Universidade POSITIVO

Engenharia Civil
Prova Bimestral: 1 / 2º Semestre de 2020
Disciplina: Teoria da Estruturas II

Código da Prova:
TE202-B1-4NA

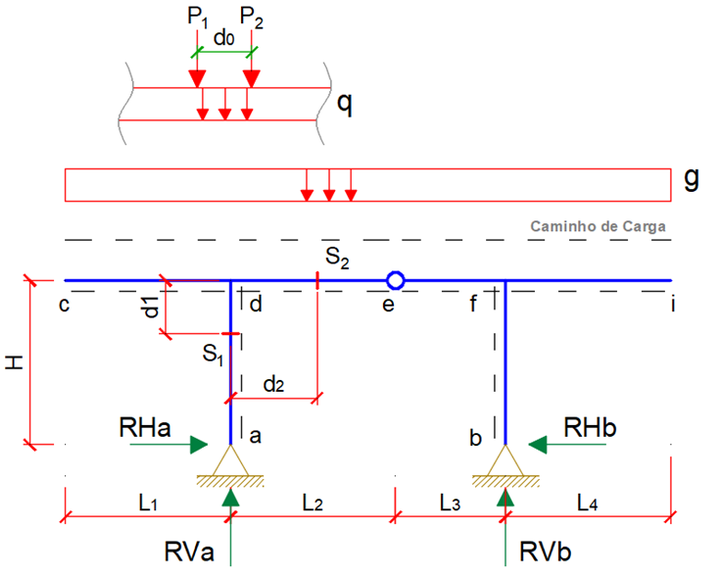
Procedimento e Orientações:

1. Leia atentamente todas as instruções da prova.
2. Os dados **D1, D2, D3, D4 e D5** devem ser obtidos no site **www.jjscremin.com/provas** onde o aluno deve entrar com o código da prova (indicado no cabeçalho desta) e seu respectivo número de matrícula clicando no botão **"Buscar Dados"**.
3. Após obter as respostas para as 16 questões da prova o aluno deverá fotografar as páginas com o desenvolvimento dos cálculos e postar no AVA via item **"Postagem de TE202-B1-4NA"**;
4. Em seguida o aluno deverá postar as respostas finais para as 16 questões (inserindo somente números e utilizando "ponto" como separador de decimais) no site **www.jjscremin.com/provas.** Para tanto, o aluno deverá fazer/refazer a busca de dados com seu número de matrícula e código de prova, certificando-se de que seu nome apareça em vermelho no campo "Nome do Aluno" para em seguida preencher os 16 campos destinados às respostas, e por fim, clicar no botão **"Enviar Respostas"**.
5. **Para todos os cálculos nas questões utilize 5 algarismos significativos.**
6. Na correção dos valores numéricos das questões abertas será utilizada uma margem de erro de 5 por cento (para mais ou para menos).

Problema A (0,625 ponto cada) :

Trace as linhas de influência de momentos fletores para as seções "S1" e "S2" e considerando a aplicação do trem tipo e da carga distribuída permanente indicados, responda os quastionamentos.

- P1 = D1 . 100 kN
- P2 = D2 . 50 kN
- q = D3 . 10 kN/m
- g = D4 . 30 kN/m
- d0 = D4 . 1,0 m
- d1 = D5 . 2,0 m
- d2 = D5 . 2,0 m
- L1 = 5,0 m
- L2 = 5,0 m
- L3 = 4.0 m
- L4 = 4.0 m
- H = 5,0 m



Q01 – Qual o valor da soma das áreas positivas da LI de momentos fletores da seção S1 [em m² - resposta numérica em módulo]?
Q02 – Qual o valor da soma das áreas negativas da LI de momentos fletores da seção S1 [em m² - resposta numérica em módulo]?
Q03 – Qual o valor da soma das áreas positivas da LI de momentos fletores da seção S2 [em m² - resposta numérica em módulo]?
Q04 – Qual o valor da soma das áreas negativa da LI de momentos fletores da seção S2 [em m² - resposta numérica em módulo]?
Q05 – Qual o máximo momento fletor que pode incidir na seção S1 [em kNm]?
Q06 – Qual o mínimo momento fletor que pode incidir na seção S1 [em kNm]?
Q07 – Qual o máximo momento fletor que pode incidir na seção S2 [em kNm]?
Q08 – Qual o mínimo momento fletor que pode incidir na seção S2 [em kNm]?

