UNIVERSIDADE POSITIVO

Engenharia Civil
Prova Bimestral: 1 / 1° Semestre de 2019
Disciplina : Teoria das Estruturas I

TE191-B1-A

Nota:

Turma

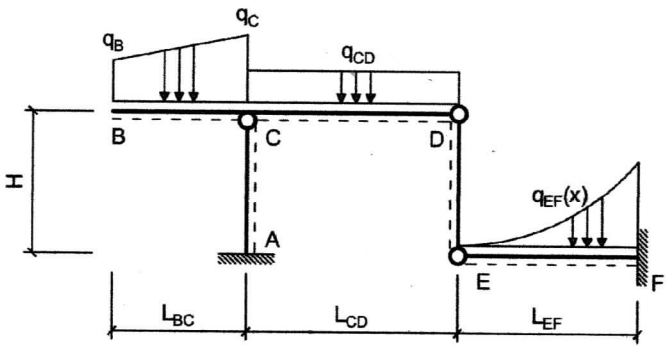
Nome: GABARITO

Matrícula:

Orientações:
- Leia atentamente todas as instruções da prova.
- Não é permitida a comunicação entre os alunos durante a realização da prova.
- **Respostas das questões com alternativas devem ser assinaladas com caneta azul ou preta na própria questão.**
- **Respostas das questões abertas devem ser escritas com caneta azul ou preta nas linhas abaixo de cada questão.**
- Aparelhos de comunicação deverão ser desligados e mantidos dentro das malas, que deverão ser deixadas na frente do salão de provas. Caso algum aluno seja flagrado portando um celular em salão de provas, mesmo que este esteja desligado, isto será considerado como tentativa de cola e o aluno terá sua prova recolhida e será atribuída nota zero na avaliação.
- **É obrigatória a CONSULTA A UMA FOLHA SULFITE A4 BRANCA FRENTE E VERSO MANUSCRITA a ser entregue junto com a prova.**
- **RESPOSTAS SEM OS RESPECTIVOS CÁLCULOS SERÃO AVALIADAS COM CONCEITO ZERO.**
- **Para todos os cálculos nas questões utilize 5 algarismos significativos.**
- Na correção dos valores numéricos das questões abertas será utilizada uma margem de erro de 5 por cento (para mais ou para menos).
- **A sigla N.D.A. significa nenhuma das alternativas elencadas para a questão.**

Problema A : [0.625 pontos por questão]

Considerando o modelo estrutural plano esboçado ao lado e os dados fornecidos abaixo, responda os questionamentos que se seguem.



Dados:
L_{BC} = 4.00 m **L_{CD} = 5.00 m**
L_{EF} = 5.00 m **H = 3.00 m**

q_B = 10.0 kN/m
q_c = (20.0 40.0 60.0) kN/m
q_{CD} = 20.0 kN/m
$q_{EF}(x) = 2x^2$ (origem do eixo x no ponto E)

- Todas as barras possuem módulo de elasticidade **E = 25 GPa** e seção transversal retangular de **base 20 cm** e **altura 40 cm exceto** a **barra DE** que possui módulo de elasticidade **E = 50 GPa** e seção transversal circular cheia de **diâmetro 3.0 cm.**

- O carregamento varia linearmente no trecho BC.

Q01 – Qual o valor da reação de apoio vertical no ponto A [em "kN" e com positivo para cima] ?

232,67

Q02 – Qual o valor da reação de apoio de momento fletor no ponto F [em "kNm" e com positivo no sentido anti-horário] ?

-149,83

Q03 – Qual a deflexão do ponto E [em "mm" e com positivo para cima] ?

-27,737

Q04 – Qual a rotação/ inclinação do ponto E [em "radianos" e em módulo] ?

0,0073436

Q05 – Qual a equação de carregamento para o trecho BC [em unidades de "kN" e "m" e com origem do eixo x no ponto B] ?

12,5 x + 10

Q06 – Qual a equação de momentos fletores para a barra EF [em unidades de "kN" e "m" e com origem do eixo x no ponto E] ?

$-0,16667\,x^4 - 7,3333\,x$

Q07 – Qual a rigidez axial da barra DE [em "kN/m"] ?

11781

Q08 – Qual o ganho/redução de comprimento axial da barra DE [em "mm" e com positivo para ganho e negativo para redução] ?

