxed{J_{\bar{y}} = \frac{b^3 h}{36}}$$

Figura 2.54: Momentos de inércia de um triângulo

2.2.3 Momento Polar de Inércia

O momento polar de inércia é aquele em torno do eixo que passa pela origem do sistema de eixos, que é um eixo normal ao plano da figura.

Para a definição do momento polar de inércia, denominado por J_0, J_P, I_0 ou I_P, utiliza-se a figura 2.55.

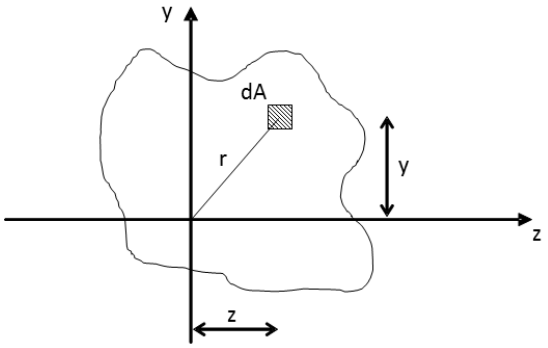


Figura 2.55: Figura plana com geometria qualquer para definição do momento polar de inércia

Define-se momento polar de inércia como sendo:

$$J_0 = J_P = \int r^2 dA \tag{2.24}$$

Sabe-se que $r^2 = z^2 + y^2$. Substituindo esta relação na equação 2.24, tem-se que:

$$J_0 = J_P = \int z^2 dA + \int y^2 dA \tag{2.25}$$

Com base nas relações 2.19 e 2.20, conclui-se que:

$$J_0 = J_P = J_z + J_y \tag{2.26}$$

Por ser de grande interesse para a disciplina de Resistência dos Materiais I, desenvolve-se a expressão do momento polar de inércia para a figura circular 2.56.

$$J_0 = J_P = \int u^2 dA$$
$$dA = 2\pi u du \rightarrow J_0 = \int_0^r u^2 2\pi u du$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{J_0 = \frac{\pi r^4}{2}}$$

Em função da simetria, pode-se concluir que para o círculo os valores de J_z e J_y são iguais. Assim, de acordo com a expressão 2.26, tem-se que:

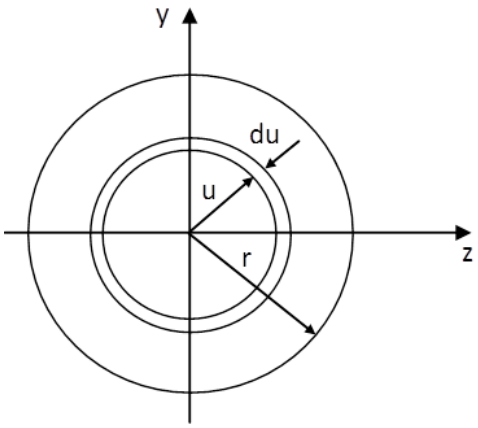


Figura 2.56: Momentos polar de inércia de um círculo

$$\frac{\pi r^4}{2} = J_z + J_y \rightarrow J_z = J_y = \frac{\pi r^4}{4}$$

Reenscrevendo as expressões do círculo em função do seu diâmetro D, tem-se:

$$J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$J_0 = J_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

2.2.4 Produto de Inércia

O produto de inércia é definido, com base na figura 2.57, como sendo o produto de cada área dA de uma área A por suas coordenadas z e y em relação aos eixos coordenados z e y e integrando sobre a área. Assim a expressão do produto de inércia é:

$$J_{zy} = \int zydA \tag{2.27}$$

Ao contrário dos momentos de inércia J_z e J_y, o produto de inércia pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo da distribuição de área em relação aos eixos coordenados.

Teorema dos eixos paralelos

De forma semelhante ao que foi feito para os momentos de inércia e de acordo com a figura 2.58, tem-se:

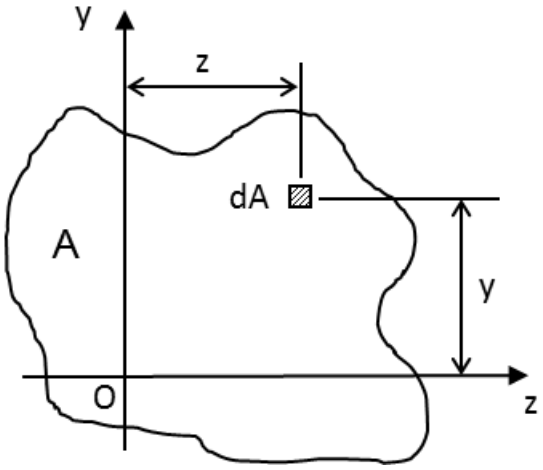


Figura 2.57: Figura plana com geometria qualquer para cálculo do produto de inércia

$$z = z' + d_2$$
$$y = y' + d_1$$
$$J_{zy} = \int zy dA$$
$$J_{zy} = \int (z' + d_2)(y' + d_1) dA$$
$$J_{zy} = \int d_1 d_2 dA + d_1 \int z' dA + d_2 \int y' dA + \int z' y' dA$$

$$J_{zy} = J_{\bar{z}\bar{y}} + d_1 d_2 A \tag{2.28}$$

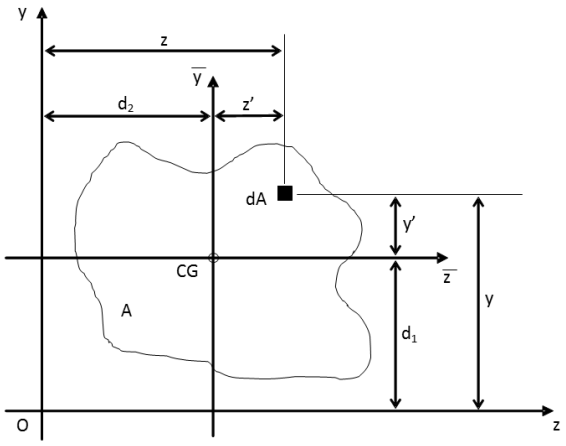


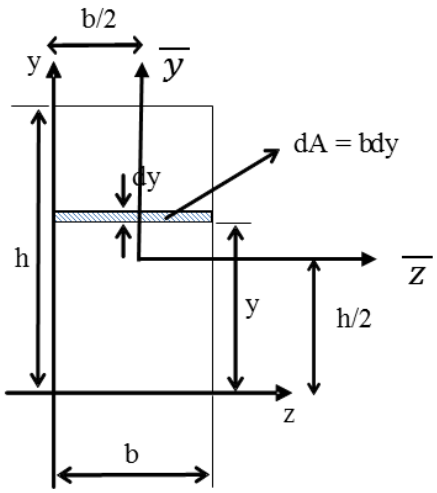
Figura 2.58: Figura plana com geometria qualquer

Produtos de inércia para figuras retangulares e triangulares

Com base nas equações 2.27 e 2.28, desenvolvem-se neste item os produtos de inércia para figuras básicas, como o retângulo e o triângulo. Nestes

desenvolvimentos, os eixos que passam pelo CG das figuras são denominados de $\bar{z}$ e $\bar{y}$, enquanto aqueles que passam pelas bases e pelas laterais são denominados de z e z.

- **Retângulo**

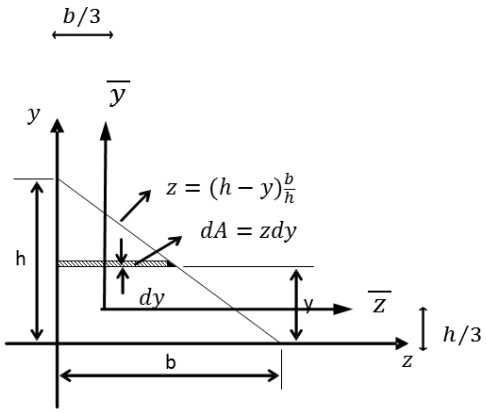


$$z = \frac{b}{2}, y = y, dA = bdy$$
$$J_{zy} = \int zydA = \int_0^h \frac{b}{2}bdy$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{J_{zy} = \frac{b^2h^2}{4}}$$

$$J_{zy} = J_{\bar{z}\bar{y}} + d_1d_2A \rightarrow \frac{b^2h^2}{12} = J_{\bar{z}\bar{y}} + \frac{h}{2}\frac{b}{2}bh$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{J_{\bar{z}\bar{y}} = 0}$$

Figura 2.59: Produto de inércia de um retângulo

- **Triângulo**



$$y = y, z = \frac{z}{2}$$
$$J_{zy} = \int zydA$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{J_{zy} = \frac{b^2h^2}{24}}$$

$$J_{zy} = J_{\bar{z}\bar{y}} + d_1d_2A \rightarrow \frac{b^2h^2}{24} = J_{\bar{z}\bar{y}} + \frac{b}{3}\frac{h}{3}\frac{bh}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{J_{\bar{z}\bar{y}} = -\frac{b^2h^2}{72}}$$

Figura 2.60: Produto de inércia de um triângulo

O sentido negativo encontrado para o produto de inércia do triângulo em relação aos eixos $\bar{z}\bar{y}$ indica que há uma maior quantidade de área nos quadrantes negativos. Na figura 2.61 mostram-se as 4 posições do triângulo em relação aos eixos que passam pelo seu CG. Nas figuras 2.61a e 2.61b os produtos de inércia são negativos e valem $J_{\bar{z}\bar{y}} = -\frac{b^2h^2}{72}$ enquanto nas figuras 2.61c e 2.61d os mesmos são e positivos e valem $J_{\bar{z}\bar{y}} = \frac{b^2h^2}{72}$.

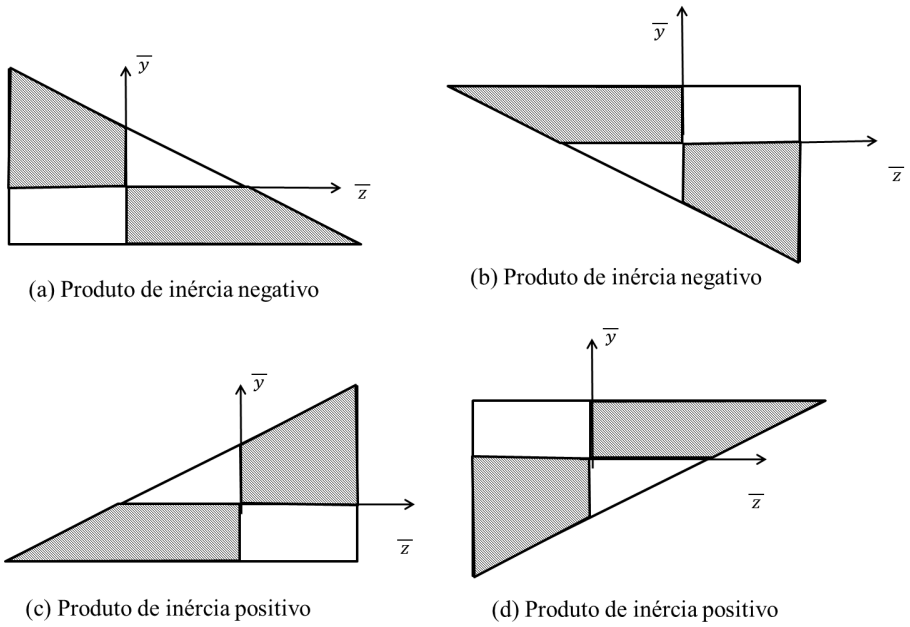


Figura 2.61: Sinais dos produtos de inércia para figuras triangulares

2.2.5 Momentos e produto de inércia em relação a eixos inclinados e momentos principais de inércia

Muitas vezes é necessário calcular os momentos e produto de inércia em $J_{z'}$, $J_{y'}$ e $J_{z'y'}$ em relação a um par de eixos z' e y' inclinados em relação a z e y de um valor θ, sendo conhecidos os valores de θ, J_z,J_y e J_{zy}. Para tal, utilizam-se relações de transformação que relacionam as coordenadas z, y, z' e y'.

Com base na figura 2.62, pode-se escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} z' &= z\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ y' &= y\cos(\theta) - z\sin(\theta) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Sabe-se ainda que:

$$\begin{aligned} J_{z'} &= \int y'^2 dA \\ J_{y'} &= \int z'^2 dA \\ J_{z'y'} &= \int z'y' dA \end{aligned}$$

Substituindo as relações 2.29 em 2.30 e lembrando que:

$$J_z = \int y^2 dA$$

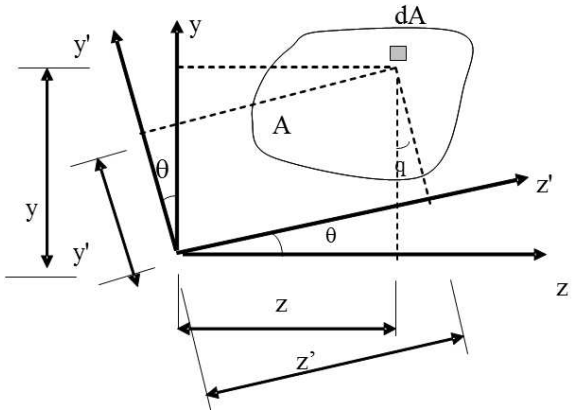


Figura 2.62: Rotação de eixos.

$$J_y = \int z^2 dA$$
$$J_{zy} = \int zy dA \tag{2.30}$$

chegam-se nas seguintes relações:

$$J'_z = \frac{J_z + J_y}{2} + \frac{J_z - J_y}{2}\cos(2\theta) - J_{zy}\sin(2\theta)$$
$$J'_y = \frac{J_z + J_y}{2} - \frac{J_z - J_y}{2}\cos(2\theta) + J_{zy}\sin(2\theta)$$
$$J_{z'y'} = \frac{J_z - J_y}{2}\sin(2\theta) + J_{zy}\cos(2\theta) \tag{2.31}$$

Se a primeira e a segunda equações forem somadas, pode-se mostrar que o momento polar de inércia em relação a origem do sistema de eixos é independente da orientação dos eixos z' e y', ou seja:

$$J_0 = J_{z'} + J_{y'} = J_z + J_y \tag{2.32}$$

Momentos principais de inércia

As equações 2.31 mostram que $J_{z'}, J_{y'}$ e $J_{z'y'}$ dependem do ângulo de inclinação θ dos eixos $z'y'$ em relação aos eixos zy. Deseja-se determinar a orientação desses eixos para os quais $J_{z'}$ e $J_{y'}$ são extremos, isto é, máximo e mínimo. Este par de eixos em particular são chamados de eixos principais de inércia e os correspondentes momentos de inércia em relação a eles são chamados momentos principais de inércia.

O ângulo $\theta = \theta_p$, que define a orientação dos eixos principais, é obtido por derivação da primeira das equações 2.31 em relação a θ, impondo-se resultado nulo.

$$\frac{\mathrm{d}J_{z'}}{\mathrm{d}\theta} = -2\frac{J_z - J_y}{2}\sin 2\theta - 2J_{zy}\cos 2\theta = 0$$

Assim, em $\theta = \theta_p$:

$$\tan(2\theta_p) = -2\frac{J_{zy}}{(J_z - J_y)} \tag{2.33}$$

Esta equação possui duas raízes θ_{p1} e θ_{p2} defasadas de 90^0 e estabelecem a inclinação dos eixos principais. Para substitui-las nas equações 2.31 deve-se inicialmente obter o seno e o cosseno de $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$, o que pode ser feito com a equação 2.33 em associação com a identidades trigonométrica $\sin^2 2\theta_p + \cos^2 2\theta_p = 1$. Obtem-se dessa forma:

- Para θ_{p1}

$$\begin{aligned}\sin(2\theta_{p1}) &= \frac{-J_{zy}}{\sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}} \\ \cos(2\theta_{p1}) &= \frac{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}}\end{aligned} \tag{2.34}$$

- Para θ_{p2}

$$\begin{aligned}\sin(2\theta_{p2}) &= \frac{J_{zy}}{\sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}} \\ \cos(2\theta_{p2}) &= \frac{-\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}}\end{aligned} \tag{2.35}$$

Substituindo esses dois pares de valores nas relações trigonométricas 2.31 e simplificando tem-se:

$$J_{max} = J_1 = \frac{J_z + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} \tag{2.36}$$

$$J_{min} = J_2 = \frac{J_z + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} \tag{2.37}$$

$$J_{12} = 0 \tag{2.38}$$

2.2.6 Exercícios

Para as figuras abaixo determine os momentos principais de inércia e a orientação dos eixos principais em relação aos CGs.

1.

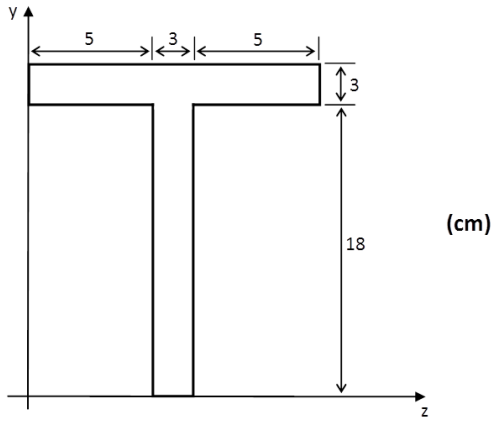


Figura 2.63: Exercício 1

Respostas: $J_1 = 3983,88cm^4, J_2 = 589,75cm^4, \theta_{p1} = 0^0$ e $\theta_{p2} = 90^0$

2.

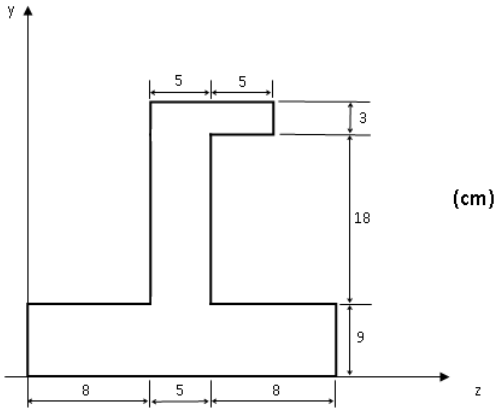


Figura 2.64: Exercício 2

Respostas: $J_1 = 25392,72cm^4, J_2 = 7453,34cm^4, \theta_{p1} = -4,26^0$ e $\theta_{p2} = 83,73^0$

3.

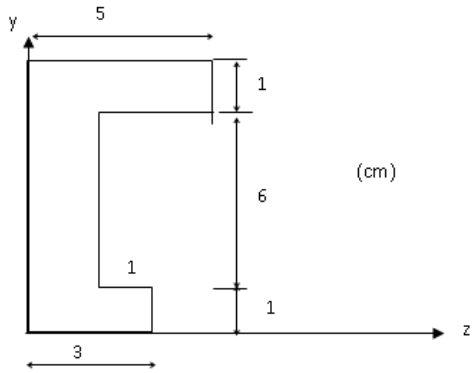


Figura 2.65: Exercício 3

Respostas: $J_1 = 135,1cm^4, J_2 = 21,73cm^4, \theta_{p1} = -9,2^0$ e $\theta_{p2} = 80,82^2$

4.

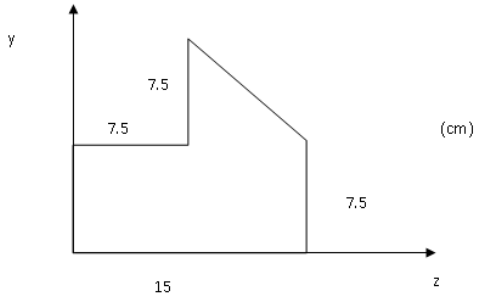


Figura 2.66: Exercício 4

Respostas: $J_1 = 2438,13cm^4, J_2 = 1393,89cm^4, \theta_{p1} = -71,95^0$ e $\theta_{p2} = 18,05^0$

5.

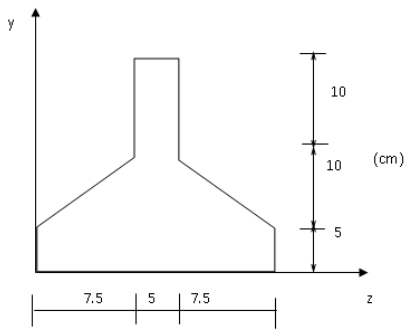


Figura 2.67: Exercício 5

Respostas:$J_1 = 11780,45cm^4, J_2 = 5651,04cm^4, \theta_{p1} = 0$ e $\theta_{p2} = 90^0$

Capítulo 3

Introdução à Análise de Tensões e Deformações

3.1 Estudo das tensões

3.1.1 Introdução

Um conceito da grandeza tensão pode ser encarado como uma extensão do conceito da grandeza pressão.

Imaginemos o sistema de êmbolos apresentado abaixo:

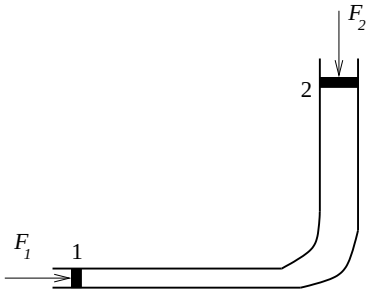


Figura 3.1: Sistema de êmbolos

Utilizando-se os conceitos de física do ensino médio, pode-se dizer que a pressão P no interior do duto é constante e tem valor:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \tag{3.1}$$

onde F_1 e F_2 são as forças aplicadas nas extremidades e A_1 e A_2 são as áreas da seção transversal do duto onde são aplicadas F_1 e F_2, respectivamente.

Os macacos hidráulicos são aplicações diretas da equação 3.1, pois com uma pequena força aplicada na extremidade 1 do sistema de êmbolos pode-se produzir uma força de magnitude considerável na extremidade 2, dependendo da razão entre as áreas A_1 e A_2.

Algumas conclusões já podem ser obtidas analisando a grandeza pressão:

- Sua unidade de medida será: unidade de força dividido por unidade de área. No Sistema Internacional de Unidades (SI): Pa (Pascal) = N/m^2. Como 1 Pa representa uma pressão relativamente pequena[1] normalmente se utiliza prefixos do tipo kilo (10^3) ou mega (10^6). Exemplos: 10 MPa, 45 kPa, etc.

- O módulo da pressão é o mesmo no interior do duto, mas a direção e sentido não. Pode-se dizer então que a pressão é uma grandeza vetorial.

- A direção da força F_2 gerada no sistema de êmbolo é sempre a mesma da pressão atuante na seção 2, e esta direção é sempre normal à superfície do êmbolo.

Porque surgiu pressão no interior do duto?

A resposta é simples: sempre que se tenta movimentar uma massa de fluido e existem restrições ao deslocamento, surgem as pressões. Assim sendo, no caso do êmbolo da Figura 3.1, se não existir resistência na seção 2, o fluido entraria em movimento acelerado e escoaria sem o surgimento de pressões internas. Em outras palavras, é preciso que haja confinamento (pressão positiva) ou aumento do volume dos dutos (pressão negativa).

Um raciocínio análogo pode ser aplicado aos sólidos. Supondo que se exerça uma força F sobre um sólido qualquer conforme Figura 3.2.

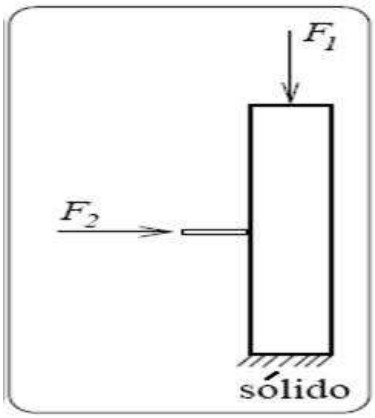


Figura 3.2: Sólido sujeito a carregamento

Da mesma maneira que nos fluidos, tem-se duas possibilidades: ou o sólido entra em movimento ou, no caso onde existam restrições ao deslocamento (como no exemplo da Figura 3.2), surgem o que nos sólidos se denominam **tensões**.

[1] imagine uma força de 1N atuando em 1 m^2.

A figura 3.3 mostra um sólido seccionado com destaque para o elemento infinitesimal de área ΔA. Sobre este atua a força infinitesimal $\Delta\vec{F}$. Desta forma, a grandeza tensão, denominada ρ na equação 3.2, pode então ser definida como sendo força/unidade de área, ou seja:

$$\vec{\rho} = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} \tag{3.2}$$

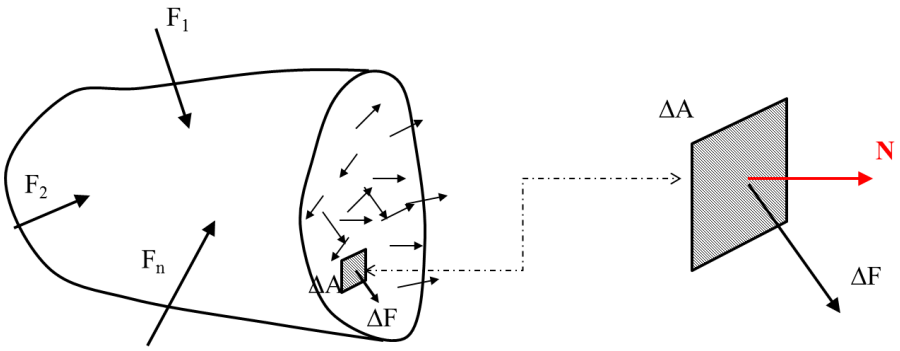


Figura 3.3: Corte feito em um sólido qualquer - parte da esquerda

Sendo a força uma grandeza vetorial, a tensão também o será. Logo, as tensões em um sólido podem ocorrer de duas formas:

1. **Tensões normais -** σ: é a intensidade da força, por unidade de área, que atua no sentido da normal externa a seção, como ilustrado na figura 3.4. É associada ao carregamento que provoca a aproximação ou o afastamento de moléculas que constituem o sólido e é obtida pela expressão:

$$\sigma_N = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{N}}{\Delta A} = \frac{N}{A}$$

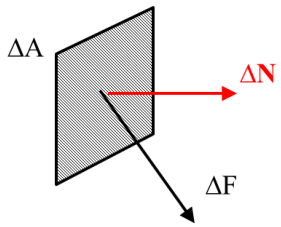


Figura 3.4: Componente normal da força.

2. **Tensões cisalhantes ou tangenciais -** τ: é a intensidade da força, por unidade de área, que atua no sentido do plano seção, como ilustrado na figura 3.5. É o resultado de um carregamento que provoca um deslizamento relativo de moléculas que constituem o sólido e é obtida pela expressão .

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta A} = \frac{Q}{A}$$

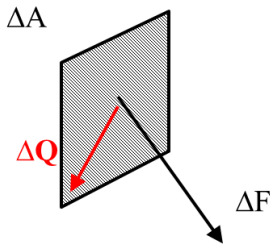


Figura 3.5: Componente cortante da força.

3.1.2 Exercícios

1. Uma placa é fixada a uma base de madeira por meio de três parafusos de diâmetro 22mm, conforme mostra a Figura 3.6.Calcular a tensão média de cisalhamento nos parafusos para uma carga P=120 kN. Resposta: $105,2$ MPa.

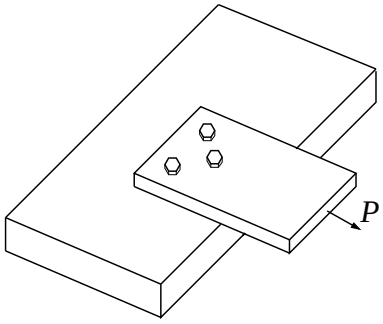


Figura 3.6: Figura do exercício 1

2. Duas peças de madeira de seção retangular 80mm x 140mm são coladas uma à outra em um entalhe inclinado, conforme mostra a Figura 3.7. Calcular as tensões na cola para $P = 16$ kN e para:
a) $\theta = 30^o$; b) $\theta = 45^o$; c) $\theta = 60^o$
Resposta: a) σ_N=357,1 kPa, τ_N=618,6 kPa ; b) $\sigma_N = \tau_N$=714,3 kPa ; c) σ_N=1071,0 kPa, τ_N=618,6 kPa.

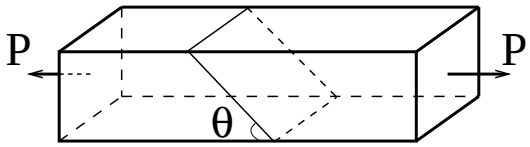


Figura 3.7: Figura do exercício 2

3. Determinar a tensão normal de compressão mútua (ou tensões de "contato"ou tensão de "esmagamento") da Figura 3.8 entre:
   a) o bloco de madeira de seção 100mm x 120mm e a base de concreto 500mm x 500mm x 60mm.
   b) a base de concreto e o solo.
   Resposta: a) 3333 kPa ; b) 160 kPa.

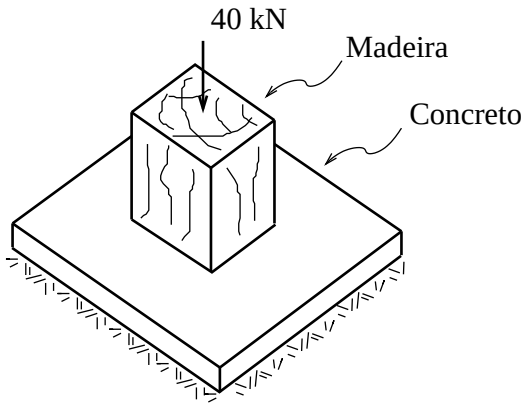


Figura 3.8: Figura do exercício 3

4. Calcular as tensões de "contato"em A, B e C, na estrutura representada na Figura 3.9. (dimensões em metros)
   Resposta: 777,8 kPa, 888,9 kPa e 1111 kPa.

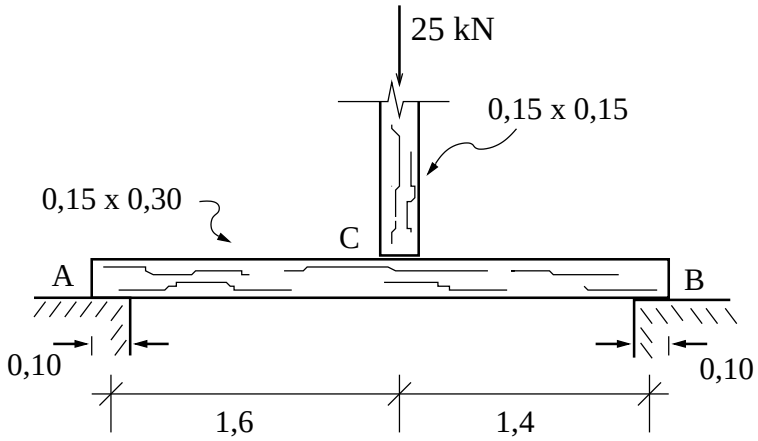


Figura 3.9: Figura do exercício 4

5. Calcular o comprimento total $2L$ da ligação de duas peças de madeira, conforme a Figura 3.10, e a altura h necessária. Dados P =50 kN, b=

250mm, tensão admissível ao corte na madeira 0, 8MPa e à compressão 6, 5 MPa .
Resposta: $2L = 500$mm ; h= 31mm.

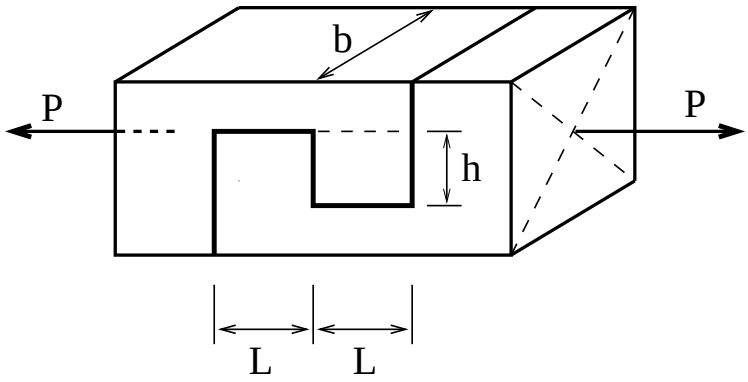


Figura 3.10: Figura do exercício 5

6. Duas placas são unidas por 4 parafusos cujos diâmetros valem d= 20mm, conforme mostra a Figura 3.11. Determine a maior carga P que pode ser aplicada ao conjunto. As tensões de cisalhamento,de tração e de esmagamento são limitadas a 80, 100 e a 140 MPa, respectivamente.
Resposta: P = 80 kN.

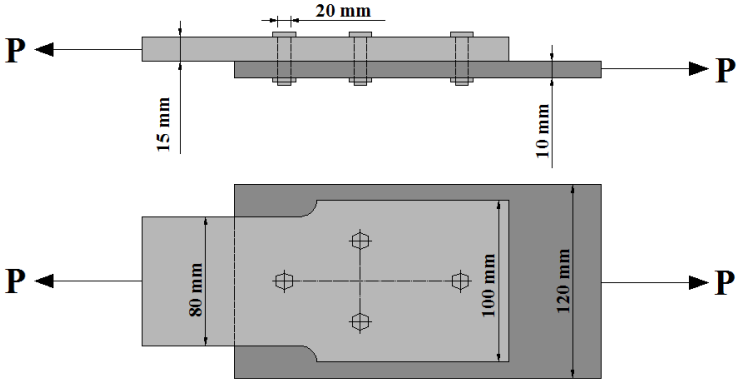


Figura 3.11: Figura do exercício 6

7. Uma barra curta inclinada, ou escora, transmite uma força compressiva $P = 4$kN ao bloco escalonado mostrado na Figura 3.12. As dimensões estão em milímetros. Determine:

   a) As tensões normais atuantes nas superficies de contato vertical e horizontal lisas definidas por EF e CD, respectivamente.

   Resposta: $\sigma_{EF} = 4$MPa; $\sigma_{CD} = 2,667$MPa.

   b) A tensão cisalhante atuante no plano horizontal definido por ABC.
   Resposta: $\tau = 1,333$MPa.

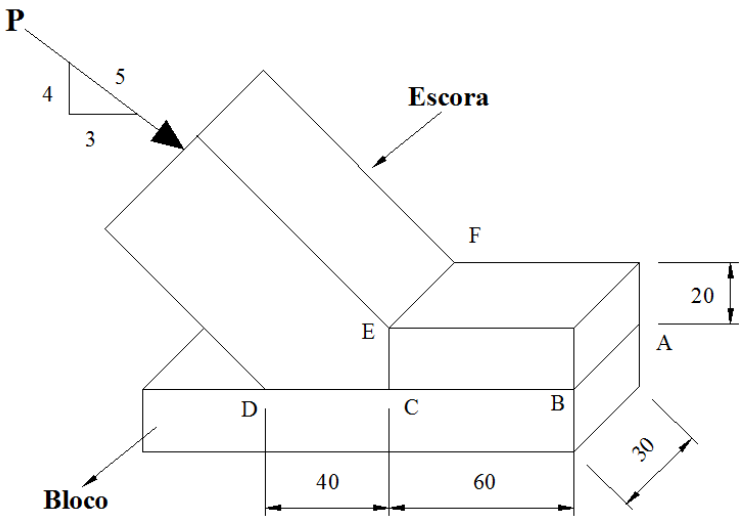


Figura 3.12: Figura do exercício 7

8. Duas peças de madeira de seção 5cm x 5cm são coladas na seção inclinada AB como mostra a Figura 3.13. Calcular o valor máximo admissível da carga P, axial de compressão, dadas as tensões admissíveis na cola de 9,0 MPa à compressão e 1,8 MPa ao cisalhamento.
Resposta: $P = 18{,}0$ kN.

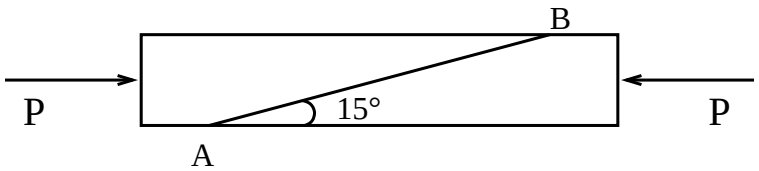


Figura 3.13: Figura do exercício 8

9. Um parafuso de 20mm de diâmetro é apertado contra uma peça de madeira exercendo-se uma tensão de tração de 120 MPa como mostra a Figura 3.14. Calcular a espessura e da cabeça do parafuso e o diâmetro externo d da arruela, dadas as tensões admissíveis 50 MPa, ao corte no parafuso, e 10 MPa, à compressão na madeira
Resposta: $e = 12$ mm ; $d = 72{,}11$ mm.

10. O eixo vertical da Figura 3.15 é suportado por um colar de escora sobre uma placa de apoio. Determinar a carga axial máxima que pode ser aplicada ao eixo se a tensão média de corte no colar e a tensão média entre o colar e a placa são limitadas respectivamente por 40 MPa e 65 MPa.
Resposta: 314,16 kN.

11. A articulação de pino da Figura 3.16 deve resistir a uma força de tração $P = 60$ kN . Calcular o diâmetro do pino e a espessura mínima

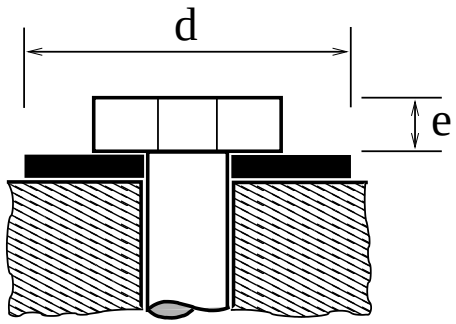


Figura 3.14: Figura do exercício 9

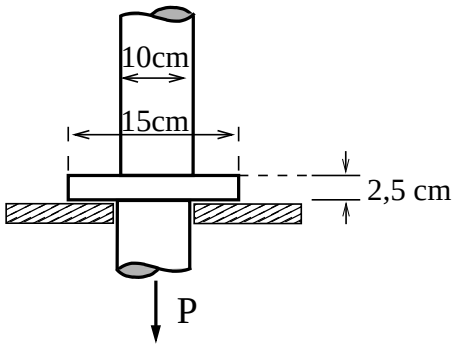


Figura 3.15: Figura do exercício 10

da chapa para as tensões admissíveis de 50 MPa ao corte e 120 MPa à tração.
Resposta: $d = 19{,}55$ mm ; $e = 6{,}25$ mm.

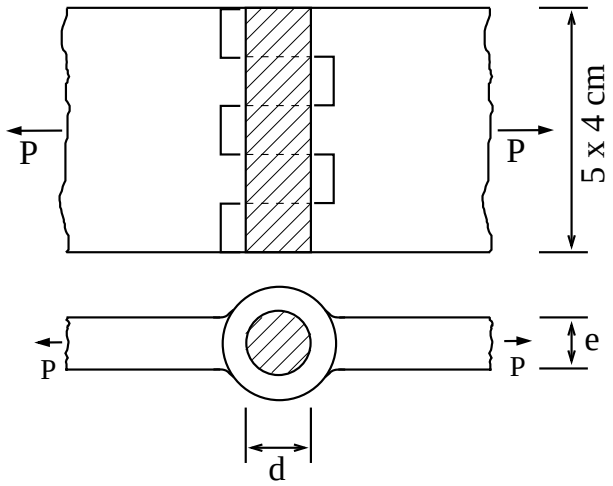


Figura 3.16: Figura do exercício 11

12. A chapa da Figura 3.17 deve ser furada por punção, exercendo-se no perfurador uma tensão de compressão de 420 MPa. Na chapa, a tensão de rutura ao corte é de 315 MPa a) Calcular a espessura máxima da chapa para fazer um furo de 75 mm de diâmetro;
b) Calcular o menor diâmetro que pode ter o furo, se a espessura da

chapa é de 6 mm.
Resposta: a) 25 mm ; b) 18 mm.

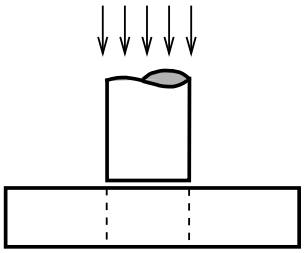


Figura 3.17: Figura do exercício 12

3.1.3 O Tensor de tensões

Uma vez compreendida as características fundamentais da grandeza tensão, e de sua ligação com a já conhecida grandeza pressão, passa-se agora ao seu estudo detalhado.

Partindo-se do exemplo apresentado na Figura 3.18 duas observações podem ser feitas:

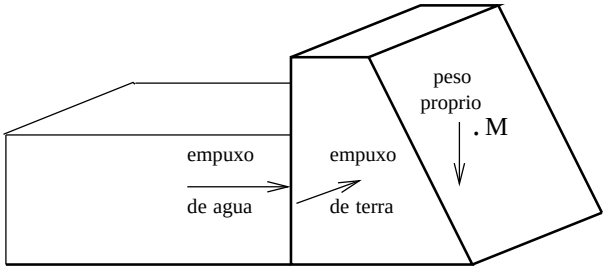


Figura 3.18: Barragem

- Existem forças tentando aproximar ou afastar moléculas no entorno de M, nas três direções ortogonais, gerando tensões normais nestas três direções.
- Existem forças tentando deslizar moléculas no entorno de M, nas três direções

  ortogonais, gerando tensões tangenciais ou cisalhantes nestas três direções.

Estas observações evidenciam que a tensão num dado ponto da estrutura depende do plano no qual se calcula a tensão. Admitindo-se um plano passando por M e que possui uma normal definida pelo vetor $\vec{N}$, pode-se dizer que a tensão $\vec{\rho}_N$, no ponto M no plano considerado, é a soma vetorial

da tensão normal $\vec{\sigma}_N$ com tensão tangencial $\vec{\tau}_N$, conforme Figura 3.19. Sua definição matemática é escrita como:

$$\vec{\rho}_N = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{d\vec{F}}{\Delta A} \tag{3.3}$$

onde $d\vec{F}$ é a força de interação atuante na área ΔA.

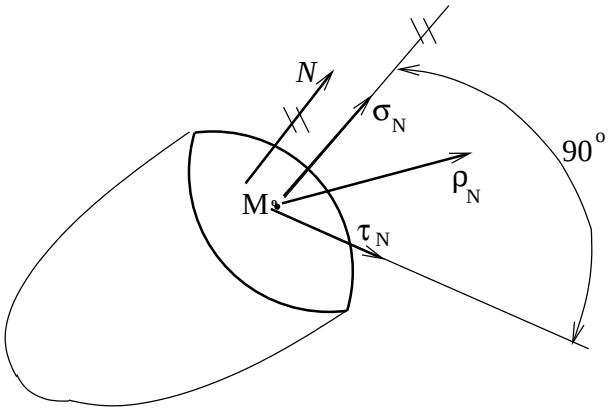
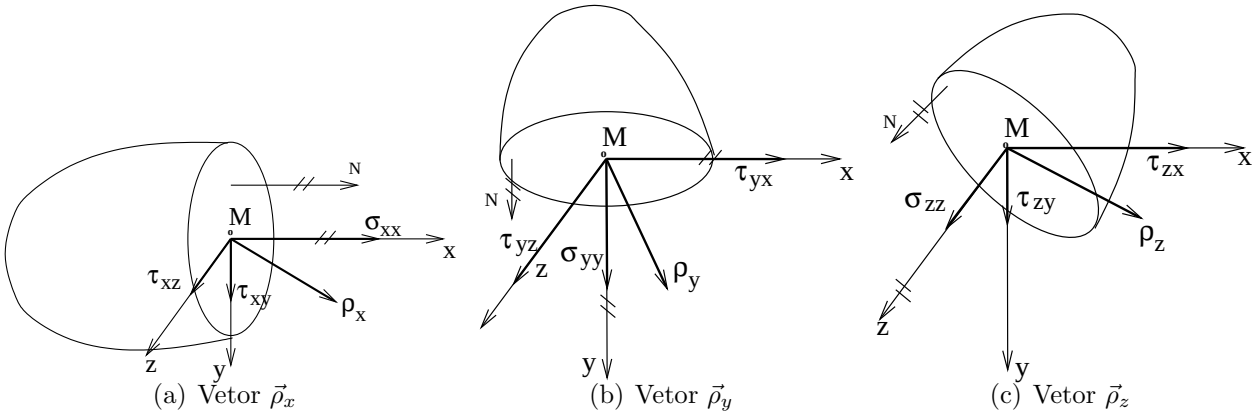


Figura 3.19: Tensões no ponto M num plano de normal $\vec{N}$

Tomando-se então cada um dos três planos ortogonais yz (vetor normal paralelo ao eixo x), xz (vetor normal paralelo ao eixo y) e xy (vetor normal paralelo ao eixo z) é possível definir três vetores tensões, respectivamente, $\vec{\rho}_x$, $\vec{\rho}_y$ e $\vec{\rho}_z$ como indicam as Figuras 3.20 que serão fundamentais no estudo da grandeza tensão. As equações 3.4 a 3.6 mostram estes vetores e suas componentes no referencial xyz. Observa-se que as tensões tangenciais totais foram decompostas em duas componentes.



