UNIVERSIDADE POSITIVO

Engenharia Civil
Prova Bimestral: 2 / 2° Semestre de 2019 **TE192-B2-A**
Disciplina : Teoria das Estruturas II

Nota:

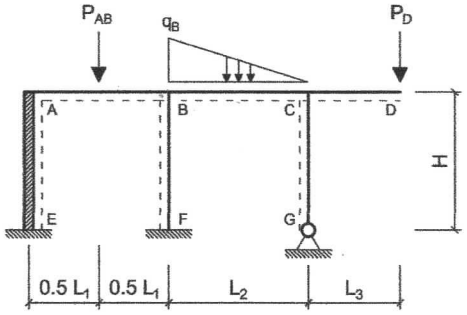
Turma

Nome: GABARITO PA: L=6m PB: Pv=100kN Matrícula:

Orientações:
- Leia atentamente todas as instruções da prova.
- Não é permitida a comunicação entre os alunos durante a realização da prova.
- **Respostas das questões com alternativas devem ser assinaladas com caneta azul ou preta na própria questão.**
- **Respostas das questões abertas devem ser escritas com caneta azul ou preta nas linhas abaixo de cada questão.**
- Aparelhos de comunicação deverão ser desligados e mantidos dentro das malas, que deverão ser deixadas na frente do salão de provas. Caso algum aluno seja flagrado portando um celular em salão de provas, mesmo que este esteja desligado, isto será considerado como tentativa de cola e o aluno terá sua prova recolhida e será atribuída nota zero na avaliação.
- **É obrigatória a CONSULTA A UMA FOLHA SULFITE A4 BRANCA FRENTE E VERSO MANUSCRITA a ser entregue junto com a prova.**
- **RESPOSTAS SEM OS RESPECTIVOS CÁLCULOS SERÃO AVALIADAS COM CONCEITO ZERO.**
- **Para todos os cálculos nas questões utilize 5 algarismos significativos.**
- Na correção dos valores numéricos das questões abertas será utilizada uma margem de erro de 5 por cento (para mais ou para menos).
- **A sigla N.D.A. significa nenhuma das alternativas elencadas para a questão.**

Problema A : [0.625 pontos por questão]

Utilizando o Método dos Deslocamentos (da Rigidez) calcular o momento fletor que ocorre no ponto B da barra AB respondendo os questionamentos abaixo.



Dados:
L_1 = 4.00 m **L_2 = (4.00 5.00 6.00) m** **L_3 = 3.00 m** **H = 3.00 m**
P_{AB} = 80 kN **P_D = 40 kN**
q_B = 25.0 kN/m

- Barra AE é infinitamente rígida;
- As demais barras são inextensíveis com E = 25 GPa e seção transversal retangular de base b = 15.0 cm e altura h = 40.0 cm ;

Q01 – As deslocabilidades do modelo, conforme as simplificações elencadas, são :

(A)	D1: translação horizontal conjunta dos pontos A, B e C	/	D2 : translação horizontal conjunta dos pontos E e F
~~(B)~~ X	D1: rotação do ponto B	/	D2 : rotação do ponto C
(C)	D1: rotação do ponto D	/	D2 : translação horizontal conjunta dos pontos C e D
(D)	D1: translação horizontal conjunta dos pontos E e F	/	D2 : rotação do ponto D

Q02 – O máximo coeficiente da diagonal principal da matriz de rigidez do sistema de equações de equilíbrio da estrutura (considerando a multiplicação por EI) é [em módulo e em unidades de kN e m]:

60000

Q03 – O mínimo coeficiente da diagonal principal da matriz de rigidez do sistema de equações de equilíbrio da estrutura (considerando a multiplicação por EI) é [em módulo e em unidades de kN e m]:

33333

Q04 – O máximo coeficiente fora da diagonal principal da matriz de rigidez do sistema de equações de equilíbrio da estrutura (considerando a multiplicação por EI) é [em módulo e em unidades de kN e m]:

6666,7

Q05 – O coeficiente de carga final relativo a deslocabilidade D1 da estrutura (combinando os efeitos das "reações nodais" e das "ações nodais" e considerando a numeração de deslocabilidade da resposta correta da questão Q01) [em módulo e em unidades de kN e m] é:

5

Q06 – O coeficiente de carga final relativo a deslocabilidade D2 da estrutura (combinando os efeitos das "reações nodais" e das "ações nodais" e considerando a numeração de deslocabilidade da resposta correta da questão Q01) [em módulo e em unidades de kN e m] é:

90

Q07 – O deslocamento correlato à deslocabilidade D1 (numeração de deslocabilidade conforme a resposta correta da questão Q01) [em "m" ou "rad" e sinal conforme a convenção de Green]:

$2,2159 \times 10^{-4}$

Q08 – O deslocamento correlato à deslocabilidade D2 (numeração de deslocabilidade conforme a resposta correta da questão Q01) [em "m" ou "rad" e sinal conforme a convenção de Green]:

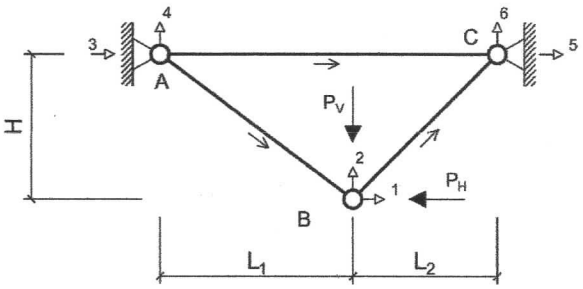
$-2,7443 \times 10^{-3}$

Q09 – O momento fletor no ponto B da barra AB é [em "kNm" e sinal conforme convenção de diagramas]:

-35,568

Problema B : **[0.625 pontos por questão]**

Considerando a numeração dos graus de liberdade e setas de orientação dos eixos locais positivos das barras, conforme indicado no modelo estrutural de treliça ao lado, calcular o esforço interno na barra AB e a reação de apoio horizontal no ponto A, empregando análise matricial via método dos deslocamentos.



Dados:
H = 1.80 m
L1 = 1.35 m
L2 = 1.35 m
P_H = 60.0 kN
P_V = (40.0 70.0 100.0) kN

- Todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade e a mesma seção transversal;
- Módulo de rigidez axial das barras EA = 10000 kN;
- Apoio A sofre deslocamento prescrito de 2.00 cm para a direita;

Q01 – Os coeficientes k_{11} e k_{12} da matriz de rigidez da barra AB em coordenadas globais são respectivamente [considerando a multiplicação dos termos por EA e em unidades de kN e m]:

1600 -2133,3

Q02 – Os coeficientes k_{11} e k_{12} da matriz de rigidez da barra AC em coordenadas globais são respectivamente [considerando a multiplicação dos termos por EA e em unidades de kN e m]:

3703,7 0

Q03 – Os coeficientes K_{11}, K_{12} e K_{23} da matriz de rigidez global da estrutura são respectivamente [considerando a multiplicação dos termos por EA e em unidades de kN e m]:

3200 0 2133,3

Q04 – Qual é o valor do deslocamento correlato ao grau de liberdade 1 indicado no modelo [em "m" e sinal conforme convenção de Green] ?

-0,00875

Q05 – Qual é o valor do deslocamento correlato ao grau de liberdade 2 indicado no modelo [em "m" e sinal conforme convenção de Green] ?

-0,025078

Q06 – Qual é o valor do esforço axial na barra AB [em "kN" e com positivo para tração]?

+ 12,5

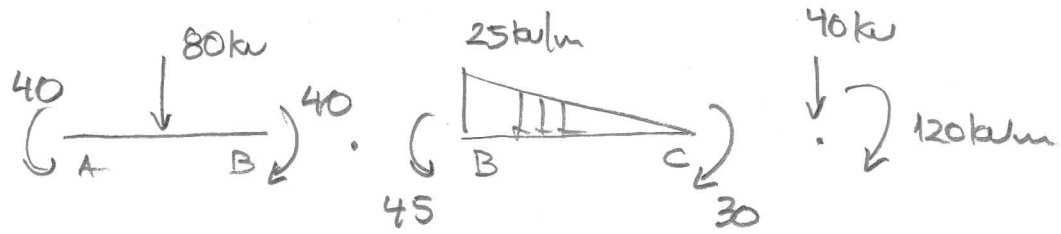
Q07 – Qual é o valor da reação de apoio horizontal no ponto A [em "kN" e com positivo para a direita]?

