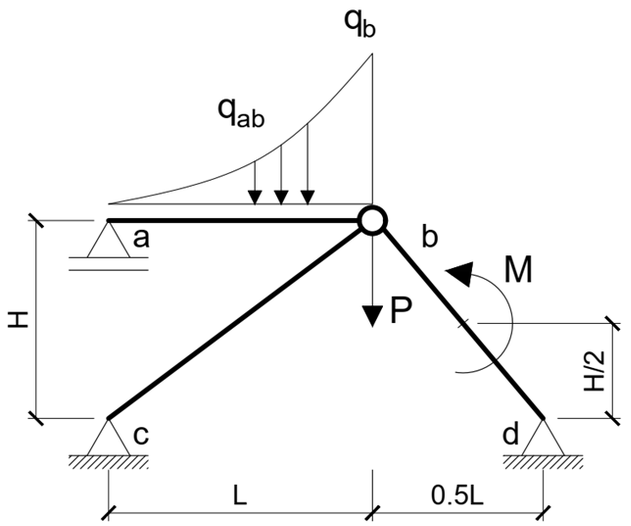
TE201-4NA

Problema A
Considerando o modelo estrutural, responda os questionamentos.

Dados:
L = D1 m
H = D2 m
P = D3 kN
qab = D5 kN/m
qb = 40 kN/m
M = 50 kNm



OBS: o carregamento distribuído na barra "ab" é parabólico de 2o grau sendo 'qb' o valor da carga distribuída no ponto "b" e 'qab' o valor da carga distribuída no meio da barra (no ponto "a" a carga distribuída é nula).

Barra "ab":
- E = 20 GPa
- Seção transversal retangular de
base (entrante no papel) de 20 cm e
altura (assente ao plano do papel) de 40 cm

Barra "bc" e "bd":
- E = 15 GPa
- Seção transversal quadrada de lado 20,0 cm;

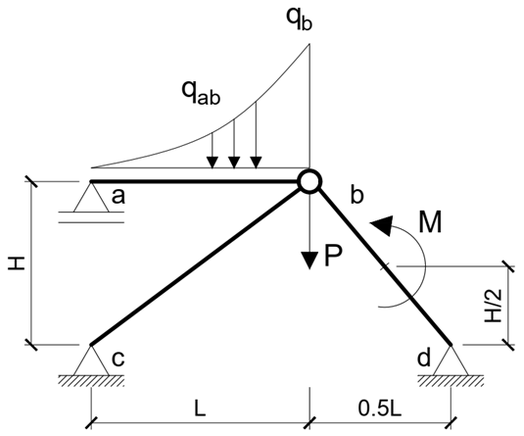
$L := D1$ $H := D2$ $P := D3$ $qa := 0$ $qab := D5$ $qb := 40$ $M := 50$

$Eab := 20\ GPa$ $Ebc := 15\ GPa$ $b := 20\ cm$ $h := 40\ cm$ $b_bc := 20\ cm$

Q01 – Qual o valor da resultante do carregamento na barra "ab" [em kN e com positivo para baixo]?
Q02 – Qual a posição x da resultante do carregamento distribuído na barra "ab" contada a partir do ponto "a" ao longo da barra [em "m"]?
Q03 – Qual o valor da reação de apoio vertical no ponto A [em kN e com positivo para cima]?
Q04 – Qual o valor do esforço axial na barra "bc" [em kN e com positivo para tração]?
Q05 – Qual o valor do alongamento/ encurtamento da "bc" [em "mm" e com positivo para alongamento]?
Q06 – Considerando que o ponto "b" não sofre nenhum deslocamento de translação (nem na vertical e nem na horizontal), qual seria a flecha (o deslocamento vertical) que ocorre no meio da barra "ab" [em "mm" e com negativo para baixo] ?
Q07 – Considerando que o ponto "b" não sofre nenhum deslocamento de translação (nem na vertical e nem na horizontal), qual seria a rotação/inclinação que ocorre no ponto "a" da barra "ab" [em "rad" e em módulo] ?
Q08 – Qual o valor do momento fletor no meio da barra "ab" [em kNm e sinal conforme a convenção] ?