(a) Vetor $\vec{\rho}_x$ (b) Vetor $\vec{\rho}_y$ (c) Vetor $\vec{\rho}_z$

Figura 3.20: tensões nos três planos ortogonais

$$\vec{\rho}_x = [\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}] \tag{3.4}$$

$$\vec{\rho}_y = [\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}] \tag{3.5}$$

$$\vec{\rho}_z = [\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz}] \tag{3.6}$$

Considerando-se um sólido (cubo) infinitesimal no interior de um corpo deformável, em seu caso mais geral, como mostra a Figura 3.21 podem ocorrer 3 componentes de tensões em cada face que são simétricas entre si. Estas componentes podem ser agrupadas em um tensor chamado "Tensor de Tensões", que é simétrico, e representado por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

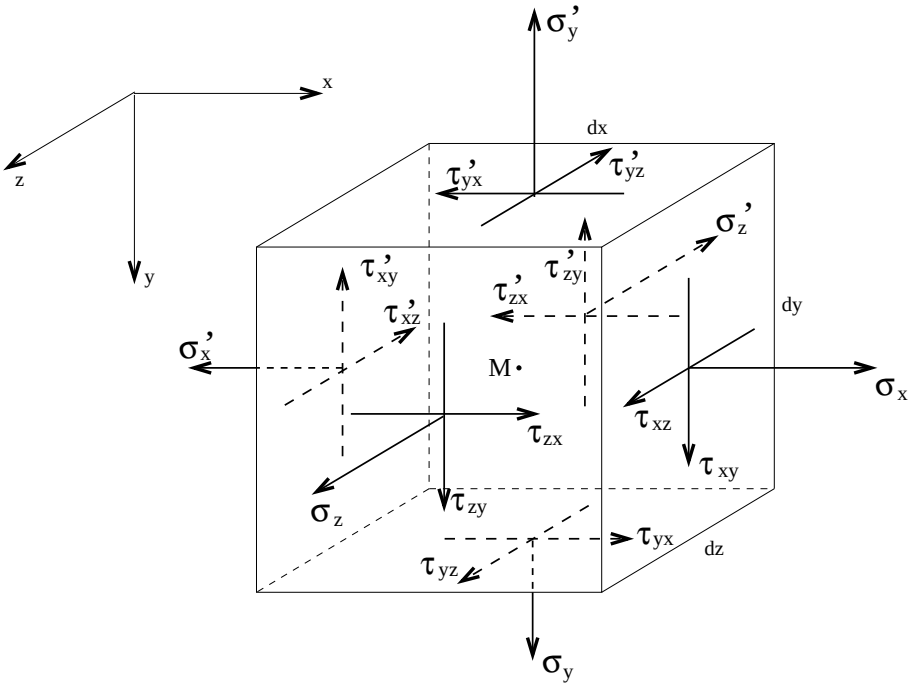


Figura 3.21: Sólido de tensões

A convenção de sinais para as tensões deve ser de tal maneira que não permita que uma mesma tensão tenha valores algébricos de sinais opostos quando se analisa uma face ou outra do sólido de tensões. Por esta razão, adota-se referenciais opostos para cada uma das faces opostas do sólido em torno do M, conforme mostra Figura 3.21. Nesta Figura todas as tensões representadas são positivas. As regras para a convenção de sinais são:

- **Para as tensões normais**: são positivas quando estão associadas à tração e negativas quando estão associadas à compressão.
- **Para as tensões tangenciais**: quando o sentido do vetor normal externo da face do sólido de tensões apontar no mesmo sentido do eixo coordenado, as tensões tangenciais são positivas quando apontarem para o mesmo sentido do seu respectivo eixo coordenado. Quando o

sentido do vetor normal externo da face do sólido de tensões apontar no sentido contrário do eixo coordenado, as tensões tangenciais são positivas quando apontarem para o sentido contrário do seu respectivo eixo coordenado.

3.1.4 Exercícios

1. Para o elemento de tensão representado na Figura 3.22 (tensões expressas em MPa) complete o sólido de tensões com as tensões que faltam, considerando o sólido em equilíbrio.

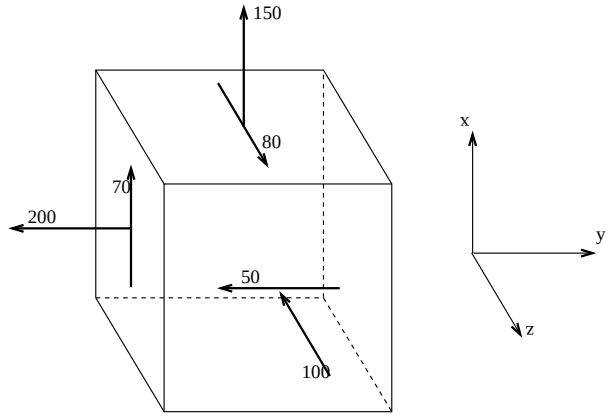


Figura 3.22: Figura do exercício 1

2. Um cilindro de parede delgada está submetido a uma força de 4,5 kN. O diâmetro do cilindro é 7,5 cm e a espessura da parede é de 0,3 cm. Calcular as tensões normal e de cisalhamento num plano que corta o cilindro formando um ângulo de $\alpha = 40^o$, conforme Figura 3.23. Resposta: $\sigma_N = 3{,}89$ MPa e $\tau_N = 3{,}26$ MPa.

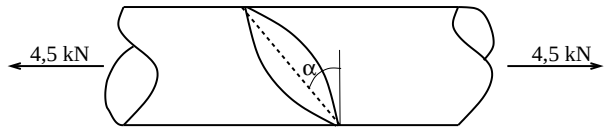


Figura 3.23: Figura do exercício 2

3. Admitindo que o cilindro do exercício anterior esteja submetido a uma força de tração P e que sua seção transversal tenha área A, demonstre que:

$$\sigma_\alpha = \frac{P}{A}\cos^2\alpha \quad e \quad \tau_\alpha = \frac{P}{2A}\sin 2\alpha$$

Em seguida trace os gráficos de σ_α em função de α e de τ_α em função de α, para $0 \leq \alpha \leq 90^o$.

4. Demonstre, para o problema, anterior que a tensão normal máxima ocorre para $\alpha = 0^o$ e que a tensão cisalhante máxima ocorre para $\alpha = 45^o$

5. Uma barra tracionada é composta de dois pedaços de material que são colados ao longo da linha mn conforme Figura 5. Por razões práticas, o ângulo θ é limitado à faixa entre 0 e 60^o. A máxima tensão de cisalhamento que suporta a junta colada é 3/4 da máxima tensão normal. Assim sendo, qual deve ser o valor de θ para que a barra suporte o máximo de carga P ? (Admitir que a junta colada seja o único ponto a ser verificado no projeto).

   Resposta: $\theta = 36.87^o$

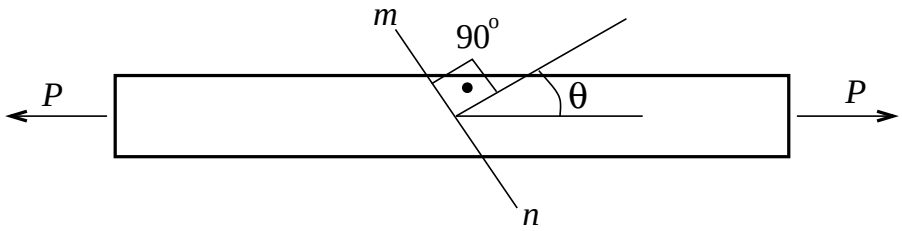


Figura 3.24: Figura do exercício 5

6. Resolver o problema anterior no caso das tensões tangencial e normal máximas permitidas sejam, respectivamente, 70 MPa e 140 MPa. Determinar também a carga P máxima permissível se a área da seção transversal da barra for de 1000 mm^2.

   Resposta: $\theta = 26.56^o$ e P = 175 kN.

3.2 Estudo das deformações

3.2.1 Introdução

Paralelamente ao estudo estabelecido no item anterior relativo à análise de tensões, pode-se desenvolver também, o estudo das deformações sofridas por um corpo sob solicitações externas. Destaca-se que a análise de deformações em um corpo sólido iguala-se em importância à análise de tensões.

Sabe-se, da álgebra vetorial, que o campo vetorial de deslocamentos permite quantificar a mudança de geometria de um corpo, sujeito à ação de cargas aplicadas. Esta mudança de geometria implica na consideração de duas parcelas:

- **Movimento de corpo rígido**

- **Mudança de forma e dimensões do corpo**

Como a Resistência dos Materiais desenvolve o estudo dos corpos deformáveis, será de interesse maior o estudo da segunda parcela. Além disso, num contexto de estruturas civis, o **movimento de corpo rígido** pode ser eliminado mediante a introdução adequada de vínculos. Neste texto, somente serão consideradas as pequenas deformações, como aquelas que geralmente ocorrem na engenharia estrutural.

3.2.2 Componentes de Deformação

Embora o campo de deslocamentos seja suficiente para descrever todas as características de mudança de geometria de um corpo, é necessário que se estabeleça uma relação direta entre estas mudanças geométricas e as cargas aplicadas, ou de forma mais conveniente, com a distribuição de tensões. Essa afirmação será melhor compreendida no item 3.3, onde buscar-se-á relacionar diretamente as tensões com as deformações. Entretanto pode-se adiantar que não é a posição de um ponto que o relaciona com seu estado de tensão, mas o movimento relativo entre pontos adjacentes. Tendo em vista esta última afirmação considerem-se os segmentos infinitesimais dx ,dy e dz, ligando pontos adjacentes em seus vértices formando um paralelepípedo retangular infinitesimal conforme Figura 3.25.

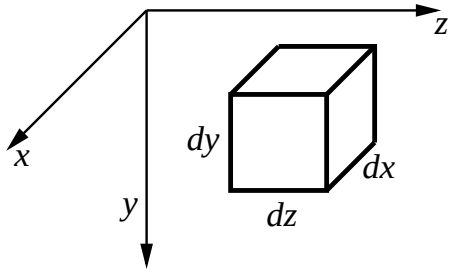


Figura 3.25: Paralelepípedo Retangular Infinitesimal

Pode-se "medir" o movimento relativo dos pontos adjacentes (vértices) considerando as deformações desse paralelepípedo retangular. Agora é necessário introduzir um conceito de intensidade de deformação característica, a saber, **deformação linear específica** (ou alongamento/encurtamento relativo) e **deformação angular** (ou distorção angular), que são formas de se quantificar o movimento relativo entre pontos adjacentes de um corpo.

Deformação Linear Específica

Seja o paralelepípedo retangular infinitesimal da Figura 3.26 na configuração geométrica indeformada em cujas faces agem apenas **tensões nor-**

mais como resultado do carregamento.

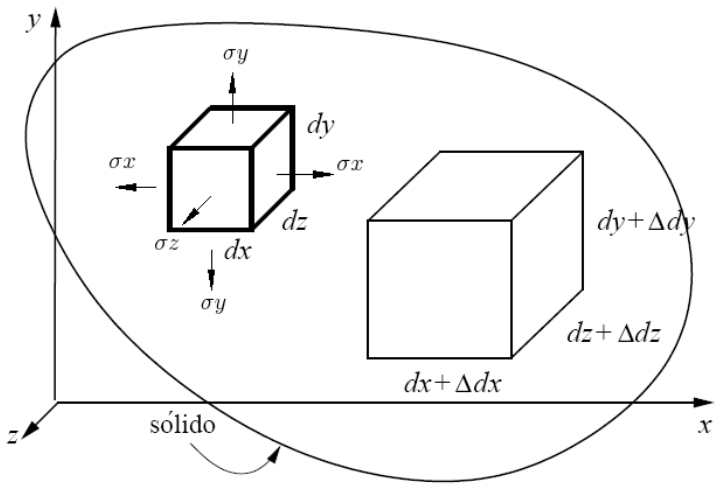


Figura 3.26: Paralelepípedo Retangular sob Deformação Linear

Designa-se por dx, dy e dz os comprimentos iniciais das arestas do paralelepípedo retangular. Na configuração deformada, os comprimentos dessas arestas tornam-se $dx + \Delta dx$, $dy + \Delta dy$ e $dz + \Delta dz$ respectivamente. Há, então, a possibilidade de uma variação de volume do elemento. Define-se, como medida de deformação característica do material, tal variação segundo três deformações unitárias, como segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\Delta dx}{dx} \\ \varepsilon_y &= \frac{\Delta dy}{dy} \\ \varepsilon_z &= \frac{\Delta dz}{dz} \end{aligned} \tag{3.8}$$

É interessante observar que a utilização da deformação linear permite a comparação entre deformações deste mesmo tipo obtidas em diferentes estruturas e/ou amostras ensaiadas já que esta quantidade é adimensional. Usualmente refere-se a ela em cm / cm ou mm / mm. A quantidade ε é bastante pequena e algumas vezes pode ser dada em porcentagem.

Deformação Cisalhante ou Distorção

Um sólido deformável pode ainda, estar sujeito a um outro tipo de deformação: aquela causada pelas **tensões cisalhantes**. Como conseqüência de tal solicitação surgem mudanças na orientação relativa entre as faces do

elemento envolvendo variações desprezíveis de volume. A Figura 3.27 representa o sólido infinitesimal sujeito somente à ação de tensões cisalhantes τ_{xy}

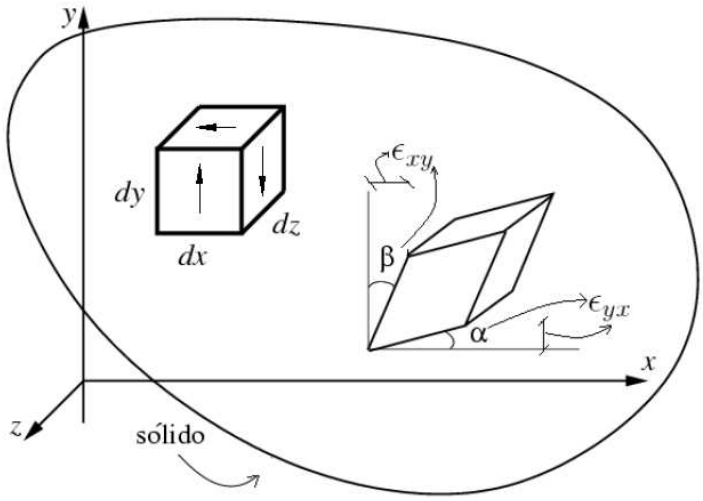


Figura 3.27: Paralelepípedo Retangular sob Deformação Cisalhante

Em outras palavras, pressupõe-se que as tensões cisalhantes causem variação de forma, isto é, uma distorção, mas não uma dilatação apreciável. Essa medida de variação relativa entre as faces do elemento pode ser dada pela variação do ângulo inicialmente reto e é definida como deformação de cisalhamento ou distorção, representado por γ_{xy}:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \tag{3.9}$$

onde α e β estão representados na Figura 3.27.

Será conveniente considerar uma rotação de corpo rígido do elemento em torno do eixo x, de forma a se ter sempre α igual a β. Assim, designa-se por ε_{yz}, ε_{zy}, as deformações transversais.

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \tag{3.10}$$

De forma análoga ao estado de tensão, o estado de deformação fica completamente determinado se forem conhecidas as componentes de deformação (deformações lineares e distorções angulares) segundo eixos triortogonais. O efeito de dilatação ou retração do paralelepípedo retangular infinitesimal deve-se às três deformações lineares, enquanto, independentemente, seis deformações transversais fornecem uma variação da configuração de ângulo reto entre as faces do paralelepípedo. Usa-se apresentar estas nove quantidades em um tensor de deformações, como feito para tensões.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

3.3 Relações entre tensões e deformações

As relações entre tensões e deformações são estabelecidas a partir de ensaios experimentais simples que envolvem apenas uma componente do tensor de tensões. Ensaios complexos com tensões significativas nas 3 direções ortogonais tornam difíceis as correlações entre as tensões e suas correspondentes deformações.

Assim sendo, destacam-se aqui os ensaios de tração, de compressão e de torção.

3.3.1 O Teste ou Ensaio de Tração:

Objetivos:

- Relacionar tensões normais e deformações lineares;
- Determinar as propriedades dos materiais;
- Verificar a qualidade dos mesmos.

O corpo de prova (CP) é uma amostra de material a ser testado, constituída de uma barra reta de seção constante (comprimento L, diâmetro D e área A, na configuração inicial), semelhante a barra ilustrada na Figura 3.28

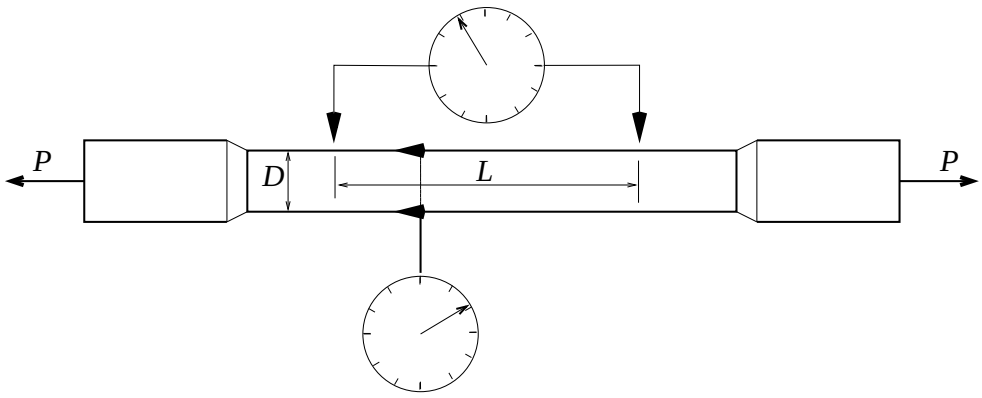


Figura 3.28: Corpo de prova de um ensaio de tração

O ensaio consiste em aplicar ao CP uma carga P axial de tração que aumenta lenta e gradualmente (carga "estática"), medindo-se a carga P, a variação do comprimento L e do diâmetro D do CP até a rutura do CP.

O tensor de tensões associado a este problema, com o referencial mostrado na Figura 3.29 é apresentado na equação 3.12.

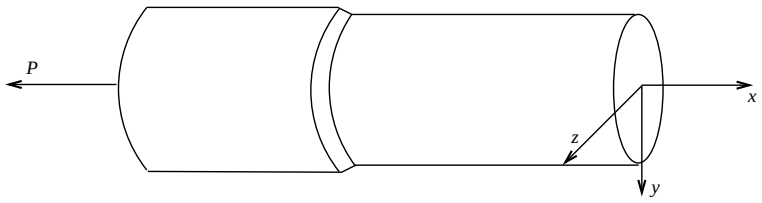


Figura 3.29: Referencial adotado

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Quais são as deformações causadas pela tração aplicada ao CP?

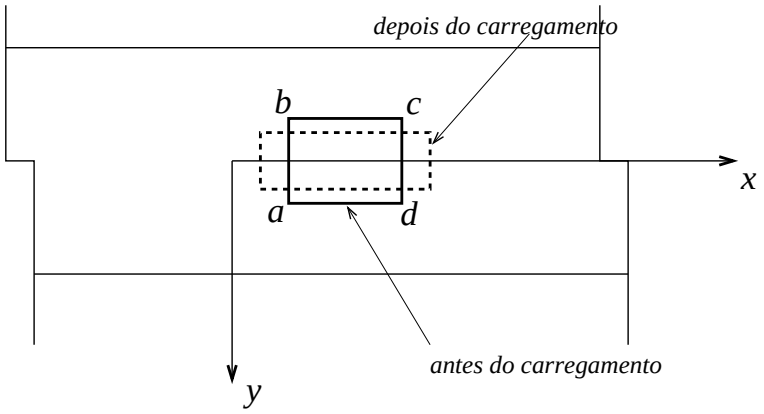


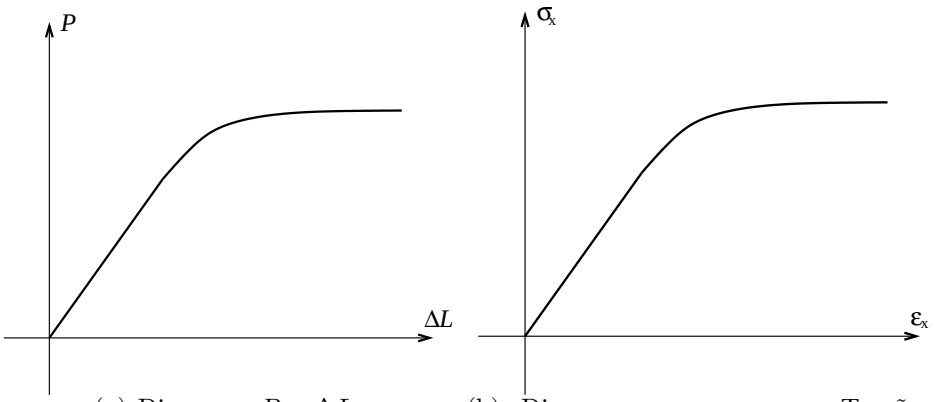
Figura 3.30: Deformações no ensaio de tração

Observando o retângulo abcd contido no plano xy antes e depois da aplicação da carga, conforme mostrado na Figura 3.30, é possível identificar que sua configuração após o tracionamento não sofre distorções angulares. O que ocorre é um alongamento dos lados bc e ad e um encurtamento dos lados ab e cd, caracterizando o surgimento das deformações ε_x e ε_y. Obviamente, caso tivesse sido escolhido o plano xz para análise, seria verificado o surgimento das deformações ε_x e ε_z. Generalizando, caso o referencial adotado tivesse como eixo longitudinal do CP a direção y ou z pode-se concluir que:

- σ_x causa ε_x, ε_y e ε_z;
- σ_y causa ε_x, ε_y e ε_z;
- σ_z causa ε_x, ε_y e ε_z;

O próximo passo é relacionar matematicamente estas tensões e suas correspondentes deformações, o que pode ser feito no ensaio de tração. A realização deste ensaio consiste em acoplar o CP a máquina de ensaio e tracioná-lo continuamente. Durante o ensaio, mede-se a carga P de tração, o alongamento ΔL da parte do CP contida entre as extremidades de um extensômetro[2] (L) e a variação do diâmetro do CP ΔD conforme mostrado na Figura 3.28.

Com os dados do ensaio, é possível inicialmente traçar um gráfico contendo no eixo vertical a carga P e no eixo horizontal o alongamento ΔL, conforme mostrado na Figura 3.31(a). Através de uma mudança de variáveis pode-se facilmente chegar a uma relação entre a tensão $\sigma_x = P/A$ e a deformação $\varepsilon_x = \Delta L/L$, de acordo com o gráfico da Figura 3.31(b). Este gráfico, que relaciona ε_x e σ_x ,é chamado **diagrama tensão-deformação**.



(a) Diagrama $P \times \Delta L$

(b) Diagrama $\sigma_x \times \varepsilon_x$ - Tensão-deformação

Figura 3.31: Exemplos de diagramas do ensaio de tração

A forma do diagrama tensão deformação depende do tipo de material. Existem materiais de comportamento linear, ou pelo menos com uma região linear (aço, alumínio), e de comportamento não-linear (maioria das borrachas). Conforme já destacado na seção 1.2.2, os materiais a serem tratados neste curso têm comportamento linear.

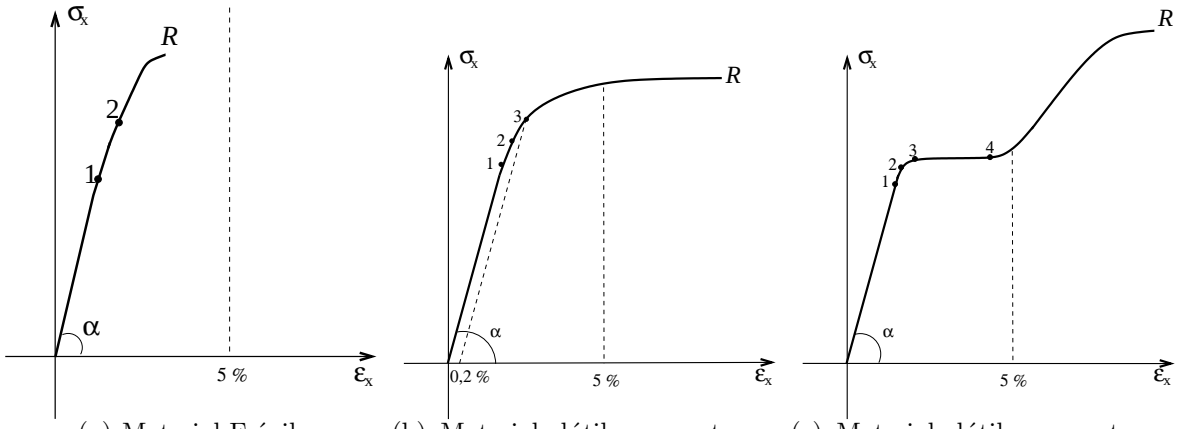
As Figuras 3.32 mostram 3 tipos de diagramas tensão x deformação obtidos dos ensaios. Em função das características desses diagramas, pode-se classificar os materiais em função seu comportamento, ou seja:

[2]Aparelho usado para medir a variação do comprimento

- **(a) Material frágil** (concreto, vidro): A ruptura (ponto R) se dá para valores $\varepsilon_x < 5$ %;
- **(b) Material dútil sem patamar de escoamento definido** (aços especiais com alto teor de carbono). A ruptura (ponto R) se dá para valores $\varepsilon_x >> 5$ % e o material não apresenta patamar de escoamento, onde há aumento de deformação com a tensão aproximadamente constante.
- **(c) Material dútil com escoamento definido** (aços comuns, com baixo teor de carbono). A ruptura (ponto R) se dá para valores $\varepsilon_x >> 5$ % e o material apresenta patamar de escoamento (trecho entre os pontos 3 e 4), onde há aumento de deformação com a tensão aproximadamente constante.

Destacam-se destes gráficos alguns pontos importantes, que são:

I. Ponto 1 – limite de proporcionalidade, que define o nível de tensão a partir do qual o material deixa de ter comportamento linear. Dentre os materias de comportamento linear, observa-se na fig 3.32 os 3 tipos mais comuns de diagramas tensão-deformação.



(a) Material Frágil

(b) Material dútil sem patamar de escoamento

(c) Material dútil com patamar de escoamento

Figura 3.32: Exemplos de diagramas do ensaio de tração em materiais de comportamento linear

II. Ponto 2 – limite de elasticidade. Quando o CP é carregado acima deste limite, não retorna a sua configuração inicial quando descarregado. Acima deste ponto passam a existir deformações permanentes ou plásticas.

No aço os limites de elasticidade e proporcionalidade são muito próximos, tanto que normalmente não se faz muita diferença entre esses dois níveis de tensão. Materiais que possuem estes dois limites muito próximos são chamados de **materiais elásticos lineares** que serão os objetos de estudo deste curso.

III. Ponto 3 – tensão ou ponto de escoamento. O limite de elasticidade e o limite de proporcionalidade são difíceis de se determinar com precisão. Em razão disso, os engenheiros utilizam a tensão ou ponto de escoamento que caracteriza o inicio do comportamento não linear elástico.

Em aços com baixo teor de carbono, este ponto é obtido diretamente da curva tensão-deformação (ver ponto 3 da Figura 3.32(c)). Já para aços especiais com alto teor de carbono, este ponto é arbitrado como sendo a tensão que provoca uma pequena deformação residual de 0,2 % após o descarregamento.

Durante a fase elástica, ou seja, para níveis de tensões até o limite de elasticidade (ou tensão de escoamento para efeitos práticos) a relação entre a tensão σ_x e a deformação ε_x pode ser escrita na forma:

$$\sigma_x = \tan\alpha\ \varepsilon_x = E\ \varepsilon_x \tag{3.13}$$

onde $E = \tan\alpha$ é o coeficiente angular da reta conhecido como **Módulo de Elasticidade Longitudinal** ou **Módulo de Young**.

A equação 3.13 mostra que para materiais trabalhando em regime elástico linear tem-se que a tensão é diretamente proporcional à deformação. Esta relação é conhecida como lei de Hooke, em homenagem a Robert Hooke que obteve esta proporcionalidade há mais de 300 anos.

Além de gerar deformações ε_x, a tensão σ_x aplicada ao CP, conforme já destacado neste texto, gera deformações lineares nas direções transversais (ε_y e ε_z). Tomando-se então a razão entre a medida obtida para a variação do diâmetro (ΔD) e o diâmetro inicial (D) do CP pode-se escrever:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta D}{D} \tag{3.14}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta D}{D} \tag{3.15}$$

Conhecidos os valores de ε_x, ε_y e ε_z (obtidos experimentalmente com as medidas dos extensômetros) é possível estabelecer as relações:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} &= \text{constante} = -\nu \\ \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} &= \text{constante} = -\nu \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde ν é denominado de **Coeficiente de Poisson** e é uma característica física do material.

Alternativamente as equações 3.16 podem ser escritas na forma:

$$\varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_x \tag{3.17}$$
$$\varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x \tag{3.18}$$

Substituindo a equação 3.13 na equação 3.18 chega-se às relações entre tensões normais e deformações transversais:

$$\varepsilon_y = -\nu\,\frac{\sigma_x}{E} \tag{3.19}$$
$$\varepsilon_z = -\nu\,\frac{\sigma_x}{E} \tag{3.20}$$

Resumindo, caso estivessem atuando simultaneamente σ_x, σ_y e σ_z, ter-se-ia:

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \nu\,\frac{\sigma_y}{E} - \nu\,\frac{\sigma_z}{E} \tag{3.21}$$
$$\varepsilon_y = -\nu\,\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\,\frac{\sigma_z}{E} \tag{3.22}$$
$$\varepsilon_z = -\nu\,\frac{\sigma_x}{E} - \nu\,\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \tag{3.23}$$

Fica claro que a característica de isotropia do material reduz sensivelmente o número de constantes elásticas que relacionam tensão com deformação.

O estudo detalhado de cada fase do ensaio de tração é feito no curso de Laboratório de Resistência dos Materiais, cadeira do próximo período.

3.3.2 Ensaio de Compressão

É semelhante ao ensaio de tração, mas o CP deve ter dimensões adequadas para se evitar a flambagem. Para materiais metálicos os CPs devem ser de tal forma que a razão L/D deve se situar entre 2 e 4 (ou entre 3 e 8, segundo alguns autores).

O ensaio de compressão do aço apresenta um diagrama semelhante ao ensaio de tração na fase elástica. Admite-se que as constantes elásticas E e ν obtidas experimentalmente são os mesmos para tração ou compressão.

O estudo detalhado de cada fase do ensaio de compressão é feito no curso de Laboratório de Resistência dos Materiais, cadeira do próximo período.

3.3.3 O ensaio de torção

O ensaio de torção é uma alternativa ao ensaio de cisalhamento face as dificuldades que apresentam este último na aplicação de cisalhamento puro num CP.

Este ensaio consiste em aplicar um torque num CP analisando as distorções angulares, conforme Figura 3.33

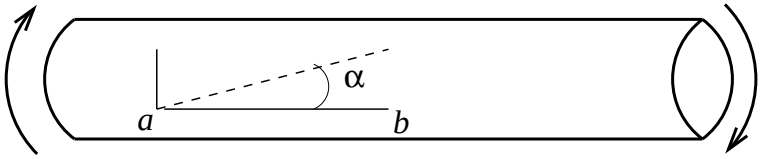


Figura 3.33: Ensaio de torção

Verifica-se experimentalmente que, para pequenas deformações, a variação da dimensão do segmento *ab* da Figura 3.33 pode ser desprezada. Conseqüentemente, as deformações medidas no ensaio de torção são distorções angulares.

De forma análoga ao ensaio de tração, é possível se obter um diagrama tensão-deformação, porém neste caso relacionando tensões cisalhantes com distorções angulares. Este diagrama, para materiais elásticos lineares, também segue a lei Hooke conforme equação que segue:

$$\tau_{xy} = \tan\alpha \; \gamma_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{3.24}$$

onde G é o **Módulo de Elasticidade Transversal** e é uma outra característica do material.

Finalmente, uma vez observado experimentalmente que tensões tangenciais τ_{xy} causam apenas distorções angulares γ_{xy}, completa-se as relações entre tensões cisalhantes e distorções angulares:

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \tag{3.25}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \tag{3.26}$$

Mais uma vez, a característica de isotropia reduziu o número de constantes elásticas do problema.

3.3.4 Lei de Hooke generalizada

Após se analisar os ensaios de tração e torção, verifica-se que foram introduzidas três constantes elásticas, que são características do material: E, G

e ν. Pode-se demonstrar (Mecânica dos Sólidos I) que apenas duas destas constantes elásticas são independentes, conforme indica equação 3.27:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.27}$$

A Tabela 3.3.4 mostra alguns valores práticos destas constantes elásticas, bem como alguns limites elásticos (considerados como tensões de escoamento) e massas específicas.

Tabela 3.1: Constantes elásticas de alguns materiais

Material	E (GPa)	G (GPa)	ν	Tensão de escoamento (MPa)	Massa específica (kg/m^3)
Aço CA-25	210	79	0,33	250	7860
Aço CA-50	210	79	0,33	500	7860
Aço CA-60	210	79	0,33	600	7860
Aço CP-150	210	79	0,33	1500	7860
Aço ASTM A-36	200			253	7860
Concreto	22 a 30		$\cong$ 0,1	15 a 40 na compressão	2400
Alumínio	69	26	0,33	290	2710
Titânio	114			825	4460

Assim sendo, resume-se as relações tensões deformações na equação 3.28, conhecida como **Lei de Hooke Generalizada**.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

Pode-se escrever a equação matricial 3.28 na forma compacta:

$$\varepsilon = D^{-1}\sigma \tag{3.29}$$

ou

$$\sigma = D\varepsilon \tag{3.30}$$

onde D é chamada de matriz constitutiva do material.

3.3.5 Exercícios

1. Para o estado de tensões num certo ponto de uma estrutura de aço definido pelo tensor de tensões que segue, pede-se calcular as componentes de deformação neste ponto. Considere $E = 210$ GPa e $\nu = 0{,}3$.
   Dado: $\sigma = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -3,5 \\ 0 & -3,5 & 0 \end{bmatrix}$ Resposta: $\varepsilon = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 36,7 & -21,6 \\ 0 & -21,6 & -50 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$.

2. Para o estado de deformações num ponto de uma estrutura dado pelo tensor de deformações que segue, calcular o estado de tensões atuante neste ponto, sendo $E = 175$ GPa e $G = 70$ GPa.
   Dado: $\varepsilon = \begin{bmatrix} 0,55 & -2,5 & 0 \\ -2,5 & 0,30 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & -0,95 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$
   Resposta $\sigma = \begin{bmatrix} 7 & -35 & 0 \\ -35 & 3,5 & 3,5 \\ 0 & 3,5 & -14 \end{bmatrix}$ MPa

3.4 Tensões em Barras de Eixo Reto

3.4.1 Introdução

Até aqui foram estudadas as tensões, as deformações e suas relações em casos gerais considerando a Lei de Hooke generalizada.

O cálculo das tensões em barras fica simplificado quando comparado com casos gerais de estruturas pois, tomando como eixo x o de direção longitudinal da barra, considera-se nestas estruturas as tensões σ_y e σ_z iguais a zero. Assim sendo, fica claro que as componentes de tensão no plano yz ($\vec{\rho}_x$) serão fundamentais no estudo das barras conforme se destaca na Figura 3.34.

Normalmente, o cálculo de tensões em barras é feito a partir de seus esforços internos solicitantes, que podem ser obtidos através de princípios básicos da Análise Estrutural. Faz-se a seguir uma rápida abordagem destes princípios, definindo-se os esforços simples numa barra através do método das seções (ver notas de aula de Mecânica e Análise Estrutural).

Desta forma a relação entre esforços e tensões em uma barra é o principal ponto de ligação entre as disciplinas Resitência dos Materiais Mecânica e Análise Estrutural. Desta forma, nos próximos itens serão estabelecidas estas relações para cada esforço interno. Serão apresentadas também as

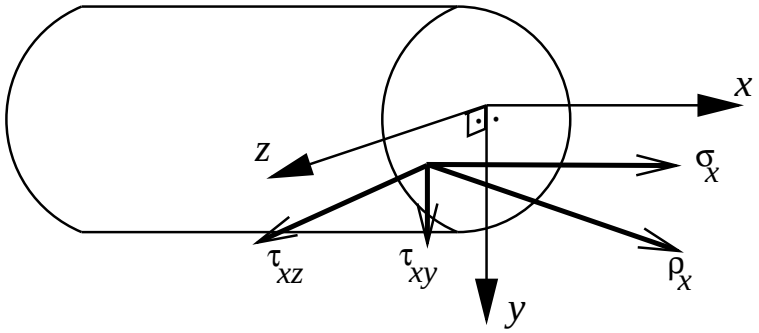


Figura 3.34: Tensão $\vec{\rho}_x$

chamadas leis constitutivas, que são aquelas que relacionam as ações com suas respectivas deformações.

3.4.2 Relações gerais entre esforços internos e tensões

Seja um ponto $P(y, z)$ genérico de uma seção transversal conforme Figura 3.35.

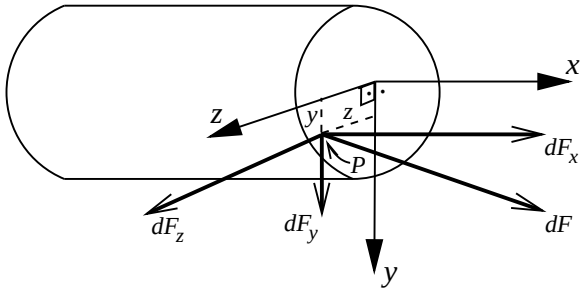


Figura 3.35: Relação entre esforços e tensões

Sendo $d\vec{F}$ a força elementar na área elementar dA, em torno de P, reescrevendo equação 3.3 tem-se:

$$\vec{\rho_x} = \frac{d\vec{F}}{dA} \tag{3.31}$$

Analisando-se as componentes de força e tensão e observando as Figuras 3.34 e 3.35 tem-se:

$$d\vec{F} = dF_x\vec{i} + dF_y\vec{j} + dF_z\vec{k} \tag{3.32}$$

$$\vec{\rho}_x = \sigma_x\vec{i} + \tau_{xy}\vec{j} + \tau_{xz}\vec{k} \tag{3.33}$$

logo, utilizando equação 3.31, tem-se:

$$dF_x = \sigma_x dA \tag{3.34}$$

$$dF_y = \tau_{xy} dA \tag{3.35}$$

$$dF_z = \tau_{xz} dA \tag{3.36}$$

Da Mecânica Geral e Análise Estrutural, obtem-se:

$$
\begin{aligned}
N &= F_x = \int_A dF_x = \int_A \sigma_x dA && (3.37)\\
Q_y &= F_y = \int_A dF_y = \int_A \tau_{xy} dA && (3.38)\\
Q_z &= F_z = \int_A dF_z = \int_A \tau_{xz} dA && (3.39)\\
T &= M_x = \int_A (dF_y z - dF_z y) = \int_A (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dA && (3.40)\\
M_y &= \int_A (-dF_x z) = -\int_A \sigma_x z dA && (3.41)\\
M_z &= \int_A (dF_x y) = \int_A \sigma_x y dA && (3.42)
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$N = \int_A \sigma_x dA \tag{3.43}$$

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA \tag{3.44}$$

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} dA \tag{3.45}$$

$$T = \int_A (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dA \tag{3.46}$$

$$M_y = -\int_A z \sigma_x dA \tag{3.47}$$

$$M_z = \int_A y \sigma_x dA \tag{3.48}$$

Estas relações deixam claro que:

- **Esforço normal e momentos fletores causam tensões normais**.
- **Esforços cortantes e momento de torção causam tensões tangenciais**.

3.4.3 Exemplos

Os exemplos ilustrados nesta seção mostram como é possível relacionar as tensões normais com os esforços internos que as originaram.

Exemplo 1: Calcular os esforços simples numa seção cuja a distribuição da tensão normal é ilustrada na figura 3.36.Nota-se que neste as tensões (σ_x) se distribuem de maneira uniforme na seção, isto é, todos os pontos da seção estão sujeitos a uma mesma tensão normal constante, e que as tensões cisalhantes (τ_{xy} e τ_{xz}) são nulas.

As Figuras 3.36 e 3.37 representam a tensão normal constante em uma seção retangular ABCD, em perspectiva isométrica e em vista lateral, respectivamente. O diagrama espacial é chamado "sólido de tensões" e o plano A'B'C'D', que contem as extremidades dos vetores, é a "superfície de tensões".

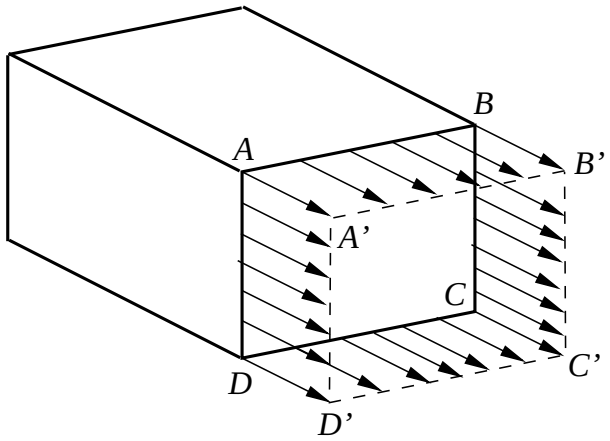


Figura 3.36: Sólidos de Tensões - Exemplo 1

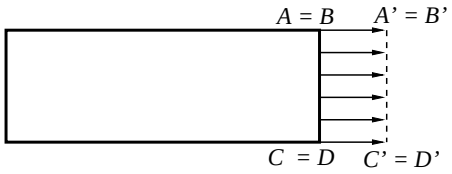


Figura 3.37: Vista lateral do Sólido de Tensões

Desta maneira, pode-se afirmar, observando equações 3.46 a 3.48, que $Q_y = 0$, $Q_z = 0$ e $T = 0$ Então, utilizando-se equação 3.43 tem-se:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA \\ N &= \sigma_x A \\ \sigma_x &= \frac{N}{A} \end{aligned}$$

sendo A a área da seção transversal da barra.
Outra maneira de se obter a relação entre a tensão normal e esforço normal é identificando que $\int_A \sigma_x dA$ é o volume do sólido de tensões. Assim sendo tem-se:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA = \text{volume do sólido de tensões} = \sigma_x A \\ \sigma_x &= \frac{N}{A} \end{aligned}$$

De forma análoga, pode-se calcular os momentos fletores M_y e M_z multiplicando-se a resultande de forças (volume do sólido de tensões) pela respectiva distância até o centro da seção. Isso equivale a se resolver as equações 3.47 e 3.48. Como em ambos os casos a distância é nula, tem-se que os esforços M_y e M_z também os são.