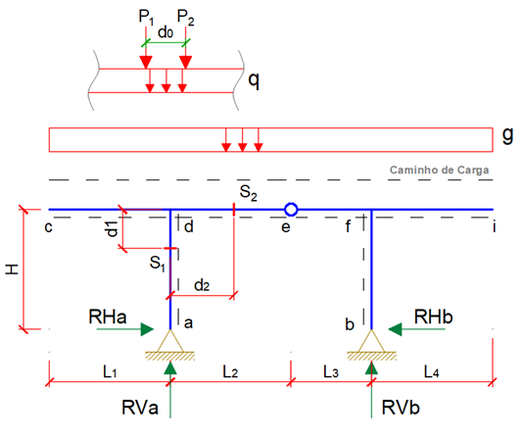
$D1 := 1$ $D2 := 1,4$ $D3 := 1,4$ $D4 := 1,4$ $D5 := 0,7$

$P1 := D1 \cdot 100 = 100$ $P2 := D2 \cdot 50 = 70$ $q := D3 \cdot 10 = 14$ $g := D4 \cdot 30 = 42$

$d0 := D4 \cdot 1 = 1,4$ $d1 := D5 \cdot 2 = 1,4$ $d2 := D5 \cdot 2 = 1,4$

$L1 := 5$ $L2 := 5$ $L3 := 4$ $L4 := 4$ $H := 5$

LI de RVa e RHa:



$\Sigma Mb = 0$ (+) horário $P := 1$

$RVa(x) \cdot (L2 + L3) - P \cdot (L1 + L2 + L3 - x) = 0$

$RVa(x) := \frac{1}{L2 + L3} \cdot P \cdot (L1 + L2 + L3 - x) = \frac{14 - x}{9}$

$\Sigma Me = 0$ (+) horário

$RVa(x) \cdot L2 - RHa(x) \cdot H - P \cdot (L1 + L2 - x) = 0$

$RHa_Pesq_e(x) := \frac{1}{H} \cdot (RVa(x) \cdot L2 - P \cdot (L1 + L2 - x))$

$RHa_Pesq_e(x) = \frac{5 \cdot (14 - x) - 9 \cdot (10 - x)}{45}$

$RHa_Pdir_e(x) := \frac{RVa(x) \cdot L2}{H} = \frac{14 - x}{9}$

LI de MS1:

P na esquerda na esquerda de "e":

$MS1_i(x) := (-RHa_Pesq_e(x)) \cdot (H - d1) = -\frac{2 \cdot (5 \cdot (14 - x) - 9 \cdot (10 - x))}{25}$

P na esquerda na direita de "e":

$MS1_ii(x) := (-RHa_Pdir_e(x)) \cdot (H - d1) = -\frac{2 \cdot (14 - x)}{5}$

$a1 := MS1_i(0) = 1,6$

$a1b := MS1_i(d0) = 1,152$

$a2 := MS1_i(L1) = 0$

$a3b := MS1_i(L1 + L2 - d0) = -1,152$

$a3 := MS1_ii(L1 + L2) = -1,6$

$a4 := MS1_ii(L1 + L2 + L3) = 0$

$a5 := MS1_ii(L1 + L2 + L3 + L4) = 1,6$

$A1 := L1 \cdot \frac{a1}{2} = 4$ $A2 := (L2 + L3) \cdot \frac{a3}{2} = -7,2$ $A3 := L4 \cdot \frac{a5}{2} = 3,2$