-0,62247

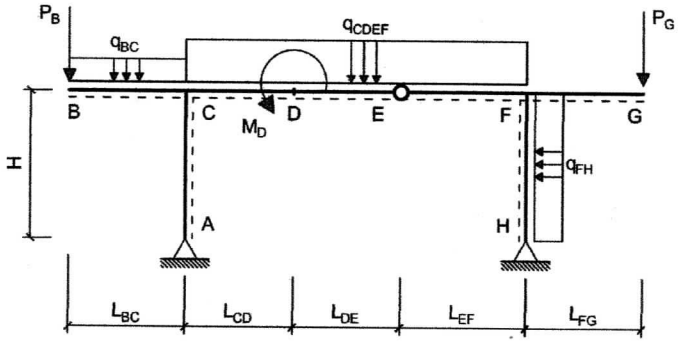
Problema B : **[0.625 pontos por questão]**

Considerando o modelo estrutural plano esboçado ao lado e os dados fornecidos abaixo, responda os questionamentos que se seguem.

Dados:

L_{BC} = 4.00 m **L_{CD} = 5.00 m** **L_{DE} = 2.00 m**
L_{EF} = 2.00 m **L_{FG} = 3.00 m** **H = 3.00 m**

P_B = 40.0 kN
M_D = 100 kNm
P_G = 20.0 kN
q_{BC} = 20.0 kN/m
q_{CDEF} = 40.0 kN/m
q_{FH} = (20.0 40.0 60.0) kN/m



Q01 – Qual o valor da reação de apoio vertical no ponto H [em "kN" e com positivo para cima] :

130

Q02 – Qual o valor da reação de apoio horizontal no ponto A [em "kN" e com positivo para direita] :

116,67

Q03 – Qual o valor do momento fletor no ponto C da barra BC [em "kNm" e sinal conforme convenção de sinais] :

-320

Q04 – Qual a equação de momentos fletores para o trecho CD [eixo x com origem no ponto C, unidades de "kN" e "m" e sinais conforme a convenção de diagramas] :

$-20x^2 + 250x - 670$

Q05 – Qual a equação de esforços cortantes para o trecho DE [eixo x com origem no ponto C, unidades de "kN" e "m" e sinais conforme a convenção de diagramas] :

$-40x + 50$

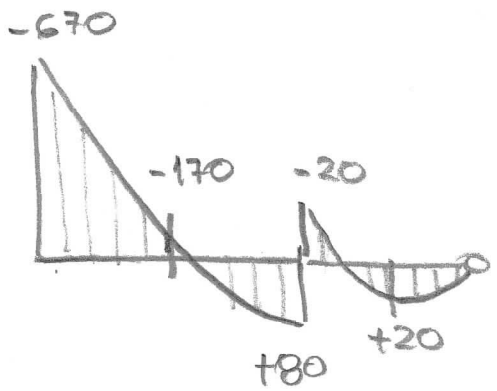
Q06 – Se houvesse uma barra birrotulada ligando os pontos A e H qual seria o grau estático do modelo estrutural [adim.] ?

1

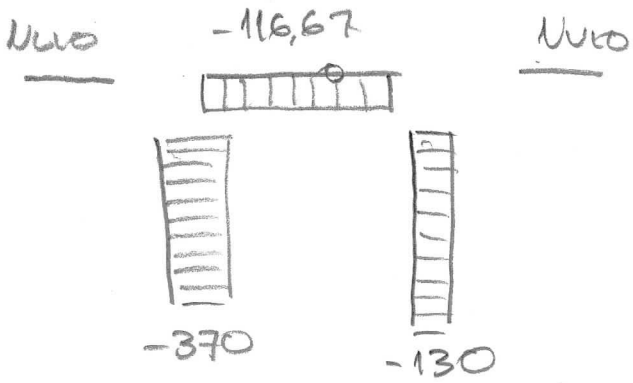
Q07 – Esboce no "Quadro 1" o diagrama de momentos fletores para o trecho CDE [unidades em "kN" e "m" e sinais conforme a convenção de sinais para diagramas].

Q08 – Esboce no "Quadro 2" o diagrama de esforços axiais para todo o modelo estrutural [unidades em "kN" e "m" e sinais conforme a convenção de sinais para diagramas].