Exemplo 2: Na seção quadrada de uma barra de lado a não existem tensões tangenciais e as tensões normais variam de acordo com o diagrama espacial dado na Figura 3.38. Calcular os esforços simples na seção.
Resposta: $N = \sigma_o a^2/2$ e $M_z = \sigma_o a^3/12$. Demais esforços nulos.

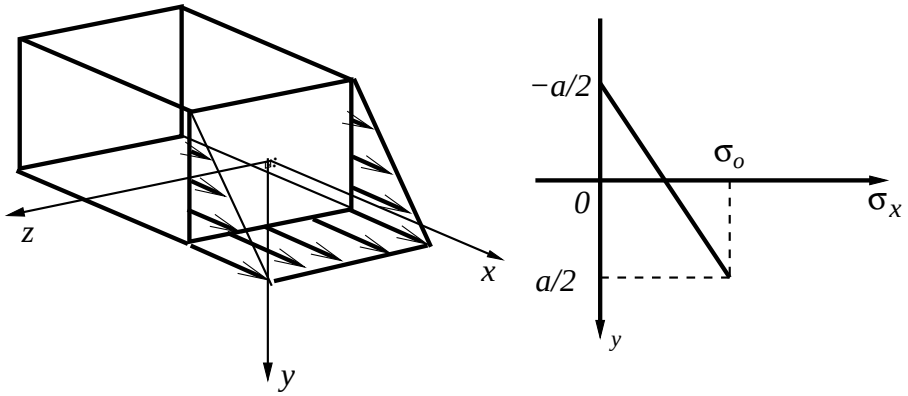


Figura 3.38: Sólido de tensões - Exemplo 2

Exemplo 3: Em uma seção retângular $b \times h$ não existem tensões tangenciais e as tensões normais variam de acordo com o sólido de tensões dado nas Figuras 3.39. Calcule os esforços simples nestas seções.
Respostas:

Primeiro caso:
$M_z = \frac{\sigma_o b h^2}{6}$
e demais esforços nulos;

Segundo caso:

$N = \frac{\sigma_o bh}{3}$
$M_z = \frac{\sigma_o bh^2}{9}$
e demais esforços nulos.

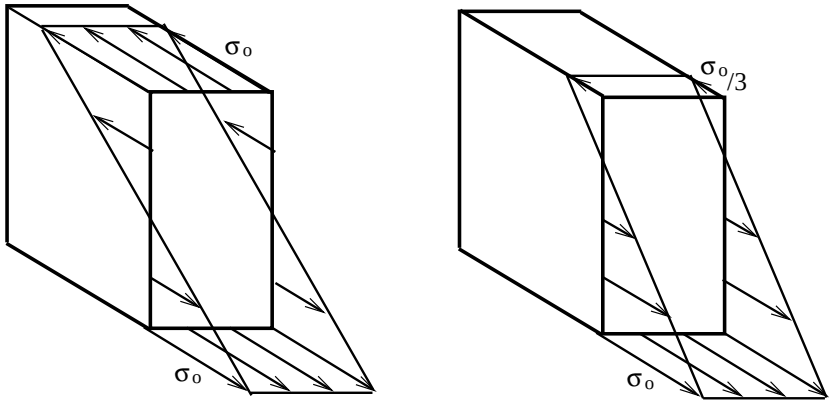


Figura 3.39: Figura do exemplo 3

Capítulo 4

Solicitação por esforço normal

4.1 Introdução

Barras submetidas a esforços normais sofrem deformações lineares longitudinais e transversais (ε_x, ε_y e ε_z) e, conforme observado no exemplo 1 da seção 3.4.3, a distribuição de tensões σ_x numa determinada seção transversal é constante e não há tensões cisalhantes nas seções transversais ($\tau_{xy} = 0$ e $\tau_{xz} = 0$).

Pode-se dizer que o cálculo das tensões normais e dos alongamentos (ou encurtamentos) totais são fundamentais para o dimensionamento de barras sujeitas a esforço normal. Partindo da equação 3.43 e admitindo-se que $\sigma_x(x)$, $A(x)$ e $N(x)$ podem variar ao longo do comprimento da barra (eixo x), tem-se:

$$N(x) = \int_A \sigma_x(x)\, dA \tag{4.1}$$

Desta forma, para uma determinada seção transversal da barra de abscissa x a tensão normal σ pode ser escrita como:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \tag{4.2}$$

Assim sendo, a equação 4.2 permite que se calcule a tensão normal uma vez conhecido o diagrama de esforços normais e a área da seção transversal onde se deseja calcular a tensão σ_x.

Para o cálculo dos alongamentos (ou encurtamentos) é dada ênfase maior para direção longitudinal. Mudanças na geometria nas direções transversais podem ser obtidas pelas equações 3.20. O alongamento/encurtamento total de uma barra sujeita a esforços normais (ΔL) pode ser calculado pela equação:

$$\Delta L = \int_0^L \varepsilon_x\, dx \tag{4.3}$$

Da lei de Hooke para o estado uniaxial de tensões (somente σ_x atuando) $\sigma_x = E\varepsilon_x$, ou seja:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{\sigma_x}{E}\, dx \tag{4.4}$$

mas, considerando equação 4.2 tem-se finalmente:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)}\, dx \tag{4.5}$$

Nesta seção apresentam-se alguns casos de estruturas de barras submetidas a um esforço normal. Em todos os exemplos as expressões 4.2 e 4.5 seram utilizadas no intuito de se obter a variação das tensões normais e o alongamento total da barra.

4.2 Exemplos

Exemplo 1: Calcular o alongamento total e a tensão normal para a barra da Figura 4.1(a). **Desconsidere** o peso próprio. Dados: área da seção transversal A, comprimento L e módulo de elasticidade longitudinal E.

A Figura 4.1(c) é o diagrama de esforço normal do modelo estrutural da Figura 4.1(b). Nota-se que o esforço é uma ação constante ao longo do eixo x.

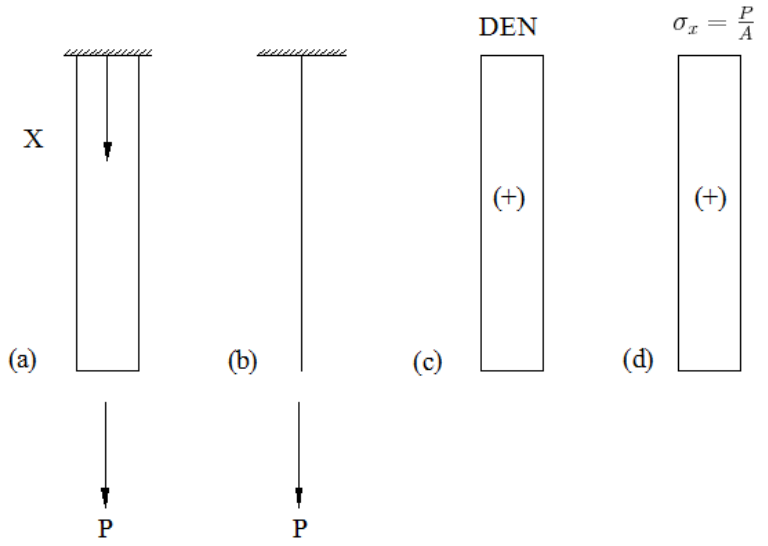


Figura 4.1: Figura dos exemplos 1, 2 e 3

Cálculo da tensão normal σ_x. Neste caso a tensão normal σ_x é constante na seção e **não varia ao longo do eixo da barra** pois a área A é constante e o esforço normal N também. Assim, a Figura 4.1(d)ilustra a variação de

σ ao longo de x.

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} \tag{4.6}$$

Cálculo do alongamento total ΔL. Neste caso a integral da equação 4.5 resulta em:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{EA}\, dx = \frac{NL}{EA} = \frac{PL}{EA} \tag{4.7}$$

Exemplo 2: Calcular o alongamento total e a tensão normal para a barra da Figura 4.1(a) para $P = 0$. **Considere** o peso próprio. Dados: área da seção transversal A, comprimento L, módulo de elasticidade longitudinal E e peso específico γ.

O modelo estrutural da barra da Figura 4.1(a) é apresentado na Figura 4.1 (b). A estrutura fica então submetida a uma carga uniformemente distribuída ao longo do seu eixo, cujo valor é γA, que representa seu peso próprio por unidade de comprimento.

O esforço normal N(x) varia linearmente ao longo do eixo de acordo com a expressão:

$$N(x) = \gamma A x \tag{4.8}$$

A Figura 4.2 é uma representação da equação 4.8, cujo máximo é observado na seção do apoio que equivale ao peso total da barra.

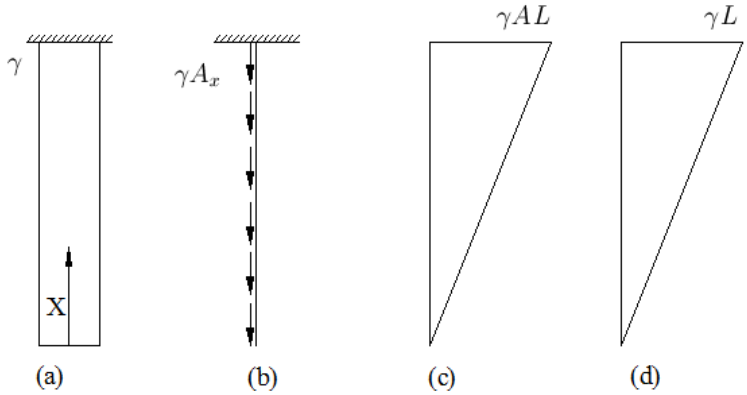


Figura 4.2: Figura do exemplo 2

Cálculo da tensão normal σ_x. Neste caso a tensão normal σ_x é constante na seção e varia ao longo do eixo da barra pois apesar área A ser constante, o esforço normal N varia ao longo do comprimento. Definindo um referencial com origem no centro de gravidade da seção transversal na

extremidade da barra tem-se:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{\gamma A x}{A} = \gamma x \tag{4.9}$$

Cálculo do alongamento total ΔL. Neste caso a integral da equação 4.5 resulta em:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA}\, dx = \int_0^L \frac{\sigma_x(x)}{E}\, dx = \int_0^L \frac{\gamma x}{E}\, dx = \frac{\gamma L^2}{2E} \tag{4.10}$$

Exemplo 3: Calcular o alongamento total e a tensão normal para a barra da Figura 4.1(a). **Considere** o peso próprio. Dados: área da seção transversal A, comprimento L, módulo de elasticidade longitudinal E e peso específico γ.

Utilizando-se o princípio da superposição de efeitos:

$$\sigma_x(x) = \frac{P}{A} + \gamma x \tag{4.11}$$

$$\Delta L = \frac{PL}{EA} + \frac{\gamma L^2}{2E} \tag{4.12}$$

Na Figura 4.3 (b) tem-se o modelo estrutural do problema. Nota-se que este exemplo é uma superposição dos casos anteriores é valido o principio de superposição dos efeitos descritos na seção 1.3.2. Desta forma, a Figura 4.3(c), mostra a variação do esforço normal, cuja equação é:

$$N(x) = P + \gamma A x \tag{4.13}$$

Cálculo da tensão normal: Esta é a soma das equações 4.6 e 4.9, ou seja, $\sigma_x(x) = \frac{P}{A} + \gamma x$

A Figura 4.3 (d), representa graficamente a expressão acima.

Cálculo do alongamento total: este é a soma das parcelas das equações 4.7 e 4.10, para cada carregamento, ou seja:

$\Delta L = \frac{PL}{EA} + \frac{\gamma L^2}{2E}$

Exemplo 4: Calcular o alongamento total e a tensão normal para a barra da Figura 4.4. **Desconsidere** o peso próprio. Dados: área da seção transversal A, comprimento L, módulo de elasticidade longitudinal E e q a carga axial distribuída.

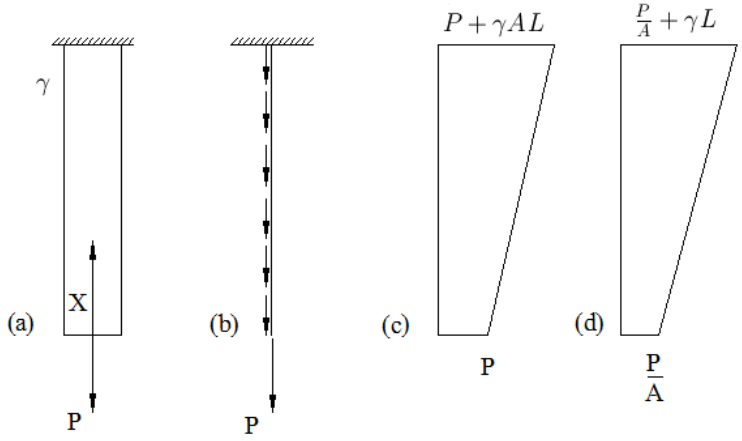


Figura 4.3: Figura do exemplo 3

A Figura 4.4(b) é o modelo estrutural deste exemplo. A carcg q é uma carga distribuída cuja variação é dada por $q(x) = ax$, sendo a constante. Na Figura 4.4(c) tem-se a sua variação com x é um carregamento triangular.O esforço normal em uma seção x é dado por:

$$N(x) = \int_0^x q(x)\, dx = \int_0^x ax\, dx = \frac{ax^2}{2} \tag{4.14}$$

E sua variação é mostrada na Figura 4.4(d).

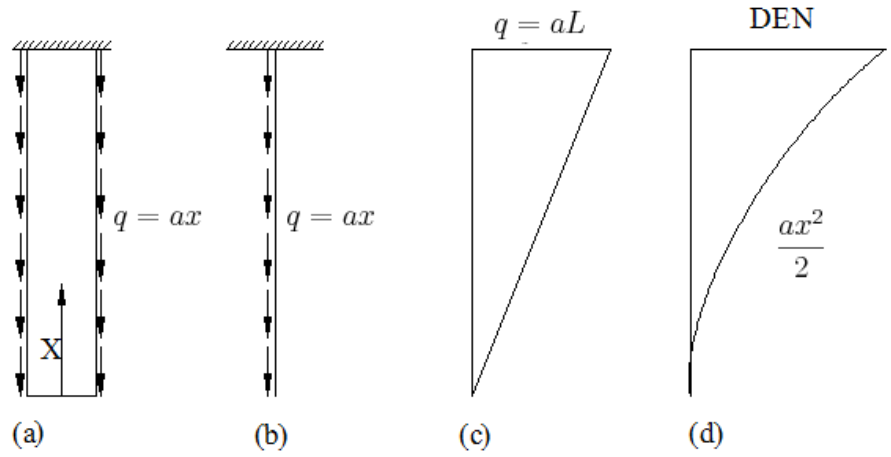


Figura 4.4: Figura do exemplo 4

Cálculo da tensão normal σ_x. Neste caso a tensão normal σ_x é constante na seção e varia ao longo do eixo da barra:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{\int_0^x q(x)\, dx}{A} = \frac{\int_0^x ax\, dx}{A} = \frac{ax^2}{2A} \tag{4.15}$$

Cálculo do alongamento total ΔL. Neste caso a integral da equação 4.5 resulta em:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA}\, dx = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E}\, dx = \int_0^L \frac{ax^2}{2AE} = \frac{aL^3}{6AE} \tag{4.16}$$

Exemplo 5: Calcular o encurtamento total e a tensão normal para o obelisco da Figura 4.5.Considere somente o peso próprio. Dados: obelisco de base quadrada de lado a e altura L, módulo de elasticidade longitudinal E e γ o peso específico.

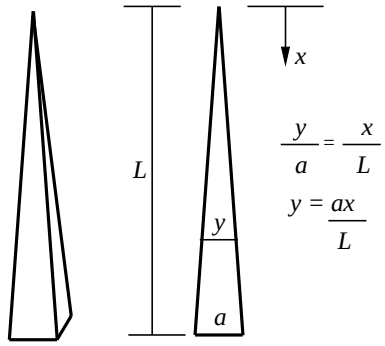


Figura 4.5: Figura do exemplo 8

Neste exemplo, tanto o esforço normal quanto a área variam ao longo do eixo da estrutura. Desta forma, deve-se obter primeiramente, as equações da variação dessas quantidades em relação a x.

Equação da área da seção transversal: esta pode ser obtida através de relações geométricas da Figura 4.5. Assim, tem-se:

$$A(x) = (\frac{ax}{L})^2 \tag{4.17}$$

Esforço normal: A carga de peso próprio varia axialmente pela expressão:

$$w = \gamma A(x) = \gamma(\frac{ax}{L})^2 \tag{4.18}$$

Assim, o esforço normal em uma determinada seção de abscissa x é dado por:

$$N(x) = \int_0^x \gamma A(x)\, dx = \int_0^x \frac{\gamma a^2 x^2}{L^2}\, dx = \frac{\gamma a^2 x^3}{3L^2} \tag{4.19}$$

Cálculo da tensão normal σ_x. Neste caso a tensão normal σ_x é constante na seção e varia ao longo do eixo da barra:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{1}{3}y^2 x\gamma\, \frac{1}{y^2} = \frac{1}{3}\gamma x \tag{4.20}$$

Cálculo do alongamento total ΔL. Neste caso a integral da equação 4.5 resulta em:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)}\,dx = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E}\,dx = \int_0^L \frac{1}{3}\frac{\gamma x}{E} = \frac{\gamma L^2}{6E} \tag{4.21}$$

4.3 Exercícios

Atenção: Considere a aceleração da gravidade $g = 10$ m/s^2 e lembre-se que $F = ma$.
(a força igual ao produto da massa pela aceleração).

1. Calcular o diâmetro de uma barra sujeita a ação de uma carga axial de tração P= 50 kN e calcular o valor correspondente alongamento total , para uma tensão admissível de $\overline{\sigma}_x$= 150 MPa e uma variação de comprimento máxima de

   $\overline{\Delta L}$ = 4 mm. São dados o comprimento da barra L = 4,5 m e o módulo de elasticidade do aço E = 210 GPa.
   Resposta: ϕ = 21 mm; ΔL= 3,093 mm.

2. Uma barra de aço (E = 210 GPa) de comprimento 4,0 m e seção circular está sujeita a uma tração de 80 kN. Calcular o diâmetro (número inteiro de mm) para uma tensão normal admissível de $\overline{\sigma}_x$= 120 MPa. Calcular o valor correspondentes da deformação específica e o alongamento total.
   Resposta: 30 mm; $5,389x10^{-4}$ e 2,156 mm.

3. Calcular o raio interno de uma seção cirular vazada (coroa circular) de ferro fundido sujeita a uma compressão de 1.500 kN. O raio externo é de 120 mm e a tensão admissível 75 MPa.
   Resposta: 89 mm.

4. Calcular o valor máximo admissível do esforço normal em uma barra cuja a seção transversal está representada na Figura 4.6 (dimensões em cm). Dados: E = 10 GPa e $\overline{\sigma}_x$ = 12 MPa e a deformação específica admissível $\overline{\varepsilon}_x = 0,001$.
   Resposta: 208 kN.

5. Calcular o alongamento total da barra de aço representada na Figura 4.7, cuja área de seção transversal é 500 mm^2. Dados: F = 4,5 kN, P

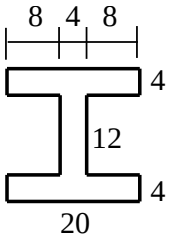


Figura 4.6: Figura do exercício 4

$= 2{,}0$ kN e $E = 210$ GPa.
Resposta: $\Delta L = 0,0286$ mm.

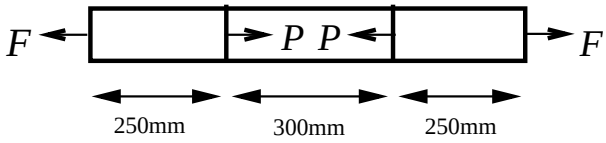


Figura 4.7: Figura do exercício 5

6. Calcular o alongamento total da barra representada na Figura 4.8, sujeita a uma carga axial da tração $F = 5{,}5$ kN, sendo o segmento AB em aço ($E_a = 210$ GPa) com seção circular de diâmetro 6,3 mm e o segmento BC em latão ($E_l = 95$ GPa) com seção quadrada de lado 25 mm.
Resposta: $\Delta L = 0{,}3639$ mm.

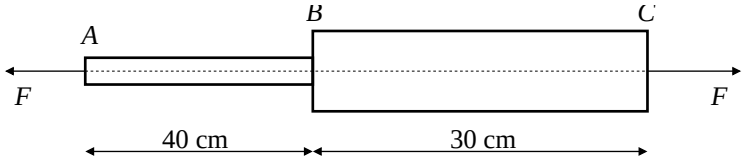


Figura 4.8: Figura do exercício 6

7. Uma coluna curta é constituída por dois tubos de aço , colocados um sobre o outro (veja Figura 4.9). Desprezando o peso próprio dos tubos, calcular a carga axial P_1 admissível, se a carga axial $P_2 = 200$ kN, dada a tensão normal admissível a compressão de 100 MPa.
Resposta: ($P_1 = 60$ kN).

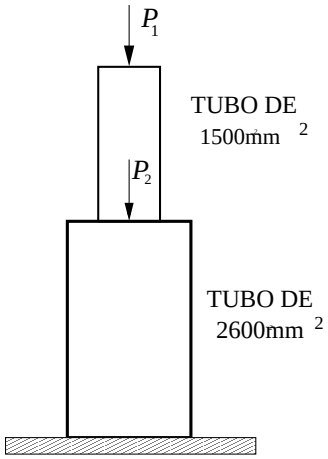


Figura 4.9: Figura do exercício 7

8. Um pequeno bloco cilíndrico de alumínio 6061-T6, com diâmetro original de 20mm e comprimento de 75mm, é colocado em uma máquina de compressão e comprimido até que a carga axial aplicada seja de 5kN. Determinar:

   a) o decréscimo de seu comprimento.

   b) seu novo diâmetro.

   Resposta: a) $\Delta L = -0,0173$mm b) d = 20,00162mm

9. Um corpo de prova padronizado, de aço, com 13 mm de diâmetro, sujeito a uma força de tração de 29,5 kN teve um alongamento de 0,216 mm para um comprimento de 200 mm. Admitindo-se que não foi superado o limite de proporcionalidade, estimar o valor do módulo de elasticidade longitudinal do aço.
   Resposta: $E = 206$ GPa

10. Um pequeno bloco cilíndrico de bronze C86100(coeficiente de Poisson= 0,34),com diâmetro original de 1,5 cm e comprimento de 3 cm, é colocado em uma maquina de compressão e comprimido até que seu comprimento se torne 2,98 cm. Determinar o novo diâmetro do bloco.
    Resposta: d = 1,5034 cm.

11. Verificar a estabilidade da treliça da Figura 4.10. Dados: Barra AC em aço, seção circular, diâmetro 28 mm. Barra BC em madeira, seção quadrada, lado 65 mm;

    $P = 60$ kN, $\overline{\sigma}_x$ (aço) = 140 MPa, $\overline{\sigma}_x$ (madeira, compressão) = 12 MPa,

    $E_a = 210$ GPa e E_m =12 GPa.
    Resposta: Estável.

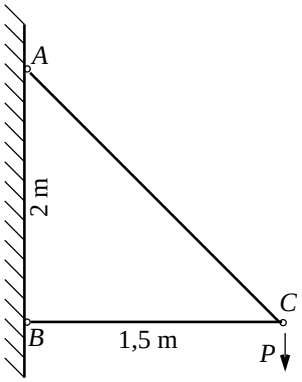


Figura 4.10: Figura do exercício 11

12. Considere a treliça da Figura 4.11, sujeita as cargas verticais $P_1 = 50$kN e $P_2 = 20$kN aplicadas nos nós C e E respectivamente. As tensões máximas de tração e compressão são de 250 e 160MPa, respectivamente. O fator de segurança adotado é 1,6. Determine as áreas das seções transversais das barras: AC, AD, CE. Dados: comprimento das barras $AC = CE = CD = 2$m

    Resposta: $AAC = ACE = 128mm^2$; $AAD = 633mm^2$.

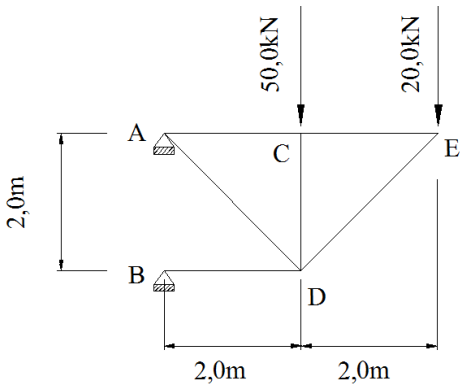


Figura 4.11: Figura do exercício 12

13. Calcular o valor máximo admissível da carga P na treliça deste problema (ver Figura 4.12) e o correspondente deslocamento vertical da articulação onde está aplicada a carga P. As barra de aço ($E = 210$ GPa), tem dâmetro $d = 15$ mm e a tensão admissível é $\overline{\sigma}_x$= 150 MPa.

    Resposta: $P_{adm} = 20{,}38$ kN; ΔL= 6,02 mm.

14. Um dispositivo de três barras é utilizado para suspender uma massa W de 5000 Kg (veja Figura 4.13). Os diâmetros das barras são de 20 mm (AB e BD) e 13 mm (BC). Calcular as tensões normais nas barras.
    Resposta: 150,8 MPa em AB, 119 MPa em BC e 159 MPa em BD.

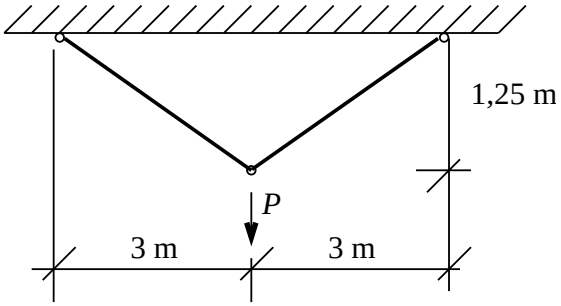


Figura 4.12: Figura do exercício 13

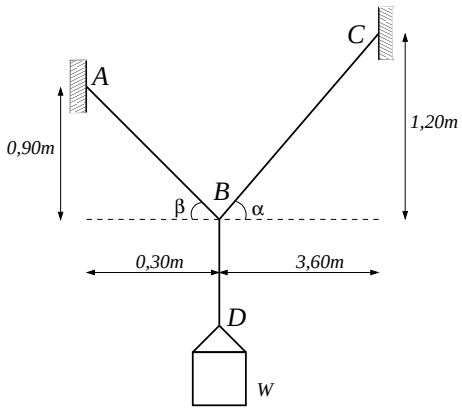


Figura 4.13: Figura do exercício 14

15. As barras AB e AC da treliça representada na Figura 4.14 são peças de madeira 6 cm $\times$ 6 cm e 6 cm $\times$ 12 cm, respectivamente. Sendo as tensões normais admissíveis de 12 MPa a tração e 8 MPa a compressão, calcular o valor admissível da carga P.
Resposta: $P = 61,09kN$.

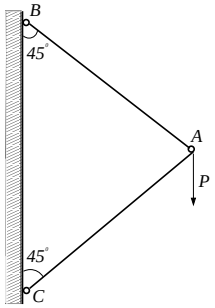


Figura 4.14: Figura do exercício 15

16. As barras da treliça representada na Figura 4.15 são de madeira com seções retangulares 60 mm $\times$ L (BC) e 60 mm $\times$ 1,4L (AC). Calcular L para tensões normais admissíveis de 12 MPa a tração e 8,5 MPa a compressão.
Resposta: $L = 73$ mm.

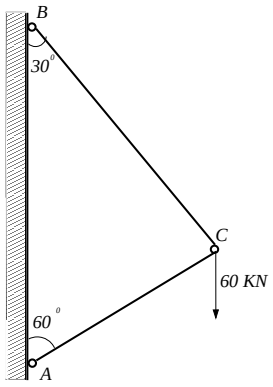


Figura 4.15: Figura do exercício 16.

17. As barras AB e BC da treliça da Figura 4.16 comprimento de 3,0 m e área de seção A. Especificados $\overline{\sigma}_x = 220$ MPa e $E = 210$ GPa, calcular o valor de A e o correspondente valor do deslocamento vertical da articulação C.
Resposta: $A = 170{,}45$ mm^2 e $\Delta L = 5{,}23$ mm.

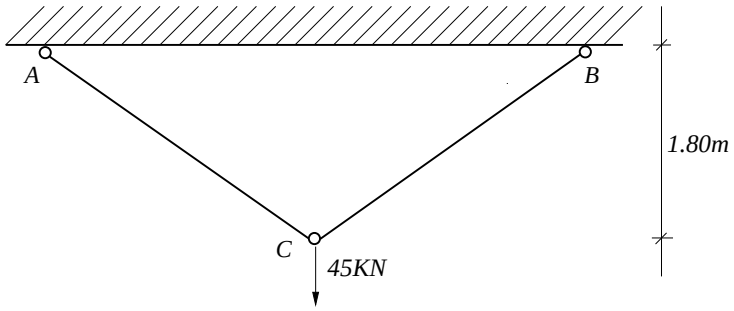


Figura 4.16: Figura do exercício 17

18. Na treliça da Figura 4.17, as barras são de aço ($E = 210$ GPa) com tensões admissíveis de 210 MPa (tração) e 166 MPa (compreessão). As áreas das seções transversais são $400mm^2$ (BC) e $525mm^2$ (AC). Calcular o valor admissível de P e os valores correspondentes das tensões normais.
Respostas:

- P= 52,29 kN.
- Barra AC: $\sigma_x = 166$ MPa.
- Barra BC: $\sigma_x = 174{,}8$ MPa.

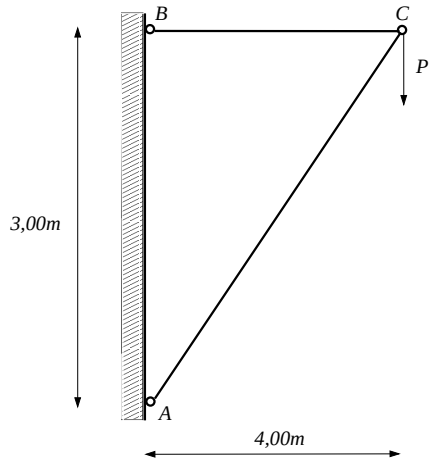


Figura 4.17: Figura do exercício 18

19. O conjunto, mostrado na Figura 4.18, consiste de duas barras rígidas inicialmente horizontais. Elas são apoiadas por pinos e pelas hastes de aço A-36 FC e EB, cada uma com 6,35mm de diâmetro. Se for aplicada uma carga vertical de 22,24 kN na barra inferior AB, determinar os deslocamentos C,B e E.

    Resposta: $\Delta Lc = 0,00021\text{m}$; $\Delta LE = 0,000004\text{m}$;$\Delta LB = 0,00085\text{m}$.

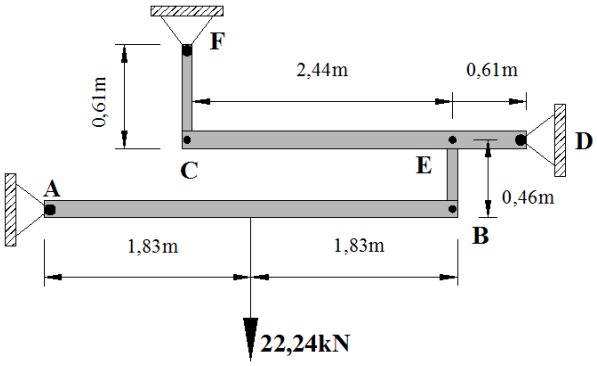


Figura 4.18: Figura do exercício 19

20. A barra AB, da Figura 4.19, de comprimento L está suspensa horizontalmente por dois fios verticais presos às suas extremidades (veja Figura). Os fios têm o mesmo comprimento e mesma área de seção transversal mas diferentes módulos de elasticidade (E_1 e E_2). Desprezando o peso próprio da barra , calcular a distância d , do ponto de aplicação da carga P até a extremidade A , para que a barra permaneça horizontal.
    Resposta: $d = (LE_2)/(E_1 + E_2)$.

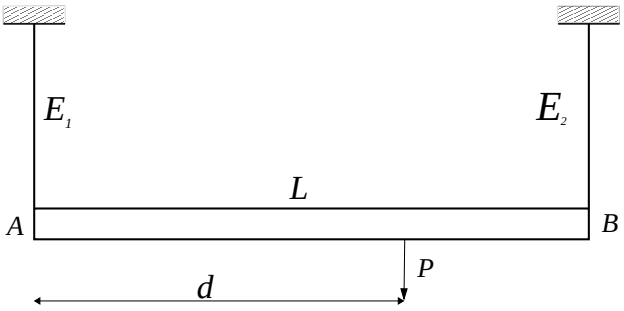


Figura 4.19: Figura do exercício 20

21. Uma barra de forma cônica, AB de seção transversal circular e comprimento L esta sujeita a ação de seu peso próprio, conforme mostra a Figura. Os raios das extremidades A e B são a e b respectivamente. O peso por unidade de volume do material da barra é representado por γ, o módulo de elasticidade por E. Determine o alongamento da barra.

    Resposta: $\delta_a = \frac{\gamma L^2(b+2a)}{6bE}$.

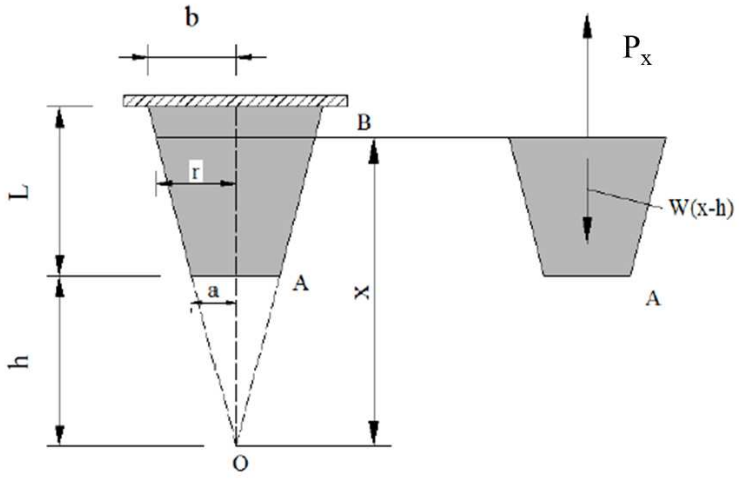


Figura 4.20: Figura do exercício 21

22. Calcular a área da seção transversal em cada trecho da barra da Figura 4.21 , sujeita à carga $P = 45kN$, além do seu peso próprio. São dados os valores da tensão admissível e da massa específica em cada trecho.

    - AB (aço) $120MPa; 7.800kg/m^3$;
    - BC (latão)$80MPa; 8.300kg/m^3$;

    Resposta: $AB = 382mm^2$ e $BC = 570\ mm^2$.

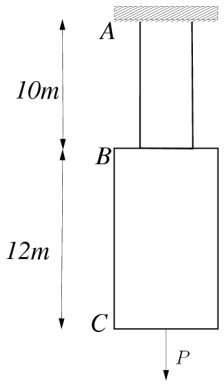


Figura 4.21: Figura do exercício 22

23. Calcular o deslocamento vertical do vértice de um cone apoiado na base e sujeito somente a ação de seu próprio peso, sendo a altura igual a L, o peso específico γ e o módulo de elasticidade E.

    Resposta: $\Delta L = \gamma\ L^2\ /6E$.

24. Uma estaca uniforme de madeira, cravada a uma profundidade L na argila, suporta uma carga F em seu topo. Esta carga é internamente resistida pelo atrito f ao longo da estaca, o qual varia de forma parabólica , conforme a Figura 4.22. Calcular o encurtamento total da estaca, em função de L, F, A (área da seção transversal) e E (módulo de elasticidade).

    Resposta: $\Delta L = -FL/4AE$.

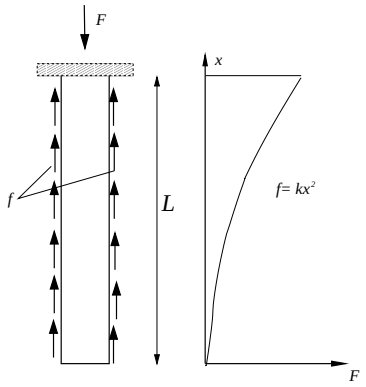


Figura 4.22: Figura do exercício 24

25. Uma estaca de madeira é cravada no solo, como mostra a Figura, ficando solicitada por uma carga $F = 450$ kN, axial, no seu topo. Uma força de atrito f (kN/m) equilíbra a carga F. A intensidade da força de atrito varia com o quadrado da distância z, sendo zero no topo. Dados $E = 1,4 \times 10^4$ MPa , $L = 9$ m e $D = 30$ cm, determinar

o encurtamento da estaca e representar os diagramas ($f \times z$, $N \times z$ e $\sigma_z \times z$).

Resposta: ΔL=-3,069 mm.

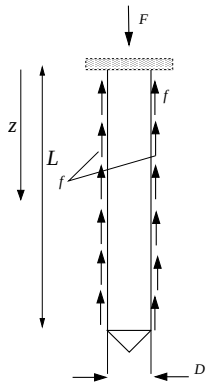


Figura 4.23: Figura do exercício 25

Capítulo 5

Solicitação por momento torsor

5.1 Introdução

Neste item serão estudadas das tensões e deformações em barras sujeitas à torção. Na primeira parte do capítulo o estudo envolverá:

- Barras sujeitas à torção pura: somente o efeito do momento torsor (torque), sendo os demais esforços simples nulos.
- Barras de eixo reto e seção transversal **circular** (cheia) ou **anular** (coroa circular) conforme Figura 5.1. Barras com estas características são comumente denominadas de **eixos**

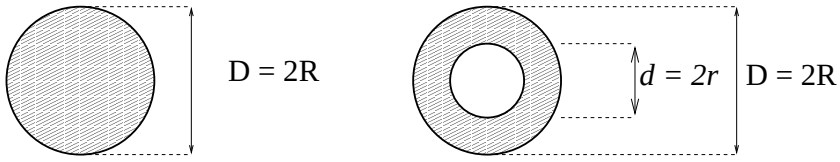


Figura 5.1: Seção circular e anular

- Eixos sujeitos à momento **torsor constante** conforme Figura 5.2.

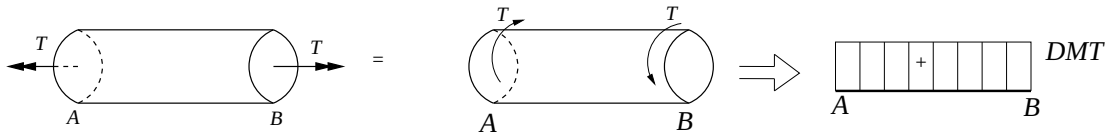


Figura 5.2: Eixo sujeito à torsor constante

- Pequenas deformações: as seções permanecem planas e perpendiculares ao eixo, com forma e dimensões conservadas. As deformações são deslocamentos angulares (ângulos de torção), em torno do eixo-x (eixo da barra), de uma seção em relação a outra.

O momento torsor, conforme estudado no item 3.4, está associado às tensões cisalhantes τ_{xy} e τ_{xz}. A equação 3.46, que confirma esta afirmação, é reescrita abaixo para facilitar o trabalho do leitor.

$$T = \int_A (z\tau_{xy} - y\tau_{xz})\, dA \tag{5.1}$$

Analisando um ponto $P(z, y)$ genérico e contido numa seção transversal de um eixo conforme Figura 5.3, é possível transformar a equação 5.1 numa forma mais compacta. Chamando de τ a soma vetorial entre τ_{xy} e τ_{xz} e observando Figura 5.3 tem-se:

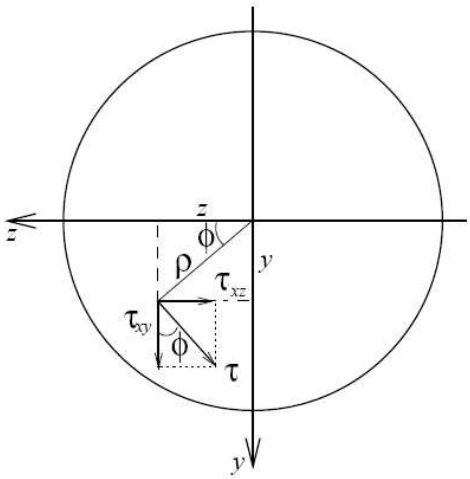


Figura 5.3: Tensões cisalhantes na torção

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{xy} + \vec{\tau}_{xz} \tag{5.2}$$
$$z = \rho\cos\phi \tag{5.3}$$
$$y = \rho\sin\phi \tag{5.4}$$
$$\tau_{xy} = \tau\cos\phi \tag{5.5}$$
$$\tau_{xz} = -\tau\sin\phi \tag{5.6}$$

Substituindo as equações 5.2 a 5.6 na equação 5.1 tem-se:

$$\begin{aligned} T &= \int_A (\rho\cos\phi\tau\cos\phi + \rho\sin\phi\tau\sin\phi)\, dA \\ T &= \int_A \rho\tau(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\, dA \\ T &= \int_A \rho\tau\, dA \end{aligned} \tag{5.7}$$

A equação 5.7 pode ser compreendida como a equação 5.1 em coordenadas polares. Assim, as coordenadas que definem a posição do ponto

genérico P podem ser escritas como ρ e ϕ. O próximo passo desta análise é definir uma relação entre τ e a coordenada (ρ, ϕ) do ponto genérico P, ou simplesmente: $\tau = \tau(\rho, \phi)$.

5.2 Análise de tensões e deformações na torção

Sejam:

- γ a distorção angular do "retângulo" $abcd$, contido em uma superfície cilíndrica de raio ρ e comprimento dx conforme Figura 5.4.
- $d\theta$ o deslocamento angular (ângulo de torção) elementar da seção Sd em relação à seção Se conforme Figura 5.4.

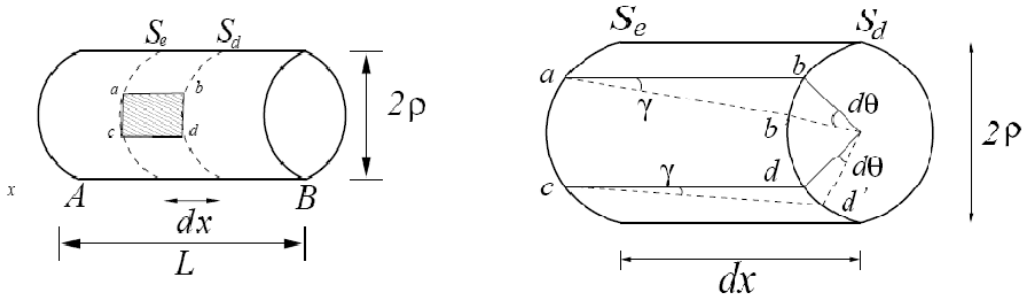


Figura 5.4: Análise das deformações na torção

Da Figura 5.4 pode-se escrever:

$$bb' = \rho d\theta \tag{5.8}$$

$$bb' = \gamma dx \tag{5.9}$$

Igualando as equações 5.8 e 5.9 tem-se:

$$\gamma = \rho \frac{d\theta}{dx} \tag{5.10}$$

Da Lei de Hooke tem-se:

$$\tau = G\gamma \tag{5.11}$$

lembrando que G é o módulo de elasticidade transversal.