$As1_total := A1 + A2 + A3 = 0$

$As1_pos := A1 + A3 = 7,2$ $G01 := As1_pos = 7,2$

$As1_neg := A2 = -7,2$ $G02 := |As1_neg| = 7,2$

$MS1_max := P1 \cdot a1 + P2 \cdot a1b + As1_pos \cdot q + As1_total \cdot g = 341,44$ $G05 := MS1_max = 341,44$

$MS1_min := P1 \cdot a3 + P2 \cdot a3b + As1_neg \cdot q + As1_total \cdot g = -341,44$ $G06 := MS1_min = -341,44$

LI de MS2:

P na esquerda de S2 e na esquerda de "e":

$MS2_i(x) := RVa(x) \cdot d2 - RHa_Pesq_e(x) \cdot H - P \cdot (L1 + d2 - x)$

$MS2_i(x) = -\frac{-7 \cdot (14 - x) + 5 \cdot (5 \cdot (14 - x) - 9 \cdot (10 - x)) + 9 \cdot (32 - 5 \cdot x)}{45}$

P na direita de S2 e na esquerda de "e":

$$MS2_ii(x) := RVa(x) \cdot d2 - RHa_Pesq_e(x) \cdot H = \frac{7 \cdot (14 - x) - 5 \cdot (5 \cdot (14 - x) - 9 \cdot (10 - x))}{45}$$

P na direita de S2 e na direita de "e":

$$MS2_iii(x) := RVa(x) \cdot d2 - RHa_Pdir_e(x) \cdot H = -\frac{2 \cdot (14 - x)}{5}$$

$$a1 := MS2_i(0) = -2$$

$$a1b := MS2_i(d0) = -1,44$$

$$a2 := MS2_i(L1) = 0$$

$$a3 := MS2_i(L1 + d1) = 0,56$$

$$a3 := MS2_ii(L1 + d1) = 0,56$$

$$a4 := MS2_ii(L1 + L2) = -1,6$$

$$a4 := MS2_iii(L1 + L2) = -1,6$$

$$a5 := MS2_iii(L1 + L2 + L3) = 0$$

$$a6b := MS2_iii(L1 + L2 + L3 + L4 - d0) = 1,04$$

$$a6 := MS2_iii(L1 + L2 + L3 + L4) = 1,6$$

$$Lint := L2 - d2 = 3,6$$

$$Lint_esq := \left(\frac{|a3|}{|a3| + |a4|}\right) \cdot Lint = 0,93333$$

$$Lint_dir := \left(\frac{|a4|}{|a3| + |a4|}\right) \cdot Lint = 2,6667$$

$$A1 := L1 \cdot \frac{a1}{2} = -5 \qquad A2 := (d1 + Lint_esq) \cdot \frac{a3}{2} = 0,6533 \qquad A3 := (Lint_dir + L3) \cdot \frac{a4}{2} = -5,3333$$

$$A4 := L4 \cdot \frac{a6}{2} = 3,2$$

$$As2_total := A1 + A2 + A3 + A4 = -6,48$$

$$As2_pos := A2 + A4 = 3,8533 \qquad G03 := As2_pos = 3,8533$$

$$As2_neg := A1 + A3 = -10,3333 \qquad G04 := |As2_neg| = 10,3333$$

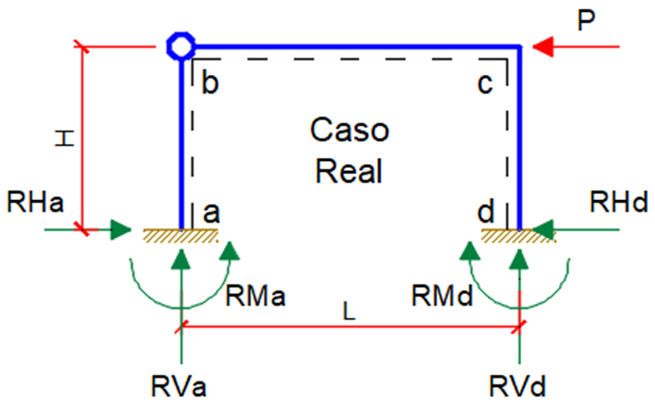
$$MS2_max := P1 \cdot a6 + P2 \cdot a6b + As2_pos \cdot q + As2_total \cdot g = 14,587 \qquad G07 := MS2_max = 14,5867$$