+ 66,574

TE192-B1-1 PROBLEMA 1 $L_2 = 6m$

⇒ Rotação do Ponto B e Rotação do Ponto C

Caso 0

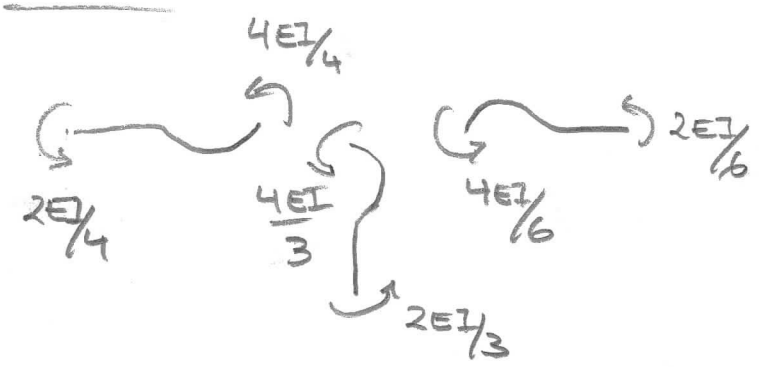


$F_{10} = 45 - 40 = 5$ $\quad F_{1N} = 0$

$F_{20} = -30$ $\quad F_{2N} = -120$

$$\{F_N\} - \{F_0\} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -90 \end{Bmatrix}$$

Caso 1



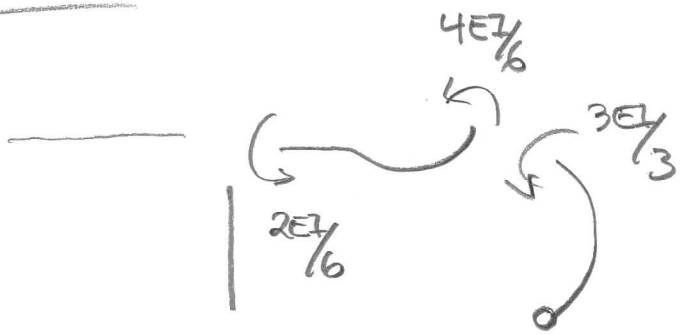
$$k_{11} = \left(\tfrac{4}{4} + \tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{3}\right) EI$$

$k_{11} = 3EI = 60000\ kN/m^2$

$k_{21} = \tfrac{1}{3} EI = 6666{,}7\ kN/m^2$

$EI = 25 \times 10^6\ kN/m^2 \times 0{,}15m \times (0{,}40m)^3/12 = 20000\ kN\,m^2$

Caso 2



$$k_{22} = \left(\tfrac{4}{6} + \tfrac{3}{3}\right) EI$$

$k_{22} = \tfrac{5}{3} EI = 33333\ kN/m^2$

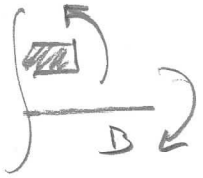
$k_{12} = \tfrac{1}{3} EI = 6666{,}7\ kN/m^2$

· Cálculo de deslocamentos:

$$\begin{bmatrix} 60000 & 6666{,}7 \\ 6666{,}7 & 33333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -90 \end{Bmatrix} \quad D_1 = 2{,}2159 \times 10^{-4}\ rad \quad D_2 = -2{,}7443 \times 10^{-3}\ rad$$

MOMENTO FLETOR NO PONTO B DA BARRA AB:

$$M_B^{AB} = -40 + \frac{4}{4} \times 20000 \times 2{,}2159 \times 10^{-4} + 0 = -35{,}568\ kN.m$$