Substituindo o valor de γ da equação 5.10 na equação 5.11 tem-se:

$$\tau = \rho\, G \frac{d\theta}{dx} \tag{5.12}$$

Como θ varia linearmente com x,como visto na Figura 5.4, sua derivada com relação a x é constante e pode-se dizer que:

$$G\frac{d\theta}{dx} = \text{constante} = K \tag{5.13}$$

Pode-se concluir então que τ é função somente de ρ, não é função de ϕ, ou seja, $\tau = K\rho$, portanto constante em pontos de mesmo ρ ($0 \leq \rho \leq R$), para qualquer θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) . A variação de τ com ρ é linear, conforme mostra a Figura 5.5.

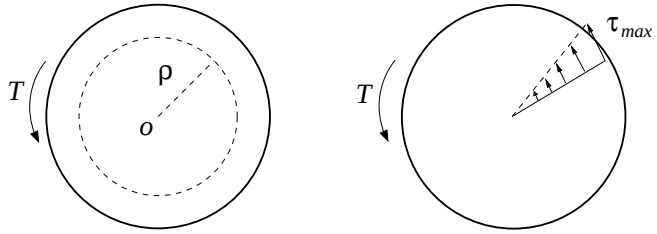


Figura 5.5: Variação da tensão cisalhante em função de ρ

Para calcular a constante K basta substituir $\tau = K\rho$ na equação 5.7:

$$T = \int_A \rho\tau \; dA = \int_A \rho K\rho \; dA = (K \underbrace{\int_A \rho^2 \; dA}_{\text{Momento de inércia polar: } I_o}) = K.I_0 \tag{5.14}$$

Logo:

$$K = \frac{T}{I_o} \tag{5.15}$$

e:

$$\tau = \frac{T}{I_o}\rho \tag{5.16}$$

A tensão cisalhante τ_{max} máxima se dá para $\rho = R$:

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_o}R \tag{5.17}$$

A razão entre I_o e R é chamada de módulo de resistência à torção (W_o). Então:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_o} \tag{5.18}$$

Da Mecânica Geral, os valores de I_o sâo:

- Seção circular, diâmetro D:

$$I_o = \frac{\pi}{32} D^4 (\text{seção circular}) \tag{5.19}$$

e para seção anular, sendo D o diâmetro de eixo tem-se:

- Seção anular:

$$I_o = \frac{\pi}{32}(D_e^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{32} D_e^4 (1 - n^4) \tag{5.20}$$

sendo D_e o diâmetro externo, D_i o diâmetro interno do eixo e $n = D_i/D_e$

Substituindo os valores de $R = D/2$ (seção circular), $R = D_e/2$(seção anular) e de I_o das equações 5.19 e 5.20, pode-se chegar facilmente a:

$$\tau_{max} = \frac{16T}{\pi D^3} (\text{seção circular}) \tag{5.21}$$

$$\tau_{max} = \frac{16T}{\pi D^3}\left(\frac{1}{1 - n^4}\right) (\text{seção anular}) \tag{5.22}$$

5.3 Cálculo do ângulo de torção

O ângulo de torção representa a rotação relativa entre duas seções distantes de L unidades de comprimento como mostrado na Figura5.6:

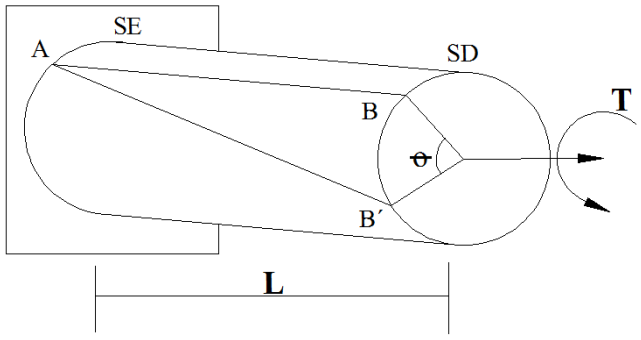


Figura 5.6: Ângulo de torção

$$\theta = \int_0^L d\theta = \int_0^L \underbrace{\frac{\gamma}{\rho} dx}_{\text{ver eq. 5.10}} = \int_0^L \overbrace{\frac{\tau}{G}}^{\text{Lei de Hooke}} \frac{1}{\rho}\, dx \tag{5.23}$$

Substituindo o valor de τ da equação 5.16, a equação 5.23 pode ser reescrita como:

$$\theta = \int_0^L \underbrace{\frac{T}{I_o}\rho}_{eq.5.16} \frac{1}{G\,\rho}\,dx$$

$$\theta = \frac{T\,L}{G\,I_o} \tag{5.24}$$

5.4 Torque Aplicado ao eixo na Transmissão de Potência

Em um eixo de tranmissão de potência, o trabalho executado pelo momento torsor T, constante, é:

$$dW = Td\phi \tag{5.25}$$

onde ϕ é o deslocamento angular, em radianos. Como potência é trabalho por unidade de tempo tem-se:

$$P = \frac{dW}{dt} = T\frac{d\phi}{dt} = T\omega \tag{5.26}$$

ou:

$$P = T\omega \tag{5.27}$$

Para se aplicar a expressão 5.27, que relaciona a pôtencia aplicada a um eixo que gira com uma velocidade angular ω ao torque T, deve-se observar as unidades, que devem estar no SI, ou seja:

- Potência (P): Watt (1W = 1 Nm/s).
- Velocidade angular $\omega = 2\pi f$: rad/s.
- Freqüência f: Hertz = Hz
- Torque (T): Nm.

Se a potência for expressa em cavalos-vapor (CV) ou horse-power (hp), então os fatores de conversão para W são, respectivamente:

$$1\text{ CV} = 736\text{ W} \quad \text{e} \quad 1\text{ hp} = 746\text{ W} \tag{5.28}$$

5.5 Exercícios

1. Calcular os diâmetros externo e interno de um eixo de aço sujeito a um torque de 25 kNm, de modo que a tensão máxima de cisalhamento seja 84 MPa e o ângulo de torção seja de $2,5$ graus para um comprimento de 3 m. Dado $G = 84$ GPa. Resposta: $D = 137{,}5$ mm e $d = 110{,}5$ mm.

2. A barra circular maciça BC, de aço, é presa à haste rígida AB, e engastada ao suporte rígido em C, como mostra a Figura 5.7. Sabendo-se que $G = 75$GPa, determinar o diâmetro da barra, de modo que, para $P = 450$N, a deflexão do ponto A não ultrapasse 2mm e que a máxima tensão de cisalhamento não exceda o valor de 100MPa. Resposta: $d = 40,5$mm.

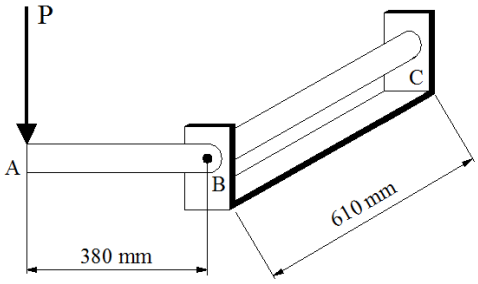


Figura 5.7: Figura do exercício 2

3. Calcular o momento torsor máximo admissível e o correspondente ângulo de torção em um eixo de comprimento de 2 m dados $\tau_{adm} = 80$ MPa e $G = 85$ GPa e seção:

   - Circular, $D = 250$ mm; Resposta: $T = 245{,}4$ kNm e $\theta = 0{,}01506$ rad.
   - Anular, com $d = 150$ mm e $D = 250$ mm;
     Resposta: $T = 213{,}4$ kNm e $\theta = 0{,}01504$ rad.

4. No eixo representado na Figura 5.8, calcular a tensão máxima em cada trecho e o ângulo de torção $C\text{x}A$. $T_1 = 6$ kNm, $T_2 = 9$ kNm, $G = 84$ GPa, $D = 100$ mm em AB e $D = 76$ mm em BC.

   Resposta: $\tau_{AB} = 15{,}3$ MPa, $\tau_{BC} = 69{,}6$ MPa e $\theta = 0{,}01163$ rad.

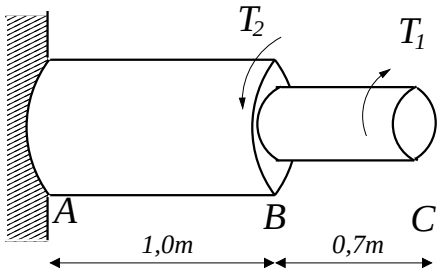


Figura 5.8: Figura do exercício 4

5. Um eixo de aço (veja Figura 5.9), diâmetros $D_1 = 80$ mm em AB e $D_2 = 60$ mm em BC, está sujeito a dois torques iguais a T nas seções B e C. Dado o módulo de elasticidade transversal de 82 GPa, a tensão tangencial admissível de 102 MPa e o ângulo de torção $C\text{x}A$ admissível $0,08$ rad, calcular o valor máximo admissível de T.

   Resposta: $T = 3,913$ kNm.

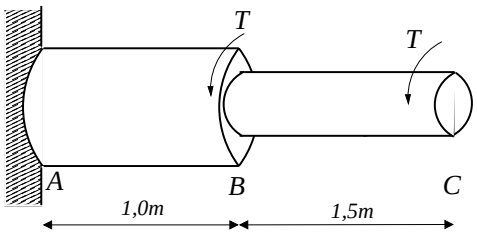


Figura 5.9: Figura do exercício 5

6. Calcular o valor máximo admissível do torque T e os valores correspondentes das tensões máximas e do ângulo de torção CxA, dados $D = 50$ mm em AB e $D = 50$mm e $d = 30$ mm em BC, a tensão admissível $\overline{\tau} = 80$ MPa e o valor de $G = 80$ GPa.

   Resposta: $T = 1{,}709$ kNm, $\tau_{AB} = 55{,}7$ MPa, $\tau_{BC} = 80$MPa e $\theta = 0{,}001065$ rad.

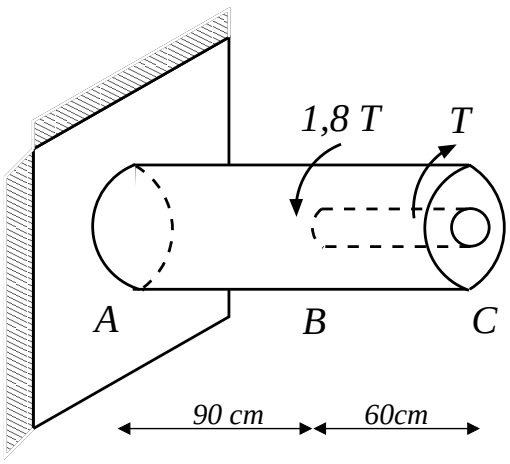


Figura 5.10: Figura do exercício 6

7. No eixo representado na Figura 5.11, calcular a tensão máxima em cada trecho e o ângulo de torção C x A, dados: $T_1 = 6$ kNm, $T_2 = 8$ kNm.

   - AB alumínio, $D_1 = 100$ mm, $G_1 = 28$ GPa;
   - BC latão, $D_2 = 60$ mm, $G_2 = 35$ GPa;

   Resposta: $\tau_{AB} = 71{,}3$ MPa, $\tau_{BC} = 141{,}5$ MPa e $\theta = 0{,}1318$ rad.

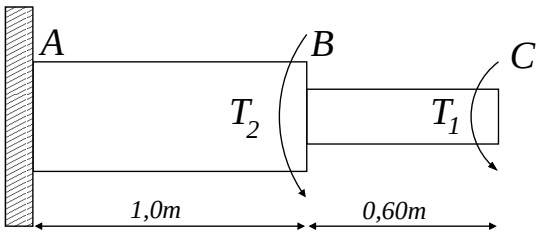


Figura 5.11: Figura do exercício 7

8. O tubo mostrado na Figura 5.12 tem um diâmetro interno de 80 mm e um diâmetro externo de 100 mm. Se uma de suas extremidades é torcida contra o suporte em A através de uma chave em B, determine a tensão cisalhante desenvolvida no material nas paredes interna e externa ao longo da região central do tubo quando as forças de 80 N forem aplicadas à chave. Resposta: $\tau_e = 0,345$MPa; $\tau_i = 0,276$MPa.

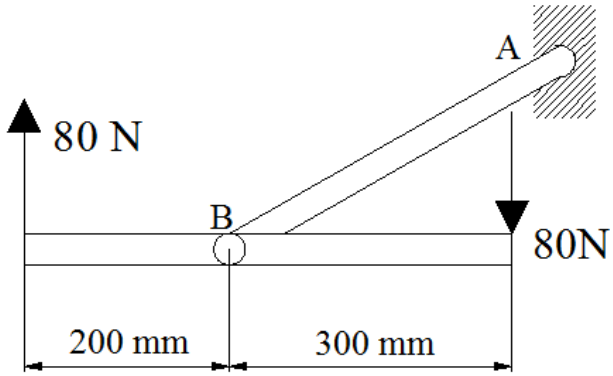


Figura 5.12: Figura do exercício 8

9. A viga em balanço da Figura 5.13 está sujeita ao carregamento indicado. Calcular:

   a) O valor admissível de P. Resposta:$P = 30,8$kN.

   b) Para a carga P do item anterior, qual o giro da seção extrema. Resposta: $\theta = 0,28$rad.

   Dados: $\tau = 98,1$ MPa e $G = 78,45$ GPa.

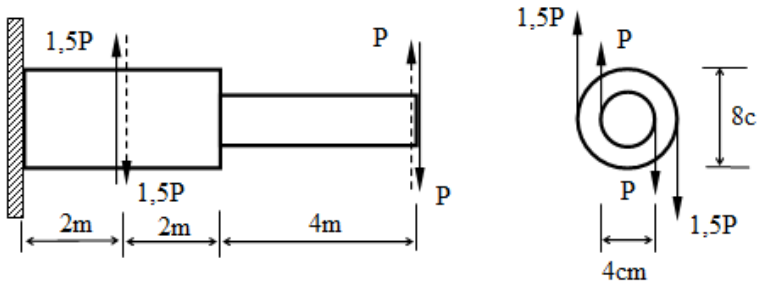


Figura 5.13: Figura do exercício 9

10. A viga em balanço da Figura 5.14 está sujeita ao carregamento indicado. Calcular:

    a) A tensão de cisalhamento máxima (τ_i) devido ao momento torsor.

    b) O deslocamento angular ou ângulo de torção (θ) devido ao momento torsor.

    Dados: $G = 78,45$GPa;$p = 4,90$kN; $D = 10$cm e $d = 8$cm.

11. Dimensionar o eixo de uma máquina, de 9 m de comprimento, que transmite 200 CV de potência, dados $\overline{\tau} = 21$ MPa e G = 85 GPa a uma freqüência de 120 rpm, e calcular o correspondente deslocamento angular, adotando:

    - Seção circular cheia. Resposta: $D = 142$ mm, $\theta = 0,03107$ rad.

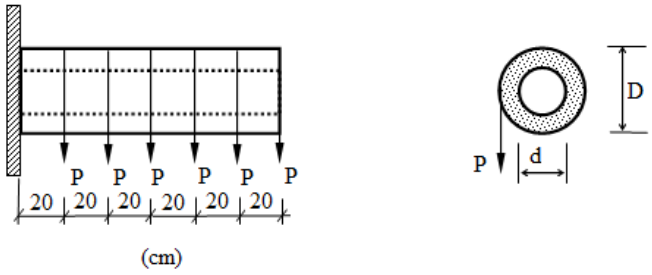


Figura 5.14: Figura do exercício 10

- Seção anular com $d/D = 0{,}5$.
  Resposta: $D = 145$ mm, $\theta = 0,03048$ rad.

12. Dimensionar um eixo de seção circular que transmite a potência de 1800 CV a uma rotação de 250 rpm, para uma tensão admissível ao cisalhamento de 85 MPa e para um ângulo de rotação de 1 grau para um comprimento igual a 20 vezes o diâmetro. Dado o módulo de elasticidade transversal de 80 GPa. Resposta: $D = 195$ mm.

13. Um eixo de aço, seção circular com $D = 60$ mm, gira a uma freqüência de 250 rpm. Determine a potência (em CV) que ele pode transmitir, dado $\overline{\tau} = 80$ MPa. Resposta: P =120,7 CV.

14. O eixo da Figura 5.15 tem seção circular com 50 mm de diâmetro, é movimentado pela polia em C a uma rotação de 200 rpm e movimenta duas máquinas em A (40 CV) e B (25 CV). Calcular a tensão máxima em cada trecho e o ângulo de torção BxA, dado $G = 80$ GPa.

    Resposta: $\tau_{AC} = 57{,}3$ MPa, $\tau_{CB} = 35{,}8$ MPa e $\theta = 0{,}01611$ rad.

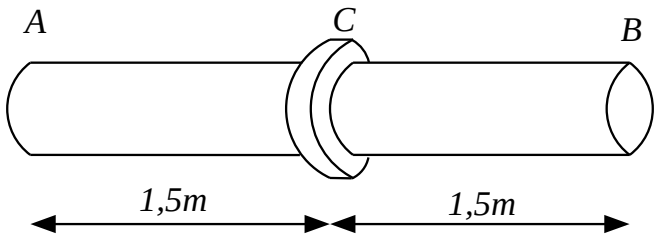


Figura 5.15: Figura do exercício 14

15. No exercício 14, qual deveria ser a razão entre os diâmetros $D1$ em AC e $D2$ em CB de modo que a tensão máxima nos dois trechos seja a mesma. Resposta: $R = 1{,}17$.

5.6 Torção em tubos de paredes delgadas

Supondo-se uma barra sujeita à torção tenha seção vazada de forma qualquer, com espessura e, constante ou variável. De forma semelhante ao abordado na seção 5.2, pode-se mostrar que as tensões cisalhantes são diretamante proporcionais à distância ao centro da seção. Sendo a espessura pequena com relação às dimensões da seção, considera-se nestes casos a tensão τ constante na espessura, podendo variar ao redor da seção, conforme mostra Figura 5.16

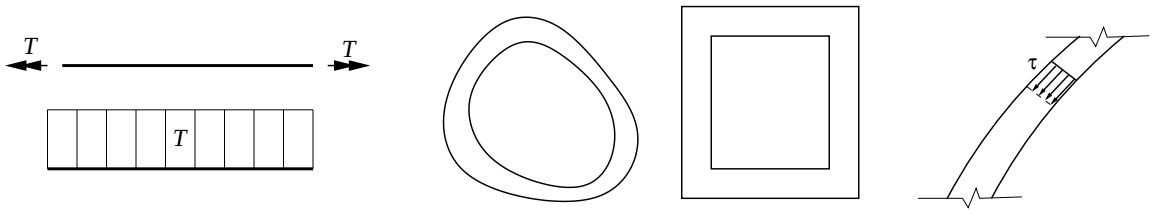


Figura 5.16: Torção em tubo de paredes delgadas

Seja um elemento de volume de espessura e_1 e e_2 e dimensões elementares dx (longitudinal) e ds (transversal) conforme Figura 5.17

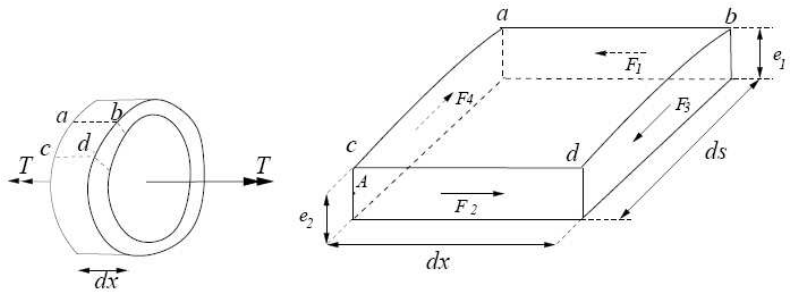


Figura 5.17: Elemento infinitesimal

Sejam τ_1 e τ_2 as tensões nas faces longitudinais do elemento infinitesimal. Considerando-se constante estas tensões, as correspondentes forças são dadas por:

$$F_1 = \tau_1 \, e_1 \, dx \tag{5.29}$$

$$F_2 = \tau_2 \, e_2 \, dx \tag{5.30}$$

Obviamente, da condição equilíbrio escreve-se

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \tau_1 \, e_1 = \tau_2 \, e_2 \tag{5.31}$$

Como o elemento de volume é genérico, conclui-se que:

$$f = \tau \tag{5.32}$$

sendo τ constante ao redor da seção. O parâmetro f é chamado de fluxo de cisalhamento.

Pode-se concluir também que:

- e constante $\rightarrow$ τ constante
- e máximo $\rightarrow$ τ mínimo
- e mínimo $\rightarrow$ τ máximo

Fazendo-se o equilíbrio de momento com relação ao ponto A indicado na Figura 5.17 tem-se, admitindo uma variação linear da espessura:

$$\begin{aligned} \tau_3 \frac{(e_1 + e_2)}{2}\, ds\, dx &= \tau_1\, e_1\, dx\, ds \\ \tau_3 \frac{(e_1 + e_2)}{2} &= f \end{aligned} \tag{5.33}$$

Tomando-se a resultante de forças na face 3 do volume infinitesimal obtem-se:

$$F_3 = \overbrace{\tau_3 \frac{(e_1 + e_2)}{2}}^{f}\, ds = f\, ds \tag{5.34}$$

A equação de equilíbrio entre forças externas e internas numa seção de tubo de paredes finas, equivalente à equação 5.1 em tubos de seção cheia, pode ser obtida fazendo-se o somatório ao longo da linha média da espessura (L_m) dos torques elementares resultantes ($dT = F_3 r$) num comprimento ds do sólido infinitesimal, como indica a Figura 5.18.

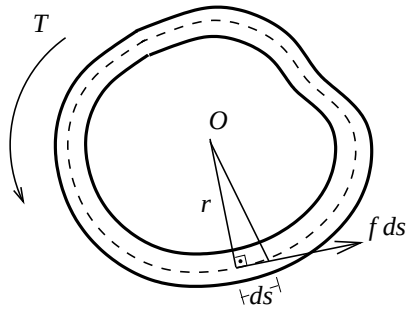


Figura 5.18: Equilíbrio entre forças internas e externas

$$
\begin{aligned}
T &= \int_0^{L_m} dT \\
T &= \int_0^{L_m} F_3 r \\
T &= \int_0^{L_m} r\ f\ ds
\end{aligned} \tag{5.35}
$$

A equação pode ser reescrita de forma mais simplificada, observando a área média A_m da Figura 5.18, limitada pela linha média L_m e o fluxo de cisalhamanto f é uma constante na seção:

$$
T = f \overbrace{\int_0^{L_m} r\ ds}^{2A_m} = 2\ A_m\ f \tag{5.36}
$$

e observando equação 5.32:

$$
\tau = \frac{T}{2\ e\ A_m} \tag{5.37}
$$

A equação 5.37 é conhecida como primeira fórmula de Bredt.

Demonstra-se igualando a energia de deformação com o trabalho efetuado pelo torque T que o angulo de torção θ para um comprimento L de tubo é:

$$
\theta = \frac{T\ L}{G\ I} \tag{5.38}
$$

sendo:

$$
I = \frac{4\ A_m^2}{\int_o^{L_m} \frac{ds}{e}} \tag{5.39}
$$

Para tubos de espessura constante tem-se:

$$
I = \frac{4\ A_m^2\ e}{L_m} \tag{5.40}
$$

e a equação 5.38 fica:

$$
\theta = \overbrace{\frac{T}{2\ e\ A_m}}^{\tau}\ \frac{L\ L_m}{2\ A_m\ G} = \frac{\tau\ L\ L_m}{2\ G\ A_m} \tag{5.41}
$$

A equação 5.41 é conhecida como segunda fórmula de Bredt.

5.7 Exercícios

1. Um tubo de alumínio ($G = 28$ GPa) de $1,0$ m de comprimento e seção retângular 60 mm x 100 mm (dimensões externas) está sujeito a um torque $T = 3$ kNm. Determinar a tensão de cisalhamento em cada uma das paredes do tubo e o ângulo de torção, se:

   a) a espessura é constante, igual a 4 mm

   b)devido a um defeito de fabricação duas paredes adjacentes têm espessura 3 mm, e as outras duas têm espessura de 5 mm.

   Resposta: **a)** $69,75$ MPa e 0,07044 rad **b)**$55,80$ MPa e 0,07513rad.

2. Um tubo circular vazado de espessura 25 mm e diâmetro interno 225 mm está sujeito a um torque $T = 170,25$ kNm. Calcular as tensões máximas de cisalhamento no tubo usando a teoria aproximada da tubos de paredes finas e a teoria exata de torção

   Resposta: $69,4$ MPa e $76,08$ MPa.

3. Um tubo fino de seção elíptica está sujeito a um torque $T = 5,67$ kNm. Dados: espessura 5 mm, eixo maior = 150 mm, eixo menor = 100 mm, medidas referentes a linha média, e $G = 80,5$ GPa, calcular a tensão de cisalhamento e o ângulo de torção para um comprimento de 1,0 m. Admita que o perímetro e a área da elípse podem ser aproximados por:

$$P = 1,5\ \pi\ (a + b) - \pi\sqrt{a\ b} \tag{5.42}$$

$$Am = \pi ab$$

   Resposta: $48,2$ MPa e $0,0000109$rad.

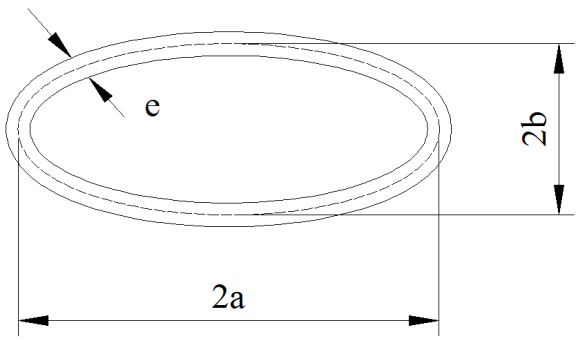


Figura 5.19: Figura do exercício 3

4. Um eixo de uma liga de alumínio com seção transversal mostrada na Figura abaixo está submetido a um torque T. Dados: $T = 2\text{kNm}$ e $G = 28\text{GPa}$. Pede-se:

   a) A tensão cisalhante máxima.

   b) O ângulo de torção em um eixo de comprimento 2 m.

   Resposta: $\tau = 80,2\text{MPa}$; $\theta = 6,84°$.

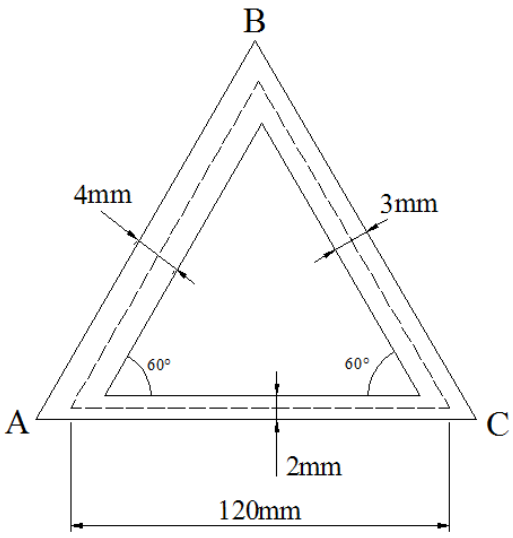


Figura 5.20: Figura do exercício 4

5. Um eixo de aço estrutural ASTM A-36 com seção transversal conforme a Figura abaixo está submetido a um torque T. Dados: $T = 4\text{kNm}$ e $G = 79\text{GPa}$. Determine:

   a) A tensão cisalhante máxima.

   b) O ângulo de torção em um eixo de comprimento 1,2m.

   Resposta: $\tau = 136,8\text{MPa}$; $\theta = 1,738°$.

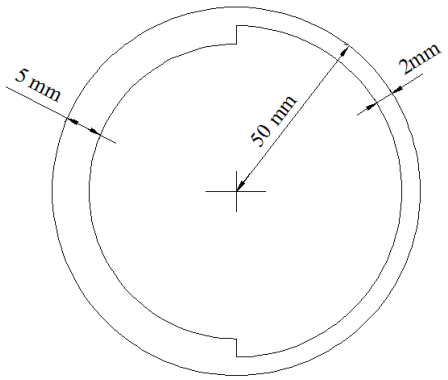


Figura 5.21: Figura do exercício 5

6. O tubo de plástico tem espessura $e = 5$mm e as dimensões médias mostradas na Figura abaixo. Determinar a tensão de cisalhamento nos pontos A e B se ele esta submetido a um torque de $T = 5$Nm. Mostrar a tensão de cisalhamento em elementos de volumes localizados nesses pontos. Resposta: $\tau_a = \tau_b = 0,05$MPa.

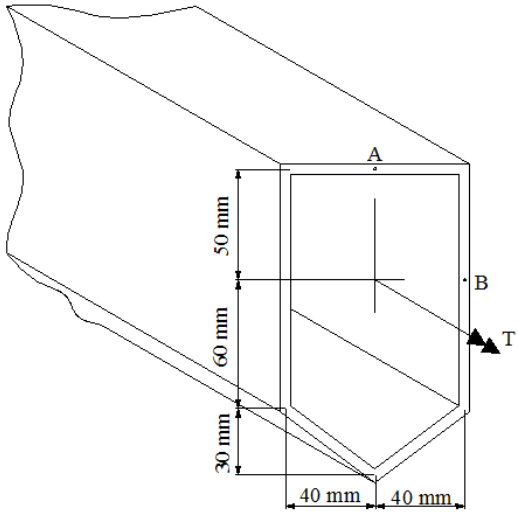


Figura 5.22: Figura do exercício 6

7. O tubo de plástico tem espessura $e = 5$mm e as dimensões médias mostradas na Figura abaixo. Determinar a tensão de cisalhamento nos pontos A e B se ele está submetido a um torque de $T = 500$Nm. Mostrar a tensão de cisalhamento em elementos de volumes localizados nesses pontos.

   Resposta: $\tau_a = \tau_b = 9,62$MPa.

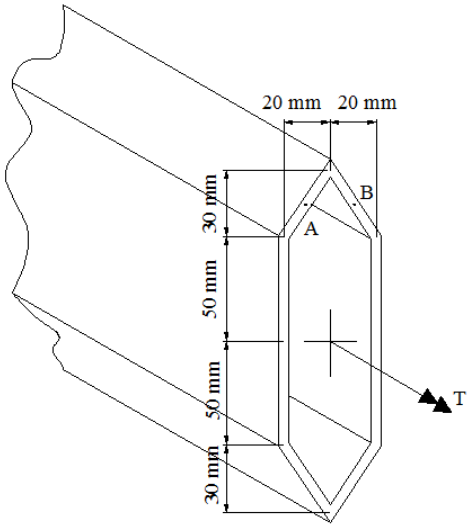


Figura 5.23: Figura do exercício 7

8. O tubo de plastico está sujeito a um torque de150Nm. Determinar a dimensão média a de seus lados se a tensão de cisalhamento admissivel é 60MPa. Cada lado tem espessura de 3mm. Resposta: $a = 28,9$mm.

9. O tubo de plástico está sujeito a um torque de 150Nm. Determinar a tensão de cisalhamento média nele desenvolvidase cada lado tem espessura de 3mm e $a = 200$mm. Resposta: $\tau = 1,25$MPa.

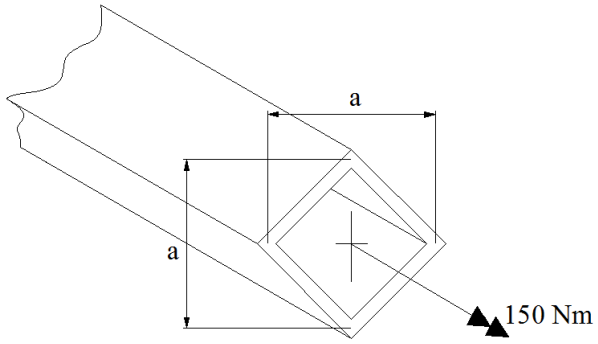


Figura 5.24: Figura dos exercícios 8 e 9

10. Calcular o torque máximo admissivel em um tubo de paredes finas de espessura constante de $1,5$ mm e seção representada na Figura 5.25 (dimensões externas dadas em mm) para uma tensão admissivel ao cisalhamento de $2,5$ MPa.

    Resposta: $10,89$ Nm.

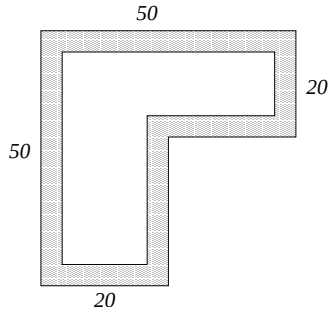


Figura 5.25: Figura do exercício 10

11. Um eixo de comprimento $1,6$ m e seção vazada representada na Figura 5.26 (dimensões em mm) está sujeito a um torque de 90 Nm. Dado o módulo de eslasticidade transversal de 80 GPa, calcular as tensões nos pontos **a** e **b** e o ângulo de torção.

    Resposta: $4,732$ MPa e $0,005543$ rad.

12. A Figura 5.27 representa a seção transversal de um tubo de paredes finas, de alumínio, com $\overline{\tau} = 85$ MPa e $G = 27000$ MPa. O trecho

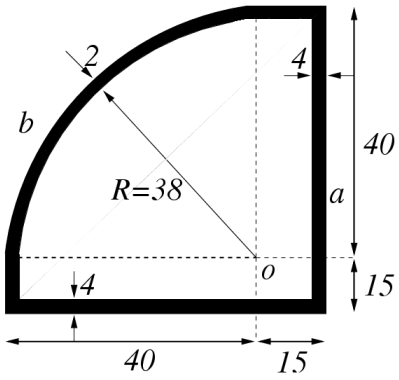


Figura 5.26: Figura do exercício 11

CD tem forma semicircular. As dimensões externas estão indicadas em mm. As espessuras são $e_1 = 4$ mm em AB e $e_2 = 3$ mm em $ACDB$. Calcular o momento de torção máximo admissível e os valores correspondentes do fluxo de cisalhamento, as tensões nos pontos **P** e **M**, e do ângulo de torção por metro de comprimento.

Resposta: $192,56$ kN; 255 N/mm; 85 MPa e $63,75$ MPa; $0,009095$ rad

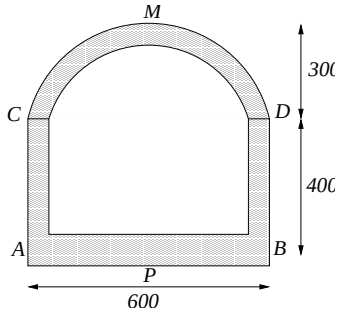


Figura 5.27: Figura do exercício 12

13. Um eixo tubular de parede fina, com diâmetro interno de 100mm, está sujeito a um torque de 5675Nm. Calcular a espessura da parede para uma tensão admissivel ao cisalhamento de 91MPa, usando a teoria aproximada de tubos de paredes finas e usando a teoria exata de torção.

    Resposta: $3,7$mm e $3,8$mm.

14. Deduzir as propriedades para cálculo de τ e θ em um tubo circular de parede fina (raio médio **r** e espessura **e**), sujeito a um torque T. Comparar com as propriedades deduzidas para seção anular.

15. Comparar as tensões de cisalhamento e os ângulos de torção em dois tubos de paredes delgadas, um de parede delgadas,um de seção cirular

e outro de seção quadrada, mas de mesmo comprimento, mesma área de seção e mesma espessura, sujeitos ao mesmo torque.

Resposta: $\frac{\tau_{circular}}{\tau_{quadrada}} = 0,7854$ e $\frac{\theta_{circular}}{\theta_{quadrada}} = 0,617$.

16. Uma chapa de aço de 500mm de largura e 3mm de espessura é usada para fazer um tubo, curvando-se a chapa em 360^0 e soldando-se as bordas juntas longitudinalmente (topo a topo). As formas a considerar são:

    (a) circular,

    (b) quadrada

    (c) retângular 150×100mm

    Admita um comprimento médio de 500mm (nenhum esforço na placa devido ao encurvamento e cantos retos para seções não circulares). Calcular o momento torsor máximo admissivel e o correspondente ângulo de torção para 2m de comprimento, em cada caso, dados $G = 80$GPa e $\overline{\tau} = 70$MPa.

    Resposta: $8,04$kNm e $0,0224$rad; $6,25$kNm e $0,0287$rad; $5,99$kNm e $0,0299$rad.

17. A Figura 5.28 representa a seção tansversal da fuselagem de um avião feito de liga de alumínio ($G = 27$ GPa). As espessuras das placas são 1,5 mm em AB e CD; 1,2 mm em BC e 1,0 mm em DA. Dados $\overline{\tau} = 85$ MPa, calcular o momento torsor admissível e o correspondente ângulo de torção.

    Resposta: 124,59 kN e 0,00575 rad.

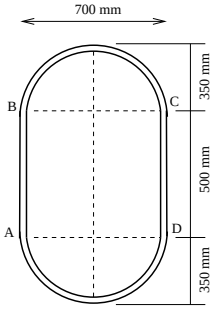


Figura 5.28: Figura do exercício 17

Capítulo 6

Solicitação por momento fletor

6.1 Introdução

Uma barra de eixo reto e cargas transversais está sujeita, dentre outros esforços, a momentos. A barra é designada por **viga** e o efeito do **momento fletor** é a **flexão**. A flexão em vigas pode ser classificada de acordo com dois critérios, ou seja:

1. **De acordo com os esforços simples atuantes na seção transversal**

   Flexão Pura: na seção atua somente momento fletor, sendo os demais esforços nulos. Exemplo: na viga da Figura 6.1 há somente momento fletor constante em todas as seções entre os apoios A e B.

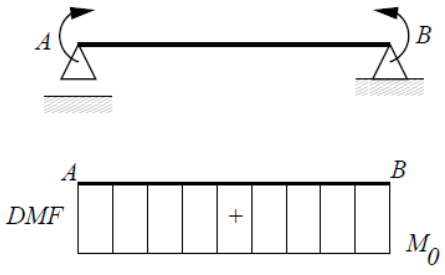


Figura 6.1: Flexão Pura

   Flexão Simples: na seção atuam simultaneamente, o momento fletor e o esforço cortante. Exemplo: na viga da Figura 6.2, observa-se nas seções do balanço a existência de momento fletor e esforço cortante. No vão entre os apoios, ao contrário, ocorre flexão pura.

   Flexão Composta: na seção há combinação de momento fletor e esforço normal.

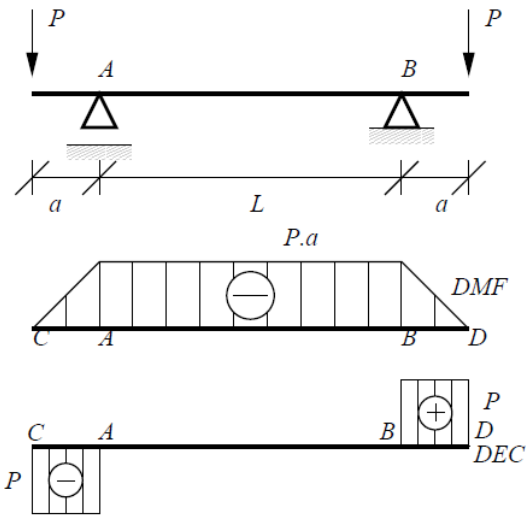


Figura 6.2: Flexão Simples

2. **De acordo com a direção dos momentos fletores atuantes**

   Seja a viga em flexão da Figura 6.3a ,cuja seção tranversal é dada pela Figura6.3b

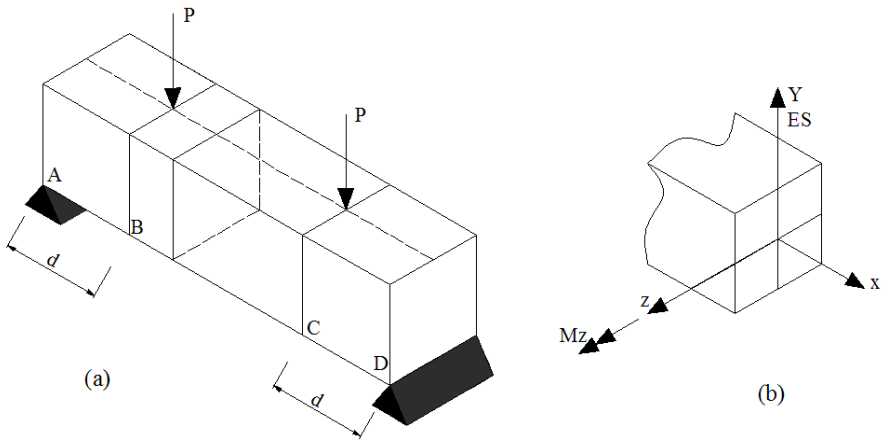


Figura 6.3: Flexão Simples

Denomina-se eixo de solicitação (ES) como aquele formado pela interseção do plano das cargas com a seção transversal. Para o exemplo em questão, o ES coincide com o eixo vertical y e o eixo de rotação é o eixo perpendicular ao EI, no caso o eixo z. A Figura 6.3b ilustra estes dois eixos.

Desta forma classifica-se a flexão de acordo com a posição do eixo de solicitação da seguinte forma:

FLEXÃO NORMAL OU RETA: O ES coincide com um dos eixos principais de inércia.

Exemplo: Na Figura 6.4a e Figura6.4b os ES (eixo y) e os eixos de rotação (eixo z) coincidem com os eixos principais de inércia.

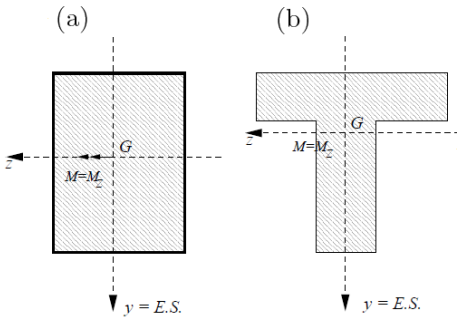


Figura 6.4: Flexão normal ou reta

FLEXÃO OBLIQUA: o ES e o eixo de rotação não coincidem com os eixos principais de inércia.

Exemplo: Na Figura 6.5a e Figura 6.5b nota-se que os ES e os eixos de rotação não coincidem com os eixos principais de inércia, que são os eixos y e z.

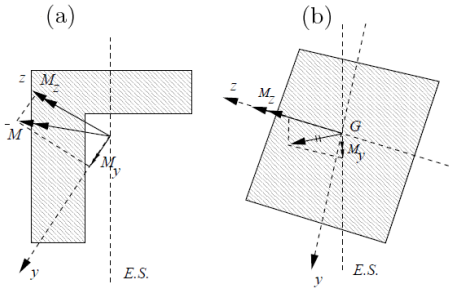


Figura 6.5: Flexão normal ou reta

No curso de Resistência dos Materiais I serão estudadas as tensões e deformações em vigas submetidas a flexão normal, pura ou simples.

6.2 Flexão normal

6.2.1 Cálculo das Tensões Normais

Para o cálculo das tensões normais serão estudadas vigas horizontais com pequena inclinação sujeitas a flexão pura e reta admitindo-se pequenas deformações elásticas e proporcionais, sendo válida portanto a Lei de Hooke: $\sigma_x = E\varepsilon_x$

Pode-se entender o mecanismo de flexão observando a viga da Figura 6.6 Desta análise, nota-se que: - Linhas longitudinais (fibras longitudinais ao eixo) assumem o aspecto curvo. O eixo deformado à flexão é a linha elástica.

- Linhas transversais (seções transversais) permanecem retas (planas) e $\perp$s ao eixo deformado. Sofrem um rotação em torno do eixo-z local.

- Uma camada de fibras situadas em um plano horizontal na configuração inicial mantém o comprimento L ($\varepsilon_x = 0 \rightarrow \sigma_x = 0$). É designada por superfície neutra e sua interseção com a seção transversal é a linha neutra (LN).