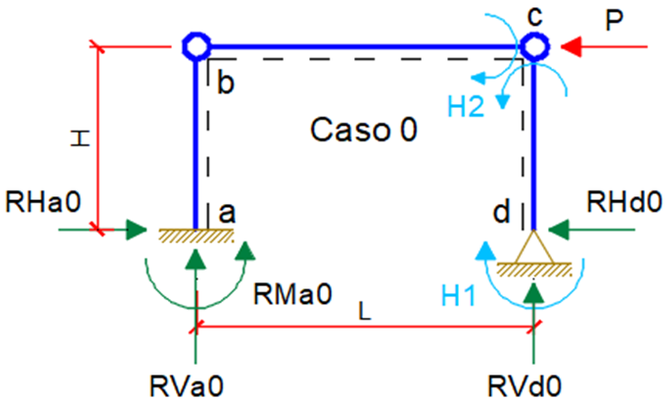
$$MS2_min := P1 \cdot a1 + P2 \cdot a1b + As2_neg \cdot q + As2_total \cdot g = -717,6267 \qquad G08 := MS2_min = -717,6267$$

Problema B (0,625 ponto cada) :

Empregando o método das forças com as redundantes hiperestáticas indicadas (H1 e H2) responda os questionamentos:
* Considerar somente efeitos de flexão nos cálculos;

- Para as barras "ab" e "cd" : EI_ab_cd = D1 . 1,0 kN m²
- Para a barra "bc": EI_bc = D2 . 5,0 kN m²
- L = D3 . 7m
- H = D4 . 4 m
- P = D5 . 100 kN



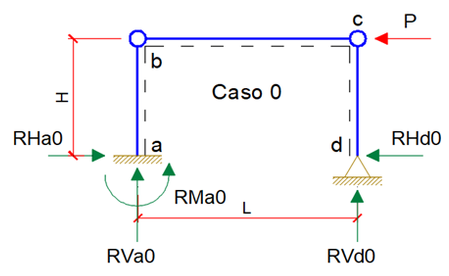


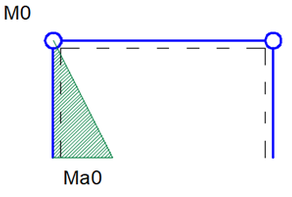
Q09 – Qual o valor do deslocamento de rotação do ponto "d" no caso 0 de carregamento [em radianos e em módulo] ?
Q10 – Qual o valor do deslocamento de rotação relativa do ponto "c" no caso 0 de carregamento [em radianos e em módulo] ?
Q11 – Qual o valor do coeficiente de flexibilidade f11 [em unidades de kN e m e em módulo] ?
Q12 – Qual o valor do coeficiente de flexibilidade f12 [em unidades de kN e m e em módulo] ?
Q13 – Qual o valor do coeficiente de flexibilidade f22 [em unidades de kN e m e em módulo] ?
Q14 – Qual o valor do momento fletor no ponto "d" [em kNm e sinal conforme a convenção]?
Q15 – Qual o valor do momento fletor no ponto "c" da barra "bc" [em kNm e sinal conforme a convenção]?
Q16 – Qual o valor da reação de apoio vertical no ponto "a" [em kN e com positivo para cima]?

