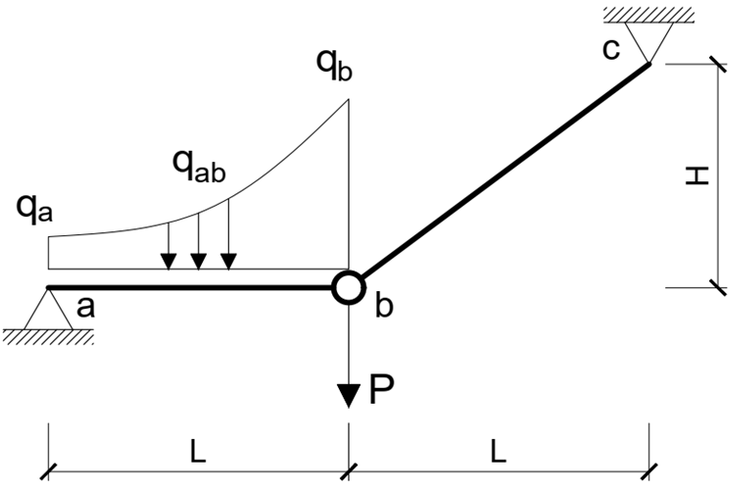
TE201-4NB

Problema A
Considerando o modelo estrutural, responda os questionamentos.

Dados:
L = D1 m
H = D2 m
P = D3 kN
qa = D4 kN/m
qab = D5 kN/m
qb = 30 kN/m



OBS: o carregamento distribuído na barra "ab" é parabólico de 2o grau sendo qa o valor no ponto "a", qb o valor no ponto "b" e qab o valor no meio da barra.

Barra "ab":
- E = 20 GPa
- Seção transversal retangular de
base (entrante no papel) de 15 cm e
altura (assente ao plano do papel) de 40 cm

Barra "bc":
- E = 150 GPa
- Seção transversal circular de diâmetro 3,0 cm;

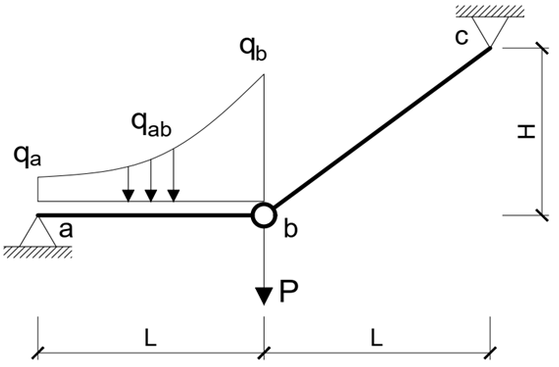
$L := D1$ $H := D2$ $P := D3$ $qa := D4$ $qab := D5$ $qb := 30$

$Eab := 20\ GPa$ $Ebc := 150\ GPa$ $b := 15\ cm$ $h := 40\ cm$ $d := 3\ cm$

Q01 – Qual o valor da resultante do carregamento na barra "ab" [em kN e com positivo para baixo]?
Q02 – Qual a posição x da resultante do carregamento distribuído na barra "ab" contada a partir do ponto "a" ao longo da barra [em "m"]?
Q03 – Qual o valor da reação de apoio vertical no ponto A [em kN e com positivo para cima]?
Q04 – Qual o valor do esforço axial na barra "bc" [em kN e com positivo para tração]?
Q05 – Qual o valor do alongamento/ encurtamento da "bc" [em "mm" e com positivo para alongamento]?
Q06 – Considerando que o ponto "b" não sofre nenhum deslocamento de translação (nem na vertical e nem na horizontal), qual seria a flecha (o deslocamento vertical) que ocorre no meio da barra "ab" [em "mm" e com negativo para baixo] ?
Q07 – Considerando que o ponto "b" não sofre nenhum deslocamento de translação (nem na vertical e nem na horizontal), qual seria a rotação/inclinação que ocorre no ponto "a" da barra "ab" [em "rad" e em módulo] ?
Q08 – Qual o valor do momento fletor no meio da barra "ab" [em kNm e sinal conforme a convenção] ?