Equação de Carregamento na Barra "ab":

$$Ma := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 \cdot L & (0,5 \cdot L)^2 \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \qquad Vb := \begin{bmatrix} qa \\ qab \\ qb \end{bmatrix}$$



Solução do sistema [Ma].{X} = {Vb}:

$$X := Ma^{-1} \cdot Vb = \begin{bmatrix} 0 \\ -3,3333 \\ 1,6667 \end{bmatrix}$$

$$c1 := X_{1\,1} \qquad c2 := X_{2\,1} \qquad c3 := X_{3\,1}$$

$$qab(x) := c1 + c2 \cdot x + c3 \cdot x^2 = 0 + \left(-\frac{10}{3}\right) \cdot x + \frac{5}{3} \cdot x^2$$

$$Rab := \int_0^L qab(x)\,dx = 60$$

$$x_Rab := \frac{\int_0^L qab(x) \cdot x\,dx}{Rab} = 5$$

Reações de Apoio:

OBS: assumindo reações verticais positivas para cima e reações horizontais positivas para a direita

ΣMb = 0 (+) horário - olhando para "a"

```
RVa1.L - Rab.(L - x_Rab) = 0
```

$$RVa1 := \frac{1}{L} \cdot \left(Rab \cdot \left(L - x_Rab\right)\right) = 10,0000$$

ΣMd = 0 (+) horário

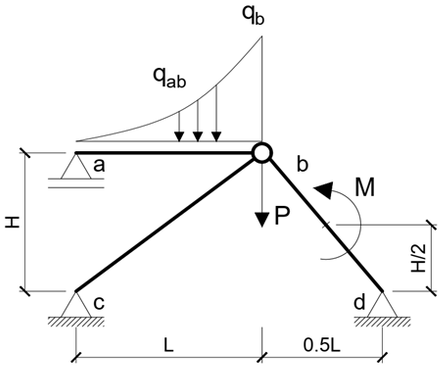
```
RVc1.1,5.L + RVa1.1,5.L - Rab.(L - x_Rab + 0,5.L) - M - P.0,5.L = 0
```

$$RVc1 := \frac{1}{1,5 \cdot L} \cdot \left(Rab \cdot \left(L - x_Rab + 0,5 \cdot L\right) + M + P \cdot 0,5 \cdot L - RVa1 \cdot 1,5 \cdot L\right) = 45,5556$$

ΣFv = 0 (+) para cima

```
RVa1 + RVd1 + RVc1 - Rab - P = 0
```

$$RVd1 := -RVa1 - RVc1 + Rab + P = 74,4444$$



ΣMb = 0 (+) antihorário - olhando "c"

```
RVc1.L - RHc1.H = 0
```

$$RHc1 := \frac{1}{H} \cdot RVc1 \cdot L = 68,3333$$

ΣFh = 0 (+) para direita

```
RHc1 + RHd1 = 0
```

$$RHd1 := -RHc1 = -68,3333$$

Barra "bc":

Comprimento de Barra:

$Lbc := \sqrt{L^2 + H^2} = 7,2111$

Esforço axial na barra:

$Nbc := -\sqrt{RHc1^2 + RVc1^2} = -82,1264$

Rigidez axial da barra:

$Abc := b_bc^2 = 0,0400\ \text{m}^2$

$Kbc := \frac{Ebc \cdot Abc}{Lbc\ \text{m}} = 83205,0294\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

Encurtamento da barra "bc":

$\delta bc := \frac{Nbc\ \text{kN}}{Kbc} = -0,9870\ \text{mm}$

Barra "ab":

Integração de linha elástica para a barra "ab":

