Universidade POSITIVO

**Engenharia Civil**
Prova Bimestral: 2 / 1° Semestre de 2020
Disciplina: Teoria das Estruturas I

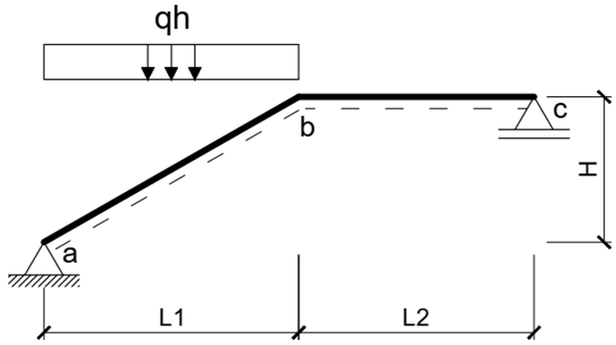
Código da Prova:
**TE201-B2-4NB**

**Procedimento e Orientações:**

1. Leia atentamente todas as instruções da prova.
2. Os dados **D1, D2, D3, D4 e D5** devem ser obtidos no site **www.jjscremin.com/provas** onde o aluno deve entrar com o código da prova (indicado no cabeçalho desta) e seu respectivo número de matrícula clicando no botão **"Buscar Dados"**.
3. Após obter as respostas para as 16 questões da prova o aluno deverá fotografar as páginas com o desenvolvimento dos cálculos e postar no AVA via item **"Postagem de TE201-B2-4NB"**;
4. Em seguida o aluno deverá postar as respostas finais para as 16 questões (inserindo somente números e utilizando "ponto" como separador de decimais) no site **www.jjscremin.com/provas.** Para tanto, o aluno deverá fazer/refazer a busca de dados com seu número de matrícula e código de prova, certificando-se de que seu nome apareça em vermelho no campo "Nome do Aluno" para em seguida preencher os 16 campos destinados às respostas, e por fim, clicar no botão **"Enviar Respostas"**.
5. **Para todos os cálculos nas questões utilize 5 algarismos significativos.**
6. Na correção dos valores numéricos das questões abertas será utilizada uma margem de erro de 5 por cento (para mais ou para menos).

**Problema A (0,625 ponto cada ) :**
Considerando o modelo estrutural esboçado, responda os questionamentos.

**Dados:**
**L1 = D1 . 4,0 m**
**L2 = D2 . 4,0 m**
**H = D3 . 3,0 m**
**qh = D4 . 22 kN/m**




Q01 – Qual o valor do esforço cortante no ponto "a" da barra "ab" [em kN e sinal conforme a convenção]?
Q02 – Qual o valor do esforço axial no ponto "a" da barra "ab" [em kN e sinal conforme a convenção]?
Q03 – Qual o valor do esforço cortante no meio da barra "ab" [em kN e sinal conforme a convenção]?
Q04 – Qual o valor do esforço axial no meio da barra "ab" [em kN e sinal conforme a convenção]?

$D1 = 0,9$ $D2 = 1,4$ $D3 = 0,9$ $D4 = 0,6$

$L1 := D1 \cdot 4 = 3,6$ $L2 := D2 \cdot 4 = 5,6$ $H := D3 \cdot 3 = 2,7$ $qh := D4 \cdot 22 = 13,2$

## Reações de Apoio:

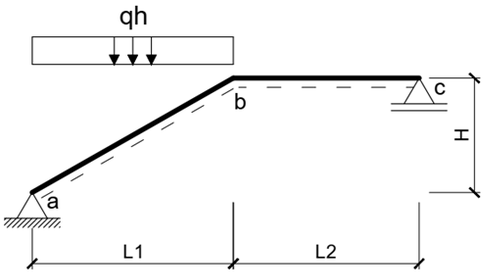
ΣFv = 0 (+) para direita:

$RHa := 0$

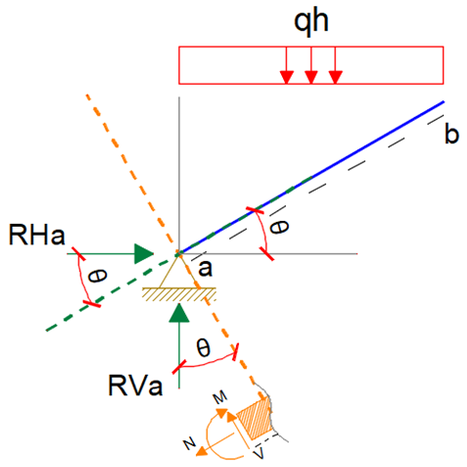
ΣMc = 0 (+) horário:

RVa.(L1+L2) -qh.L1.(L1/2+L2) -RHa.H = 0

$$RVa := \frac{1}{L1 + L2} \cdot \left( qh \cdot L1 \cdot \left( \frac{L1}{2} + L2 \right) + RHa \cdot H \right) = 38,223$$



Equações de Esforço Cortante e Esforço Axial para a barra "ab":




$Lab := \sqrt{L1^2 + H^2} = 4,5$ $\quad RHa = 0$ $\quad RVa = 38,2226$

$sen\theta := \frac{H}{Lab} = 0,6$ $\quad cos\theta := \frac{L1}{Lab} = 0,8$

$Va := RVa \cdot cos\theta - RHa \cdot sen\theta = 30,5781$

$Na := -RVa \cdot sen\theta - RHa \cdot cos\theta = -22,9336$

$qab_perp := qh \cdot L1 \cdot cos\theta \cdot \frac{1}{Lab} = 8,448$

$qab_para := qh \cdot L1 \cdot sen\theta \cdot \frac{1}{Lab} = 6,336$

$Vab(x) := Va - qab_perp \cdot x$

$Nab(x) := Na + qab_para \cdot x$

$G01 := Vab(0) = 30,5781$ $\quad G02 := Nab(0) = -22,9336$

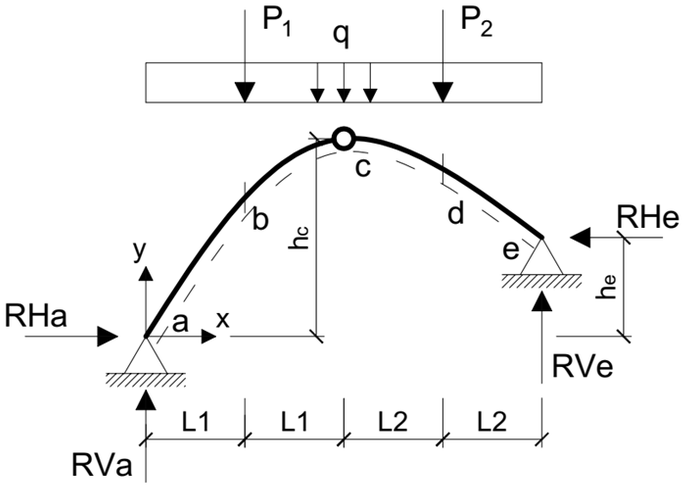
$G03 := Vab\left(\frac{Lab}{2}\right) = 11,5701$ $\quad G04 := Nab\left(\frac{Lab}{2}\right) = -8,6776$

**Problema B (0,625 ponto cada ) :**

Considerando o modelo estrutural esboçado, responda os questionamentos.

**Dados:**
**L1 = D1 . 3,0 m**
**L2 = D2 . 4,0 m**
**hc = D3 . 7,0 m**
**he = 3,50 m**
**P1 = D4 . 60 kN**
**P2 = D5 . 40 kN**
**q = 10,0 kN/m**

**OBS: arco parabóclico de 2° grau.**



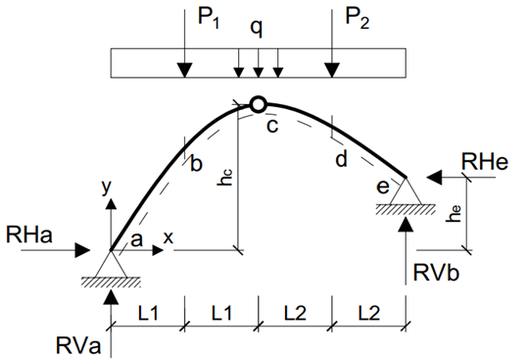

Q05 – Qual o valor da reação de apoio horizontal no ponto "a" [em kN e com positivo para direita]?
Q06 – Qual o valor do momento fletor no ponto "b" do arco [em kNm e sinal conforme a convenção]?
Q07 – Qual o valor do esforço cortante à esquerda do ponto "b" no arco [em kN e sinal conforme a convenção]?
Q08 – Qual o valor do esforço axial à esquerda do ponto "b" no arco [em kN e sinal conforme a convenção]?
Q09 – Qual o valor do momento fletor no ponto "d" do arco [em kNm e sinal conforme a convenção]?
Q10 – Qual o valor do esforço cortante à direita do ponto "d" no arco [em kN e sinal conforme a convenção]?
Q11 – Qual o valor do esforço axial à direita do ponto "d" no arco [em kN e sinal conforme a convenção]?