Equação de Carregamento na Barra "ab":

$$Ma := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 \cdot L & (0,5 \cdot L)^2 \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \qquad Vb := \begin{bmatrix} qa \\ qab \\ qb \end{bmatrix}$$



Solução do sistema [Ma].{X} = {Vb}:

$$X := Ma^{-1} \cdot Vb = \begin{bmatrix} 3 \\ -2,9231 \\ 1,0888 \end{bmatrix}$$

$$c1 := X_{1\,1} \qquad c2 := X_{2\,1} \qquad c3 := X_{3\,1}$$

$$qab(x) := c1 + c2 \cdot x + c3 \cdot x^2 = 3 + \left(-\frac{38}{13}\right) \cdot x + \frac{184}{169} \cdot x^2$$

$$Rab := \int_0^L qab(x)\,dx = 57,4167$$

$$x_Rab := \frac{\int_0^L qab(x) \cdot x\,dx}{Rab} = 4,9057$$

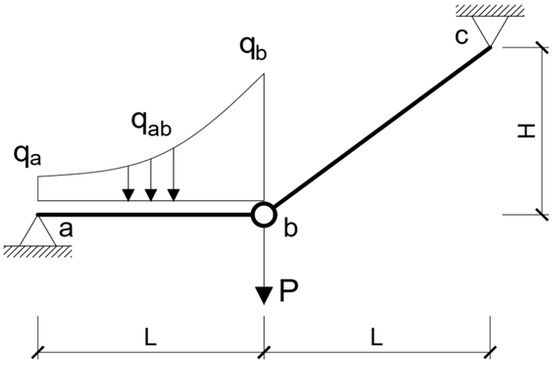
Reações de Apoio:

OBS: assumindo reações verticais positivas para cima e reações horizontais positivas para a direita

ΣMb = 0 (+) horário - olhando para esquerda

```
RVa1.L - Rab.(L - x_Rab) = 0
```

$$RVa1 := \frac{1}{L} \cdot \left(Rab \cdot \left(L - x_Rab\right)\right) = 14,0833$$



ΣFv = 0 (+) para cima

```
RVa1 - Rab - P + Rvc1 = 0
```

$$RVc1 := -RVa1 + Rab + P = 83,3333$$

ΣMb = 0 (+) antihorário - olhando para direita

```
RVc1.L - RHc1.H = 0
```

$$RHc1 := \frac{1}{H} \cdot RVc1 \cdot L = 135,4167$$

ΣFh = 0 (+) para direita

```
RHc1 + RHa1 = 0
```

$$RHa1 := -RHc1 = -135,4167$$

Barra "bc":

Comprimento de Barra:

$Lbc := \sqrt{L^2 + H^2} = 7,6322$

Esforço axial na barra:

$Nbc := \sqrt{RHc1^2 + RVc1^2} = 159,0035$

Rigidez axial da barra:

$Abc := \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,0007\ m^2$

$Kbc := \frac{Ebc \cdot Abc}{Lbc\ m} = 13892,349\ \frac{kN}{m}$

Alongamento de barra "bc":

$\delta bc := \frac{Nbc\ kN}{Kbc} = 11,4454\ mm$

Barra "ab":

Integração de linha elástica para a barra "ab":

$qab(x) := c1 + c2 \cdot x + c3 \cdot x^2$

$qab(x) = 3 + \left(-\frac{38}{13}\right) \cdot x + \frac{184}{169} \cdot x^2$

$Vab(x) := -\int qab(x)\,dx + RVa1$

$Vab(x) := -c1 \cdot x - c2 \cdot \frac{x^2}{2} - c3 \cdot \frac{x^3}{3} + RVa1$

$MRa1 := 0$ (Reação de momento em "a" nula)

$Mab(x) := \int Vab(x)\,dx + MRa1$

$Mab(x) := -c1 \cdot \frac{x^2}{2} - c2 \cdot \frac{x^3}{6} - c3 \cdot \frac{x^4}{12} + RVa1 \cdot x + 0$

$Mab_meio := Mab\left(\frac{L}{2}\right) = 36,5286$

$I_ab := \frac{b \cdot h^3}{12} = 0,0008\ m^4$

$EI := \frac{Eab \cdot I_ab}{kN\ m^2} = 16000$

$\theta ab(x) := \frac{1}{EI} \cdot \left(\int Mab(x)\,dx + \theta a\right) = \frac{1}{EI} \cdot \left(-c1 \cdot \frac{x^3}{6} - c2 \cdot \frac{x^4}{24} - c3 \cdot \frac{x^5}{60} + RVa1 \cdot \frac{x^2}{2} + \theta a\right)$

$\delta ab(x) := \int \theta ab(x)\,dx + \delta a = \frac{1}{EI} \cdot \left(-c1 \cdot \frac{x^4}{24} - c2 \cdot \frac{x^5}{120} - c3 \cdot \frac{x^6}{360} + RVa1 \cdot \frac{x^3}{6} + \theta a \cdot x + \delta a\right)$

$\delta a := \delta ab(0)$ $\quad \delta a := 0$

$\delta b := \delta ab(L)$ $\quad \delta b := 0$

$-c1 \cdot \frac{L^4}{24} - c2 \cdot \frac{L^5}{120} - c3 \cdot \frac{L^6}{360} + RVa1 \cdot \frac{L^3}{6} + \theta a \cdot L = 0$