$qab(x) := c1 + c2 \cdot x + c3 \cdot x^2$

$qab(x) = 0 + \left(-\frac{10}{3}\right) \cdot x + \frac{5}{3} \cdot x^2$

$Vab(x) := -\int qab(x)\,\mathrm{d}\,x + RVa1$

$Vab(x) := -c1 \cdot x - c2 \cdot \frac{x^2}{2} - c3 \cdot \frac{x^3}{3} + RVa1$

$MRa1 := 0$ (Reação de momento em "a" nula)

$Mab(x) := \int Vab(x)\,\mathrm{d}\,x + MRa1$

$Mab(x) := -c1 \cdot \frac{x^2}{2} - c2 \cdot \frac{x^3}{6} - c3 \cdot \frac{x^4}{12} + RVa1 \cdot x + 0$

$Mab_meio := Mab\left(\frac{L}{2}\right) = 33,75$

$I_ab := \frac{b \cdot h^3}{12} = 0,0011\ \text{m}^4$

$EI := \frac{Eab \cdot I_ab}{\text{kN m}^2} = 21333,3333$

$\theta ab(x) := \frac{1}{EI} \cdot \left(\int Mab(x)\,\mathrm{d}\,x + \theta a\right) = \frac{1}{EI} \cdot \left(-c1 \cdot \frac{x^3}{6} - c2 \cdot \frac{x^4}{24} - c3 \cdot \frac{x^5}{60} + RVa1 \cdot \frac{x^2}{2} + \theta a\right)$

$\delta ab(x) := \int \theta ab(x)\,\mathrm{d}\,x + \delta a = \frac{1}{EI} \cdot \left(-c1 \cdot \frac{x^4}{24} - c2 \cdot \frac{x^5}{120} - c3 \cdot \frac{x^6}{360} + RVa1 \cdot \frac{x^3}{6} + \theta a \cdot x + \delta a\right)$

$\delta a := \delta ab(0)$ $\quad \delta a := 0$

$\delta b := \delta ab(L)$ $\quad \delta b := 0$

$-c1 \cdot \frac{L^4}{24} - c2 \cdot \frac{L^5}{120} - c3 \cdot \frac{L^6}{360} + RVa1 \cdot \frac{L^3}{6} + \theta a \cdot L = 0$

$\theta a := c1 \cdot \frac{L^3}{24} + c2 \cdot \frac{L^4}{120} + c3 \cdot \frac{L^5}{360} - RVa1 \cdot \frac{L^2}{6} = -60$

$\theta ab(x) := \frac{1}{EI} \cdot \left(-c1 \cdot \frac{x^3}{6} - c2 \cdot \frac{x^4}{24} - c3 \cdot \frac{x^5}{60} + RVa1 \cdot \frac{x^2}{2} + \theta a\right)$

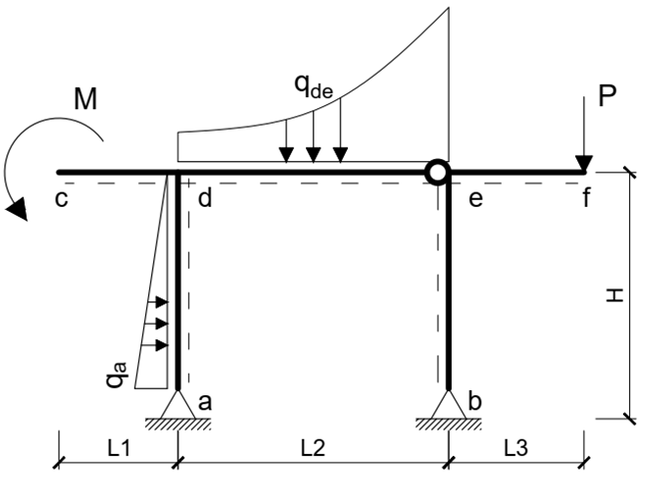
$\delta ab(x) := \frac{1}{EI} \cdot \left(-c1 \cdot \frac{x^4}{24} - c2 \cdot \frac{x^5}{120} - c3 \cdot \frac{x^6}{360} + RVa1 \cdot \frac{x^3}{6} + \theta a \cdot x + \delta a\right)$

$\delta ab_meio := \delta ab(0,5 \cdot L) \cdot 1000\ \text{mm} = -6,1699\ \text{mm}$

$\theta a := |\theta ab(0)| = 0,0028$

Problema B

Considerando o modelo estrutural, responda os questionamentos.