$D1 = 0,9$ $\quad D2 = 1,4$ $\quad D3 = 0,9$ $\quad D4 = 0,6$ $\quad D5 = 0,6$

$L1 := D1 \cdot 3 = 2,7$ $\quad L2 := D2 \cdot 4 = 5,6$ $\quad hc := D3 \cdot 7 = 6,3$ $\quad he := 3,5$

$P1 := D4 \cdot 60 = 36$ $\quad P2 := D5 \cdot 40 = 24$ $\quad q := 10$

## Equacionamento da Geometria do Arco:




$xa := 0$ $\quad ya := 0$

$xc := 2 \cdot L1 = 5,4$ $\quad yc := hc = 6,3$

$xe := 2 \cdot L1 + 2 \cdot L2 = 16,6$ $\quad ye := he = 3,5$

$$matrizA := \begin{bmatrix} 1 & xa & xa^2 \\ 1 & xc & xc^2 \\ 1 & xe & xe^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5,4 & 29,16 \\ 1 & 16,6 & 275,56 \end{bmatrix} \quad vetorB := \begin{bmatrix} ya \\ yc \\ ye \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6,3 \\ 3,5 \end{bmatrix}$$

$$vetorX := matrizA^{-1} \cdot vetorB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,6275 \\ -0,0853 \end{bmatrix}$$

$A := vetorX_1 = 0$

$B := vetorX_2 = 1,6275$

$C := vetorX_3 = -0,0853$

$$y(x) := A + B \cdot x + C \cdot x^2 = 0 + \frac{1621}{996} \cdot x + \left(-\frac{85}{996}\right) \cdot x^2$$

---

## Reações de Apoio do Arco:

ΣMc = 0 (+) horário - olhando para "a"

```
RVa.(2.L1+2.L2) - RHa.he - P1.(L1+2.L2) - P2.L2 - q1.(2.L1+2.L2)^2 / 2 = 0
```

ΣMb = 0 (+) horário - olhando para "a"

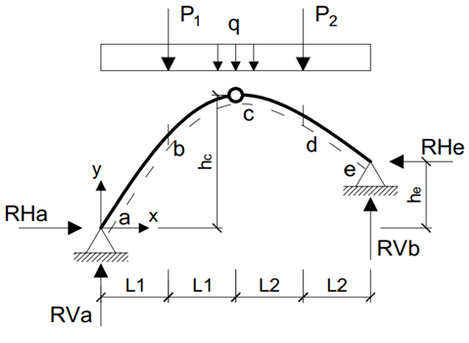
```
RVa.2.L1 - H.hc - q1.(2.L1)^2 / 2 - P1.L1 = 0
```

Sistema de equações:

```
RVa.(2.L1+2.L2) - RHa.he = P1.(L1+2.L2) + P2.L2 + q1.(2.L1+2.L2)^2 / 2
RVa.2.L1 - RHa.hc = q1.(2.L1)^2 / 2 + P1.L1
```

$$matrizA := \begin{bmatrix} 2 \cdot L1 + 2 \cdot L2 & -he \\ 2 \cdot L1 & -hc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,6 & -3,5 \\ 5,4 & -6,3 \end{bmatrix}$$

$$vetorB := \begin{bmatrix} \frac{q \cdot (2 \cdot L1 + 2 \cdot L2)^2}{2} + P2 \cdot L2 + P1 \cdot (L1 + 2 \cdot L2) \\ \frac{q \cdot (2 \cdot L1)^2}{2} + P1 \cdot L1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2012,6 \\ 243 \end{bmatrix}$$




$$vetorX := matrizA^{-1} \cdot vetorB = \begin{bmatrix} 138,1 \\ 79,76 \end{bmatrix}$$