$\theta a := c1 \cdot \frac{L^3}{24} + c2 \cdot \frac{L^4}{120} + c3 \cdot \frac{L^5}{360} - RVa1 \cdot \frac{L^2}{6} = -73,2333$

$\theta ab(x) := \frac{1}{EI} \cdot \left(-c1 \cdot \frac{x^3}{6} - c2 \cdot \frac{x^4}{24} - c3 \cdot \frac{x^5}{60} + RVa1 \cdot \frac{x^2}{2} + \theta a\right)$

$\delta ab(x) := \frac{1}{EI} \cdot \left(-c1 \cdot \frac{x^4}{24} - c2 \cdot \frac{x^5}{120} - c3 \cdot \frac{x^6}{360} + RVa1 \cdot \frac{x^3}{6} + \theta a \cdot x + \delta a\right)$

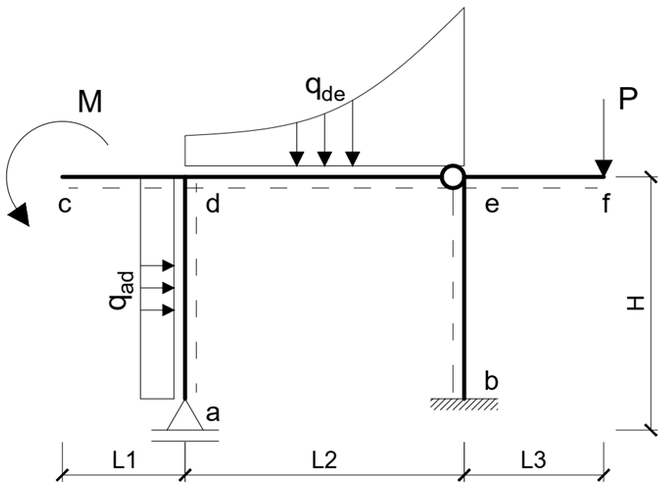
$\delta ab_meio := \delta ab(0,5 \cdot L) \cdot 1000\ mm = -10,3819\ mm$

$\theta a := |\theta ab(0)| = 0,0046$

Problema B

Considerando o modelo estrutural, responda os questionamentos.

Dados:
L1 = 3,0 m
L2 = D1 m
L3 = D2 m
H = D2 m
P = D3 kN
qde = D4 . x² kN/m (sendo "x" contado ao longo da barra "de" a partir do ponto "d")
qad = D5 kN/m
M = 30,0 kNm



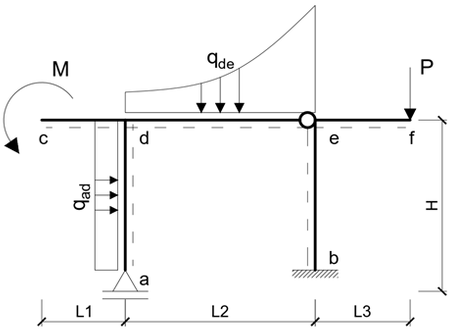
$L1 := 3$ $L2 := D1$ $L3 := D2$ $H := D2$ $P := D3$ $qde(x) := D4 \cdot x^2$ $qad := D5$ $M := 30$

Q09 – Qual o valor da reação de apoio vertical no ponto "a" [em kN e com positivo para cima]?
Q10 – Qual o valor da reação de apoio horizontal no ponto "b" [em kN e com positivo para direita]?
Q11 – Qual o valor da resultante de carregamento na barra "de" [em kN com positivo para baixo]?
Q12 – Qual o valor do momento fletor no ponto "d" na barra "ad" [em kNm e sinal conforme a convenção]?
Q13 – Qual o valor do esforço cortante no ponto "d" da barra "ad" [em kN e sinal conforme a convenção]?
Q14 – Qual o valor do momento fletor no meio da barra "de" [em kNm e sinal conforme a convenção]?
Q15 – Qual o valor do esforço cortante no meio da barra "de" [em kNm e sinal conforme a convenção]?
Q16 – Qual o valor do esforço axial na barra "be" [em kN e com positivo para tração]?