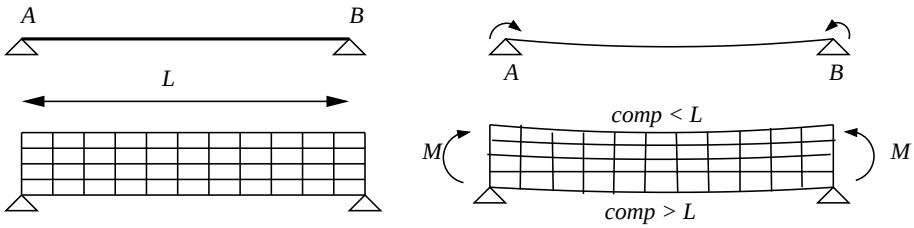


Figura 6.6: Configurações inicial e deformada de uma viga biapoia sob flexão pura.

$$M > 0 \begin{cases} \text{Fibras superiores à LN são comprimidas / encurtadas} \\ \text{Fibras inferiores à LN são tracionadas / alongadas} \end{cases}$$

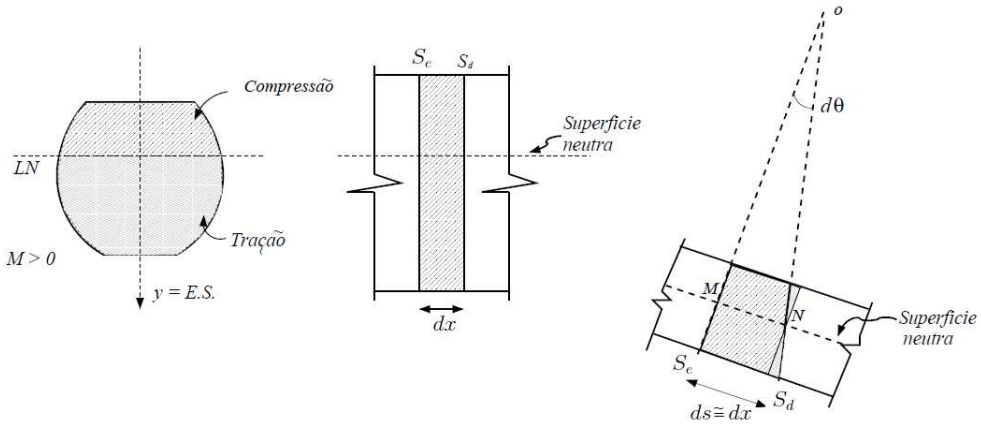


Figura 6.7: Elemento de volume sob flexão

Seja o elemento de volume genérico, limitado pelas seções S_e *e* S_d, de comprimento elementar dx. Na configuração deformada, $d\theta$ é o ângulo entre S_e *e* S_d, o ponto O é o centro de curvatura e $OM = ON = \rho$ é o raio de curvatura da linha elástica na superfície neutra. Considerando $ds \simeq dx$ para vigas horizontais ou de pequena inclinação e para pequenas deformações. A curvatura é:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \simeq \frac{d\theta}{dx}$$

Uma paralela a S_e pelo ponto N mostra (sombreado) o encurtamento das fibras superiores e o alongamento das fibras inferiores à superfície neutra.

Estas deformações longitudinais du são mostradas na fig(6.8b). Seja uma camada de fibras genérica, paralela à superfície neutra, de ordenada y em relação à LN ($-ds \leq y \leq di$). As Figuras6.8(c) e 6.8(d) mostram as correspondentes deformações específicas ε_x e tensões normais σ_x.

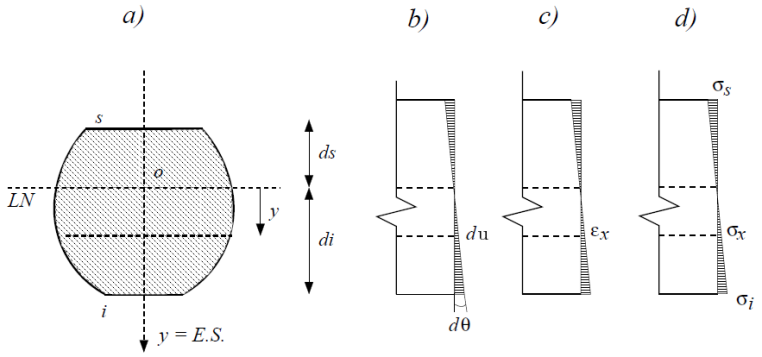


Figura 6.8: Diagramas de deformação longitudinal, especifíca e tensões

Da análise da Figura 6.8 pode-se observar que:

$$du = d\theta y \tag{6.1}$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d\theta}{dx} y \tag{6.2}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{d\theta}{dx} y \tag{6.3}$$

Nota-se pela expressão 6.3 que sendo $d\theta/dx$ constante, a tensão normal σ_x varia lineramente com y, ou seja:

$$\sigma_x = ky \tag{6.4}$$

$$k = E\frac{d\theta}{dx} \tag{6.5}$$

Recorda-se que o esforço normal resultante na seção é nulo. De acordo com o estudado na seção 3.1, tem-se que:

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0 \tag{6.6}$$

Combinando a equação 6.6 com a equação 6.4, tem-se:

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A K y dA = K \int_A y dA = 0 \tag{6.7}$$

Desta forma, pelos conceitos da geometria das massas, a origem do eixo y, que define a posição da LN, coincide com a ordenada do baricentro, definida por:

$$\overline{y} = \frac{\int_A y dA}{A} = 0$$

Conclui-se, então, que a LN passa pelo baricentro da seção.

Recorrendo novamente aos conceitos apresentados na seção 3.4, tem-se que:

$$M_z = \int_A y\, \sigma_x\, dA \tag{6.8}$$

Inserindo a expressão 6.4 na equação 6.8, chega-se:

$$M_z = \int_A yky\, dA = k \int_A y^2\, dA \tag{6.9}$$

Onde $\int_A y^2 dA = I$, sendo I o momento de inércia em relação LN. Tem-se portanto:

$$k = \frac{M}{I} \tag{6.10}$$

Retornando o valor de k na expressão 6.4 encontra-se a relação entre o momento fletor M e a correspondente tensão σ_x

$$\sigma_x = \frac{My}{I} \tag{6.11}$$

Observações:

- O diagrama de tensões da fig6.8(d) é a vista longitudinal do sólido de tensões (fig6.9 para um seção retangular). Nas aplicações, o diagrama de tensões é suficiente para representar a variação das tensões normais na seção transversal.

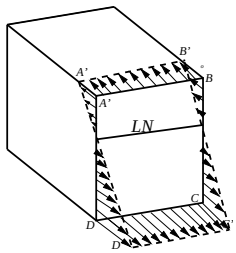


Figura 6.9: Sólido de tensões

- Cálculo das Tensões Extremas (Máximas)

$$y = -ds \rightarrow \sigma_s = \frac{M}{I}(-ds) = -\frac{M}{I/ds}$$
$$y = di \rightarrow \sigma_i = \frac{M}{I}(di) = \frac{M}{I/di}$$

Fazendo $I/ds = Ws$, $I/di = Wi$ - Módulos de resistência à flexão (dimensional L^3),

Obtém-se $\sigma_s = -M/Ws$ e $\sigma = M/Wi \rightarrow \sigma_{max} = M/W$ em valor absoluto.

$$M > 0 \begin{cases} \sigma_s = \text{Max. Tensão de compressão} \\ \sigma_i = \text{Max. Tensão de tração} \end{cases}$$

$$M < 0 \begin{cases} \sigma_s = \text{Max. Tensão de tração} \\ \sigma_i = \text{Max. Tensão de compressão} \end{cases}$$

6.3 Exercícios

1. A viga representada na fig6.10 tem seção constante, circular com diâmetro 0,25 m. Dados L = 1,5 m; a = 0,35m e P = 120 kN, calcular σ_{max}. Resposta: 27,38 MPa.

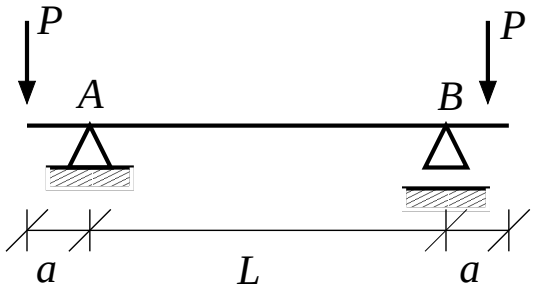


Figura 6.10: Exercício 1

2. Uma comporta de madeira de altura $h = 5,5$m é constituída de vigas verticais AB de espessura $e = 300$mm, simplesmente apoiadas no topo e no fundo. Determinar a tensão máxima de flexão nas vigas, considerando que o peso especifico da água seja 10kN/m3. (Resposta: $7,1$MPa)

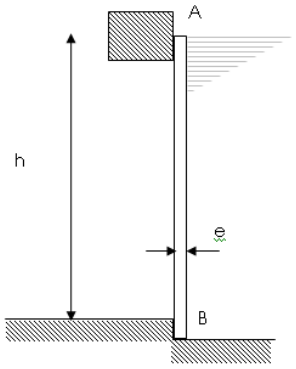


Figura 6.11: Figura do exercício 2

3. Uma viga é construída com quatro peças de madeira coladas como mostrado abaixo. Supondo que o momento que atua sobre a seção transversal seja $M = 450\text{Nm}$, determinar a força resultante que a tensão de flexão produz sobre a tábua superior A e na tábua lateral B. Resposta:$F_A = 0$; $F_B = 1,50\text{kN}$.

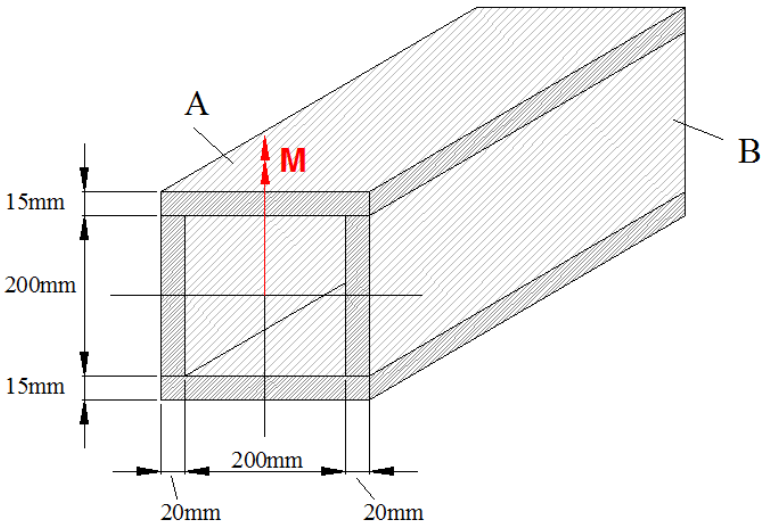


Figura 6.12: Figura do exercício 3

4. Calcular as tensões normais extremas da viga da Figura 6.13, dado P = 7 kN, representada a seção transversal constante. Resposta: comp. 153,2 MPa nas fibras sup; tração 88,7 nas fibras inf.

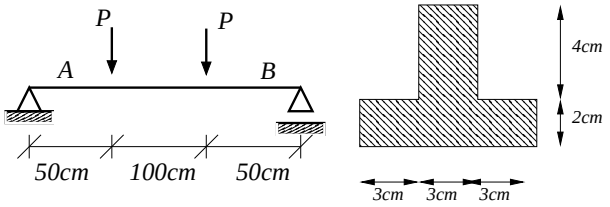


Figura 6.13: Exercício 4

5. A viga representada na fig6.14 tem seção constante, retangular com h = 2b. Calcular as dimensões h e b para as tensões admissíveis 12 MPa à tração e 10 MPa à compressão, de um certa qualidade de madeira. Resposta: mínimo 132 x 264 mm.

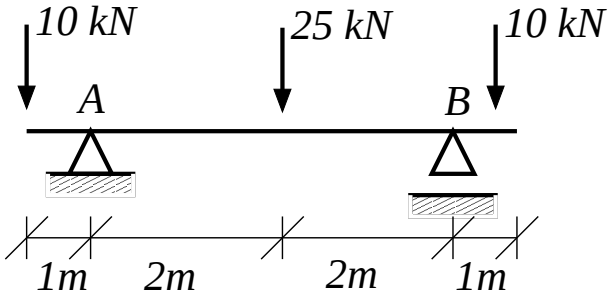


Figura 6.14: Exercício 5

6. Em uma seção anular (coroa circular) a razão entre os diâmetros externo interno é D/d = 1,5. Pede-se dimensiona-la para suportar um momento fletor de 32 kNm, para uma tensão admissível de 80 MPa. Resposta: D = 172 mm.

7. Dimensionar um eixo de aço ($\overline{\sigma}$ =120 MPa, E=210 GPa) de seção circular cheia para suportar um momento flexão de 60 kNm. Calcular o ângulo de rotação específica da seção. Resposta: Diâmetro 172 mm; Rotação 0,00665 rd/m.

8. Uma viga tem momento fletor máximo 18 kNm. Para ama seção transversal constante e retangular **a x 2a**, vazada por um retangulo **0,6 a x a** (conservada a simetria), dimensioná-la para uma tensão admissível 10MPa. Resposta: a = 143 mm

9. Calcular o valor mínimo de a na seção transversal da viga da Figura6.15 para $\overline{\sigma_t}$ =100MPa e $\overline{\sigma_c}$ =60 MPa. Resposta: a = 41 mm.

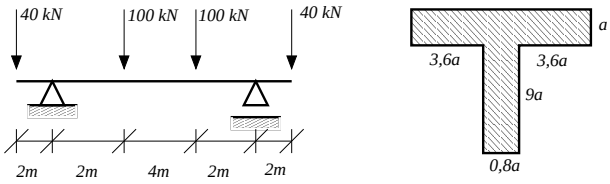


Figura 6.15: Exercício 9

10. Dimensionar a viga abaixo à flexão (**a**=?) e representar o diagrama de tensões da seção C. A viga tem seção constante de ferro fundido com tensões admissível 35 MPa à tração e 140 MPa à compressão. Escolher a <u>mais favorável</u> entre as posições 1 (T) e (⊥L) da seção. Resposta: $a = 4{,}2$ cm, posição 2

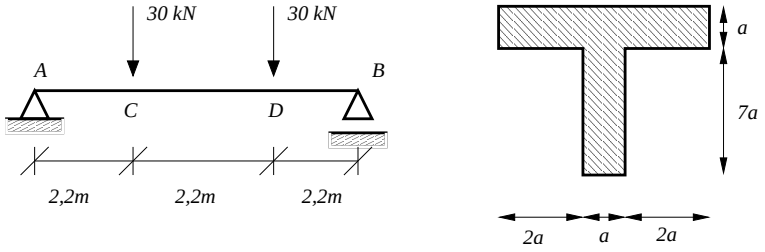


Figura 6.16: Exercício 10

11. Calcular o valor máximo admissível de **q** na viga da fig6.17, para tensões admissíveis 140 MPa à tração e 84 MPa à compressão, sendo a seção transversal constante mostrada (dimensões em cm). Resposta: 21,3 kN/m

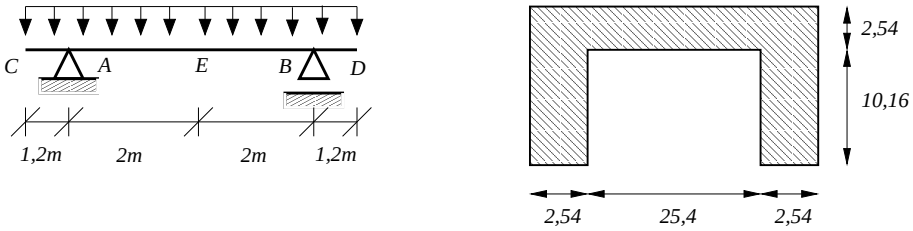


Figura 6.17: Exercício 11

12. A viga da fig6.18 tem seção constante em duplo T assimétrico (mom. de inércia em relação à LN 7570 cm^4), que pode ser colocado na posição 1 (T) ou 2 (⊥L). Dados $\overline{\sigma}_t$ =150 MPa e $\overline{\sigma}_c = 120$ MPa, calcular q_{adm} na posição mais eficiente (aquela que suporta maior carga). Resposta: 18,55 kN/m na posição 2.

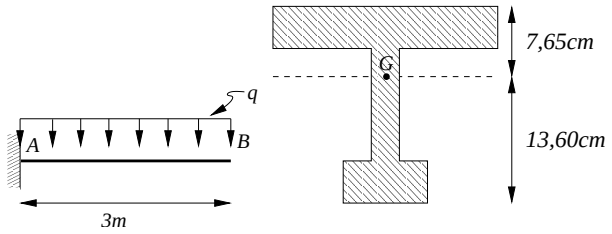


Figura 6.18: Exercício 12

13. A viga abaixo é constituída por duas peças de madeira de seção 300 mm x 100 mm, conforme mostra a Figura. Dadas as tensões admissíveis 12 MPa à compressão e 18 MPa à tração, calcular P_{adm} e representar o diagrama de tensões da seção E. Resposta: P = 102 kN.

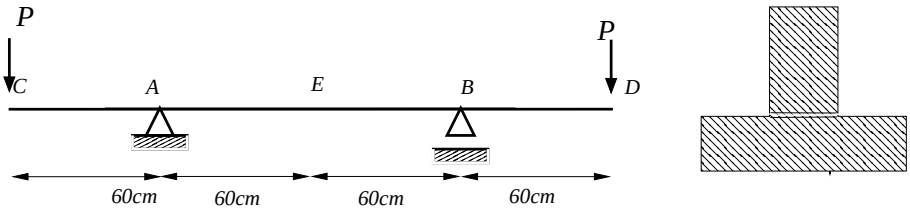


Figura 6.19: Exercício 13

14. Foram propostos duas soluções para o projeto de uma viga. Determinar qual delas suportará um momento $M = 150\text{kNm}$ com o menor esforço de flexão. Qual é este esforço? Com que porcentagem ele é mais eficiente?

    Resposta: $\sigma = 74,7\text{MPa}$; percentual de eficiência = 53,0 %

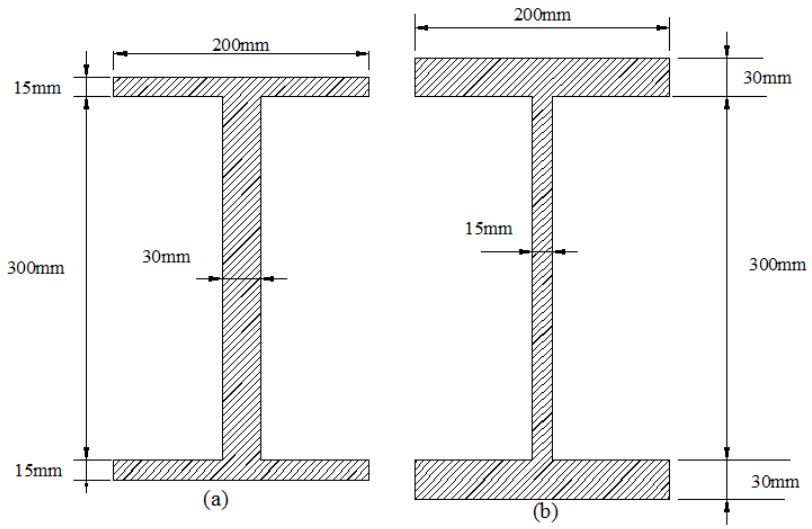


Figura 6.20: Figura do exercício 14

6.4 Várias formas da seção transversal

6.4.1 Seções simétricas ou assimétricas em relação à LN

Com o objetivo de obter maior eficiência (na avaliação) ou maior economia (no dimensionamento) deve-se projetar com $\sigma_{max} = \overline{\sigma}$, onde σ_{max} é a tensão maxima na seção e $\overline{\sigma}$ é a tensão maxima admissivel(propriedade do material).

Levando-se em conta que

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_i} = \frac{d_s}{d_i}$$

há dois casos a considerar:

1. Se o material é tal que $\overline{\sigma}_s \neq \overline{\sigma}_i$ então é indicada a forma assimétrica em relação à LN, ficando esta mais próxima da fibra de menor $\overline{\sigma}$. A situação ideal corresponde a $\frac{d_s}{d_i} = \frac{\overline{\sigma_s}}{\overline{\sigma_i}}$, pois neste caso pode-se projetar $\sigma_s = \overline{\sigma_s}$ e $\sigma_i = \overline{\sigma_i}$.Considere, por exemplo, uma seção transversal de uma viga com $\frac{\sigma_c}{\sigma_t} = 0,5$. Assim a distribuição da tensão normal é mostrada na Figura 6.21. O ideal, neste caso, é então dimensionar a área da seção transversal com $\frac{d_s}{d_i} = 0,5$.

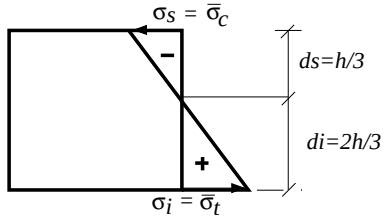


Figura 6.21: Forma assimétrica.

2. Se o material é tal que $\overline{\sigma}_c = \overline{\sigma}_t$, então é indicada a seção simétrica em relação a LN, ou seja: $d_s = d_i = h/2$. Este tipo de projeto pode contemplar portanto a situação ideal de: $\sigma_{max} = \overline{\sigma}$ (tração ou compressão).

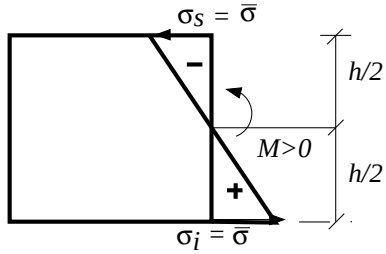


Figura 6.22: Forma simétrica.

6.4.2 Seções simétricas à LN - Seções I

Sejam várias seções simétricas a LN, com a mesma área A:

- Seção circular de diâmetro D:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \tag{6.12}$$

$$W = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{AD}{8} \tag{6.13}$$

- Seção retangular de base b e altura h:

$$A = bh \tag{6.14}$$

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6} \tag{6.15}$$

Das expressões 6.14 e 6.15, nota-se que para seções retangulares de mesma área, a mais eficiente é a de maior altura(maior W)

- Seção quadrada de lado l:

$$A = l^2 \tag{6.16}$$

$$W = 0,167Al \tag{6.17}$$

Comparando a expressão 6.12 com a expressão 6.14, tem-se $l = 0,886D$. Assim, a equação 6.17 fica:

$$W = 0,148AD \tag{6.18}$$

Na Figura 6.23 esses perfis são comparados em termos de ordem crescente de eficiência, do perfil circular ao retangular.Vale lembrar que maior área A da seção transversal **não** significa maior módulo de resistência a flexão W, pois este depende da **forma** da seção.

1. Entre duas seções de mesmo W, a mais **econômica** é a de menor A
2. Entre duas seções de mesma A, a mais **eficiente** é a de maior W

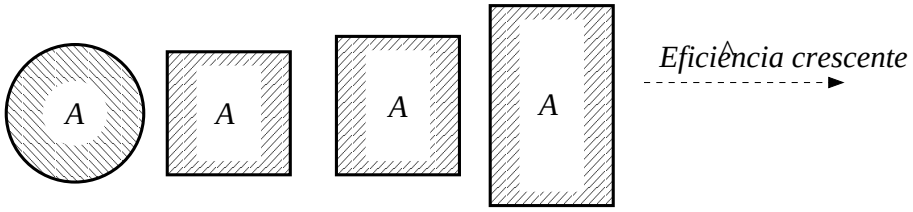


Figura 6.23:

Conclui-se então que, para obter maior eficiência, deve-se dispor a maior massa do material (área de seção) o mais afastado possível da LN.

Todavia, na prática, adotam-se perfis como o mostrado na Figura 6.24

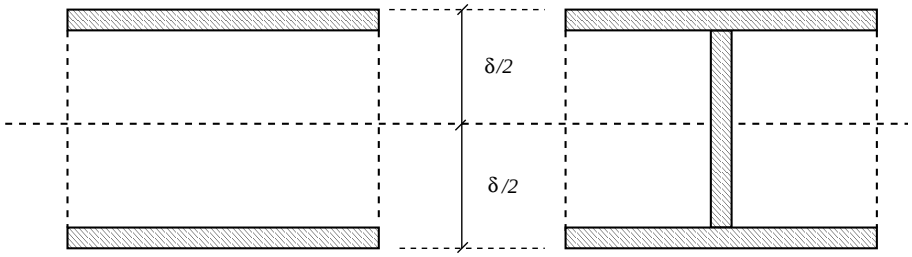


Figura 6.24:

- Perfis I ou S têm altura bem maior que a largura.
- Perfis H ou WF (abas largas) têm largura mais próxima da altura.

Os fabricantes de perfis estruturais fornecem Tabelas com as caracteristicas geométricas (dimensões, área, momento de inércia...) necessárias ao projeto. No curso de Resistência dos Materiais I serão utilizadas as Tabelas do livro "Resistência dos Materiais" de *Beer e Johnston*, que estão reproduzidas em anexo.

Os perfis são designados pela letra S(perfil I) ou W(perfil H) seguida da altura nominal (mm) e da sua massa em kg por metro (kg/m). Encontram-se em ordem decrescente de altura e, em cada grupo de mesma altura, em ordem decrescente de peso.

6.5 Exercícios

1. Calcular as tensões extremas na viga da Figura 6.25, indicando a seção onde ocorrem para:

   a) Perfil W130 $\times$ 28, 1. Resposta: $\pm 66,1$ MPa

   b) Perfil W150 $\times$ 37, 1. Resposta: $\pm 44,28$MPa



Figura 6.25: Exercício 1

2. Calcule as tensões extremas na viga abaixo, cuja seção é um perfil $W150\text{x}37,1$, se além da carga indicada a viga está sujeita a ação de seu próprio peso.

   Resposta: $\pm 2,86$ MPa

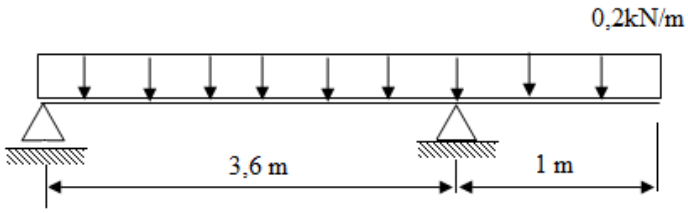


Figura 6.26: Exercício 2

3. Escolher o perfil I mais econômico para a viga da Figura 6.27, para $\overline{\sigma} = 140$MPa. Desprezar o peso próprio.

   Resposta: S $510 \times 97,3$

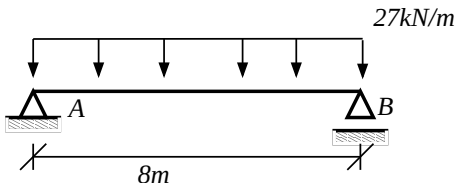


Figura 6.27: Exercício 3

4. A viga da Figura 6.28 é contituida de um perfil W 200×86, de aço com $\overline{\sigma} = 130$ MPa. Calcular o valor máximo admissivel de P desprezando o peso próprio.

   Resposta: $59,57$ kN/m

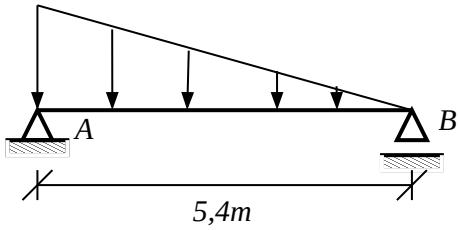


Figura 6.28: Exercício 4

5. Escolher o perfil mais econômico (I ou W, conforme indicado) para cada uma das Figuras 6.29, desconsiderando o efeito do peso próprio. As tensões admissíveis são dadas.

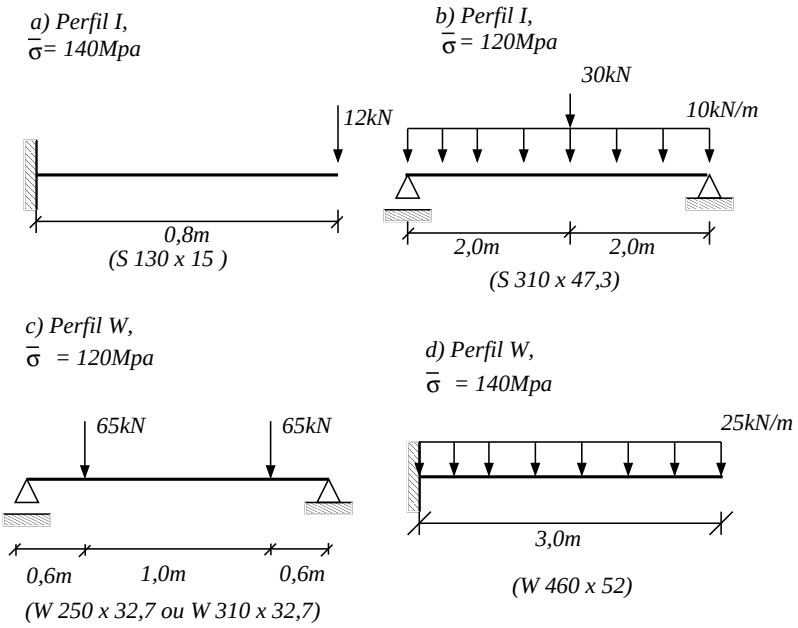


Figura 6.29: Exercício 5

6. Calcular o valor máximo admissível da carga P, na viga na Figura 6.30 para uma $\overline{\sigma} = 140\text{MPa}$, se a viga é um perfil $W150 \times 37,1$. Não desprezar o peso próprio do perfil.

   Resposta: $14,88$ kN

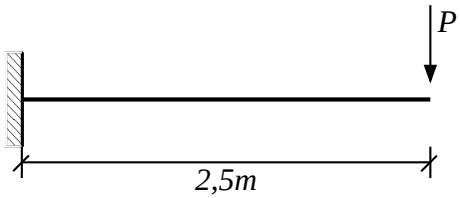


Figura 6.30: Exercício 6

7. Duplicando a carga da viga do exercício 3 ($q' = 54$ kN/m) e conservando o perfil adotado, para se obter resistência são soldados duas

chapas, com $\overline{\sigma} = 140$ MPa, sobre as mesas, de espessura do reforço igual a espessura da mesa. Determine a largura das chapas e o trecho da viga em que é necessário usá-las. Desprezar os pesos próprios.

Resposta: largura 121 mm, reforço nos 5,0 m centrais da viga

8. Para uma tensão admissível de 150 MPa, calcular o valor máximo admissivel de q na viga da Figura 6.31, constitudida por duas chapas de aço, 200 mm de largura e 12 mm de espessura, soldadas a dois perfis I (S 180 × 30), conforme indicado na Figura 6.31.

   Resposta: q = 27,05 kN/m

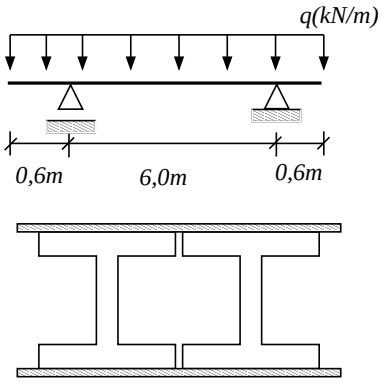


Figura 6.31: Exercício 8

6.6 Vigas de dois materiais

São vigas de madeira reforçadas por cintas metálicas, vigas de concreto reforçadas com barras de aço (concreto armado), vigas-sanduiche, etc, genericamente designadas por vigas armadas.

Estas vigas são constituidas por elementos longitudinais (camadas) de materiais diferentes, seguramente aderentes de modo a ter necessária resistência às tensões tangenciais longitudinais

Para este estudo, são admitidas as mesmas hipóteses da flexão em vigas de um só material. Portanto, para um momento fletor $M_z = M$, as seções permanecem planas e normais ao eixo e a deformação específica em uma camada de ordenada y em relação a LN (linha neutra) é $\varepsilon_x = ky$ (k constante) A Figura 6.32 representa a seção transversal, o diagrama de deformações específicas e o diagrama de tensões de uma viga em concreto armado, com as barras de aço resistindo a tração e o concreto a compressão.

Para este estudo, são necessárias estabelecer as equações de equilíbrio e de compatibilidade de deformação.

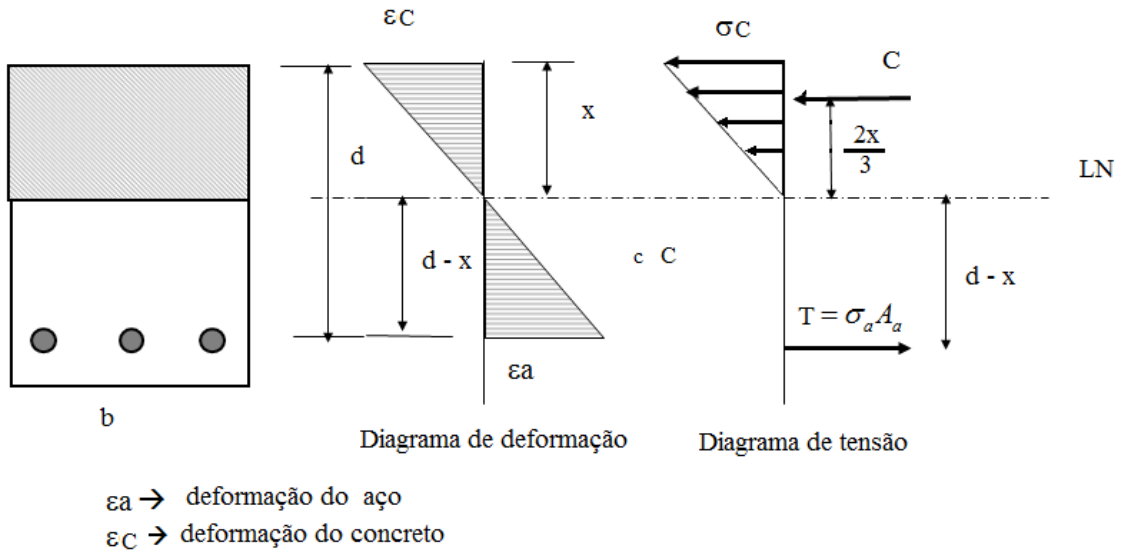


Figura 6.32: Viga de dois materiais

- Compatibilidade de deformações:

$$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_c} = \frac{d-x}{x} \tag{6.19}$$

- Equilíbrio:

  $\Sigma Fx = 0 \rightarrow C = T$

$$C = \frac{\sigma_c x}{2} b$$

$$T = \sigma_a A_a$$

Como $C = T$, tem-se:

$$\frac{\sigma_c x}{2} b = \sigma_a A_a \tag{6.20}$$

$\sum M = 0 \rightarrow M = M_T + M_C$

$$M_T = T(d-x)$$

$$M_C = C\frac{2x}{3}$$

Portanto, tem-se:

$$M = [\frac{2x}{3} + (d-x)]\sigma_a A_a \tag{6.21}$$

Substituindo a lei de Hooke na relação 6.19, tem-se:

$$\frac{\frac{\sigma_a}{E_a}}{\frac{\sigma_c}{E_c}} = \frac{d-x}{x} \tag{6.22}$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_c}\frac{E_c}{E_a} = \frac{d-x}{x} \tag{6.23}$$

Fazendo $n = \frac{E_a}{E_c}$ chega-se, portanto a um conjunto de três equações e três incógnitas, que são: a posição da $LN(x)$ e as tensões no aço(σ_a) e no concreto(σ_c).

$$n(\frac{\sigma_c}{\sigma_a}) = \frac{x}{d-x} \tag{6.24}$$

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_a} = \frac{2A_a}{xb} \tag{6.25}$$

$$M = [\frac{2x}{3} + (d-x)]\sigma_a A_a \tag{6.26}$$

De 6.24 em 6.25:

$$n\frac{2A_a}{xb} = \frac{x}{d-x}$$

$$2nA_a(d-x) = x^2 b$$

$$2nA_a d - 2nA_a x = x^2 b$$

$$bx^2 + 2nA_a x - 2nA_a d = 0 \tag{6.27}$$

Dividindo 6.27 por $2nA_a$ e fazendo $a = \frac{b}{2nA_a}$, tem-se:

$$\frac{b}{2nA_a}x^2 + x - d = 0 \tag{6.28}$$

$$ax^2 + x - d = 0$$

$$x = -\frac{1 \pm \sqrt{1+4ad}}{2a} \tag{6.29}$$

6.6.1 Exemplo

- Determinar as tensões máximas no aço e no concreto em uma viga de concreto armado sujeita a um momento fletor positivo de 70 kNm. A Figura 6.33 representa a seção transversal e as dimensões estão indicadas em mm. Cada uma das barras de aço tem 700mm^2 de área. Admitir $E_a/E_c = n = 15$.

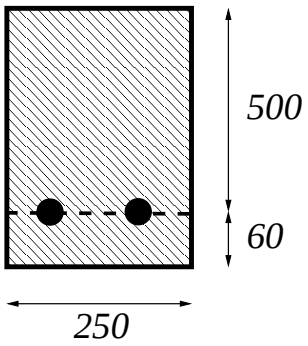


Figura 6.33: Figura do Exercício 6.6.1

$$\sigma_a = ?; \sigma_c = ?$$

$$M = 70kNm$$

$$A_a = 700mm^2(p/barra)$$

$$d = 500mm$$

$$b = 250mm$$

$$n = \frac{E_a}{E_c} = 15$$

- Solução:

$$a = \frac{b}{2nA_a} = \frac{250}{2 * 15 * 1400} = \frac{1}{168}$$

$$x = -\frac{1 \pm \sqrt{1 + 11,905}}{1/84}$$

Resolvendo:

$$x_1 = 217,75mm$$

$$x_2 = -385,75mm$$

Portanto:

$$x = 217,75mm$$

Equação 6.26:

$$10 * 10^6 = [\frac{2 * 217,75}{3} + (500 - 217,75)]1400\sigma_a$$

$$\sigma_a = 116,98 = 117,0MPa$$

Equação 6.25:

$$\sigma_c = \frac{117 * 2 * 1400}{217,5 * 250} = 6,02MPa$$

Resposta: $\sigma_a = 117$ MPa e $\sigma_c = 6.02$ MPaResposta: $\sigma_a = 117$ MPa e $\sigma_c = 6.02$ MPa

6.6.2 Exercícios

1. Uma viga bi-apoiada de concreto armado suporta uma carga uniformemente distribuída de 25kN/m em um vão de 5m. A viga tem seção retangular de 300mm de largura por 550mm de altura e a armadura de aço tem área total de 1250mm^2, com os centros das barras colocados a 70mm da face inferior da viga. Calcular as tensões máximas no concreto e média no aço, dados $E_c = 20$Gpa e $E_a = 210$Gpa.

   Admitir que o concreto não resiste à tração
   (Resposta: $7,4$Mpa e $147,2$Mpa)

2. Uma viga de concreto armado tem seção retangular 200 mm $\times$ 400 mm. A armadura é constituída por três barras de aço de 22mm de diâmetro, cujos centros estão a 50mm da face inferior da viga. Calcular o momento fletor positivo máximo que a viga pode suportar, dados: $E_c = 21$Gpa, $E_a = 210$Gpa, $\overline{\sigma_c} = 9.3$Mpa, $\overline{\sigma_a} = 138$Mpa
   (Resposta: $42,03$kNm)

3. A Figura 6.34 representa um trecho de uma laje de concreto armado, com armadura longitudinal de barras de aço de 16 mm de diâmetro a cada 150 mm. Calcular a tensão máxima no concreto e a tensão média no aço para um momento fletor positivo de 4 kNm a cada 300mm de largura da laje. Dados: $E_c = 21$ GPa, $E_a = 210$ GPa,
   (Resposta: 7,65 MPa e $114,8$ MPa)

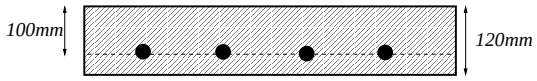


Figura 6.34: Figura do Exercício 3

4. Uma laje de concreto com 150mm de espessura é reforçada longitudinalmente com barras de aço de 25mm de diâmetro a cada 80mm de largura, cujos centros estão a 10mm da face inferior da laje. Determinar o momento fletor máximo admissível por metro da laje.

   Adotar $n = 12$ e tensões admissíveis 150 MPa para o aço e 8Mpa para o concreto.
   (Resposta: 37,1 kNm/m)

6.7 Flexão Inelástica

Referência a **R.C. HIBBELER**. Resistência dos Materiais. 5º Edição

As equações para determinar a tensão normal provocada pela flexão, desenvolvidas anteriormente, são válidas apenas se o material comporta-se de maneira linear-elástica. Se o momento aplicado provocar escoamento do material, deve-se então usar uma análise plástica para determinar a distribuição de tensão. No entanto, as três condições para flexão de elementos retos tanto no caso elástico como no plástico, devem ser satisfeitas.

1. *Distribuição da Deformação Normal Linear - ε_x.* Com base em condições geométricas, mostramos na seção anterior que as deformações normais que se desenvolvem no material variam sempre linearmente, de zero, no eixo neutro da seção transversal, até o máximo no ponto mais afastado deste eixo neutro.

2. *O Esforço Normal é Nulo.* Como somente o momento interno resultante atua sobre a seção transversal, a força resultante provocada pela distribuição de tensão deve ser nula. E, uma vez que σ_x cria uma força sobre a área dA tem-se $dF_x = \sigma_x dA$ (Figura 6.36), para toda área da seção transversal A tem-se:

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0 \tag{6.30}$$

   A equação 6.30 permite obter a localização do eixo neutro.

3. *Momento Resultante.* O momento resultante na seção deve equivaler ao momento provocado pela distribuição de tensão em torno do eixo neutro. Como o momento da força $dF_x = \sigma_x dA$ em torno do eixo neutro é $dM_z = y(\sigma_x dA)$ o somatório dos resultados em toda a seção transversal será:

$$M_z = \int_A y\sigma_x dA \tag{6.31}$$

Essas condições de geometria e carregamento serão usadas agora para mostrar como determinar a distribuição de tensão em uma viga submetida a um momento interno resultante que provoca escoamento do material. Supõem-se, ao longo da discussão, que o material tem o mesmo diagrama tensão-deformação tanto sob tração como sob compressão. Para simplificar, considera-se que a viga tenha área de seção transversal com dois eixos de simetria; nesse caso, um retângulo de altura h e largura b, como o mostrado na Figura 6.37. Serão considerados três casos de carregamento que têm interesse especial. São eles: *Momento Elástico Máximo*; *Momento Plástico* e *Momento Resistente.*

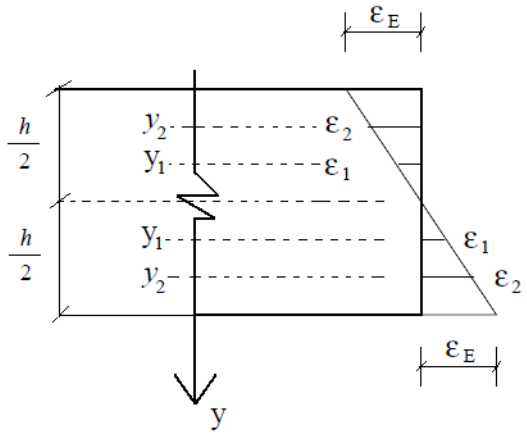


Figura 6.35: Diagrama de deformação

Momento Elástico Máximo.

Suponha-se que o momento aplicado $M_z = M_E$ seja suficiente apenas para produzir deformações de escoamento(ε_x) nas fibras superiores e inferiores da viga, conforme mostra a Figura 6.35. Como a distribuição de deformação é linear, pode-se determinar a distribuição de tensão correspondente usando o diagrama tensão-deformação da Figura 6.38. Nota-se que a deformação de escoamento ε_E causa o limite de escoamento σ_E, enquanto as deformações intermediarias ε_1 e ε_2 provocam as tensões σ_1 e σ_2, respectivamente. Quando essas tensões, e outras como elas, têm seus gráficos montados nos pontos $y = h/2$, $y = y_1$, $y = y_2$, etc., tem-se a distribuição de tensão da Figura 6.39 ou 6.40. Evidentemente, a linearidade de tensão é consequência da Lei de Hooke.