Dados:
L1 = 3,0 m
L2 = D1 m
L3 = D2 m
H = D2 m
P = D3 kN
qde = (D4 . x³ / 5) kN/m (sendo "x" contado ao longo da barra "de" a partir do ponto "d")
qa = D5 kN/m (valor da carga distribuída com variação linear no ponto "d" da barra "ad")
M = 60,0 kNm

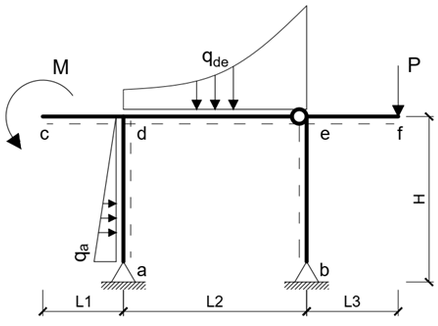
$L1 := 3$ $L2 := D1$ $L3 := D2$ $H := D2$ $P := D3$ $qde(x) := \frac{D4 \cdot x^3}{5}$ $qa := D5$ $M := 60$

Q09 – Qual o valor da reação de apoio vertical no ponto "a" [em kN e com positivo para cima]?
Q10 – Qual o valor da reação de apoio horizontal no ponto "b" [em kN e com positivo para direita]?
Q11 – Qual o valor da resultante de carregamento na barra "de" [em kN com positivo para baixo]?
Q12 – Qual o valor do momento fletor no ponto "d" na barra "ad" [em kNm e sinal conforme a convenção]?
Q13 – Qual o valor do esforço cortante no ponto "d" da barra "ad" [em kN e sinal conforme a convenção]?
Q14 – Qual o valor do momento fletor no meio da barra "de" [em kNm e sinal conforme a convenção]?
Q15 – Qual o valor do esforço cortante no meio da barra "de" [em kN e sinal conforme a convenção]?
Q16 – Qual o valor do esforço axial na barra "be" [em kN e com positivo para tração]?

Reações de Apoio:

$$Rde := \int_0^{L2} qde(x)\,dx = 97,2000$$

$$x_Rde := \frac{\int_0^{L2} x \cdot qde(x)\,dx}{Rde} = 4,8000$$



ΣMb = 0 (+) horário

RVa2.L2 - M - Rde.(L2 - x_Rde) + qa.H/2.(H/3) + P.L3 = 0

$$RVa2 := \frac{1}{L2} \cdot \left(M + Rde \cdot (L2 - x_Rde) - \frac{qa \cdot H}{2} \cdot \frac{H}{3} - P \cdot L3 \right) = -19,4489$$

ΣFv = 0 (+) para cima

RVa2 - Rde - P + RVb2 = 0

$RVb2 := Rde + P - RVa2 = 186,6489$

$Nbe := -RVb2 = -186,6489$

ΣMe = 0 (+) antihorário - olhando para "a"

RHa2.H + qa.H/2.(2/3).H + M + Rde.(L2 - x_Rde) - RVa2.L2 = 0

$$RHa2 := \frac{1}{H} \cdot \left(-\frac{qa \cdot H}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot H - M - Rde \cdot (L2 - x_Rde) + RVa2 \cdot L2 \right) = -80,0000$$

ΣFh = 0 (+) para direita

RHa2 + RHb2 + qa.H/2 = 0

$$RHb2 := -RHa2 - qa \cdot \frac{H}{2} = 70,0000$$

Barra "ad":

$$Md_ad := \frac{-qa \cdot H}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot H - RHa2 \cdot H = 293,3333$$