$RVa := vetorX_1 = 138,06$ $\quad RHa := vetorX_2 = 79,765$

---

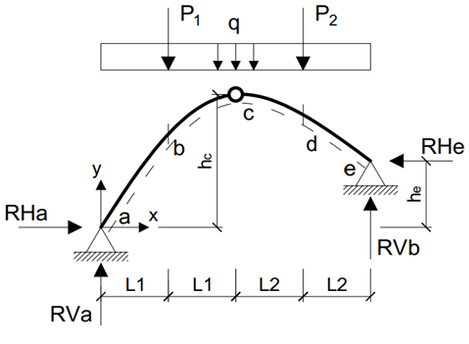
## Equacionamento dos Esforços Internos no Arco "abc":

Equações de Momentos Fletores dos Trechos da Viga Análoga:

$$Mabo(x) := RVa \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$Mbdo(x) := RVa \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - P1 \cdot (x - L1)$$

$$Mdeo(x) := RVa \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - P1 \cdot (x - L1) - P2 \cdot (x - L2 - 2 \cdot L1)$$



Equação de Esforços Cortantes dos Trechos da Viga Análoga:

$$Vabo(x) := \frac{d}{dx} Mabo(x) = -\frac{-2347 + 170 \cdot x}{17}$$

$$Vbdo(x) := \frac{d}{dx} Mbdo(x) = -\frac{5 \cdot (-347 + 34 \cdot x)}{17}$$

$$Vdeo(x) := \frac{d}{dx} Mdeo(x) = -\frac{408 + 5 \cdot (-347 + 34 \cdot x)}{17}$$

Equações de Esforços Internos para o Trecho "ab": $H := RHa$

$$Mab(x) := Mabo(x) - H \cdot y(x)$$

$$Mab(x) = \frac{2347}{17} \cdot x - \frac{10 \cdot x^2}{2} - \frac{1356}{17} \cdot \left(0 + \frac{1621}{996} \cdot x + \left(-\frac{85}{996}\right) \cdot x^2\right)$$

$$\alpha(x) := \operatorname{atan}\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)$$

$$Vab(x) := Vabo(x) \cdot \cos(\alpha(x)) - H \cdot \sin(\alpha(x))$$

$$Nab(x) := (-Vabo(x)) \cdot \sin(\alpha(x)) - H \cdot \cos(\alpha(x))$$

$$\boldsymbol{\alpha(x) = arctg\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)}$$

$$\boldsymbol{V_s(x) = V_{so}(x).cos(\alpha(x)) - H.sen(\alpha(x))}$$
$$\boldsymbol{N_s(x) = -V_{so}(x).sen(\alpha(x)) - H.cos(\alpha(x))}$$

Equações de Esforços Internos para o Trecho "de":

$$Mde(x) := Mdeo(x) - H \cdot y(x)$$

$$Mde(x) = \frac{2347}{17} \cdot x - \frac{10 \cdot x^2}{2} - 36 \cdot \left(x - \frac{27}{10}\right) - 24 \cdot \left(x - \frac{28}{5} - 2 \cdot \frac{27}{10}\right) - \frac{1356}{17} \cdot \left(0 + \frac{1621}{996} \cdot x + \left(-\frac{85}{996}\right) \cdot x^2\right)$$

$$Vde(x) := Vdeo(x) \cdot \cos(\alpha(x)) - H \cdot \sin(\alpha(x))$$

$$Nde(x) := (-Vdeo(x)) \cdot \sin(\alpha(x)) - H \cdot \cos(\alpha(x))$$

$G05 := RHa = 79,765$

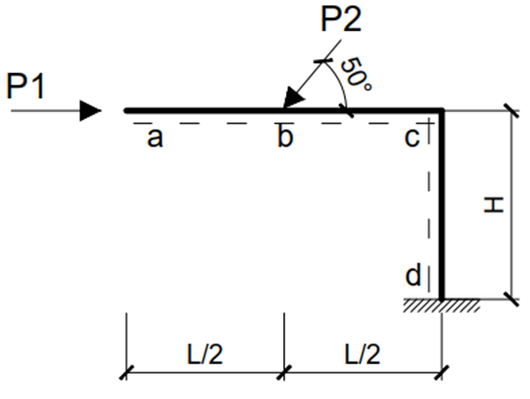
$G06 := Mab(L1) = 35,425$ $\quad G07 := Vab(L1) = 11,714$ $\quad G08 := Nab(L1) = -136,23$

$G09 := Mde(2 \cdot L1 + L2) = 10,525$ $\quad G10 := Vde(2 \cdot L1 + L2) = -11,642$ $\quad G11 := Nde(2 \cdot L1 + L2) = -85,130$

---

**Problema C (0,625 ponto cada ) :**

Considerando somente efeitos de momentos fletores calcular o deslocamento vertical do ponto "a" e o deslocamento horizontal do ponto "c" do modelo estrutural esbocado, empregando o princípio dos trabalhos virtuais para então responder os questionamentos.