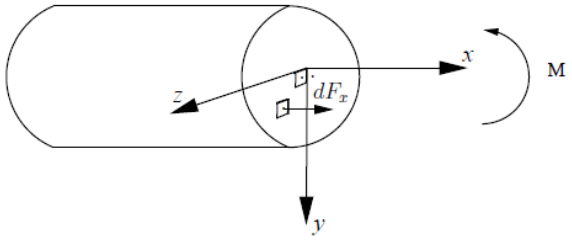


Figura 6.36: Seção transversal de uma barra de área A.

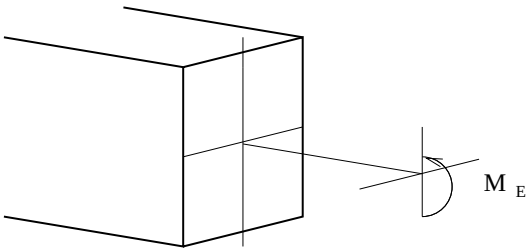


Figura 6.37: Seção transversal de uma barra de altura h e largura b

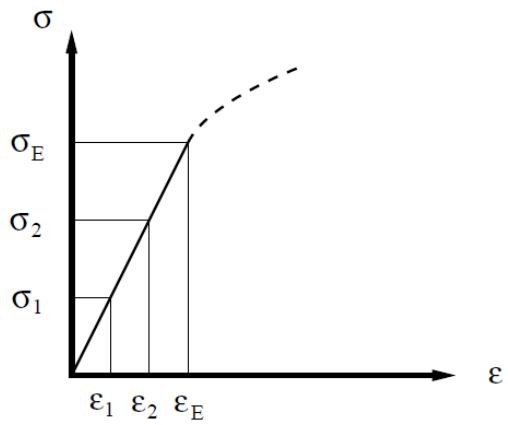


Figura 6.38: Diagrama tensão-deformação

Agora que a distribuição de tensão foi estabelecida, pode-se verificar se a equação 6.30 foi satisfeita. Para isso, calcula-se primeiro a força resultante de cada uma das duas partes da distribuição de tensão da Figura 6.40. Geometricamente, isso equivale a calcular os volumes de dois blocos triangulares. Como mostrado, a seção transversal superior do elemento está submetida à compressão, enquanto a seção transversal inferior está submetida à tração. Tem-se, portanto:

$$T = C = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\sigma_E\right) b = \frac{1}{4} bh\sigma_E \tag{6.32}$$

Como T é igual mas oposta a C, a equação 6.30 é satisfeita e, de fato, o eixo neutro passa através do centróide da área da seção transversal.

O momento elástico máximo M_E é determinado pela equação 6.31. Para aplicar essa equação geometricamente, determina-se os momentos criados por T e C em torno do eixo neutro . Como cada força atua através do centróide do volume do seu bloco de tensão triangular associado, tem-se:

$$\begin{aligned} M_E &= C\left(\frac{2}{3}\right)\frac{h}{2} + T\left(\frac{2}{3}\right)\frac{h}{2} \\ M_E &= 2\left(\frac{1}{4}\right) bh\sigma_E \left(\frac{2}{3}\right)\frac{h}{2} \\ M_E &= \frac{1}{6} bh^2\sigma_E \end{aligned} \tag{6.33}$$

Naturalmente, esse mesmo resultado pode ser obtido de maneira mais direta pela fórmula da flexão, ou seja, $\sigma_E = M_E(h/2)/[bh^3/12]$, ou $M_E = bh^2\sigma_E/6$

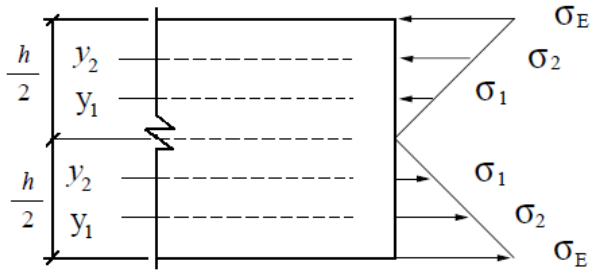


Figura 6.39: Diagrama de tensão

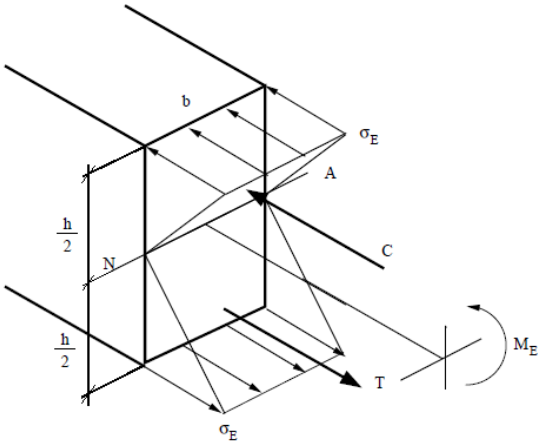


Figura 6.40:

Momento Plástico

Alguns materiais, tais como aço, tendem a exibir comportamento elástico perfeitamente plástico quando a tensão no material exceder σ_E. Considera-se, por exemplo, o elemento da Figura 6.41. Se o momento interno $M > M_E$, o material começa a escoar nas partes superior e inferior da viga, o que causa uma redistribuição de tensão sobre a seção transversal até que o momento interno M de equilibrio seja desenvolvido. Se a distribuição da deformação normal assim produzida for como a mostrada na Figura 6.35, a distribuição de tensão normal correspondente será determinada pelo diagrama tensão-deformação da mesma maneira que no caso elástico. Usando esse diagrama para o material mostrado na Figura 6.42, tem-se que as deformações ε_1, $\varepsilon_2 = \varepsilon_E$, ε_2 correspondem, respectivamente, às tensões σ_1, $\sigma_2 = \sigma_E$, σ_E. Essas e outras tensões são mostradas na Figura 6.43 ou na 6.44. Nesse caso, observa-se na Figura 6.44, que o sólido de tensões apresenta regiões retangulares (já plastificadas), e regiões triangulares.

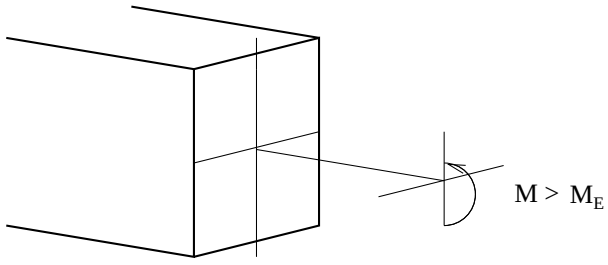


Figura 6.41:

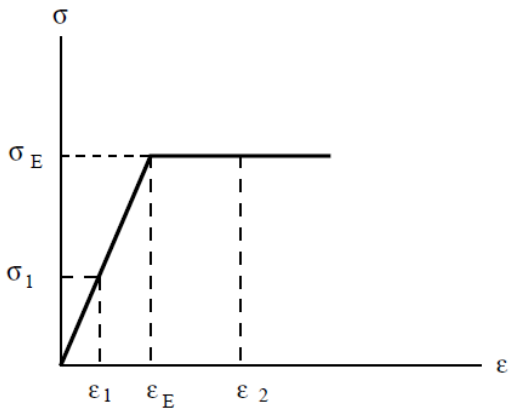


Figura 6.42:

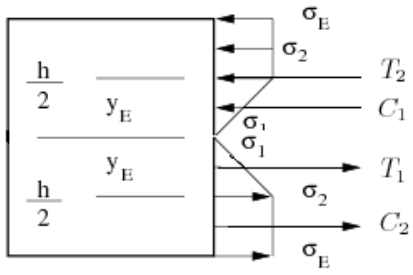


Figura 6.43: Diagrama de tensão

Aplicando-se, portanto, a condição 6.41 e observando-se os diagramas 6.43 e 6.45 tem-se:

$$T_1 = C_1 = \frac{1}{2} y_E \sigma_E b \tag{6.34}$$

$$T_2 = C_2 = \left(\frac{h}{2} - y_E\right) \sigma_E b \tag{6.35}$$

Devido à simetria, a equação 6.30 é satisfeita e o eixo neutro passa através do centróide da seção transversal como mostrado. O momento aplicado M pode ser relacionado ao limite de escoamento σ_E por meio da equação 6.31. Pela Figura 6.44, requer-se que:

$$\begin{aligned} M &= T_1\left(\frac{2}{3}y_E\right) + C_1\left(\frac{2}{3}y_E\right) + T_2\left[y_E + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_E\right)\right] + C_2\left[y_E + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_E\right)\right] \\ M &= 2\left(\frac{1}{2}y_E\sigma_E b\right)\left(\frac{2}{3}y_E\right) + 2\left[\left(\frac{h}{2} - y_E\right)\sigma_E b\right]\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y_E\right)\right] \\ M &= \frac{1}{4} b.h^2 \sigma_E \left(1 - \frac{4}{3}\frac{{y_E}^2}{h^2}\right) \end{aligned} \tag{6.36}$$

Ou, usando a equação 6.33:

$$M = \frac{3}{2} M_E \left(1 - \frac{4}{3} \frac{{y_E}^2}{h^2} \right) \tag{6.37}$$

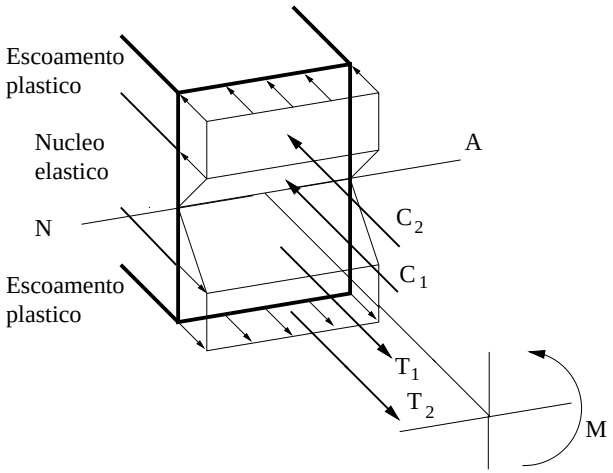


Figura 6.44:

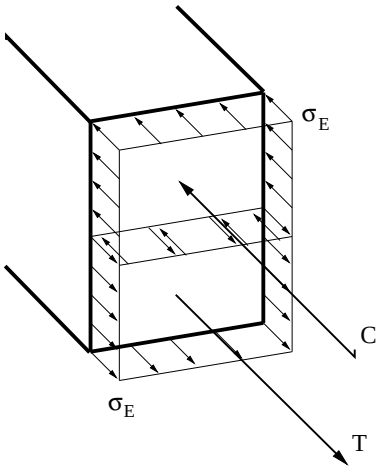


Figura 6.45: Momento plástico

A análise da Figura 6.44 revela que M produz duas zonas de escoamento plástico e um núcleo elástico no elemento. A fronteira entre eles está a uma distância $\pm\, y_E$ do eixo neutro. À medida que M cresce em intensidade, y_E tende a zero. Isso tornaria o material inteiramente plástico, caso em que a distribuição de tensão teria a aparência mostrada na Figura 6.45. Pela equação 6.36 com $y_E = 0$, ou determinando os momentos dos sólidos de tensão em torno do eixo neutro, pode-se escrever o valor limitante como:

$$M_P = \frac{1}{4}.b.h^2\sigma_E \tag{6.38}$$

Usando a equação 6.33, tem-se:

$$M_P = \frac{3}{2} M_E \tag{6.39}$$

Esse momento é denominado momento plástico. Seu valor é único apenas para a seção retangular mostrada na Figura 6.45, visto que a análise depende da geometria da seção transversal.

As vigas usadas em estruturas metálicas às vezes são projetadas para resistir a um momento plástico. Nesse caso, os códigos em geral relacionam uma propriedade de projeto da viga chamada fator forma, definido como a relação:

$$k = \frac{M_P}{M_E} \tag{6.40}$$

Esse valor especifica a quantidade adicional de momento que uma viga pode suportar além de seu momento elástico máximo. Por exemplo: pela equação 6.39, uma viga de seção transversal retangular tem fator $k =$ 1,5. Pode-se, portanto, concluir que a seção suportará 50% mais momento fletor além de seu momento elástico máximo quando se tornará totalmente plástica.

Pontos Importantes

• *A distribuição de deformação normal (ε_x)* na seção transversal de uma viga baseia-se somente em considerações geométricas e sabe-se que é sempre linear, independentemente da carga aplicada. A distribuição de tensão normal, no entanto, deve ser determinada pelo comportamento do material ou pelo diagrama tensão-deformação, uma vez estabelecida a distribuição de deformação.

• *A localização do eixo neutro* é determinada pela condição de que a força resultante normal na seção transversal seja nula.

• O momento interno resultante sobre a seção transversal deve ser igual ao momento da distribuição de tensão em torno do eixo neutro.

• O comportamento perfeitamente plástico supõe que a distribuição de tensão normal é constante sobre a seção transversal e, assim, a viga continua a fletir-se mesmo que o momento não aumente. Esse momento é chamado de *momento plástico.*

6.7.1 Exemplos de aplicação

1. A viga em duplo T tem as dimensões mostradas na Figura 6.46 Supondo que seja feita de material elástico perfeitamente plástico com

limite de escoamento de tração e compressão $\sigma_E = 248,2$ MPa, determine o fator forma da viga.

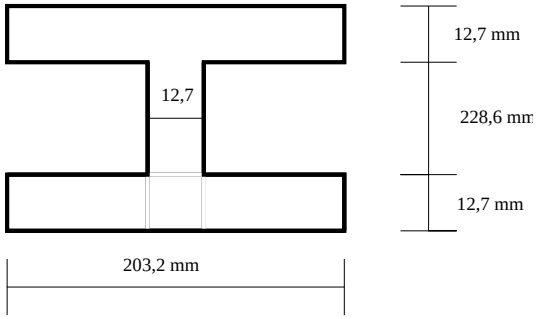


Figura 6.46:

Solução:

A fim de determinar o fator de forma, primeiro é necessário calcular o momento elástico máximo M_E e o momento plástico M_P.

Momento Elástico Máximo. A distribuição de tensão normal do momento elástico máximo é mostrada na Figura 6.47.

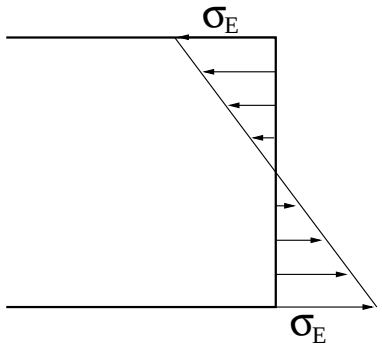


Figura 6.47:

O momento de inércia em torno do eixo neutro é:

$$I_z = \left[\frac{1}{12}(12,7)(228,6)^3\right] + 2\left[\frac{1}{12}(203,2)(12,7)^3 + (203,2)(12,7)(114,3)^2\right]$$

$$I_z = 87,84 \times 10^6 \ \text{mm}^4$$

Aplicando a fórmula da flexão, tem-se:

$$\sigma_E = \frac{M_E\, y}{I_z}$$

$$248,2 = \frac{M_E(127)}{87,84 \times 10^6}$$

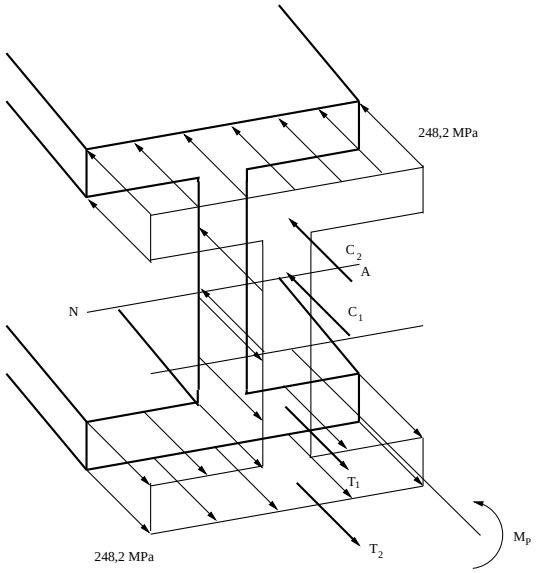


Figura 6.48:

$$M_E = 171,67 \text{ kNm}$$

Momento Plástico. O momento plástico provoca escoamento do aço em toda a seção transversal da viga, de modo que a distribuição de tensão normal fica com a aparência mostrada na Figura 6.48. Devido à simetria da área da seção transversal e como os diagramas tensão-deformação de tração e compressão são os mesmos, o eixo neutro passa pelo centróide da seção transversal. Para determinar o momento plástico, dividi-se a distribuição de tensão em quatro sólidos retangulares compostos, sendo o volume de cada sólido igual à força por ele produzida. Portanto, tem-se:

$$C_1 = T_1 = 248,2 \times 12,7 \times 114,3 = 360 \text{ kN}$$

$$C_2 = T_2 = 248,2 \times 12,7 \times 203,2 = 641 \text{ kN}$$

Essas forças atuam através do centróide do volume de cada sólido. Calculando os momentos dessas forças em torno do eixo neutro, obtem-se o momento plástico:

$$M_P = 2\left[(57,2)\,(360)\right] + 2\left[(120,7)\,(641)\right] = 195,92 \text{ kNm}$$

Fator Forma Aplicando a equação 6.40, tem-se:

$$k = \frac{M_P}{M_E} = \frac{195,92}{171,67} = 1,14$$

Esse valor indica que a viga em duplo T oferece uma seção eficiente para resistir a um momento elástico. A maior parte do momento é desenvolvida nas abas da viga, isto é, nos seguimentos superior e inferior, enquanto a alma ou seguimento vertical contribui muito pouco. Nesse caso particular, apenas 14% de momento adicional pode ser suportado pela viga além do que pode ser suportado elasticamente.

2. Uma viga em T tem as dimensões mostradas na Figura 6.49. Supondo que seja feita de material elástico perfeitamente plástico com limites de escoamento de tração e compressão $\sigma_E = 250$ MPa, determinar o momento plástico a que ela pode resistir.

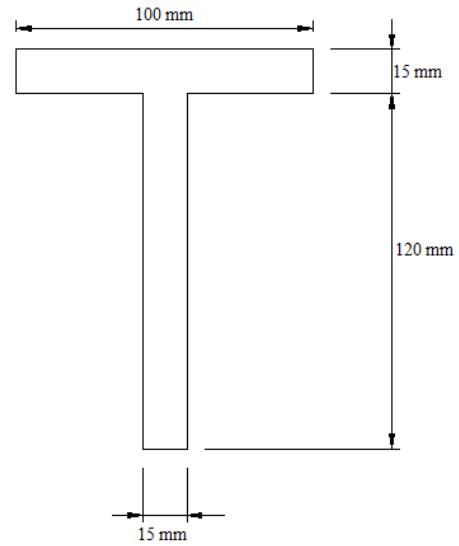


Figura 6.49:

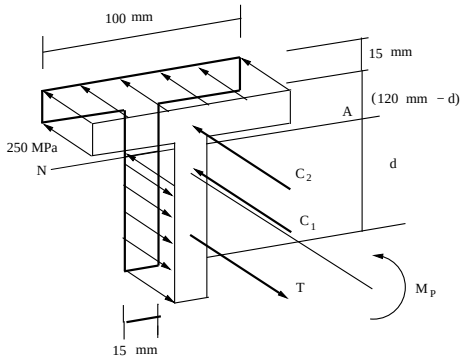


Figura 6.50:

Solução

A distribuição de tensão plástica que atua sobre a área da seção transversal é mostrada na Figura 6.50. Nesse caso, a seção transversal não é simétrica em relação a um eixo horizontal e, consequentemente, o

eixo neutro não passa pelo seu centróide dela. Para determinar a localização do eixo neutro d, é preciso que a distribuição de tensão produza uma força resultante nula na seção transversal. Supondo que $d \leq 120$ mm, tem-se:

$$\int_A \sigma_x dA = 0$$

$$T - C_1 - C_2 = 0$$

$$250 \times (0,015) \times (d) - 250 \times (0,015) \times (0,120 - d)$$

$$-250 \times (0,015) \times (0,100) = 0$$

$$d = 0,110m < 0,120m \quad OK$$

De acordo com esse resultado, as forças que atuam em cada seguimento são positivas, assim:

$$T = 250 \times (0,015) \times (0,110) = 412,5 \text{ kN}$$

$$C_1 = 250 \times (0,015) \times (0,010) = 37,5 \text{ kN}$$

$$C_2 = 250 \times (0,015) \times (0,100) = 375 \text{ kN}$$

Então, o momento plástico em torno do eixo neutro é:

$$M_p = 412,5 \times \left(\frac{0,110}{2}\right) + 37,5 \times \left(\frac{0,010}{2}\right) + 375 \times \left(0,01 + \frac{0,015}{2}\right)$$

$$M_p = 29,4 \text{ kN}.m$$

6.7.2 Exercícios

1. A viga em U, da Figura 6.53 é feita de um material elástico perfeitamente plástico para o qual $\sigma_E = 250MPa$. Determinar o momento elástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal.

   Resposta: M_E = 13,8 kNm; M_P = 25,6 kNm.

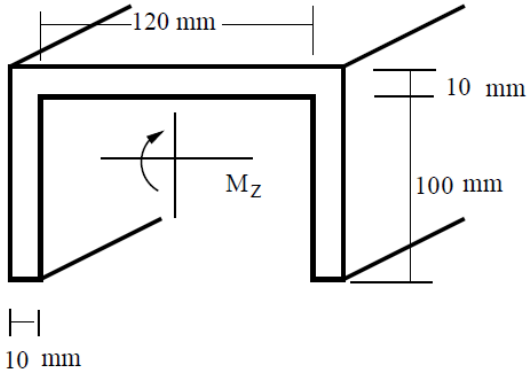


Figura 6.51: Figura do exercício 1

2. A seção transversal de uma viga é representada na Figura 6.52. A mesma é feita de material elástico perfeitamente plástico. Sendo $\sigma_e = 250\text{MPa}$, determinar o o momento plástico máximo que podem ser aplicado a seção transversal. Resposta: $M_P = 240,75\text{kN.m}$.

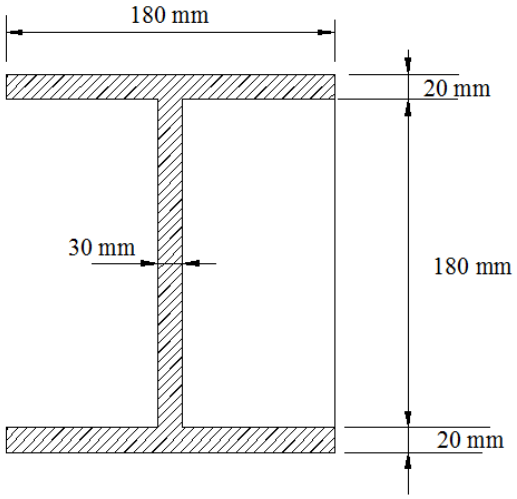


Figura 6.52: Figura do exercício 2

3. Uma barra da aço A-36 retangular tem largura de 25,4 mm e altura de 76,2 mm. Determine o momento aplicado em torno do eixo horizontal que provoca escoamento de metade da barra.

   Resposta: $M = 8{,}55$ kNm.

4. A viga em T é feita de um material elástico perfeitamente plástico. Determinar o momento elástico máximo que pode ser aplicado à seção transversal. $\sigma_E = 248{,}2$ MPa (Figura 6.55)

   Resposta: $M_E = 443{,}3$ kNm.

5. Determinar o fator forma para as seguintes seções transversais:

a)Figura 6.53. Resposta: $k = 1{,}27$.

b)Figura 6.54. Resposta: $k = 1{,}57$.

c)Figura 6.55. Resposta: $k = 1{,}77$.

d)Figura 6.56. Resposta: $k = 1{,}4$.

e)Figura 6.57. Resposta: $k = 1{,}61$.

f)Figura 6.58. Resposta: $k = 1{,}71$.

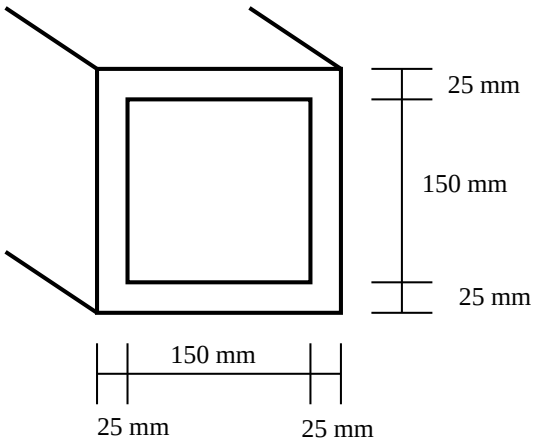


Figura 6.53: Figura do exercício 5

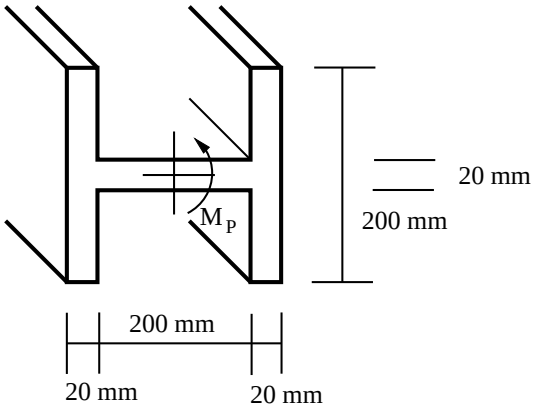


Figura 6.54: Figura do exercício 5

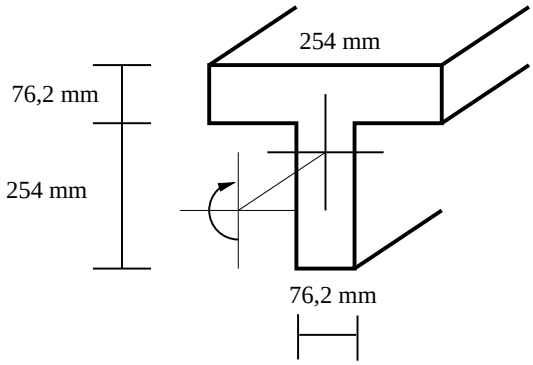


Figura 6.55: Figura do exercício 5

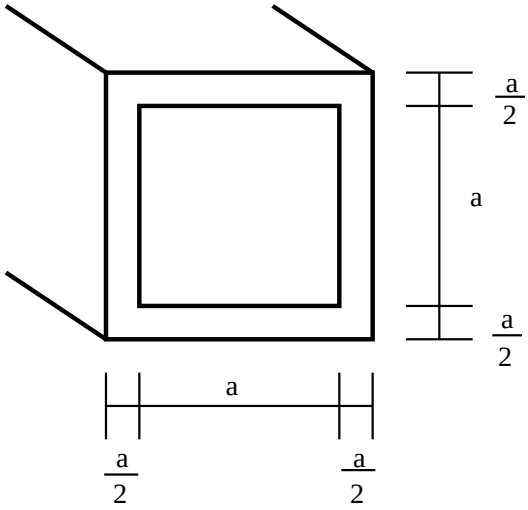


Figura 6.56: Figura do exercício 5

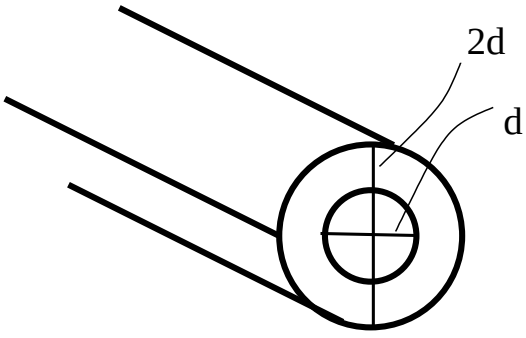


Figura 6.57: Figura do exercício 5

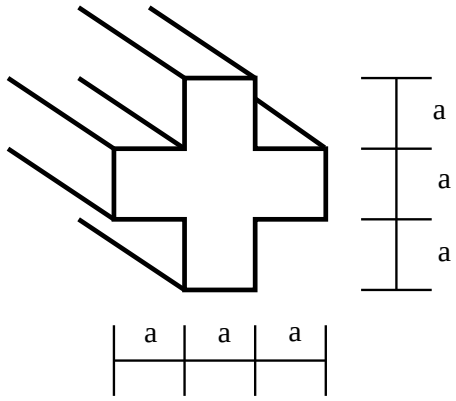


Figura 6.58: Figura do exercício 5

6. A viga é feita de material elástico perfeitamente plástico. Determine o momento plástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Adotar $a = 50{,}8$ mm e $\sigma_E = 248{,}2$ MPa (Figura 6.58).

   Resposta: $M_E = 52{,}47$ kN.m e $M_P = 89{,}48$ kNm.

7. A viga-caixão é feita de material elástico perfeitamente plástico. Determinar o momento elástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Adotar $a =$100 mm e $\sigma_E = 250$ MPa (Figura 6.56).

   Resposta: $M_E = 312{,}5$ kN.m e $M_P = 437{,}5$ kNm.

Capítulo 7

Solicitação por Esforço Cortante em Vigas

7.1 Introdução

No capitulo 2 a tensão de cisalhamento causada pelo esforço cortante Q em uma área A é a tensão média calculada por:

$$\tau = \frac{Q}{A_x} \tag{7.1}$$

Todavia, deve-se observar que nas áreas analisadas o valor do momento fletor era muito pequeno, podendo então ser desprezado. Para o estudo de vigas em flexão simples, onde numa mesma seção atuam simultaneamente, o momento fletor e o esforço cortante, a tensão de cisalhamento não obedece a relação 7.1.

Estabelecer, portanto, a relação entre o esforço cortante e a tensão de cisalhamento na flexão simples é o objetivo desta seção. Para tal, inicia-se com o seguinte exercício preliminar.

Seja a seção retângular $b \times h$ da Figura 7.1. Seja uma camada de fibras AB // LN, de ordenada y_1 em relação a LN. Sejam as áreas A_i e A_s, respectivamente inferior e superior a AB. Sejam M_{Ai} e M_{As} seus respectivos momentos estáticos (momento de 1^0 ordem) em relação à LN. Demonstre que:

$$|M_{As}| = M_{Ai} = \frac{b}{2}\left[{y_1}^2 - \frac{h}{2}^2\right]$$

Demonstração: Pela Figura 7.2, nota-se que $dA = b.dy$
Calculando-se os momentos estáticos, inferior e superior, em relação a LN, tem-se:

$$M_{Ai} = \int_{Ai} ydA = \int_{y_1}^{h/2} ybdy = b\frac{y^2}{2}\Big|_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - {y_1}^2\right] \tag{7.2}$$

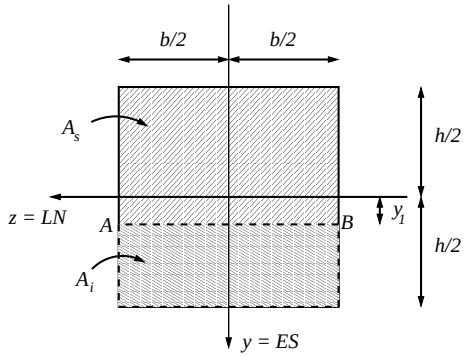


Figura 7.1: Figura do exerício preliminar

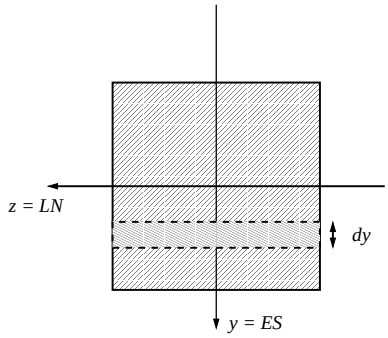


Figura 7.2: Demostração

$$M_{As} = \int_{As} ydA = \int_{-h/2}^{y_1} ybdy = b\frac{y^2}{2}\Big|_{-h/2}^{y_1} = \frac{b}{2}\left[y_1^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = -M_{Ai} \quad (7.3)$$

Observa-se pelas equações 7.2 e 7.3, que: $M_{Ai} > 0$ e $M_{As} < 0$, tais que: $M_{As} = -M_{Ai}$ então $M_{As}+M_{Ai} = M_A = 0$, o que de fato é verdadeiro, pois **o momento estático da área total em relação a um eixo baricêntrico é igual a zero.**

Observações:

1. A partir deste ponto do texto, o valor absoluto do momento estático de A_i ou de A_s em relação à LN passa a ser indicado por:

$$M_s = M_{Ai} = |M_{As}| = \frac{b}{2}\left[(\frac{h}{2})^2 - {y_1}^2\right] \quad (7.4)$$

2. A Figura 7.3 ilustra a variação de M_z em relação a y. Nesta, indica-se seu valor maxímo, que ocorre na LN e equivale a:

$$M_s^{max} = \frac{bh^2}{8}$$

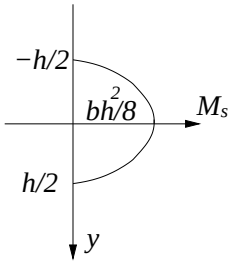


Figura 7.3: Variação do Momento Estático

7.2 Tensões de Cisalhamento em Vigas de Seção Retangular Constante

Sejam conhecidos o DMF e o DEC da viga biapoiada da Figura 7.4. O elemento de volume, da Figura 7.5, de comprimento elementar dx, limitado pelas seções de abscissas x e $x + dx$ e o elemento de área $dy \times dz$ em torno de um ponto $\mathrm{P}(y, z)$ genérico da seção determinam um elemento de volume $dx \times dy \times dz$.

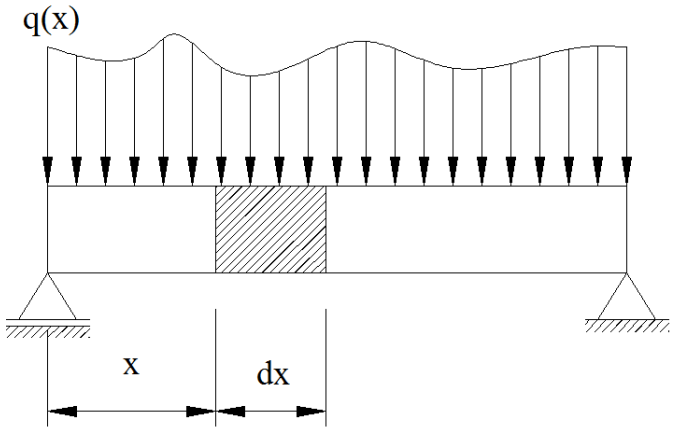


Figura 7.4: Viga bi-apoiada

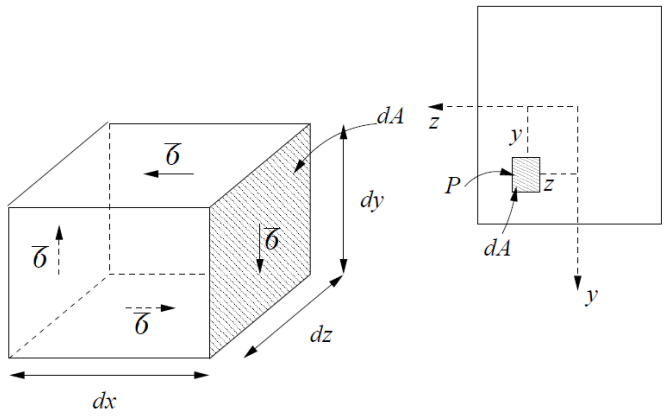


Figura 7.5: Elemento de Volume

Como estudado na seção 2.1.2, o tensor de tensões é simétrico, o que implica na existência concomitante de tensões de cisalhamento (τ) de mesmo valor em planos ortogonais.

Para o cálculo das tensões de cisalhamento, além das hipóteses admitidas na análise das tensões normais de flexão, admiti-se a hipótese básica de que a tensão de cisalhamento τ é constante na largura da seção. A Figura 7.6 ilustra essa situação, para uma camada de fibras AB//LN, de ordenada y.

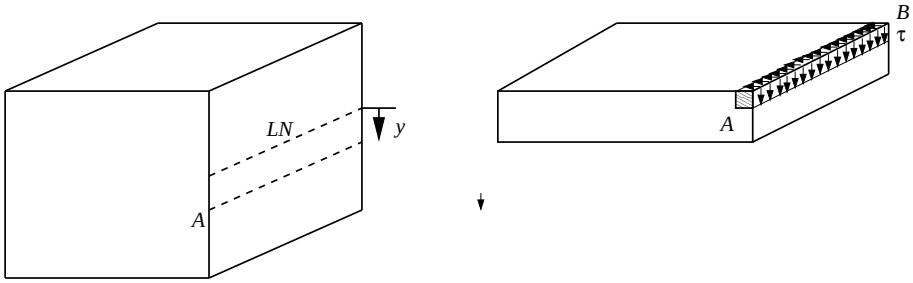


Figura 7.6: Tensão tangencial constante na largura da viga

A Figura 7.7 representa o diagrama de corpo livre do elemento infinitesimal d_x da viga da Figura 7.4 e ao lado tem-se a distribuição das tensões normais σ_x. Na Figura 7.8 destaca-se a porção inferior a esta camada neste elemento.

A resultante na direção longitudinal nas duas faces da Figura 7.7 fornece:

$$\begin{aligned} F &= \int_{Ai} \sigma_x dA \Rightarrow \text{ é a resultante das tensões normais na face esquerda.} \\ F + dF &= \int_{Ai} (\sigma_x + d\sigma_x) dA \Rightarrow \text{ é a resultante das tensões normais na face direita.} \end{aligned} \tag{7.5}$$

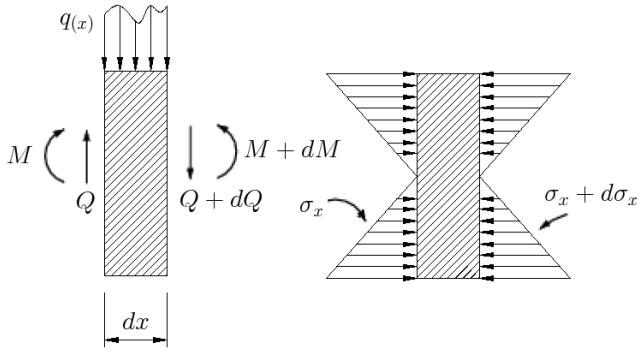


Figura 7.7: Tensões normais na flexão

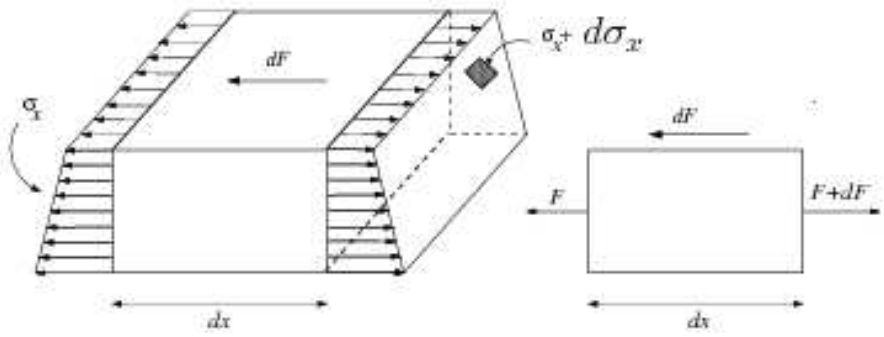


Figura 7.8: Equilíbrio de forças

A condição de equilíbrio é a existência da força dF no plano longitudinal superior, de área bdx. Portanto:

$$dF = \tau_{xy} b dx = \int_{Ai} d\sigma_x dA = \int_{Ai} \frac{dM}{I} y dA \tag{7.6}$$

obtém -se:

$$\tau_{xy} = \tau = \frac{1}{I_z b} \frac{dM}{dx} \underbrace{\int_{Ai} y dA}_{M_s} \tag{7.7}$$

lembrando que $\frac{dM}{dx} = Q$ (esforço cortante $Q = Q_y$) tem-se então:

$$\tau = \tau_{xy} = \frac{Q M_s}{I_z b} \tag{7.8}$$

Associando a expressão 7.8 do exercício preliminar, do retangulo $M_s = f(y) = \frac{b}{2}\left[(\frac{h}{2})^2 - y^2\right]$, nota-se que a variação de M_s é uma parábola de 2^0, então a variação de $\tau = \tau(y)$ é também uma parábola do 2^0 grau.

Analisando a seção retangular, a tensão de cisalhamento máxima,τ_{max} , equivale a:

$$y = 0 \Rightarrow M_s^{max} = \frac{bh^2}{8} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{Qbh^2/8}{bbh^3/12} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh} \tag{7.9}$$

$$\tau_{max} = 1,5\frac{Q}{A}$$

onde $A = bh$ é a área da seção.

Observa-se que $\tau_{max} = 1,5$, e portanto τ_{med} (50% superior a $\tau_{med} = \frac{Q}{A}$)

Observações

1. Demonstra-se da Teoria da Elasticidade (Mecânica dos sólidos I) que a tensão de cisalhamento não é exatamente constante na largura da seção, conforme a hipótese básica. Então a tensão calculada é a tensão

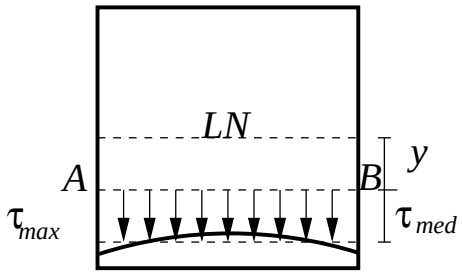


Figura 7.9: Tensões cisalhante média

média na largura, enquanto que a tensão máxima é calculada na teoria da elasticidade. $\tau_{med} = \frac{QM_s}{I_z b}$

A Tabela 1 (extraida do livro Beer e Johnstom), mostra que o erro cometido varia com a razão $\frac{b}{h}$.

Tabela 7.1: Erro com a variação de b/h

b/h	1/4	1/2	1	2	4
τ_{max}/τ_{med}	1,008	1,033	1,126	1,396	1,988
diferença percentual	0,8%	3,3%	12,6%	39,6%	98,8%

2. Na realidade as seções não permanecem planas, mas "empenadas", pois a deformação específica no cisalhamento é a distorção angular $\gamma = \frac{\tau}{G}$.

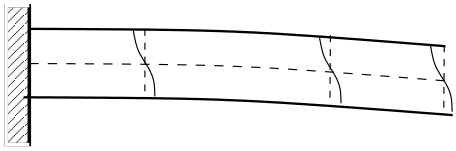


Figura 7.10: Deformação cisalhante especifica nas bordas

Esta deformação, em um cálculo mais rigoroso, altera a análise de tensões e deformações na flexão simples. No entanto, este efeito é desprezado, pois o erro cometido é muito pequeno, exceto na região de aplicação de cargas concentradas.

7.3 Tensões de Cisalhamento em Vigas de Seção de Diferentes Formas

Admite-se a mesma hipótese básica da seção retangular, isto é, τ constante na largura da seção. A variação da tensão de cisalhamento na seção obedece a mesma relação anteriormente definida, ou seja:

$$\tau = \frac{QM_s}{I_z t}$$

sendo $t = t(y)$ é a largura (espessura) da camada considerada.

Na prática, encontram-se diferentes tipos de seções de espessuras variáveis. alguns casos são ilustrados na Figura 7.11, para seções com lados paralelos ou perpendiculares a LN.