Quadro 1 – Momentos Fletores do trecho CDE



Quadro 2 – Esforços Axiais de todo o modelo estrutural



TE191 - B1 - A PROBLEME A

Eq. courbe BC B(0,10) C(4,60) $q = Ax + B$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 60 \end{Bmatrix} \qquad q_{BC}(x) = 12{,}5x + 10$$

$$V_{BC}(x) = -\int q_{BC}(x)\,dx = -12{,}5\frac{x^2}{2} - 10x + C_1$$

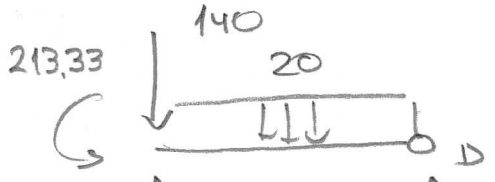
$V_{BC}(x=0) = 0 \rightsquigarrow C_1 = 0$

$$V_C = -12{,}5\cdot\frac{4^2}{2} - 10\times 4 = -140\,kN \downarrow$$

$$M_{BC}(x) = \int V_{BC}(x)\,dx = -12{,}5\frac{x^3}{6} - 10\frac{x^2}{2} + C_2$$

$M_{BC}(x=0) = 0 \rightsquigarrow C_2 = 0$

$$M_C = -12{,}5\times\frac{4^3}{6} - 5\times 4^2 = -213{,}333$$



$\Sigma M_D = 0$ ↺ (+)

$$V_C\times 5 - 140\times 5 - 213{,}33 - 20\times\frac{5^2}{2} = 0$$

$$V_C = \frac{1}{5}(140\times 5 + 213{,}33 + 10\times 25)$$

$V_C = 232{,}67\,kN \uparrow$

(D)

$\Sigma F_V = 0 \uparrow \quad V_D + 232{,}67 - 140 - 20\times 5 = 0$

$V_D = -232{,}67 + 140 + 100 = +7{,}3333\,kN \quad (= N_{DE}) \downarrow$

$$k_{DE} = EA/L = 50\times 10^6\,kN/m^2 \times \pi\times(0{,}03m)^2/4 \,/\, 3m$$

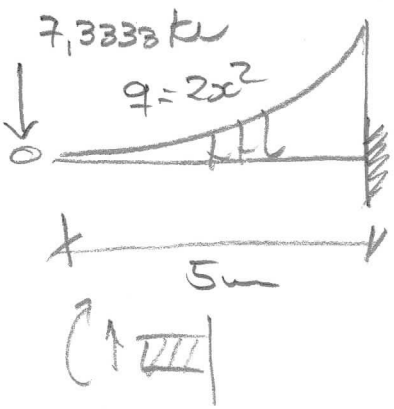
$k_{DE} = 11781\,kN/m$

$N = K \cdot \delta \qquad \delta = N/K = \frac{-7,3333\,kN}{11780} = -0,62247 \times 10^{-3}\,m$

$\delta_{DE} = -0,62247\,mm$

Barra EF:

$V_{EF}(x) = -\int 2x^2\,dx$



$V_{EF}(x) = -\frac{2x^3}{3} + C_1$

$V_{EF}(x=0) = -7,3333$

$V_{EF}(x) = -0,66667\,x^3 - 7,3333$

$M_{EF}(x) = \int V_{EF}(x)\,dx$

$M_{EF}(x) = -\frac{2x^4}{12} - 7,3333x + C_2 \qquad M_{EF}(x=0) = 0 \quad C_2 = 0$

$M_F = M_{EF}(x=5) = -0,16667 \cdot 5^4 - 7,3333 \cdot 5 = -140,84\,kNm$

$EI = 25 \times 10^6\,kN/m^2 \times 0,2m \times (0,4m)^3/12 = 26667\,kNm^2$

$\phi_{EF} = \frac{1}{EI}\int M_{EF}\,dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{-2x^5}{60} - \frac{7,3333x^2}{2} + C_3\right)$

$\phi_{EF}(x=5) = 0 \qquad \frac{1}{EI}\left(\frac{-2 \cdot 5^5}{60} - \frac{7,3333 \cdot 5^2}{2} + C_3\right) = 0$