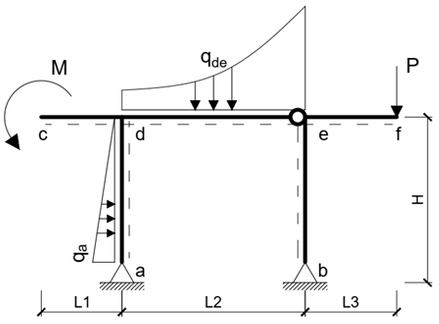
$$Vd_ad := -qa \cdot \frac{H}{2} - RHa2 = 70,0000$$

Barra "de":

$$Md_de := -M - \frac{qa \cdot H}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot H - RHa2 \cdot H = 233,3333$$

$$Vd_de := RVa2 = -19,4489$$

$$qde(x) = \frac{3 \cdot x^3}{10}$$



$$Vde(x) := -\int qde(x)\,dx + Vd_de$$

$$Vde(x) := -\frac{D4 \cdot x^4}{20} + Vd_de$$

$$Vde_meio := Vde\left(\frac{L}{2}\right) = -25,5239$$

$$Mde(x) := \int Vde(x)\,dx + Md_de$$

$$Mde(x) := -\frac{D4 \cdot x^5}{100} + Vd_de \cdot x + Md_de$$

$$Mde_meio := Mde\left(\frac{L}{2}\right) = 171,3417$$

Resultados:

$D1 = 6$ $D2 = 4$ $D3 = 70$ $D4 = 1,5$ $D5 = 5$

$G01 := \frac{Rab}{1} = 60$	$R01 := V_1 = 60$	$N01 := gab(R01; G01) = 1$
$G02 := \frac{x_Rab}{1} = 5$	$R02 := V_2 = 5$	$N02 := gab(R02; G02) = 1$
$G03 := \frac{RVa1}{1} = 10$	$R03 := V_3 = 10$	$N03 := gab(R03; G03) = 1$
$G04 := \frac{Nbc}{1} = -82,1264$	$R04 := V_4 = -82,8$	$N04 := gab(R04; G04) = 1$
$G05 := \frac{\delta bc}{mm} = -0,987$	$R05 := V_5 = 9999$	$N05 := gab(R05; G05) = 0$
$G06 := \frac{\delta ab_meio}{mm} = -6,1699$	$R06 := V_6 = -6,156$	$N06 := gab(R06; G06) = 1$
$G07 := \frac{\theta a}{1} = 0,0028125$	$R07 := V_7 = 0,0028$	$N07 := gab(R07; G07) = 1$
$G08 := \frac{Mab_meio}{1} = 33,75$	$R08 := V_8 = 33,75$	$N08 := gab(R08; G08) = 1$
$G09 := \frac{RVa2}{1} = -19,4489$	$R09 := V_9 = -19,44$	$N09 := gab(R09; G09) = 1$
$G10 := \frac{RHb2}{1} = 70$	$R10 := V_{10} = 69,99$	$N10 := gab(R10; G10) = 1$
$G11 := \frac{Rde}{1} = 97,2$	$R11 := V_{11} = 97,2$	$N11 := gab(R11; G11) = 1$
$G12 := \frac{Md_ad}{1} = 293,3333$	$R12 := V_{12} = 293,3$	$N12 := gab(R12; G12) = 1$
$G13 := \frac{Vd_ad}{1} = 70$	$R13 := V_{13} = 70$	$N13 := gab(R13; G13) = 1$
$G14 := \frac{Mde_meio}{1} = 171,3417$	$R14 := V_{14} = 174,8$	$N14 := gab(R14; G14) = 1$
$G15 := \frac{Vde_meio}{1} = -25,5239$	$R15 := V_{15} = 13,365$	$N15 := gab(R15; G15) = 0$
$G16 := \frac{Nbe}{1} = -186,6489$	$R16 := V_{16} = -186,6$	$N16 := gab(R16; G16) = 1$

$Acertos := N01 + N02 + N03 + N04 + N05 + N06 + N07 + N08 + N09 + N10 + N11 + N12 + N13 + N14 + N15 + N16$

$Nota := Acertos \cdot peso = 8,75$