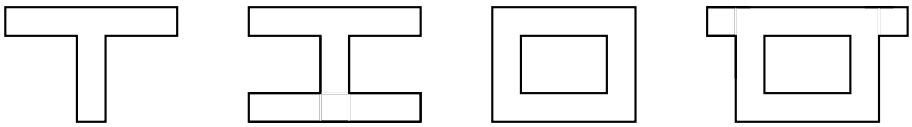


Figura 7.11: Tipos de seções

Considerando, por exemplo, um perfil T a Figura 7.12 ilustra o diagrama de τ_y onde observa-se uma descontinuidade na transição entre a mesa e a alma.

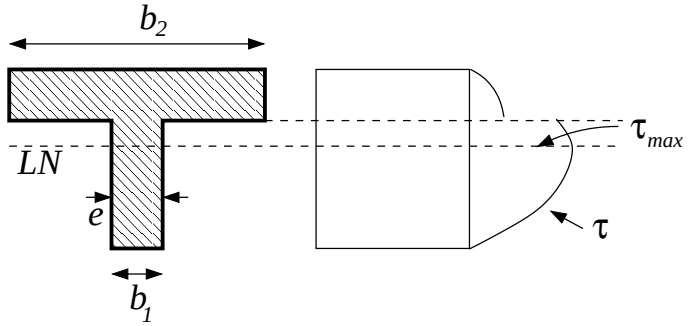


Figura 7.12: Seção T

O mesmo ocorre para vigas de seção I, como ilustra a Figura 7.13. Em todos os casos, a tensão máxima (τ_{max}) é aquela avaliada na LN. Destaca-se ainda que na mesa o cálculo de τ está sujeito a erro considerável ($\frac{b}{h}$ grande), mas de qualquer forma são tensões pequenas.

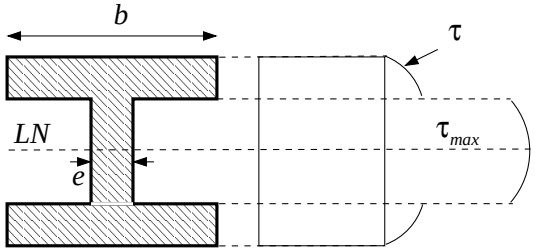


Figura 7.13: Seção I

7.4 Exercícios

1. Uma viga simplesmente apoiada em seus extremos tem 200 mm de largura por 400 mm de altura e 4 m de comprimento. Esta viga suporta uma carga uniformemente distribuída sobre todo seu comprimento. A tensão longitudinal admissível é 12 MPa (tração e compressão) e a tensão tangencial horizontal admissível é de 0,8 MPa. Determine o valor máximo admissível da carga por unidade de comprimento.

   Resposta: q = 21,4 kN/m.

2. Calcular o valor máximo admissível de P na viga da Figura 7.14 (dimensões em m), de seção retangular 100 mm $\times$ 150 mm, de madeira com $\overline{\sigma}_{\text{tracão e comp.}}$ =10 MPa e $\overline{\tau}$ =1,4 MPa

   Resposta: P = 8,333kN.

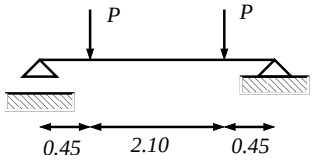


Figura 7.14: Figura do exercício 2

3. Calcular o valor máximo admissível de uma carga P na extremidade livre de uma viga em balanço de 0,9 m. A seção transversal ilustrada na Figura 7.15 é constituída por três tábuas de madeira de seção 100 mm $\times$ 50 mm, sabe-se que $\overline{\tau}_{\text{uniao}}$ =350 kPa. Para o valor de P, Calcular σ_{max}.

   Resposta: P = 3937,5 N e σ = 9,45 MPa.

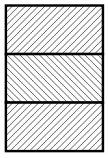


Figura 7.15: Figura do exercício 3

4. A viga da Figura 7.16 é feita de duas tábuas. Determinar a tensão de cisalhamento máxima na cola necessária para manter as tábuas unidas ao longo da junção. Os apoios e B e C somente exercem reações verticais. Resposta:$\tau = 4,88$ MPa.

5. A viga T esta submetida ao carregamento mostrado na Figura abaixo. Determinar a tensão cisalhamento máxima sobre ela na seção critica.

   Resposta: $\tau_{MAX} = 14,7$MPa.

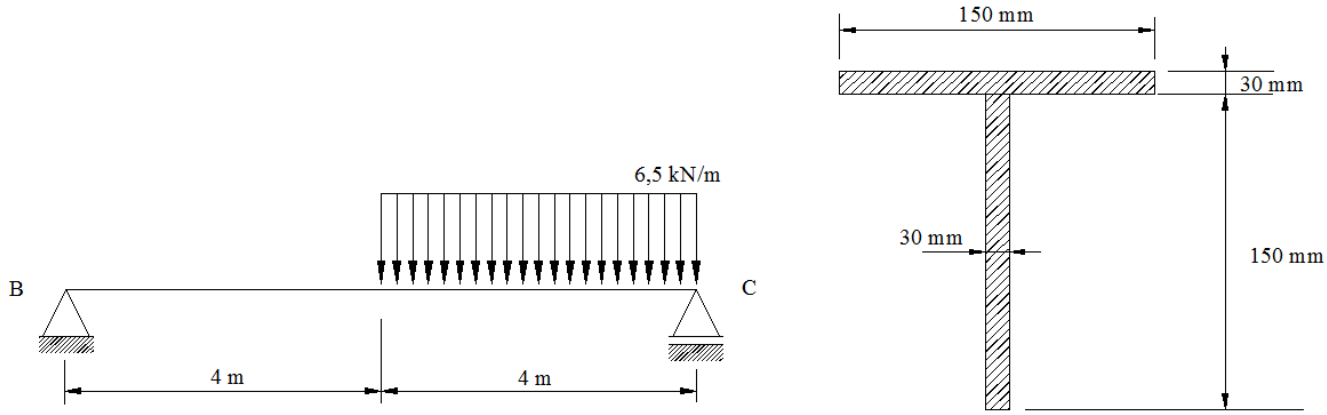


Figura 7.16: Figura do exercício 4

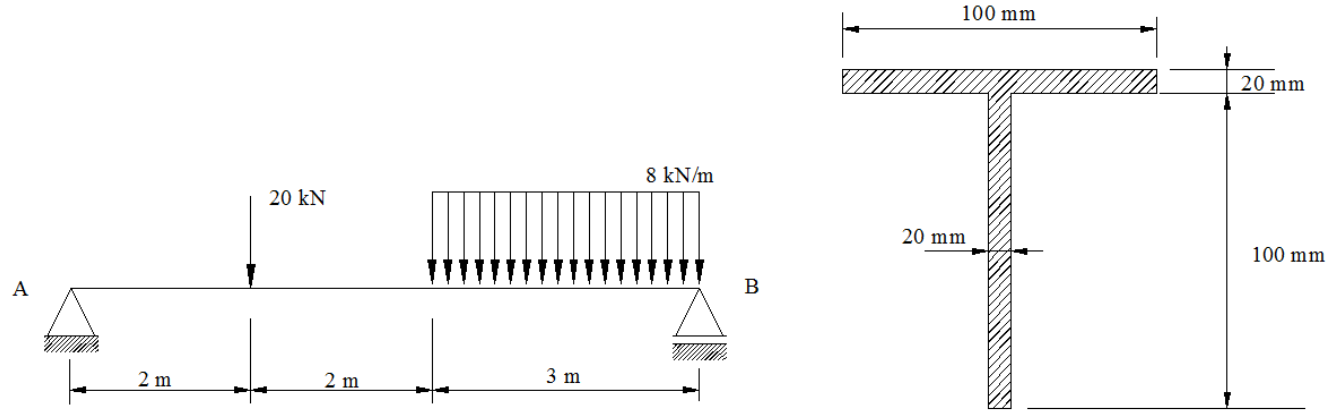


Figura 7.17: Figura do exercício 5

6. Calcular os valores máximos da tensão normal e da tensão tangencial na viga da Figura 7.18 conhecida sua seção transversal (dimensões em mm).

   Resposta: $\sigma = 7{,}872$ MPa e $\tau = 929{,}6$ kPa.

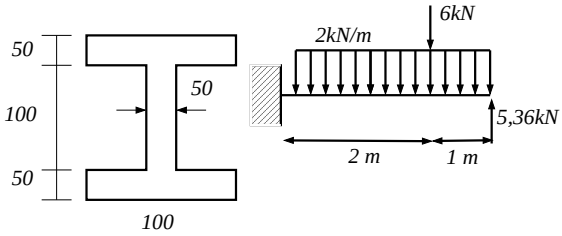


Figura 7.18: Figura do exercício 6

7. A Figura 7.19 (dimensões em mm) mostra a seção transversal de uma viga de 4 m de comprimento, simplesmente apoiada nos extremos, que suporta uma carga uniformemente distribuída de 4 kNm sobre todo seu comprimento. Em uma seção a 0,5 m da extremidade esquerda e em um ponto desta seção a 40 mm abaixo da superfície neutra,

calcular a tensão normal e a tensão tangencial.

Resposta: σ = 1,402 MPa,tração; τ = 925,5 kPa.

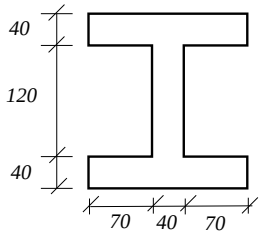


Figura 7.19: Figura do exercício 7

8. A Figura 7.20 (dimensões em mm) mostra a seção transversal de um trecho de uma viga. Na seção A o momento fletor é - 4 kNm e o esforço cortante é 5 kN. Calcular a tensão normal e a tensão de cisalhamento na camada situada 40 mm da LN, na seção B.

   Resposta: σ = -3,505 MPa e τ = 1,084 MPa.

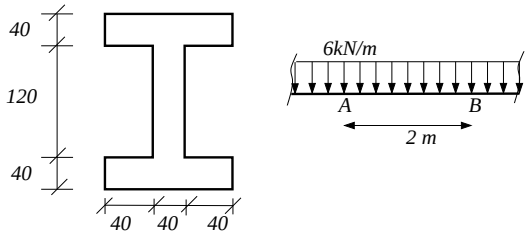


Figura 7.20: Figura do exercício 8

9. Calcular as tensões máximas de tração, compressão e cisalhamento em uma viga engastada e livre de comprimento 0,38 m que suporta uma carga concentrada transversal de 6,7 kN na extremidade livre. A Figura 7.21 mostra a seção transversal da viga (dimensões em mm).

   Resposta: σ_t = 92,58 MPa; σ_c = 277,75 MPa e τ = 16,45 MPa.

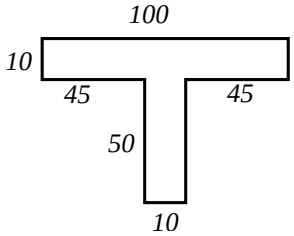


Figura 7.21: Figura do exercício 9

10. Uma viga de seção " T " (dimensões em mm). Suporta cargas indicadas. Calcular a tensão:

(a) tangencial máxima.

(b) normal de flexão máxima de compressão.

(c) tangencial vertical a 3,4 m da extremidade esquerda e 60 mm acima da base.

(d) normal de flexão a 1,5 m da extremidade direita e 50 mm acima da base.

Resposta: 10a) 694 kPa; 10b) 11,73 MPa de compressão; 10c) 148,1 kPa e 10d) 6,17MPa de tração.

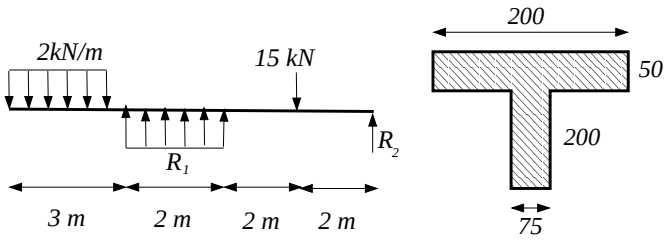


Figura 7.22: Figura do exercício 10

11. Verificar a estabilidade da viga 7.23 (dimensões em mm na seção transversal). Para $\overline{\sigma}_{\text{tracão}} = 160\text{MPa}$, $\overline{\sigma}_{\text{compressão}} = 110\text{MPa}$ e $\overline{\tau} = 14\text{MPa}$.

    Resposta: As tensões máximas são 15,35 MPa; 9,43 MPa e 1,27 MPa.

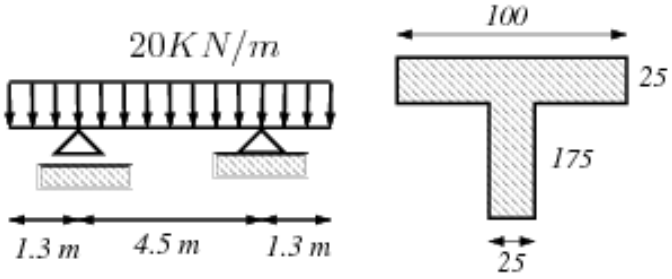


Figura 7.23: Figura do exercício 11

12. Calcular os valores máximo admissível da carga q na viga da Figura 7.24, seção " T " constituída por suas peças de madeira 40 mm × 120 mm, para $\overline{\sigma} = 9$ MPa (de flexão, tração ou compressão) e $\overline{\tau} = 0{,}7$ MPa (tangencial horizontal).

    Resposta: q = 1,741 kN/m; $\tau_{max} = 0{,}6$ MPa; ${\sigma^T}_{max} = 9{,}0$ MPa e ${\sigma^c}_{max} = 5{,}4$ MPa.

13. Calcular os valores máximo admissível da carga P na viga da Figura 7.25, de modo que a seção longitudinal de tração não exceda 12 MPa

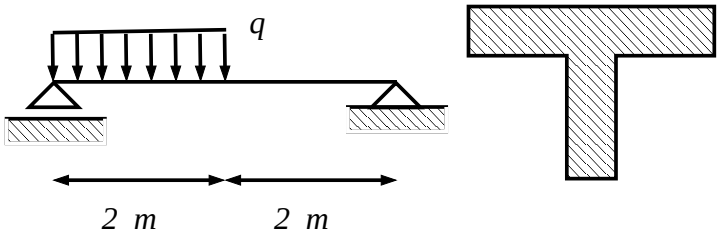


Figura 7.24: Figura do exercício 12

e a tensão tangencial horizontal não ultrapasse 0,7 MPa. Na Figura as dimensões são dadas em mm.

Resposta: 14,58 kN.

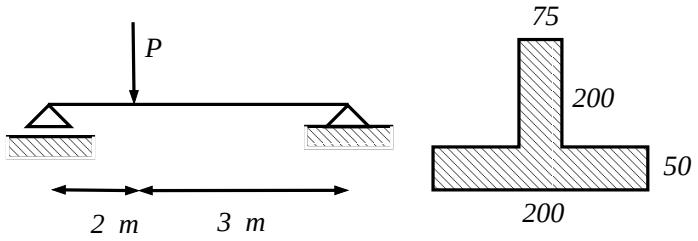


Figura 7.25: Figura do exercício 13

14. Uma viga bi-apoiada nos extremos, de 6 m de comprimento, suporta uma carga uniformemente distribuída de 5 kN/m em todo o seu comprimento. A seção transversal é mostrada na Figura 7.26 (dimensões em mm). Determine

    (a) a tensão tangencial horizontal máxima, indicando onde ela ocorre na seção transversal.

    (b) a tensão tangencial vertical a 0,5 m da extremidade direita e a 100 mm abaixo do topo.

    Resposta: 931 kPa e 751 kPa.

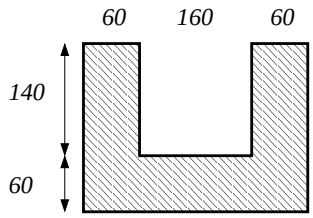


Figura 7.26: Figura do exercício 14

15. O tensor de tensões apresentado para este exercício foi obtido aplicando a teoria da resistência dos materiais a ser detalhada no capítulo 3 a uma viga com o carregamento mostrado na Figura 7.27. Esboce

os gráficos projetados no plano xy que relacionam as tensões σ_x e τ_{xy} com a posição no ponto e comente-os. Resposta no final. Dado x e y em (m) $\rightarrow \sigma$ em (MPa).

$$\sigma = \begin{bmatrix} -120x\,(x-1)\,y & 0,15\,(2x-1)\left(400y^2-1\right) & 0 \\ 0,15\,(2x-1)\left(400y^2-1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

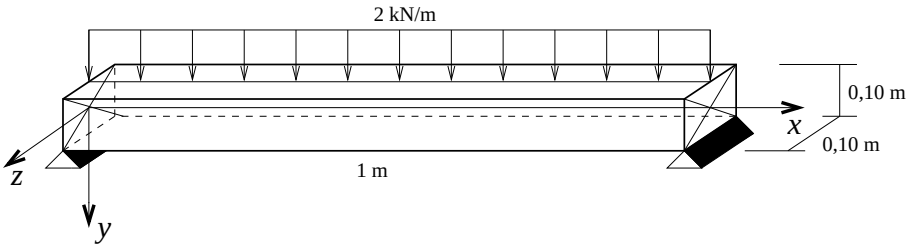
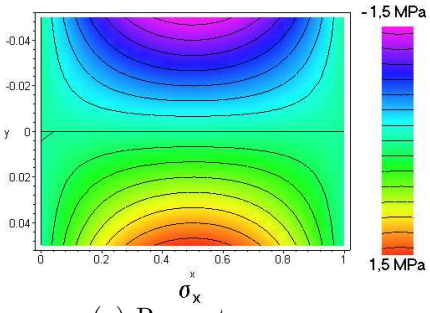
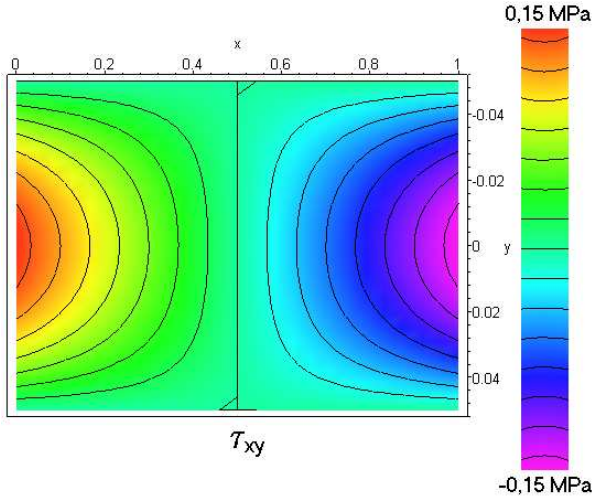


Figura 7.27: Figura do exercício 15



(a) Resposta para σ_x



(b) Resposta para τ_{xy}

Figura 7.28: Resposta do exercício 15

Capítulo 8

Deflexão em vigas de eixo reto

8.1 Definição

Linha elástica da flexão é a curva formada pelo eixo de uma viga inicialmente retilíneo, devido à aplicação de momentos de flexão.

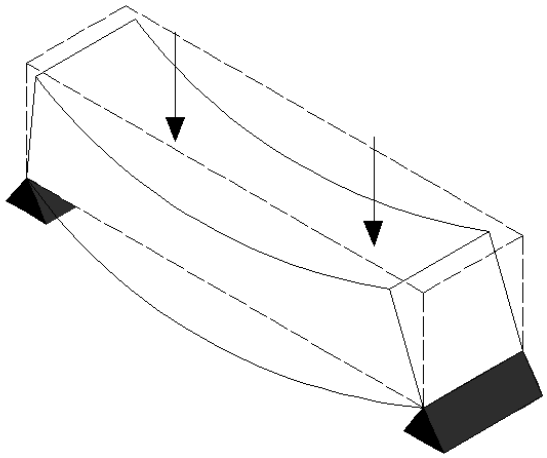


Figura 8.1: Exemplo de viga em flexão

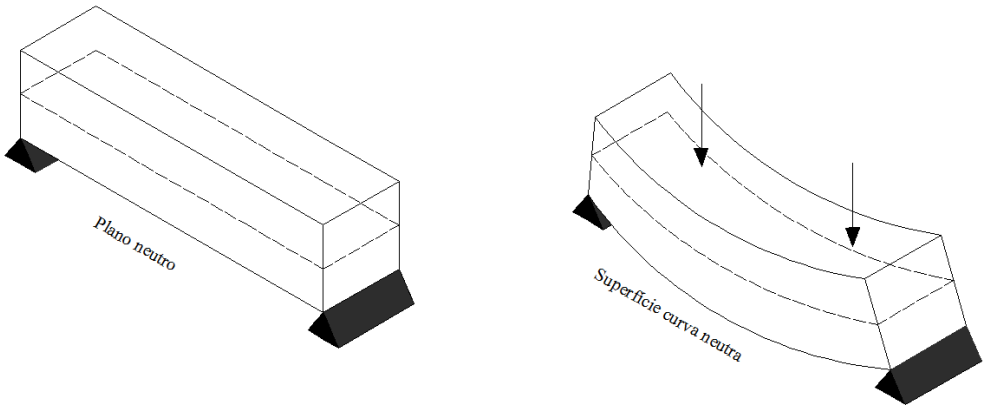


Figura 8.2: Exemplo de viga em flexão

A viga da Figura 8.1 é um exemplo de viga em flexão. Antes da aplicação das cargas, a superfície neutra se encontra contida em um plano horizontal.

Com a aplicação das cargas a superfície neutra se transforma em uma superfície curva.

A curva da superfície neutra representa a deformação de toda a viga. Esta curva se denomina **curva elástica** e, por simplicidade, é representada pela interseção do plano de simetria com a superfície neutra.

Desta forma, a curva elástica representa os deslocamentos dos centros de gravidade de todas as seções transversais que formam a viga. Matematicamente a curva elástica ou simplesmente elástica se representa pela equação no plano de simetria. Se representarmos o eixo das deflexões por v a curva elástica se torna uma função $v_{(x)}$, que dependera também das cargas aplicadas e das propriedades mecânicas do material que compõe a viga. A Figura 8.3 mostra uma representação plana da deformada da viga, onde x coincide com o eixo da viga e $v = v(x)$ é o deslocamento no caso vertical, de cada seção da viga.

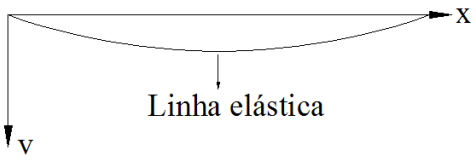


Figura 8.3: Representação plana da deformada da viga

O objetivo portanto é o de determinar a equação da linha elástica para diversos tipos de vigas. Com esta equação pode-se determinar as deflexões e rotações em todos os seus pontos.

8.2 Equação diferencial da LE

Para a determinação da equação da LE de vigas sujeitas à flexão, considere a barra de eixo originalmente reto que, mediante a atuação de um momento fletor M, se torna curvo, de acordo com a Figura 8.4. Nesta Figura, tem-se:

- seções A e B: duas seções adjacentes da viga. Antes da aplicação do carregamento estas seções estavam paralelas e distantes entre si dx.
- $ds = AB$: o comprimento do trecho do eixo compreendido entre A e B
- $A'B'$: um segmento de reta paralelo ao eixo e de comprimento $ds + ds\ \varepsilon_x = ds(1 + \varepsilon_x)$
- y: A distância entre A e A', B e B'

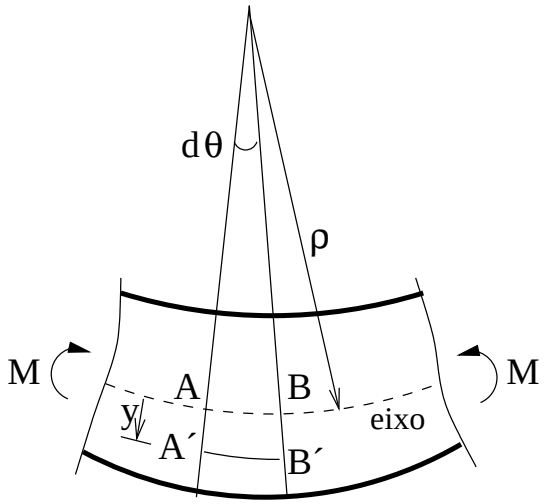


Figura 8.4: Trecho de uma barra sujeita à flexão pura

- ρ: o raio de curvatura do trecho AB do eixo da barra após a atuação de M;
- $d\theta$: o ângulo de curvatura do trecho do eixo entre AB que, por conseqüência, também é o ângulo de curvatura de $A'B'$

De acordo com o que foi apresentado no Capítulo 6 de solicitação por momento fletor, as tensões normais na flexão se relacionam com o momento fletor atuante nela da seguinte forma:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \tag{8.1}$$

e a deformação correspondente é

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M_z}{EI_z} y \tag{8.2}$$

O comprimento de AB após atuação do carregamento é ds pode ser relacionado com R e $d\theta$ da seguinte forma:

$$ds = \rho \, d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \tag{8.3}$$

Como visto no capítulo 6, a curvatura κ da barra é expressa como:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\varepsilon_x}{y} \tag{8.4}$$

Para pequenas deformações, pode-se fazer a seguinte simplificação:

$$ds \approx dx \tag{8.5}$$

Logo, o ângulo de curvatura pode ser obtido através da seguinte equação 8.6. A equação 8.6 é aplicável a barras retas com pequena curvatura.

$$\frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_z}{EI_z} \tag{8.6}$$

Seja a barra de eixo originalmente reto submetida ao carregamento $q(x)$ da Figura 8.5. Nesta Figura tem-se o eixo na configuração indeformada representado pela linha cheia, a LE representada pela linha tracejada, S e T seções adjacentes originalmente verticais na configuração indeformada e S' e T' suas correspondentes na configuração deformada.

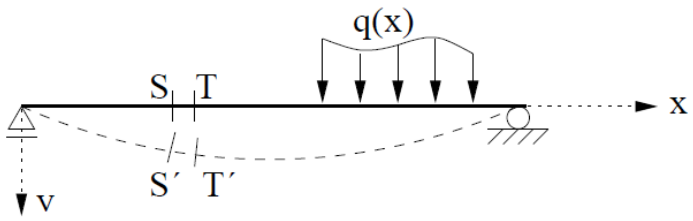


Figura 8.5: Viga sujeita a carregamento $q(x)$

A Figura 8.6 representa o trecho da barra nas proximidades de S e T com maior nível de detalhes. Nesta Figura $d\phi$ é o incremento de inclinação correspondente à diferença entre as tangentes em T e S, respectivamente e, graficamente, verificamos que é equivalente à $d\theta$:

$$d\phi = d\theta \Rightarrow \phi = \theta \tag{8.7}$$

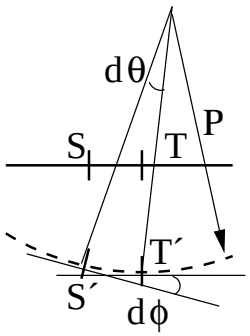


Figura 8.6: Detalhe da região que contém as seções S e T

Sendo $\tan\phi$ o coeficiente angular da reta tangente à LE v numa posição x e considerando a hipótese de pequenos deslocamentos e deformações tem-se:

$$\tan\phi \approx \phi(x) = \frac{dv}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{8.8}$$

Com isso, cosiderando equações 8.6, 8.7 e 8.8, tem-se que:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} \tag{8.9}$$

A equação 8.9 é a equação diferencial da LE partindo-se dos momentos fletores, que resolvida resultará em uma função $v(x)$ que representará a configuração deformada do eixo da barra sujeita ao momento $M_z(x)$.

Para adequar a equação 8.9 com o referencial de sinais que adota flecha positiva para baixo e rotações positivas no sentido horário e considerando a convenção de momento fletor positivo tracionado as fibras situadas abaixo da linha neutra, faz-e necessário a inclusão do sinal negativo na equação do momento fletor:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \tag{8.10}$$

Derivando-se a equação 8.10 com relação à x, tem-se:

$$\frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{1}{EI_z}\frac{dM_z}{dx} = -\frac{Q_v}{EI_z} \tag{8.11}$$

que é a equação diferencial da LE partindo-se dos esforços cortantes $Q_v(x)$.

Derivando-se uma vez a equação 8.10 com relação à x duas vezes, tem-se

$$\frac{d^4v}{dx^4} = -\frac{1}{EI_z}\frac{dQ_v}{dx} = \frac{q(x)}{EI_z} \tag{8.12}$$

que é a equação diferencial da LE partindo-se do carregamento $q(x)$.

Para se determinar $v(x)$ basta resolver uma das equações diferenciais 8.10, 8.11 ou 8.12. As constantes de integração são determinadas a partir da consideração das condições de contorno (apoios). Essas condições representam os valores conhecidos das funções em determinados pontos da viga e as mais usadas estão resumidas na Tabela 2.

Se uma única coordenada x não puder ser usada para expressar a equação da inclinação ou da linha elástica, então devem ser usadas condições de continuidade para calcular algumas das constantes de integração.

Na Tabela 1 tem-se as respostas para alguns casos clássicos e, na seqüência, mostram-se a solução dos casos 7 e 5 respectivamente.

- **Exemplo 1: Viga simplesmente apoiada com carga distribuída (caso 7)**

  A equação diferencial da linha elástica será usada agora na obtenção das deflexões de uma viga simplesmente apoiada. Se a viga suporta

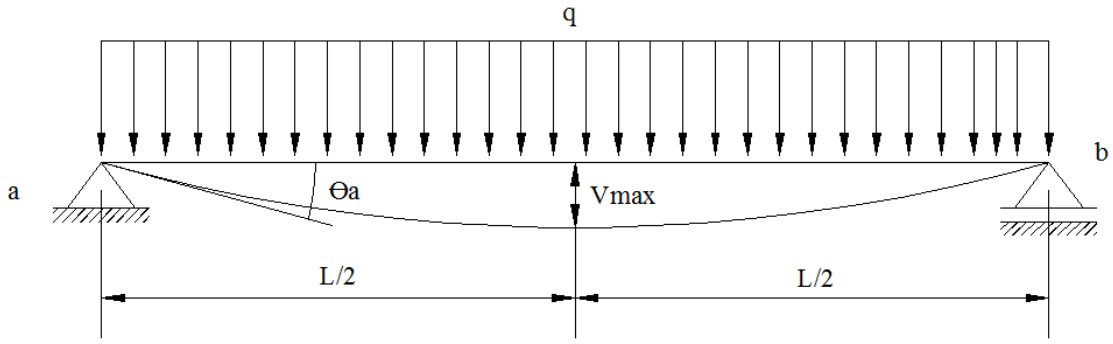


Figura 8.7: Viga simplesmente apoiada com carga distribuida

uma carga uniformemente distribuída q, conforme a Figura 8.7 , o momento fletor, a distancia x do apoio da esquerda, será:

$$M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Da equação 8.10 tem-se:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2} \tag{8.13}$$

Sabe-se que:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = EI\frac{d\theta}{dx} \tag{8.14}$$

$$EI\theta = EI\frac{dv}{dx} \tag{8.15}$$

Substituindo 8.14 na expressão 8.13 e integrando-se ambos os membros, tem-se:

$$EI\int d\theta = \int(-\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2})dx$$

Resolvendo a expressão, tem-se:

$$EI\theta = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C_1 \tag{8.16}$$

Substituindo 8.15 na expressão 8.16 e integrando-se ambos os membros, tem-se:

$$EI\int dv = \int(-\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C_1)dx$$

Resolvendo a expressão, tem-se:

$$EIv = -\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2 \tag{8.17}$$

Onde C_1 e C_2 são constantes de integração.

Condições de contorno:

Para a determinação de C_1, observa-se que pela simetria, a inclinação da curva elástica no meio do vão é zero. Então tem-se a condição:

Para $x = l/2$, $\theta_a = \theta_b = 0$. Entrando na expressão 8.16, tem-se:

$$C_1 = \frac{ql^3}{24} \tag{8.18}$$

Assim a expressão 8.16 torna-se:

$$EI\theta = -\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{24} \tag{8.19}$$

A constante de integração C_2 é obtida pela condição:

Quando $v = 0$, $x = 0$. Com esta condição verifica-se pela expressão 8.17 que $C_2 = 0$. A equação 8.17 transforma-se em:

$$EIv = -\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{qxl^3}{24} \tag{8.20}$$

A equação 8.20 permite obter a deflexão em qualquer ponto ao longo da viga. O valor máximo de v, ocorre no meio do vão e é calculado fazendo-se $x = L/2$:

$$v_{max} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

A inclinação máxima ocorre nas extremidades da viga.

Na extremidade esquerda(a) é:

$$\theta_a = \frac{qL^3}{24EI}$$

Na extremidade direita(b) é:

$$\theta_b = -\frac{qL^3}{24EI}$$

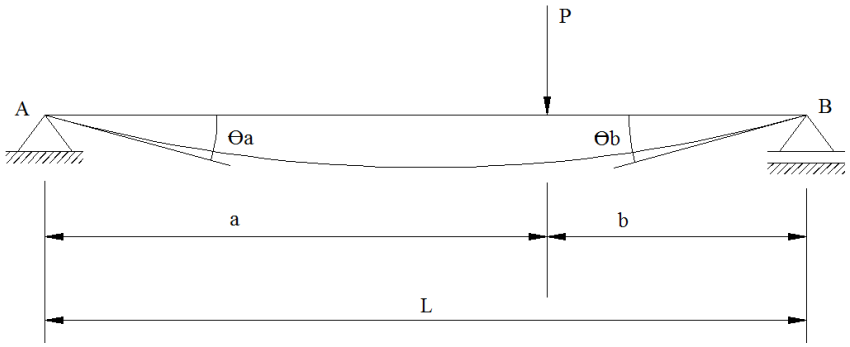


Figura 8.8: Viga simplesmente apoiada com carga concentrada

- **Exemplo 2: Viga simplesmente apoiada com carga concentrada(caso 5)**

  Considere-se agora uma viga simplesmente apoiada com carga concentrada P como mostra a Figura 8.8, cuja posição é definida pelas distancias a e b das extremidades. Neste caso, existem duas expressões para o momento fletor,uma para a parte a esquerda da carga e outra para a direita. Assim, deve-se escrever a expressão 8.10 separadamente para cada parte da viga:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Pbx}{L} \tag{8.21}$$

  Para: $(0 \leq x \leq a)$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Pbx}{L} + P(x-a) \tag{8.22}$$

  Para: $(a \leq x \leq L)$

  Sabe-se que:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = EI\frac{d\theta}{dx} \tag{8.23}$$

$$EI\theta = EI\frac{dv}{dx} \tag{8.24}$$

  Substituindo a expressão 8.23 nas expressões 8.21 e 8.22 e integrando-se ambos os membros, tem-se:

$$EI\theta = -\frac{Pbx^2}{2L} + C_1 \tag{8.25}$$

  Para: $(0 \leq x \leq a)$

$$EI\theta = -\frac{Pbx^2}{2L} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2 \tag{8.26}$$

Para: $(a \leq x \leq L)$

Substituindo a expressão 8.24 nas expressões 8.25 e 8.26 e integrando-se novamente ambos os membros, tem-se:

$$EIv = -\frac{Pbx^3}{6L} + C_1 x + C_3 \tag{8.27}$$

Para: $(0 \leq x \leq a)$

$$EIv = -\frac{Pbx^3}{6L} + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_2 x + C_4 \tag{8.28}$$

Para: $(a \leq x \leq L)$

Onde C_1, C_2,C_3 e C_4 são constantes de integração.

Condições de contorno:

As quatro constantes de integração que apareçam nas expressões anteriores podem ser calculadas pelas seguintes condições:

1. Em $x = a$: as rotações das duas partes da viga são iguais;
2. Em $x = a$: as deflexões das duas partes da viga são iguais;
3. Em $x = 0$: a deflexão é nula;
4. Em $x = L$: a deflexão é nula.

Pela condição 1, as expressões 8.25 e 8.26, para as inclinações devem ser iguais quando $x = a$. Tem-se:

$$-\frac{Pba^2}{2L} + C_1 = -\frac{Pba^2}{2L} + C_2$$

Portanto, $C_1 = C_2$.

A condição 2, iguala as expressões 8.27 e 8.28, quando $x = a$:

$$-\frac{Pba^3}{6L} + C_1 a + C_3 = -\frac{Pba^3}{6L} + C_2 a + C_4$$

O que torna $C_3 = C_4$. Finalmente, considerando as condições 3 e 4 e as expressões 8.27 e 8.28, tem-se:

$$C_3 = 0$$

$$-\frac{PbL^2}{6} + \frac{Pb^3}{6} + C_2 L = 0$$

De todos esses resultados, tem-se:

$$C_1 = C_2 = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6L}$$

$$C_3 = C_4 = 0$$

Com esses valores estabelicdos, as expressões 8.27 e 8.28 dão para a linha elástica:

$$ELv = \frac{Pbx}{6L}(L^2 - b^2 - x^2) \tag{8.29}$$

Para: $(0 \leq x \leq a)$

$$ELv = \frac{Pbx}{6L}(L^2 - b^2 - x^2) + \frac{P(x-a)^3}{6} \tag{8.30}$$

Para: $(a \leq x \leq L)$

A equação 8.29 fornece a linha elástica para a parte da viga à esquerda da carga P e a equação 8.30 fornece a deflexão da parte à direita. As equações 8.25 e 8.26 fornecem as rotações das duas partes da viga, após substituição dos valores de C_1 e C_2:

$$EI\theta = \frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2 - 3x^2) \tag{8.31}$$

Para: $(0 \leq x \leq a)$

$$EI\theta = \frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2 - 3x^2) + \frac{P(x-a)^2}{2} \tag{8.32}$$

Para: $(a \leq x \leq L)$

Com estas equações, a inclinação, em qualquer ponto da linha elástica, pode ser calculada. Para o calculo do ângulo de rotação nas extremidades da viga, basta fazer $x = 0$ na equação 8.31 e $x = L$ na equação 8.32. Assim, tem-se:

$$\theta_a = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI} = \frac{Pab(L + b)}{6LEI} \tag{8.33}$$

$$\theta_b = \frac{Pab(L+a)}{6LEI} \tag{8.34}$$

A deflexão máxima da viga ocorre no ponto da linha elástica em que a tangente é horizontal. Se $a > b$, tal ponto estará na parte esquerda (entre $x = 0$ e $x = a$) e poderá ser encontrado igualando-se a inclinação θ, da equação 8.31, a zero. Chamando de x_1 a distancia da extremidade esquerda ao ponto de deflexão máxima, tem-se, pela equação 8.31:

$$X_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \tag{8.35}$$

$$(a \geq b)$$

Verifica-se, por esta equação que, quando a carga P move-se do meio do vão ($b = L/2$) para a direita(b aproxima-se de zero), a distancia x_1 varia de $L/2$ a $L/\sqrt{3} = 0,577L$, o que mostra que a deflexão máxima sempre ocorre nas proximidades do centro. Encontra-se o valor da deflexão máxima, entrando com o valo de x_1 da equação 8.35 na equação 8.29:

$$V_{(max)} = \frac{Pb(L^2 - 4b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI} \tag{8.36}$$

$$(a \geq b)$$

Obtem-se a deflexão no meio do vão, fazendo-se $x = L/2$ na equação 8.29:

$$V_{(L/2)} = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \tag{8.37}$$

$$(a \geq b)$$

Como a deflexão máxima sempre ocorre próximo do centro, a equação 8.37 dá uma boa aproximação para seu valor. No caso mais desfavorável(quando b se aproxima de zero), a diferença entre a deflexão máxima e a do meio do vão é menor do que 3% da flexa máxima.

Com a carga P no meio do vão, caso 6, Tabela 8.2, ($a = b = L/2$), os resultados precedentes tomam formas mais simples:

$$\theta_a = \theta_b = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$V_{max} = V_{(L/2)} = \frac{PL^3}{48EI}$$

8.3 Exercícios

1. Demonstrar as propriedades das tabelas 8.2, 8.3,8.4, 8.5 e 8.6 , apresentadas no final deste capítulo, através do método da integração direta.

2. Calcular o ângulo de rotação e a flecha na extremidade livre da viga do exercício 3.3.5.7-a, adotado o perfil de aço $S130 \times 15$, e na viga do exercício 3.3.5.7-d, adotado o perfil de aço $W460 \times 52$. Dado $E = 210$ GPa.

   Resposta: a) 0,003571 rad e 1,905 mm; d) 0,002527 rad e 5,686 mm.

3. A viga da Figura 8.9 esta submetida a força P concentrada na sua extremidade. Determinar o deslocamento em c. Considerar EI constante. Resposta: $Vc = \frac{Pa^3}{EI}$.

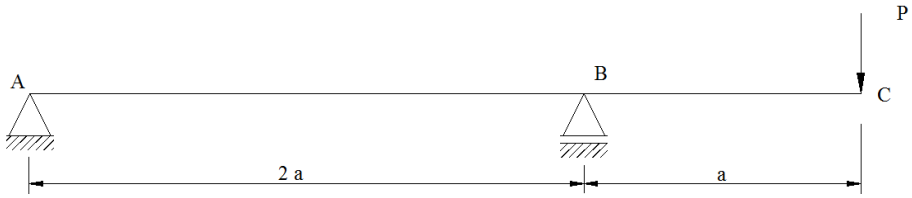


Figura 8.9: Figura do exercício 3

4. Pede-se um esboço da LE da viga da Figura 8.10 (EI constante) e calcular as rotações e as flechas em B, C e D. Resolver pelo método da integração.

   Resposta: $\phi_B = \frac{2M_o a}{EI}$, $\phi_C = \phi_D = \frac{3M_o a}{EI}$, $y_B = \frac{M_o a^2}{EI}$, $y_C = \frac{7M_o a^2}{2EI}$, $y_D = \frac{13M_o a^2}{2EI}$.

5. Para a Figura 8.11, fazer o mesmo que o pedido no exercício anterior. Resolver também usando a Tabela de flechas.

   Resposta: $\phi_B = \phi_C = \frac{Pa^2}{2EI}$, $y_B = \frac{Pa^3}{3EI}$, $y_C = \frac{Pa^2}{2EI}(L - \frac{a}{3})$.

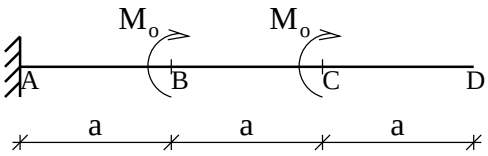


Figura 8.10: Figura do exercício 4

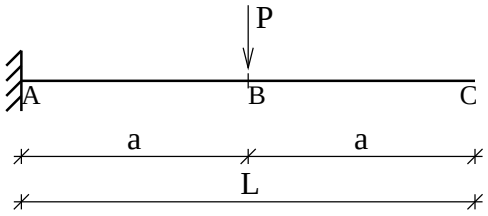


Figura 8.11: Figura do exercício 5

6. Calcular a flecha máxima (no meio do vão) e os ângulos de rotação nos apoios da viga do exercício 3.3.5.7-b, adotado o perfil de aço $S310\times47,3$. Resolva pelo método da integração direta ou pela Tabela, fazendo-se a superposição de efeitos. Dado $E = 210$ GPa.

   Resposta: 0,002975 rad e 3,85 mm.

7. Dados $I = 20.10^6$ mm^4 e E= 210 GPa, calcular a flecha em B na viga da Figura 8.12 (por integração ou pela Tabela).

   Resposta: 7,62 mm.

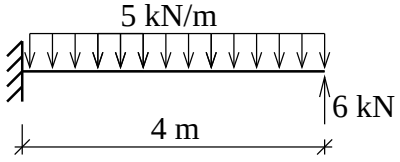


Figura 8.12: Figura do exercício 7

8. Determinar a deflexão máxima na viga da Figura 8.13.

   Considerar EI constante.Resposta:$\delta = \frac{L^4 W_0}{120EI}$.