35,568 kN.m NEGATIVO P/ CONV. DE SINAIS

TE 192 - B2 - 1 PROBLEMA B $P_V = 100$ kN

Barra AB $L = \sqrt{1{,}35^2 + 1{,}8^2} = 2{,}25$

$\lambda x = (1{,}35 - 0)/2{,}25 = 0{,}6$ $\lambda y = (0 - 1{,}8)/2{,}25 = -0{,}8$

$\lambda x^2/L = 0{,}6^2/2{,}25 = 4/25$ $\lambda y^2/L = 0{,}8^2/2{,}25 = 64/225$

$\lambda x \lambda y/L = 0{,}6 \times 0{,}8/2{,}25 = -16/75$

$$[k]_{AB} = 10000 \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4/25 & -16/75 & -4/25 & 16/75 \\ -16/75 & 64/225 & 16/75 & -64/225 \\ -4/25 & 16/75 & 4/25 & -16/75 \\ 16/75 & -64/225 & -16/75 & 64/225 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$k_{11} = 1600$ kN/m $k_{12} = -2133{,}3$ kN/m

Barra BC $\lambda x = 0{,}6$ $\lambda y = 0{,}8$

$$[k]_{BC} = 10000 \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4/25 & 16/75 & -4/25 & -16/75 \\ 16/75 & 64/225 & -16/75 & -64/225 \\ -4/25 & -16/75 & 4/25 & 16/75 \\ -16/75 & -64/225 & 16/75 & 64/225 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Barra AC $\lambda x = 1$ $\lambda y = 0$ $\lambda x^2/L = \frac{1}{2 \times 1{,}35} = 10/27$

$$[k]_{AC} = 10000 \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 10/27 & 0 & -10/27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10/27 & 0 & 10/27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$k_{11} = 3703{,}7$ kN/m $k_{12} = 0$

-- SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

$$
10000\begin{bmatrix}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
1 & +4/25+4/25 & -16/75+16/75 & -4/25 & +16/75 & -4/25 & -16/75 \\
2 & -16/75+16/75 & 64/225+64/225 & +16/75 & -64/225 & -16/75 & -64/225 \\
3 & -4/25 & 16/75 & 4/25+10/27 & -16/75 & -10/27 & 0 \\
4 & +16/75 & -64/225 & -16/75 & 64/225 & 0 & 0 \\
5 & -4/25 & -16/75 & -10/27 & 0 & 4/25+10/27 & 16/75 \\
6 & -16/75 & -64/225 & 0 & 0 & 16/75 & 64/225
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} D1 \\ D2 \\ 0{,}02 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} -60 \\ -100 \\ R3 \\ R4 \\ R5 \\ R6 \end{Bmatrix}
$$

$$[k_{11}]\{D_1\} + [k_{12}]\{D_2\} = \{F_1\}$$

$k_{11} = 10000 \times 8/25 = \underline{3200}$ //

$k_{12} = -16/75 + 16/75 = \underline{0}$ //

$k_{23} = 10000 \times 16/75 = \underline{2133{,}3}$ //

$$10000\begin{bmatrix} 8/25 & 0 \\ 0 & 128/225 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} + 10000\begin{Bmatrix} -4/25 \times 0{,}02 \\ +16/75 \times 0{,}02 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -60 \\ -100 \end{Bmatrix}$$

$$10000\begin{bmatrix} 8/25 & 0 \\ 0 & 128/225 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -60 \\ -100 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 32 \\ -42{,}667 \end{Bmatrix}$$

$D_1 = -0{,}00875\,m$ //

$D_2 = -0{,}025078\,m$ //

$$R_3 = 10000 \times \left(-\frac{4}{25} \times (-0{,}00875) + \frac{16}{75}(-0{,}025078) \right) +$$

$$10000 \times \left(\left(\frac{4}{25} + \frac{10}{27} \right) \times 0{,}02 \right) = \underline{66{,}574\,kN} \rightarrow (+)$$ //

$$N_{AB} = \frac{10000}{2{,}25}\begin{bmatrix} -0{,}6 & +0{,}8 & +0{,}6 & -0{,}8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0{,}02 \\ 0 \\ -0{,}00875 \\ -0{,}025078 \end{Bmatrix} = \underline{+12{,}5\,kN}$$ //