Reações de Apoio:

$$Rde := \int_0^{L2} qde(x)\,dx = 274,625$$

$$x_Rde := \frac{\int_0^{L2} x \cdot qde(x)\,dx}{Rde} = 4,875$$



ΣMe = 0 (+) horário - olhando para a esquerda

```
RVa2.L2 - M - Rde.(L2 - x_Rde) - qad.H^2/2 = 0
```

$$RVa2 := \frac{1}{L2} \cdot \left(M + Rde \cdot (L2 - x_Rde) + \frac{qad \cdot H^2}{2} \right) = 79,4255$$

ΣFh = 0 (+) para direita

```
RHb2 + qad.H = 0
```

$$RHb2 := -qad \cdot H = -20$$

ΣFV = 0 (+) para cima

```
RVa2 - Rde - P + RVb2 = 0
```

$$RVb2 := Rde + P - RVa2 = 235,1995$$

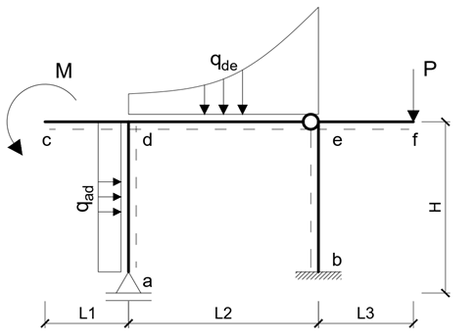
$$Nbe := -RVb2 = -235,1995$$

Barra "ad":

$$Md_ad := \frac{-qad \cdot H^{2}}{2} = -40$$

$$Vd_ad := -qad \cdot H = -20$$

Barra "de":



$$Md_de := -M - \frac{qad \cdot H^{2}}{2} = -70$$

$$Vd_de := RVa2 = 79,4255$$

$$Vde(x) := -\int qde(x)\,dx + Vd_de$$

$$Vde(x) := -\frac{D4 \cdot x^{3}}{3} + Vd_de$$

$$Vde_meio := Vde\left(\frac{L}{2}\right) = 45,0974$$

$$Mde(x) := \int Vde(x)\,dx + Md_de$$

$$Mde(x) := -\frac{D4 \cdot x^{4}}{12} + Vd_de \cdot x + Md_de$$

$$Mde_meio := Mde\left(\frac{L}{2}\right) = 160,2412$$

Resultados:

$G01 := \frac{Rab}{1} = 57,4167$ $R01 := V_1 = 57,417$ $N01 := gab(R01; G01) = 1$

$G02 := \frac{x_Rab}{1} = 4,9057$ $R02 := V_2 = 4,9056$ $N02 := gab(R02; G02) = 1$

$G03 := \frac{RVa1}{1} = 14,0833$ $R03 := V_3 = 14,083$ $N03 := gab(R03; G03) = 1$

$G04 := \frac{Nbc}{1} = 159,0035$ $R04 := V_4 = 97,848$ $N04 := gab(R04; G04) = 0$

$G05 := \frac{\delta bc}{mm} = 11,4454$ $R05 := V_5 = 4,0432$ $N05 := gab(R05; G05) = 0$

$G06 := \frac{\delta ab_meio}{mm} = -10,3819$ $R06 := V_6 = 0,5066$ $N06 := gab(R06; G06) = 0$

$G07 := \frac{\theta a}{1} = 0,0045771$ $R07 := V_7 = 0,1003$ $N07 := gab(R07; G07) = 0$

$G08 := \frac{Mab_meio}{1} = 36,5286$ $R08 := V_8 = 905,27$ $N08 := gab(R08; G08) = 0$

$G09 := \frac{RVa2}{1} = 79,4255$ $R09 := V_9 = 79,425$ $N09 := gab(R09; G09) = 1$

$G10 := \frac{RHb2}{1} = -20$ $R10 := V_{10} = -20$ $N10 := gab(R10; G10) = 1$

$G11 := \frac{Rde}{1} = 274,625$ $R11 := V_{11} = 274,62$ $N11 := gab(R11; G11) = 1$

$G12 := \frac{Md_ad}{1} = -40$ $R12 := V_{12} = 40$ $N12 := gab(R12; G12) = 0$

$G13 := \frac{Vd_ad}{1} = -20$ $R13 := V_{13} = -20$ $N13 := gab(R13; G13) = 1$

$G14 := \frac{Mde_meio}{1} = 160,2412$ $R14 := V_{14} = 160,24$ $N14 := gab(R14; G14) = 1$

$G15 := \frac{Vde_meio}{1} = 45,0974$ $R15 := V_{15} = 45,097$ $N15 := gab(R15; G15) = 1$

$G16 := \frac{Nbe}{1} = -235,1995$ $R16 := V_{16} = 235,2$ $N16 := gab(R16; G16) = 0$

$Acertos := N01 + N02 + N03 + N04 + N05 + N06 + N07 + N08 + N09 + N10 + N11 + N12 + N13 + N14 + N15 + N16$

$Nota := Acertos \cdot peso = 5,625$