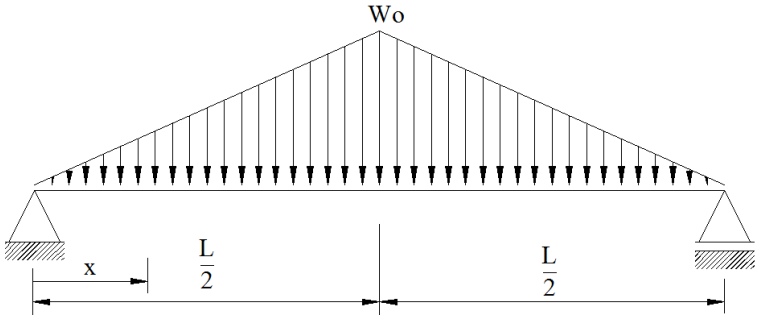


Figura 8.13: Figura do exercício 8

9. Determinar a deflexão máxima da viga e a inclinação em A da Figura 8.14. Considerar EI constante.

   Resposta: $\theta_A = \frac{M_0 a}{2EI}; \delta = \frac{-5M_0 a^2}{8EI}$.

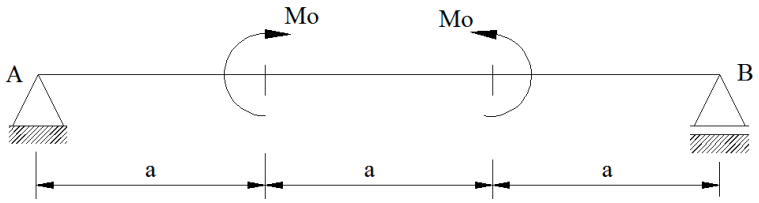


Figura 8.14: Figura do exercício 9

10. Determine as inclinações em A e B da viga da Figura 8.15. Considerar EI constante.

    Resposta: $\theta_A = -378kN.m^2/EI; \theta_B = 359kN.m^2/EI$.

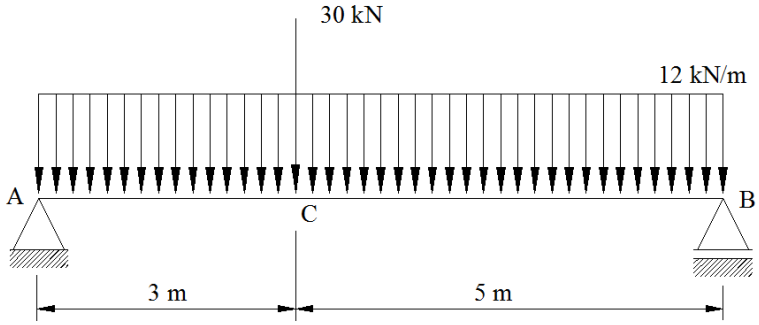


Figura 8.15: Figura do exercício 10

11. Demonstrar que a flecha no meio do vão da viga da Figura 8.16 é $\frac{5M_o L^2}{16EI}$. Calcule também as rotações nos apoios. Resolva por integração direta e também utilizando a Tabela através de superposição de efeitos.

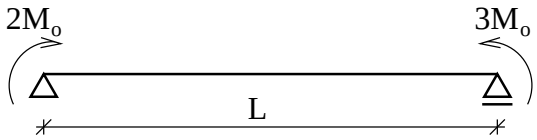


Figura 8.16: Figura do exercício 11

12. Calcular a flechas em C e D e as rotações em A, B e E na viga da Figura 8.17 (EI constante).

    Resposta: $y_C = -y_D = \frac{Pa^3}{6EI}$ e $\phi_A = \phi_B = -\phi_E = \frac{Pa^2}{4EI}$.

13. Calcular a flecha máxima (no meio do vão) e os ângulos de rotação nos apoios da viga da Figura 8.18 (EI constante)

    Resposta: $y_{max} = \frac{11Pa^3}{6EI}$, $\phi_A = -\phi_B = \frac{3Pa^2}{2EI}$.

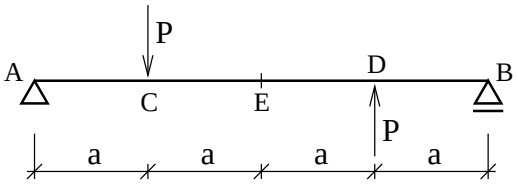


Figura 8.17: Figura do exercício 12

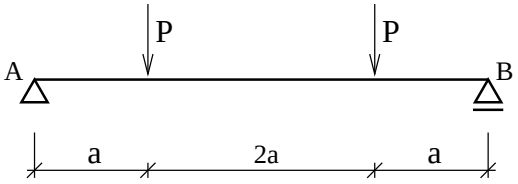


Figura 8.18: Figura do exercício 13

14. Calcular ϕ_A, ϕ_B, y_E e y_C na viga da Figura 8.19, dados $P = 25$ kN e $EI = 11200$ kNm^2, constante.

    Resposta: $\phi_A = -0,0015625$ rad, $\phi_B = 0,003125$ rad, $y_E = -1,758$ mm e $y_C = 6,417$ m.

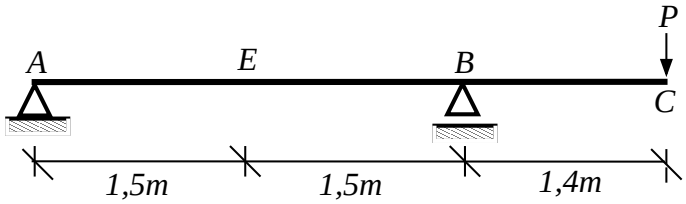


Figura 8.19: Figura do exercícios 14

15. Calcular ϕ_A, ϕ_B, y_C e y_D para a viga da Figura 8.20, dado: $EI = 10^5$ kNm^2, constante.

    Resposta: $y_C = 3,73$ mm $\downarrow$ e $y_D = 1,6$ mm $\uparrow$.

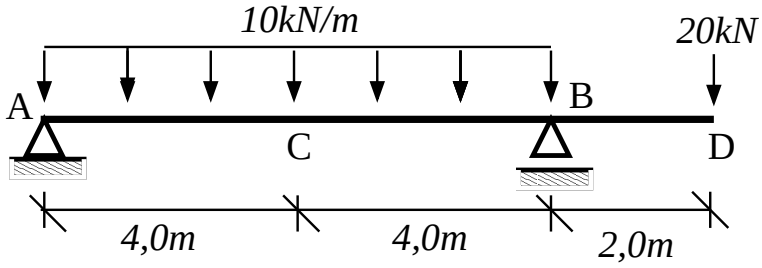


Figura 8.20: Figura do exercícios 15

16. Desenhar a linha elástica da viga da Figura 8.21, indicando os valores principais, dado: $EI = 10^5$ kNm^2.

    Resposta: $\phi_A = \phi_B = 0,0012$ rad; $y_E = 3,2$ mm; $y_C = y_D = -3,6$ mm.

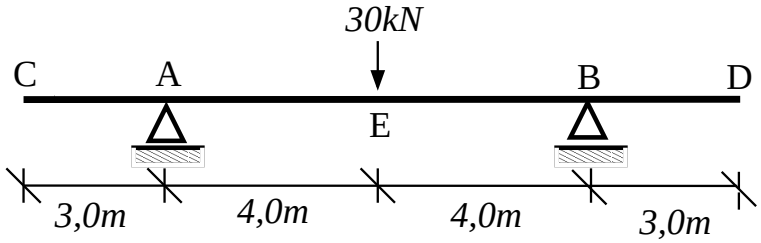


Figura 8.21: Figura do exercícios 16

17. Calcular a flecha no meio do vão da viga da Figura 8.22.

    Resposta: $y = \frac{qa^2b^2}{16EI}$.

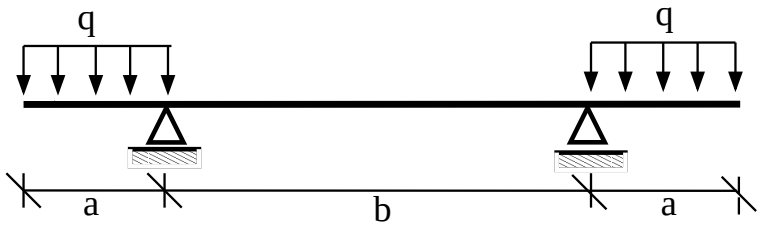


Figura 8.22: Figura do exercícios 17

18. Dado $EI = 7200$ kNm^2, constante, calcule ϕ_A, ϕ_B, y_D e y_E na viga da Figura 8.23.

    Resposta: $\phi_A = -\phi_B = 0,003407$ rad,$y_C = y_D = -3,37$ mm, $y_E = 5,26$ mm.

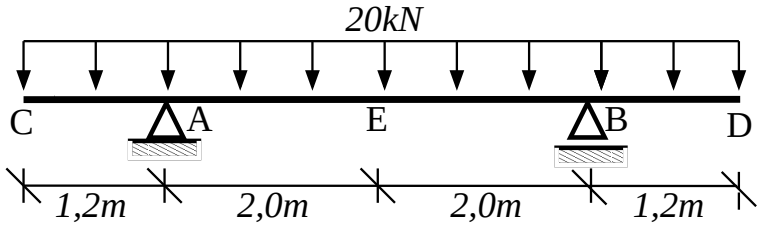


Figura 8.23: Figura do exercícios 18

19. Dimensionar uma viga em balanço com uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m ao longo de seu comprimento de 4 m. A viga tem seção retangular $A \times 2A$. Calcular A em número inteiro de centímetros. Dados $E = 2.10^5$MPa, $\overline{\sigma} = 120$ MPa e $\overline{y} = 12$cm.

    Resposta: $A =$10 cm, $\sigma_{max} = 120$ MPa e $y_{max} = 11,574$ mm.

20. Dimensionar a viga do exercício anterior para $A = 2$m, $P = 30$ kN, $E = 110$GPa, $\overline{\sigma} = 80$ MPa e $\overline{y} = 10$mm. Adotar uma seção I de espessura t constante, altura total $8t$ e largura de abas $5t$.

    Resposta: $t = 23$mm.

21. Escolher o perfil de aço de abas largas (tipo W) mais econômico para a viga da Figura 8.24. Representar os diagramas de tensões das seções das seções A e C e calcular y_c. Dados $M = 25kNm$, $P = 82$ kN, $\overline{\sigma}$=140 MPa e $\overline{y} = 5$ mm, E = 210 GPa.

    Resposta: $W310x32,7$, $\sigma^A_{max} = 60,24MPa$, $\sigma^C_{max} = 137,35MPa$ e $y_C = 4,35mm$.

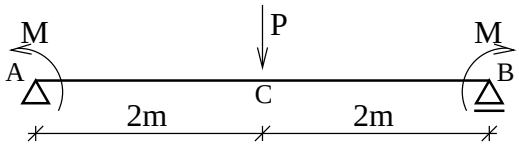


Figura 8.24: Figura do exercício 21

22. Para uma viga em balanço de comprimento $2,5m$ e carga uniformemente distribuída q em todo o comprimento, dados E=210GPa, $\overline{\sigma} = 140MPa$ e $\overline{y} = 8mm$,

    - Calcular q_{adm} se a viga é um perfil $W200x52$.
    - Escolher o perfil W mais econômico se $q = 28kN/m$.

    Resposta: $q = 18,2kN/m$ e $W410x38,8$.

23. A viga da Figura 8.25 é constituída por um perfil W310 $\times$ 38,7, de aço ($E = 210$ GPa). Dados $L = 3,2$ m, $M_o = 28$ kNm, $\overline{\sigma} = 160$ MPa e $\overline{y} = 4,6$ mm, calcular o valor máximo admissível da taxa de carga q e os valores correspondentes da tensão máxima e da flecha máxima.

    Resposta: $q = 33,8$ kN/m, $\sigma = 130$ MPa, $y = 4,6$ mm.

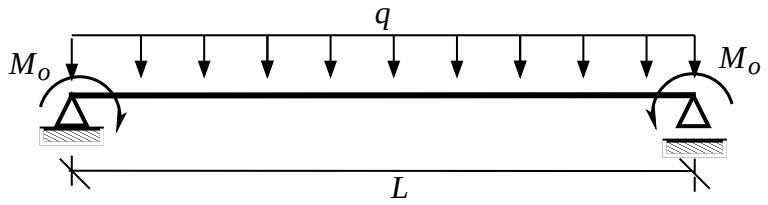


Figura 8.25: Figura do exercício 23

24. Calcular σ_{max} e as flechas no meio do vão e nas extremidades dos balanços da viga da Figura 8.26, de aço ($E = 210$ GPa), com seção circular de diâmetro 100 mm.

    Resposta: $\sigma = 101,83$ MPa, $y_{meio} = 7,58$ mm e $y_{balanço} = 15,36$ mm.

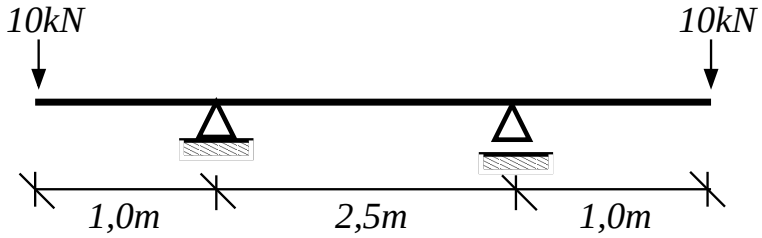


Figura 8.26: Figura do exercício 24

8.4 Tabelas

A tabela 8.1 mostra alguns esquemas de apoios e articulações adotados para indicar as restrições de deslocamentos impostas às vigas. As tabelas 8.2, 8.3,8.4, 8.5 e 8.6 mostram as respostas de deflexões e rotações para vigas engastadas/livre e biapoiadas.

Tabela 8.1: Apoios e articulações.

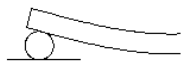
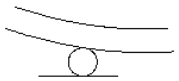
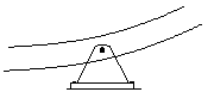
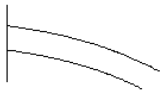
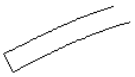
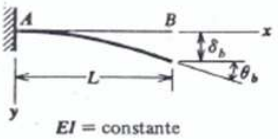
1  v = 0 Rolete	2  v = 0 Pino
3  v = 0 Rolete	4  v = 0 Pino
5  v = 0 Θ = 0 Extremidade fixa	6  v = 0 M = 0 Extremidade livre
7  M = 0 Pino ou articulação interna	

Tabela 8.2: Deflexões e rotações em vigas engastadas-livres, extraída do livro *Mecânica dos Sólidos* - Timoshenko e Gere.

Tabela D-1 Deflexões e Inclinações de Vigas Engastadas em Balanço



EI = constante

v = deflexão na direção y

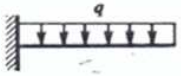
$v' = \dfrac{dv}{dx}$ = inclinação da linha elástica

$\delta_b = v(L)$ = deflexão na extremidade direita da viga

$\theta_b = v'(L)$ = inclinação na extremidade direita da viga

---

1.

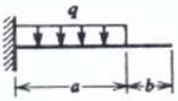


$$v = \frac{q\,x^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2)$$

$$v' = \frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_b = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_b = \frac{qL^3}{6EI}$$

2.



$$v = \frac{qx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

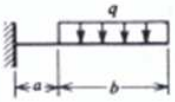
$$v' = \frac{qx}{6EI}(3a^2 - 3ax + x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{qa^3}{24EI}(4x - a) \qquad v' = \frac{qa^3}{6EI} \qquad a \le x \le L$$

Para $x = a$: $\quad v = \dfrac{qa^4}{8EI} \qquad v' = \dfrac{qa^3}{6EI}$

$$\delta_b = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) \qquad \theta_b = \frac{qa^3}{6EI}$$

3.



$$v = \frac{qx^2}{12EI}(3bL + 3ab - 2bx) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v' = \frac{qbx}{2EI}(L + a - x) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{q}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 - 4a^3x + a^4) \qquad a \le x \le L$$

$$v' = \frac{q}{6EI}(x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x - a^3) \qquad a \le x \le L$$

Para $x = a$: $\quad v = \dfrac{qa^2b}{12EI}(3L + a) \qquad v' = \dfrac{qabL}{2EI}$

$$\delta_b = \frac{q}{24EI}(3L^4 - 4a^3L + a^4) \qquad \theta_b = \frac{q}{6EI}(L^3 - a^3)$$

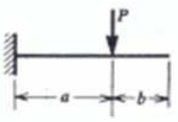
4.



$$v = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = \frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

$$\delta_b = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_b = \frac{PL^2}{2EI}$$

5.



$$v = \frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \qquad v' = \frac{Px}{2EI}(2a - x) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \qquad v' = \frac{Pa^2}{2EI} \qquad a \le x \le L$$

para $x = a$: $\quad v = \dfrac{Pa^3}{3EI} \qquad v' = \dfrac{Pa^2}{2EI}$

$$\delta_b = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \qquad \theta_b = \frac{Pa^2}{2EI}$$

Tabela 8.3: Deflexões e rotações em vigas engastadas-livres, extraída do livro *Mecânica dos Sólidos* - Timoshenko e Gere.

6.



$$v = \frac{M_0 x^2}{2EI} \qquad v' = \frac{M_0 x}{EI}$$

$$\delta_b = \frac{M_0 L^2}{2EI} \qquad \theta_b = \frac{M_0 L}{EI}$$

7.



$$v = \frac{q_0 x^2}{120\,LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$

$$v' = \frac{q_0 x}{24LEI}(4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$$

$$\delta_b = \frac{q_0 L^4}{30EI} \qquad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{24EI}$$

8.



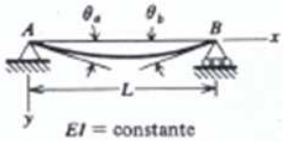
$$v = \frac{q_0 x^2}{120LEI}(20L^3 - 10L^2x + x^3)$$

$$v' = \frac{q_0 x}{24LEI}(8L^3 - 6L^2x + x^3)$$

$$\delta_b = \frac{11q_0 L^4}{120EI} \qquad \theta_b = \frac{q_0 L^3}{8EI}$$

Tabela 8.4: Deflexões e rotações em vigas biapoiadas, extraída do livro *Mecânica dos Sólidos* - Timoshenko e Gere.

Tabela D-2 Deflexões e Inclinações de Vigas Simplesmente Apoiadas



EI = constante

v = deflexão na direção y

$v' = \dfrac{dx}{dv}$ = inclinação da linha elástica

$\delta_c = v\left(\dfrac{L}{2}\right)$ = deflexão no meio do vão

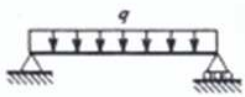
x_1 = distância de A ao ponto de deflexão máxima

$\delta_{máx.} = v_{máx.}$ = deflexão máxima

$\theta_a = v'(0)$ = ângulo na extremidade esquerda da viga

$\theta_b = -v'(L)$ = ângulo na extremidade direita da viga

1.

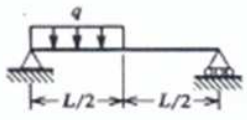


$$v = \frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = \frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_c = \delta_{máx.} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_a = \theta_b = \frac{qL^3}{24EI}$$

2.



$$v = \frac{qx}{384EI}(9L^3 - 24Lx^2 + 16x^3) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{q}{384EI}(9L^3 - 72Lx^2 + 64x^3) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

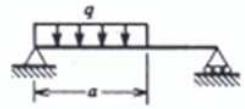
$$v = \frac{qL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^3x - L^3) \qquad \frac{L}{2} \le x \le L$$

$$v' = \frac{qL}{384EI}(24x^2 - 48Lx + 17L^2) \qquad \frac{L}{2} \le x \le L$$

$$\delta_c = \frac{5qL^4}{768EI} \qquad \theta_a = -\frac{3qL^3}{128EI} \qquad \theta_b = \frac{7qL^3}{384EI}$$

Tabela 8.5: Deflexões e rotações em vigas biapoiadas, extraída do livro *Mecânica dos Sólidos* - Timoshenko e Gere.

3.



$$v = \frac{qx}{24LEI}(a^4 - 4a^3L + 4a^3L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3) \qquad 0 \le x \le a$$

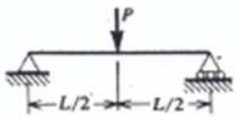
$$v' = \frac{q}{24LEI}(a^4 - 4a^3L + 4a^3L^2 + 6a^2x^2 - 12aLx^2 + 4Lx^3) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{qa^2}{24LEI}(-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3) \qquad a \le x \le L$$

$$v' = \frac{qa^2}{24LEI}(4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2) \qquad a \le x \le L$$

$$\theta_a = -\frac{qa^2}{24LEI}(a^2 - 4aL + 4L^2) \qquad \theta_b = \frac{qa^2}{24LEI}(2L^2 - a^2)$$

4.

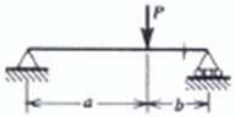


$$v = \frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = \delta_{máx} = \frac{PL^3}{48EI} \qquad \theta_a = \theta_b = \frac{PL^2}{16EI}$$

5.



$$v = \frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

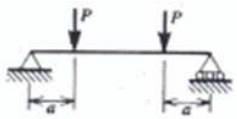
$$v' = \frac{Pb}{6LEI}(L^2 - b^2 - 3x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

$$\theta_a = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \qquad \theta_b = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

$$\text{Se } a \ge b,\ \delta_c = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$$

$$\text{Se } a \ge b,\ x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad \text{e} \quad v_{máx} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$$

6.



$$v = \frac{Px}{6EI}(3aL - 3a^2 - x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v' = \frac{P}{2EI}(aL - a^2 - x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

$$v = \frac{Pa}{6EI}(3Lx - 3x^2 - a^2) \qquad a \le x \le \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{Pa}{2EI}(L - 2x) \qquad a \le x \le \frac{L}{2}$$

$$\theta_a = \frac{Pa(L-a)}{2EI} \qquad \delta_c = v_{máx} = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2)$$

7.



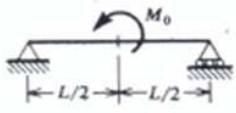
$$v = \frac{M_0 x}{6LEI}(2L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$v' = \frac{M_0}{6LEI}(2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_c = \frac{M_0L^2}{16EI} \qquad \theta_a = \frac{M_0L}{3EI} \qquad \theta_b = \frac{M_0L}{6EI}$$

$$x_1 = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{e} \quad \delta_{máx} = \frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

8.



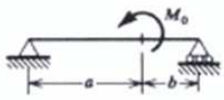
$$v = \frac{M_0 x}{24LEI}(L^2 - 4x^2) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$v' = \frac{M_0}{24LEI}(L^2 - 12x^2) \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$\delta_c = 0 \qquad \theta_a = \frac{M_0L}{24EI} \qquad \theta_b = -\frac{M_0L}{24EI}$$

Tabela 8.6: Deflexões e rotações em vigas biapoiadas, extraída do livro *Mecânica dos Sólidos* - Timoshenko e Gere.

9.



$$v = \frac{M_0 x}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

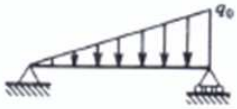
$$v' = \frac{M_0}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2) \qquad 0 \le x \le a$$

Para $x = a$: $v = \frac{M_0 a}{3LEI}(3aL - 2a^2 - L^2)$

Para $x = a$: $v' = \frac{M_0}{3LEI}(3aL - 3a^2 - L^2)$

$$\theta_a = \frac{M_0}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2) \qquad \theta_b = \frac{M_0}{6LEI}(3a^2 - L^2)$$

10.



$$v = \frac{q_0 x}{360LEI}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$$

$$v' = \frac{q_0}{360LEI}(7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)$$

$$\delta_c = \frac{5q_0L^4}{768EI} \qquad \theta_a = \frac{7q_0L^3}{360EI} \qquad \theta_b = -\frac{q_0L^3}{45EI}$$

$$x_1 = 0{,}5193L \qquad \delta_{máx} = 0{,}00652\frac{q_0L^4}{EI}$$

Capítulo 9

Problemas estaticamente indeterminados

São estruturas com as quais são necessárias outras equações além das equações de equilíbrio estático para que se possa resolvê-las. Estas equações podem ser equações de compatibilidade de deslocamentos.

9.1 Exemplos

1. Calcular as reações de apoio na barra bi-engastada representada na Figura 9.1, de peso próprio desprezível, sujeita à carga axial **P**.

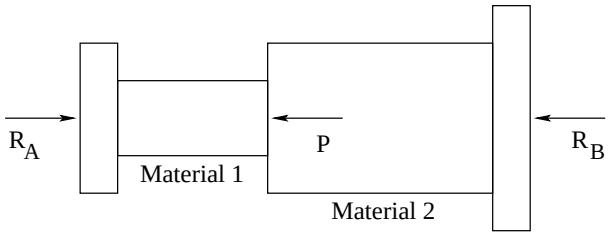


Figura 9.1: Figura do exemplo 1

2. Calcular as reações de apoio na barra representada na Figura 9.2, de peso próprio desprezível, sujeita às cargas axiais F_1 e F_2.

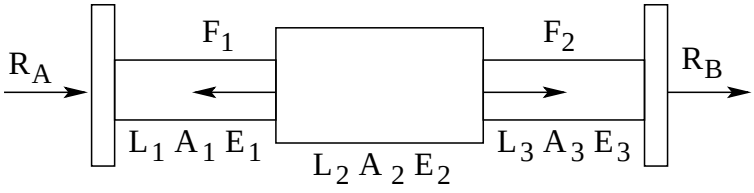


Figura 9.2: Figura do exemplo 2

3. Uma barra AB, de aço, de seção retangular 40 mm $\times$50 mm e de comprimento de $800,4$ mm é encaixada entre dois apoios fixos distantes

entre si e em seguida sofre o aumento de temperatura $\Delta t = 48^o$C . Calcular as reações de apoio e a tensão normal na barra. Considerar para o aço $E = 210000$ MPa e $\alpha = 12 \times 10^{-6}(^o\text{C})^{-1}$.

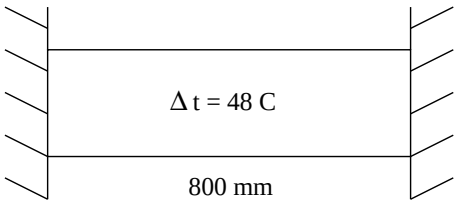


Figura 9.3: Figura do exemplo 3

4. Calcular os esforços normais de tração nos tirantes BC e DE da estrutura da Figura 9.4. Todos os pesos próprios são desprezíveis e a barra AB é rígida (não sofre flexão). Dados: BC (E_1, A_1, L_1), DE (E_2, A_2, L_2).

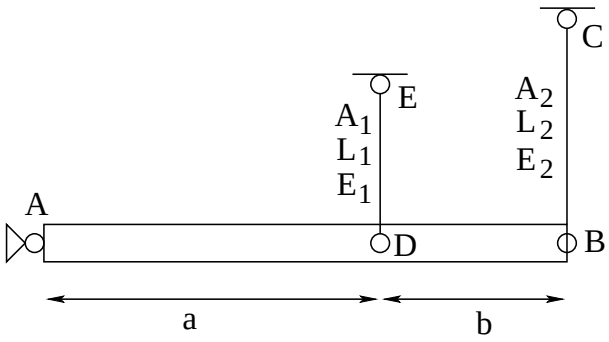


Figura 9.4: Figura do exemplo 4

5. Seja o pilar de concreto armado da Figura 9.5 com armadura disposta simetricamente em relação ao eixo, sujeito à carga **P** de compressão. Dados E_a, A_a, para o aço e E_c,A_c para o concreto. Calcular as tensões σ_a e σ_c nos materiais. Dados $\overline{\sigma_a} = 150$ MPa,$\overline{\sigma_c} = 9$ MPa, $E_a = 210$ GPa, $E_c = 14$ GPa,$A_a = 490$ mm^2, $A_c = 40000$ mm^2.

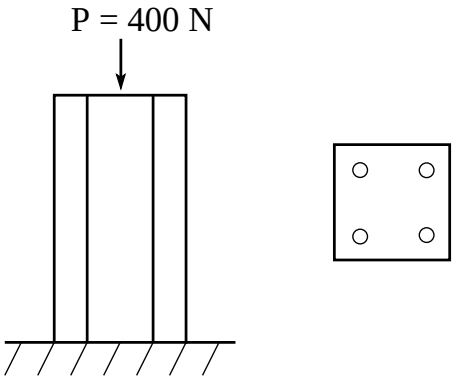


Figura 9.5: Figura do exemplo 5

6. Um eixo é formado por um núcleo de alumínio ($G_1 = 28$ GPa), diâmetro 50 mm, envolvida por uma coroa de aço de ($G_2 = 84$ GPa), diâmetro externo 60 mm, sendo rígida a ligação entre materias. Representar a variação das tensões tangenciais para um torque solicitante de $1,5$ kNm.

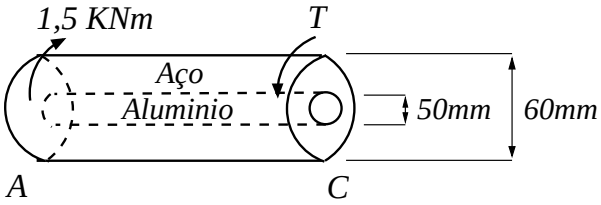


Figura 9.6: Figura do exemplo 6

7. Dados, para o eixo da Figura 9.7: o eixo AC $G_1 = 28$ GPa, $\overline{\tau_1} = 30$ MPa, o eixo CB $G_2 = 84$ GPa, $\overline{\tau_2} = 40$ MPa; $T_o = 3$ kNm e a razão entre os diametro $\frac{D_1}{D_2} = 2$, pede-se calcular as reações em A e B, dimensionar o eixo e calcular o ângulo de torção em C.

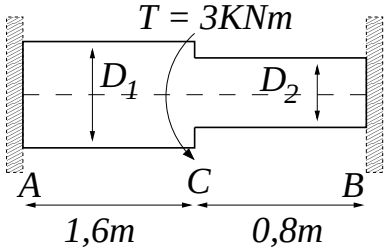


Figura 9.7: Figura do exemplo 7

8. Calcular o diagrama de momentos fletores da viga da Figura 9.8.

9. Calcular a flexão máxima para a viga da Figura 9.9.

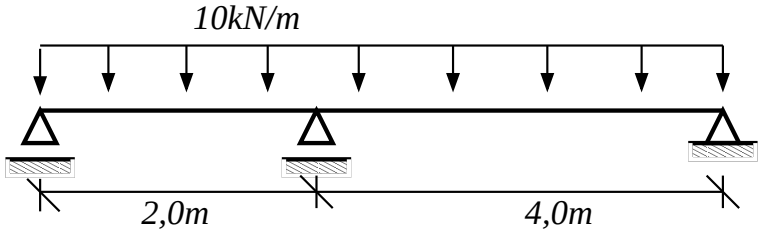


Figura 9.8: Figura do exemplo 8

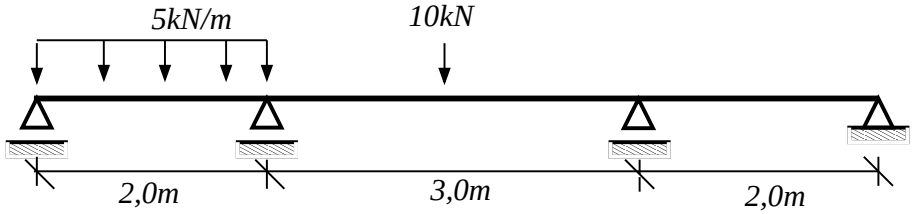


Figura 9.9: Figura do exemplo 9

9.1.1 Exercícios

1. Calcular as reações de apoio na barra da Figura 9.10, dados $P_1 = 5$ kN e $P_2 = 2,5$ kN.

   Resposta: $H_a = 4,25$ kN e $H_b = 3,25$ kN.

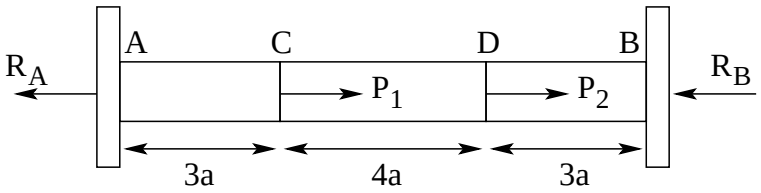


Figura 9.10: Figura do exercício 1

2. A barra **ABCD** da estrutura representada na Figura 9.11 é rígida (não flexiona). Os tirantes **CE** e **DF** são de alumínio com modulo de elasticidade 7×10^4 MPa e tem seção de circular com diâmetros de 10 mm **CE** e 12 mm **DF**. As dimensões são dadas (em mm) e a reação vertical no apoio B (em kN). Desprezar os pesos próprios. P = 10kN

   Resposta: $\sigma_{CE} = 145,5$ MPa; $\sigma_{DF} = 194,0$ MPa; $\Delta_A = 1,871$ mm; $V_B = 65,37$ kN.

3. Os tirantes **1** e**2** da estrutura 9.12 têm áreas de seção A_1 e $A_2 = 1,5A_1$ e o mesmo comprimento $L = 1,2$ m. Dados: $P = 120$ kN, $E_1 = 2 \times 10^5$ MPa, $\overline{\sigma_1} = 180$ MPa, $E_2 = 1,4 \times 10^5$ MPa, $\overline{\sigma_2} = 110$ MPa. Calcular A_1, A_2, σ_1, σ_2 e ΔL_B.

   Resposta: 394 mm^2, 591 mm^2, 78,74 MPa e 1,8 mm.

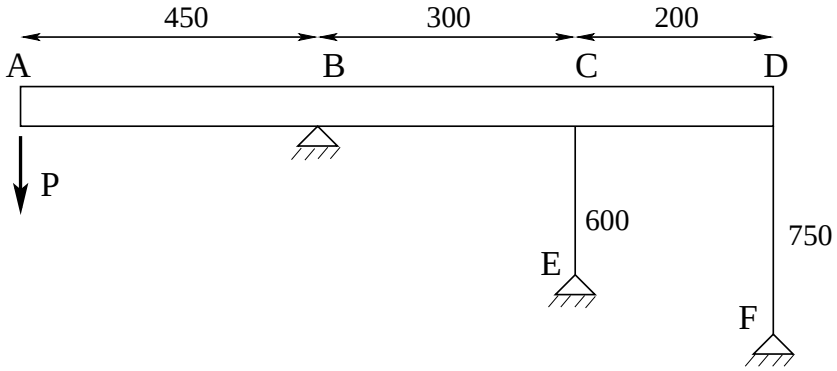


Figura 9.11: Figura do exercício 2

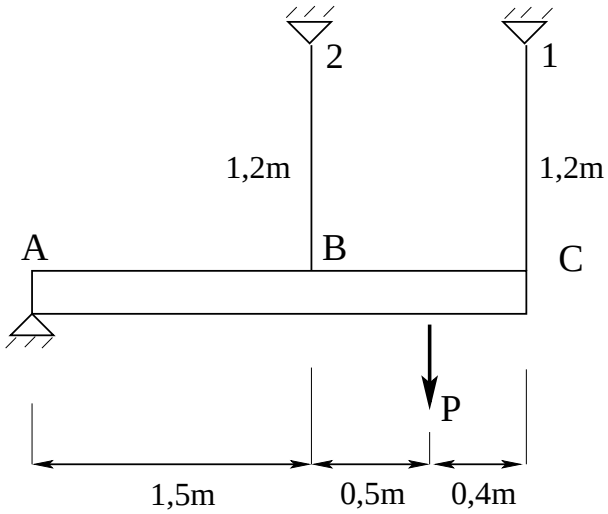


Figura 9.12: Figura do exercício 3

4. Um pilar de $2,8$ m de altura, é constituído por um perfil I de aço, cuja área de seção é $68,5$ cm^2, coberto por concreto, ver Figura 9.13. o pilar esta sujeito a uma carga **P** axial de compressão. Os pesos são desprezíveis e as deformações são elásticas proporcionais. São dados: $\overline{\sigma_a} = 162$ MPa, $\overline{\sigma_c} = 15$ MPa, $E_a = 2,1 \times 10^5$ MPa, $E_c = 1,75 \times 10^4$ MPa. Calcular o valor máximo admissível de **P** e os valores correspondentes das tensões σ_a, σ_c do encurtamento do pilar.

   Resposta: $P = 3177$ kN, $\sigma_a = 162$ MPa, $\sigma_c = 13$ MPa, e $\Delta L = 2,16$ mm.

5. Calcular as tensões no cobre e no alumínio da peça 9.14 para o aumento de temperatura de 20^oC. Dados $E_{cu} = 1,2 \times 10^5$ MPa, $E_a = 0,7 \times 10^5$ MPa, $\alpha_{cu} = 16,7 \times 10^6 (^o\text{C})^{-1}$, $\alpha_a = 23 \times 10^6 (^o\text{C})^{-1}$

   Resposta: $\sigma_c = 14,5$ MPa e $\sigma_a = 54,5$ MPa.

6. A peça sujeita à cargas axiais $P = 30$ kN aplicadas em B e C e a um aumento de temperatura de 30^o. Dados $E = 210$ GPa, $\alpha =$

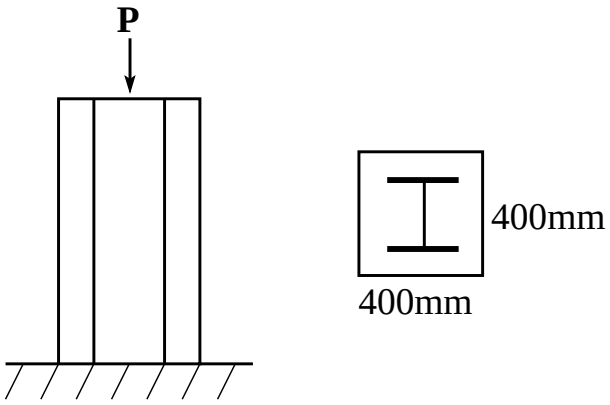


Figura 9.13: Figura do exercício 4

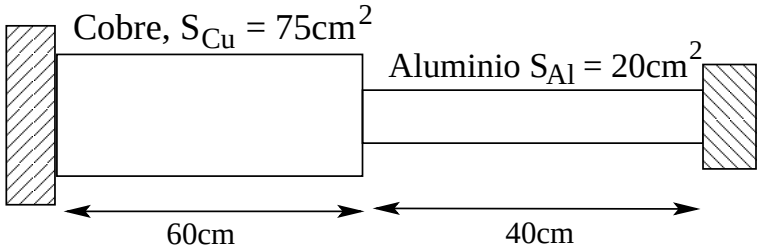


Figura 9.14: Figura do exercício 5

$11,7 \times 10^{-6}(^{o}\text{C})^{-1}$ e as áreas das seções 500mm^2 em AB e CD, e 750mm^2 em BC, representar a variação do esforço normal e da tensão normal ao longo do comprimento.

Resposta: Compressão de $81,43$ MPa em BC e de $62,14$ MPa em AB e CD.

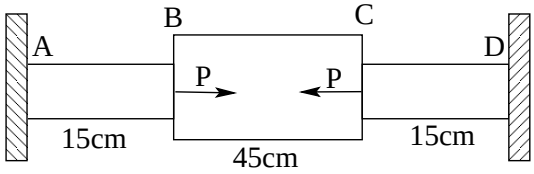


Figura 9.15: Figura do exercício 6

7. O eixo engastado em A e B, de seção circular constante, esta sujeito aos torques $T_1 = 1,3$ kNm em C e $T_2 = 2,6$ kNm em D, conforme a Figura 9.16. Dado $\overline{\tau} = 30$ MPa, pede-se calcular as reações em A e B, dimensionar o eixo e calcular os valores correspondentes das tensões máximas em cada trecho.

   Resposta: $T_A = 1,625$ kNm e $T_B = 2,275$ kNm, $\tau_{AB} = 21,3$ MPa, $\tau_{BC} = 4,25$ MPa e $\tau_{AB} = 29,8$ MPa.

8. Calcular o ângulo de torção $C \times A$ e representar a variação das tensões de cisalhamento em cada trecho do eixo. Em BC o núcleo interno

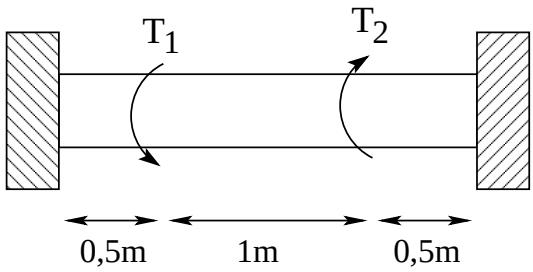


Figura 9.16: Figura do exercício 7

(material 1), e a luva (material 2) são rigidamente ligados entre si. Dados $D_1 = 100$ mm, $D_2 = 150$ mm, $G_1 = 70$ GPa, $G_2 = 105$ GPa e o torque de $T = 12$ kNm.

Resposta: $\theta = 0,02115$ rad, $\tau_1 = 61,11$, $\tau_2 = 19,4$ MPa.

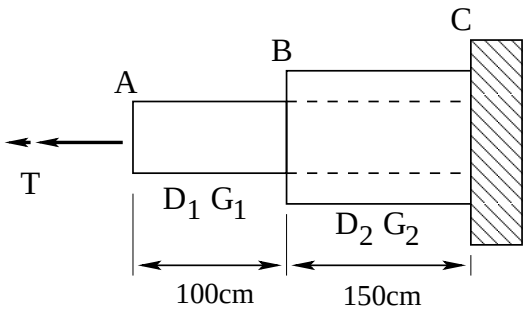


Figura 9.17: Figura do exercício 8

9. Calcular a flecha máxima para a viga da Figura 9.18.

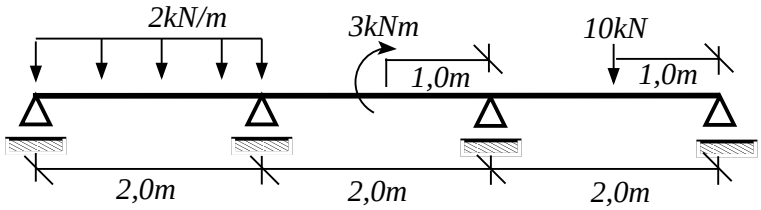


Figura 9.18: Figura do exercício 9

10. Desenhe o diagrama de momento fletor para a viga da Figura 9.19.

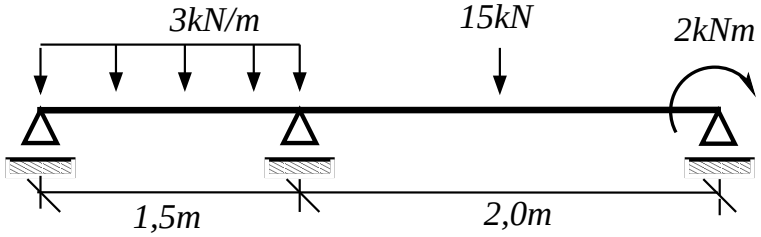


Figura 9.19: Figura do exercício 10

Bibliografia

1 HIBBELER, R.C. Resistência dos Materiais. Ed. Pearson

2 BEER, Ferdinand, JOHNSTON, E. Russell. Resistência dos Materiais. Mc Graw Hill.

3 GERE, James M. Mecânica dos Materiais. Editora Cengage Learning.

4 TIMOSHENKO, Stephen, GERE, James. Mecânica dos Sólidos; vol. 1. LTC editora.

5 UGURAL, Ansel C., Mecânica dos Materiais; LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A..

6 POPOV, Egor Paul. Resistência dos Materiais. PHB editora.

7 SHAMES. Mecânica dos Sólidos.