$C_3 = 195,83 \qquad \phi_E = C_3/EI = \frac{195,83}{26667} = 7,3436 \times 10^{-3}\,rad$

$v_{EF}(x) = \int \phi_{EF}(x)\,dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{-2x^6}{360} - \frac{7,3333x^3}{6} + 195,85x + C_4\right)$

$P/\ v_{EF}(x=5) = 0 \qquad \frac{-2 \cdot 5^6}{360} - \frac{7,3333 \cdot 5^3}{6} + 195,85 \times 5 + C_4 = 0$

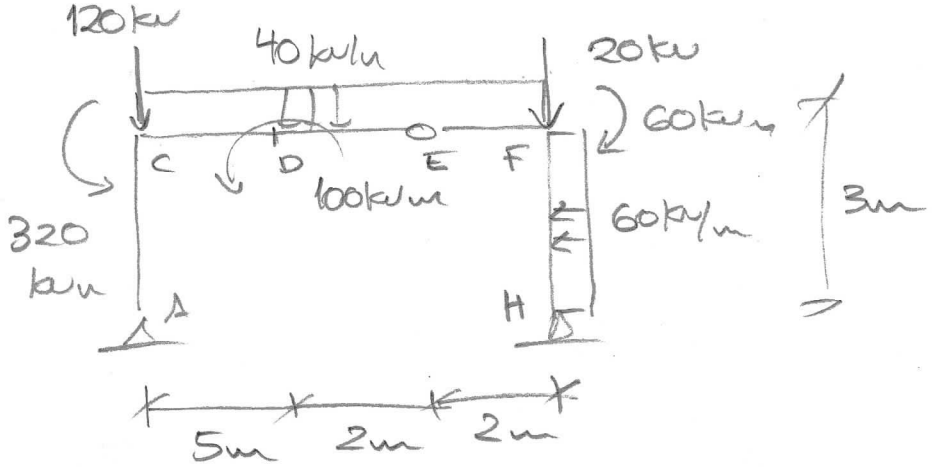
$C_4 = -739,67 \qquad v_E = \frac{-739,67}{26667} = -0,027737\,m = -27,737\,mm$

- Balanço BC : $M_C = -40 \times 4 - 20 \times 4^2/2 = \underline{-320 \text{ kNm}}$ //

  $V_C = -40 - 20 \times 4 = -120 \text{ kN}$

- Balanço FG : $M_F = 20 \times 3 = -60 \text{ kNm}$

  $V_F = -20 \text{ kN}$



$\Sigma M_A = 0 \circlearrowleft \oplus \quad V_H \times 9 + 60 \times 3^2/2 - 60 - 20 \times 9 - 40 \times 9^2/2 + 100 + 320 = 0$

$V_H = 1/9(-30 \times 9 + 60 + 180 + 20 \times 81 - 100 - 320) = \underline{+130 \text{ kN}} \uparrow$ //

$\Sigma F_V = 0 \uparrow \oplus \quad V_A + 130 - 120 - 40 \times 9 - 20 = 0$

$V_A = -130 + 120 + 360 + 20 = \underline{+370 \text{ kN}} \uparrow$

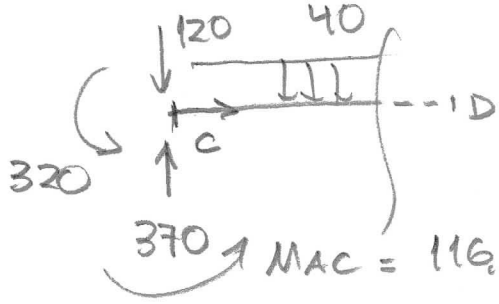
$\Sigma M_E^{ESQ} = 0 \circlearrowright \oplus \quad H_A \times 3 + 370 \times 7 - 320 - 120 \times 7 - 40 \times 7^2/2 - 100 = 0$

$H_A = 1/3(-370 \times 7 + 320 + 120 \times 7 + 20 \times 49 + 100) = \underline{-116{,}67 \text{ kN}} \rightarrow$

$\Sigma F_H = 0 \rightarrow \oplus \quad H_H - 60 \text{ kN/m} \times 3\text{m} + 116{,}67 \text{ kN} = 0$

$H_H = 60 \times 3 - 116{,}67 = 63{,}333 \text{ kN} \rightarrow$

TRECHO CD :