**Dados:**
**L = D1 . 4,0 m**
**H = D2 . 3,0 m**
**P1 = D3 . 20 kN**
**P2 = D4 . 40 kN**

**- Todas as barras possuem seção transversal retangular de base b = 15 cm e altura h = 70 cm.**
**- Todas as barras possuem módulo de elasticidade E = D5 . 40 GPa**

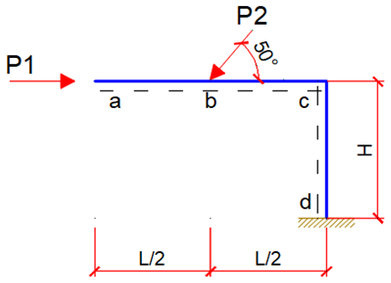
Q12 – Qual o valor do momento fletor no ponto "d" para o carregamento real [em kNm e sinal conforme a convenção]?
Q13 – Qual o valor do momento fletor no ponto "d" para o carregamento virtual correlato ao cálculo do deslocamento vertical no ponto "a" [em kNm e em módulo] ?
Q14 – Qual o valor do momento fletor no ponto "d" para o carregamento virtual correlato ao cálculo do deslocamento horizontal no ponto "c" [em kNm e em módulo ]?
Q15 – Qual o valor do deslocamento vertical do ponto "a" [em mm e positivo para cima] ?
Q16 – Qual o valor do deslocamento horizontal do ponto "c" [em mm e com positivo para direita] ?

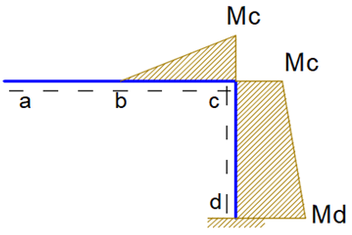
$D1 = 0,9$ $D2 = 1,4$ $D3 = 0,9$ $D4 = 0,6$ $D5 = 0,6$

$L := D1 \cdot 4 = 3,6$ $H := D2 \cdot 3 = 4,2$ $P1 := D3 \cdot 20 = 18$ $P2 := D4 \cdot 40 = 24$

$E := D5 \cdot 40 \cdot 10^{6} = 2,4 \cdot 10^{7}$ $b := 0,15$ $h := 0,70$

## Diagrama de Momentos Fletores do Carregamento Real:

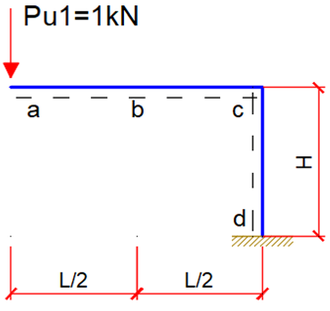


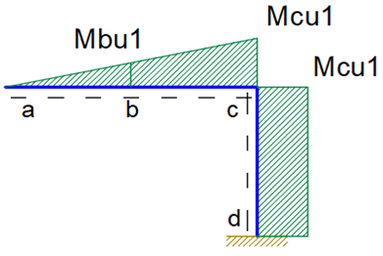




$Mc := -P2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot 50\right) \cdot \frac{L}{2} = -33,093$ $Md := Mc + P1 \cdot H - P2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot 50\right) \cdot H = -22,286$