TE192-B2-PA_versao_A.txt

```
-----------------------------------------------
Dados :
L1        = 4.00 m
L2        = 4.00 m
L3        = 3.00 m
H         = 3.00 m
PAB       = 80 kN
PD        = 40 kN
qB        = 25 kN/m
E         = 25 GPa
Base      = 15 cm
Altura    = 40 cm

Respostas :
Q01) (B)
Q02) max K_diag        = 66667
Q03) min K_diag        = 40000
Q04) max K_fora_diag   = 10000
Q05) F1 final          = 20
Q06) F2 final          = 106.67
Q07) D1                = 7.2727e-4
Q08) D2                = -2.8485e-3
Q09) MB barra AB       = -25.455 kN
```

```
-----------------------------------------------
Dados :
L1        = 4.00 m
L2        = 5.00 m
L3        = 3.00 m
H         = 3.00 m
PAB       = 80 kN
PD        = 40 kN
qB        = 25 kN/m
E         = 25 GPa
Base      = 15 cm
Altura    = 40 cm

Respostas :
Q01) (B)
Q02) max K_diag        = 62667
Q03) min K_diag        = 36000
Q04) max K_fora_diag   = 8000
Q05) F1 final          = 8.75
Q06) F2 final          = 99.167
Q07) D1                = 5.0563e-4
Q08) D2                = -2.8670e-3
Q09) MB barra AB       = -29.887 kN
```

```
-----------------------------------------------
Dados :
L1        = 4.00 m
L2        = 6.00 m
L3        = 3.00 m
H         = 3.00 m
PAB       = 80 kN
PD        = 40 kN
qB        = 25 kN/m
E         = 25 GPa
Base      = 15 cm
Altura    = 40 cm

Respostas :
Q01) (B)
Q02) max K_diag        = 60000
Q03) min K_diag        = 33333
Q04) max K_fora_diag   = 6666.7
Q05) F1 final          = 5
Q06) F2 final          = 90
Q07) D1                = 2.2159e-4
Q08) D2                = -2.7443e-3
Q09) MB barra AB       = -35.568 kN
```

TE192-B2-PB_versao_A.txt

```
-----------------------------------------------
Dados :
H         = 1.8 m
L1        = 1.35 m
L2        = 1.35 m
PH        = 60 kN
PV        = 40 kN
AE        = 10000 kN
desloc HA = 2 cm

Respostas :
Q01) k11, k12  - AB    = 1600 , -2133.3
Q02) k11, k12  - BC    = 3703.7 , 0
Q03) k11, k12, k23     = 3200 , 0 , 2133.3
Q04) D1                = -0.00875 m
Q05) D2                = -0.014531 m
Q06) NAB               = -25 kN
Q07) Reac HA           = 89.074 kN
```

```
-----------------------------------------------
Dados :
H         = 1.8 m
L1        = 1.35 m
L2        = 1.35 m
PH        = 60 kN
PV        = 70 kN
AE        = 10000 kN
desloc HA = 2 cm

Respostas :
Q01) k11, k12  - AB    = 1600 , -2133.3
Q02) k11, k12  - BC    = 3703.7 , 0
Q03) k11, k12, k23     = 3200 , 0 , 2133.3
Q04) D1                = -0.00875 m
Q05) D2                = -0.019805 m
Q06) NAB               = -6.25 kN
Q07) Reac HA           = 77.824 kN
```

```
-----------------------------------------------
Dados :
H         = 1.8 m
L1        = 1.35 m
L2        = 1.35 m
PH        = 60 kN
PV        = 100 kN
AE        = 10000 kN
desloc HA = 2 cm

Respostas :
Q01) k11, k12  - AB    = 1600 , -2133.3
Q02) k11, k12  - BC    = 3703.7 , 0
Q03) k11, k12, k23     = 3200 , 0 , 2133.3
Q04) D1                = -0.00875 m
Q05) D2                = -0.025078 m
Q06) NAB               = 12.5 kN
Q07) Reac HA           = 66.574 kN
```