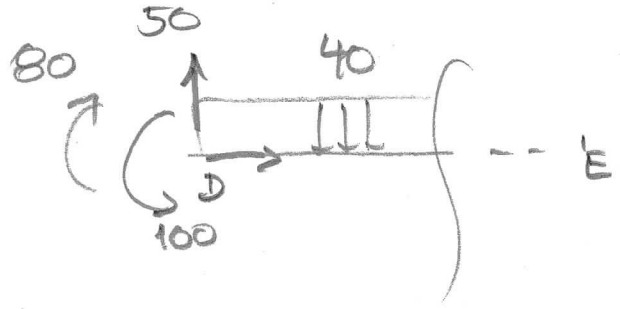


$M_{AC} = 116{,}67 \text{ kN} \times 3\text{m} = 350 \text{ kNm}$

$M_{CD}(x) = -40x^2/2 + (370 - 120)x - 320 - 350$

$* M_{CD}(x) = -20x^2 + 250x - 670$

TRECHO DE:



$V_D^{ESQ} = -120 - 40 \times 5 + 370 = 50\ kN$

$M_D^{ESQ} = -20 \times 5^2 + 250 \times 5 - 670 = +80\ kNm$

$M_{DE}(x) = -40\frac{x^2}{2} + 50x - 100 + 80$

$* M_{DE}(x) = -20x^2 + 50x - 20$

$V_{DE}(x) = -40x + 50$

DIAGRAMA M CDE:

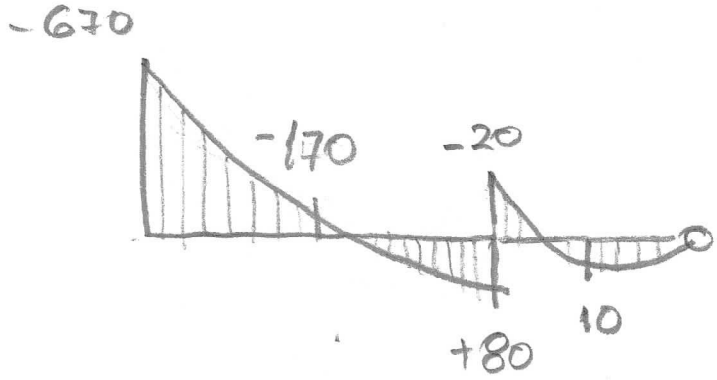
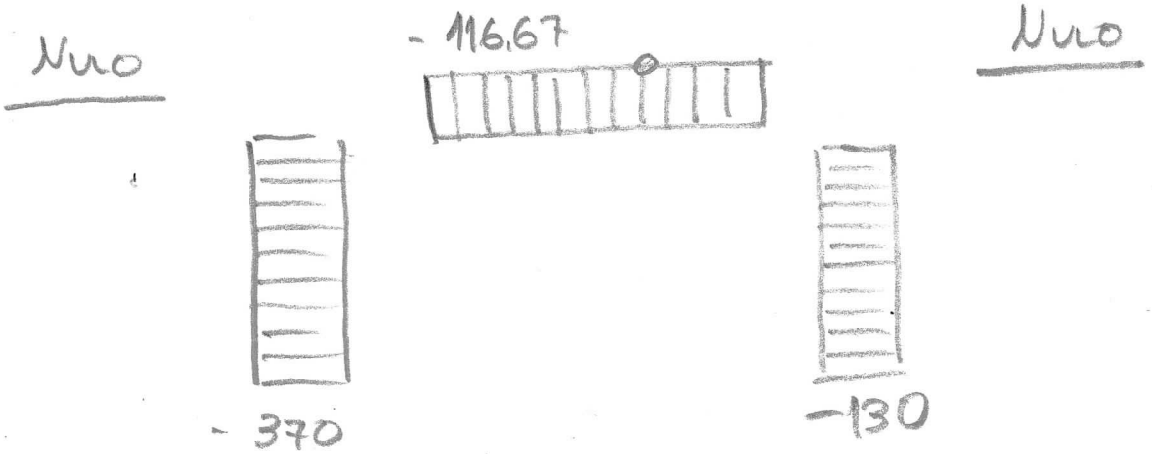