$G12 := Md = -22,286$

## Diagrama de Momentos Fletores do Carregamento Virtual para Cálculo do Deslocamento Vertical do Ponto "a":



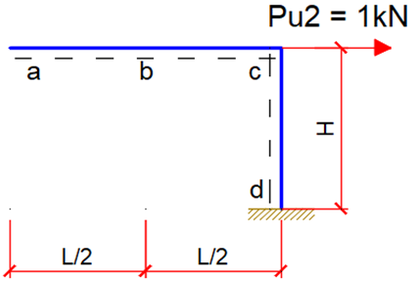

$Pu1 := 1$

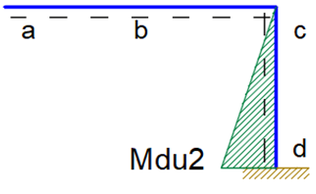
$Mcu1 := -Pu1 \cdot L = -3,6$

$Mbu1 := -Pu1 \cdot \frac{L}{2} = -1,8$

$G13 := |Mcu1| = 3,6$

## Diagrama de Momentos Fletores do Carregamento Virtual para Cálculo do Deslocamento Horizontal do Ponto "c":



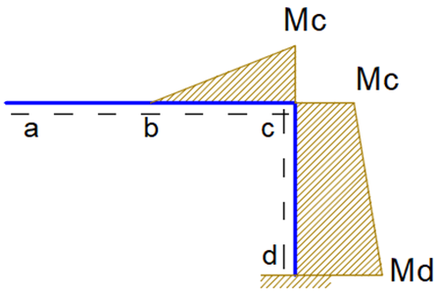



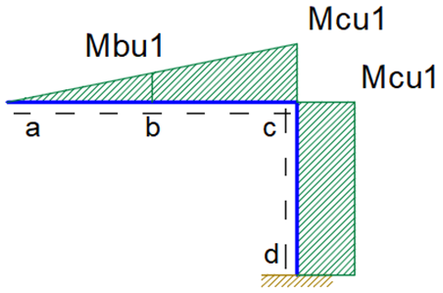

$Pu2 := 1$

$Mdu2 := Pu2 \cdot H = 4,2$

$G14 := |Mdu2| = 4,2$

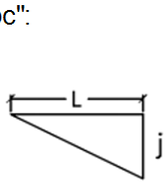
## Cálculo dos Deslocamento Vertical do Ponto "a":

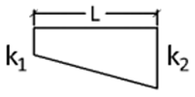



$$EI := \frac{E \cdot b \cdot h^{3}}{12} = 1{,}029 \cdot 10^{5}$$

Barra "bc":



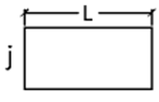

1/6 Lj(k₁+2k₂)

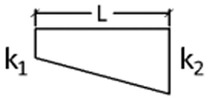
$k1 := Mbu1 = -1{,}8000$ $\quad k2 := Mcu1 = -3{,}6000$

$j := Mc = -33{,}0931$ $\quad Lb := \frac{L}{2} = 1{,}8000$

$$mbc := \frac{1}{6} \cdot Lb \cdot j \cdot (k1 + 2 \cdot k2) \cdot \frac{1}{EI} = 0{,}0009$$

Barra "cd":




1/2 Lj(k₁+k₂)

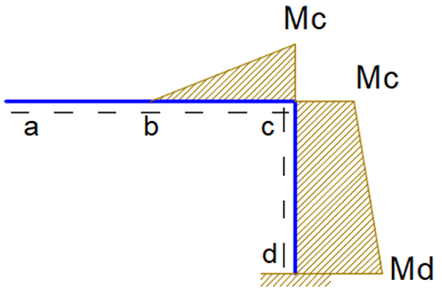
$k1 := Mc = -33{,}0931$ $\quad k2 := Md = -22{,}2861$

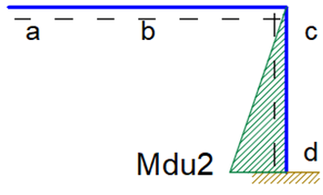
$j := Mcu1 = -3{,}6000$ $\quad Lb := H = 4{,}2$

$$mcd := \frac{1}{2} \cdot Lb \cdot j \cdot (k1 + k2) \cdot \frac{1}{EI} = 0{,}0041$$

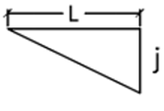
$\delta_vert_a := -1000 \cdot (mbc + mcd) = -4{,}937$ $\quad G15 := \delta_vert_a = -4{,}937$

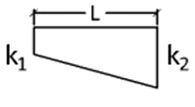
## Cálculo dos Deslocamento Horizontal do Ponto "c":




Barra "cd":




1/6 Lj(k₁+2k₂)

$k1 := Mc = -33{,}093$ $\quad k2 := Md = -22{,}286$

$j := Mdu2 = 4{,}2$ $\quad Lb := H = 4{,}2$

$$mcd2 := \frac{1}{6} \cdot Lb \cdot j \cdot (k1 + 2 \cdot k2) \cdot \frac{1}{EI} = -0{,}0022190$$

$\delta_hori_c := 1000 \cdot mcd2 = -2{,}219$ $\quad G16 := \delta_hori_c = -2{,}219$