DIAGRAMA DE AXIAIS



TE191-B1-PA_versao_A.txt

Dados :
LBC = 4 m
LCD = 5 m
LEF = 5 m
H = 3 m
qB = 10 kN/m
qC = 20 kN/m
qCD = 20 kN/m
MB = 0 kNm
qEF = 2*x**2

Respostas :
Q01) VA = 131.33
Q02) MF = -247.5
Q03) DY_E = -61.068
Q04) ROT_E = 0.017344
Q05) qBC = 2.5*x + 10.0
Q06) MEF = -0.16667*x**4 - 28.667*x
Q07) kDE = 11781 kN/m
Q08) del_DE = -2.4333 mm

Dados :
LBC = 4 m
LCD = 5 m
LEF = 5 m
H = 3 m
qB = 10 kN/m
qC = 40 kN/m
qCD = 20 kN/m
MB = 0 kNm
qEF = 2*x**2

Respostas :
Q01) VA = 182
Q02) MF = -194.17
Q03) DY_E = -44.401
Q04) ROT_E = 0.012344
Q05) qBC = 7.5*x + 10.0
Q06) MEF = -0.16667*x**4 - 18.0*x
Q07) kDE = 11781 kN/m
Q08) del_DE = -1.5279 mm

Dados :
LBC = 4 m
LCD = 5 m
LEF = 5 m
H = 3 m
qB = 10 kN/m
qC = 60 kN/m
qCD = 20 kN/m
MB = 0 kNm
qEF = 2*x**2

Respostas :
Q01) VA = 232.67
Q02) MF = -140.83
Q03) DY_E = -27.734
Q04) ROT_E = 0.0073437
Q05) qBC = 12.5*x + 10.0
Q06) MEF = -0.16667*x**4 - 7.3333*x
Q07) kDE = 11781 kN/m
Q08) del_DE = -0.62247 mm

TE191-B1-PB_versao_A.txt

Dados :
LBC = 4 m LCD = 5 m
LDE = 2 m LEF = 2 m
LFG = 3 m H = 3 m
PB = 40 kN
PD = 0 kN
PG = 20 kN
MD = 100 kNm
qBC = 20 kN/m
qCDEF = 40 kN/m
qFG = 0 kN/m
qFH = 20 kN/m

Respostas :
Q01) RV_H = 150
Q02) RH_A = 70
Q03) MC_BC = -320
Q04) MCD = -20.0*x**2 + 230.0*x - 530.0
Q05) VDE = -40.0*x + 30.0
Q06) GE = 1
Q07) Diag_MCDE = [-530.00, -80.000, 120.00, 20.000, 30.000, 2.8422e-13]
Q08) Diag_N = [-350.00, -70.000, -150.00]

Dados :
LBC = 4 m LCD = 5 m
LDE = 2 m LEF = 2 m
LFG = 3 m H = 3 m
PB = 40 kN
PD = 0 kN
PG = 20 kN
MD = 100 kNm
qBC = 20 kN/m
qCDEF = 40 kN/m
qFG = 0 kN/m
qFH = 40 kN/m

Respostas :
Q01) RV_H = 140
Q02) RH_A = 93.333
Q03) MC_BC = -320
Q04) MCD = -20.0*x**2 + 240.0*x - 600.0
Q05) VDE = -40.0*x + 40.0
Q06) GE = 1
Q07) Diag_MCDE = [-600.00, -125.00, 100.00, 9.3223e-12, 20.000, 3.4106e-13]
Q08) Diag_N = [-360.00, -93.333, -140.00]

Dados :
LBC = 4 m LCD = 5 m
LDE = 2 m LEF = 2 m
LFG = 3 m H = 3 m
PB = 40 kN
PD = 0 kN
PG = 20 kN
MD = 100 kNm
qBC = 20 kN/m
qCDEF = 40 kN/m
qFG = 0 kN/m
qFH = 60 kN/m

Respostas :
Q01) RV_H = 130
Q02) RH_A = 116.67
Q03) MC_BC = -320
Q04) MCD = -20.0*x**2 + 250.0*x - 670.0
Q05) VDE = -40.0*x + 50.0
Q06) GE = 1
Q07) Diag_MCDE = [-670.00, -170.00, 80.000, -20.000, 10.000, 5.6843e-13]
Q08) Diag_N = [-370.00, -116.67, -130.00]