$EI_ab_cd := D1 \cdot 1\ \text{kN m}^2 = 1\ \text{kN m}^2$ $EI_bc := D2 \cdot 5\ \text{kN m}^2 = 7\ \text{kN m}^2$

$L := D3 \cdot 7\ \text{m} = 9,8\ \text{m}$ $H := D4 \cdot 4\ \text{m} = 5,6\ \text{m}$ $P := D5 \cdot 100\ \text{kN} = 70\ \text{kN}$

Deslocamentos do Caso 0 e Coeficientes de Flexibilidade:



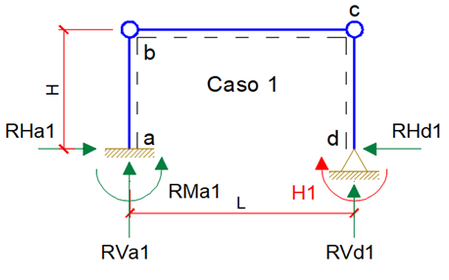


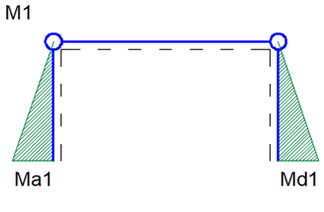
$RHa0 := P = 70\ \text{kN}$ $RHd := 0$

$RMa0 := -H \cdot P = -392\ \text{kN m}$

$Ma0 := -RMa0 = 392\ \text{kN m}$

$RVa0 := 0$





$RHd1 := -\frac{1\ \text{kN m}}{H} = -0,1786\ \text{kN}$

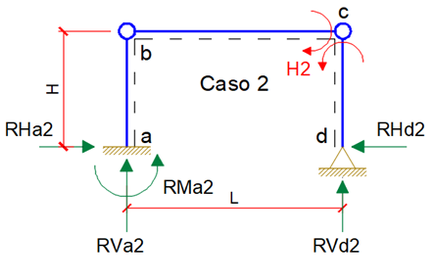
$RHa1 := RHd1 = -0,17857\ \text{kN}$

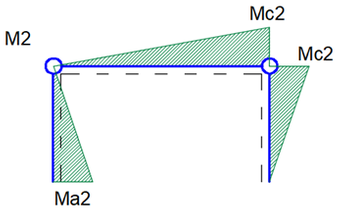
$RMa1 := (-RHa1) \cdot H = 1\ \text{kN m}$

$Ma1 := -RMa1 = -1\ \text{kN m}$

$Md1 := -1\ \text{kN m}$

$RVa1 := 0$





$RHd2 := \frac{1\ kN\ m}{H} = 0,1786\ kN$

$RHa2 := RHd2 = 0,1786\ kN$

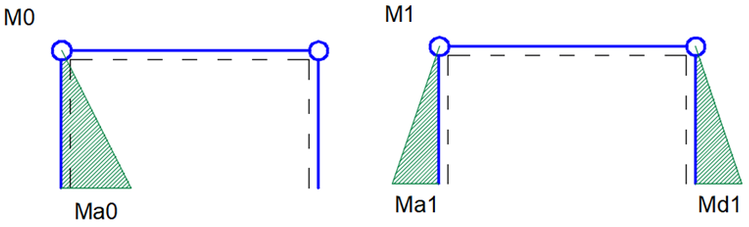
$RMa2 := -RHa2 \cdot H = -1\ kN\ m$

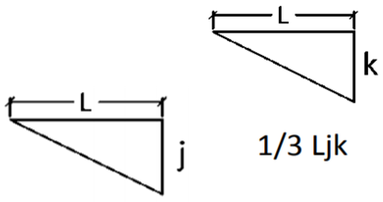
$RVa2 := \frac{1}{L} \cdot RMa2 = -0,102\ kN$

$RVd2 := -RVa2 = 0,102\ kN$

$RMa2 := -RHa2 \cdot H = -1\ kN\ m$ $Mc2 := -1\ kN\ m$ $Ma2 := -RMa2 = 1\ kN\ m$

Combinando os diagramas M0 e M1:



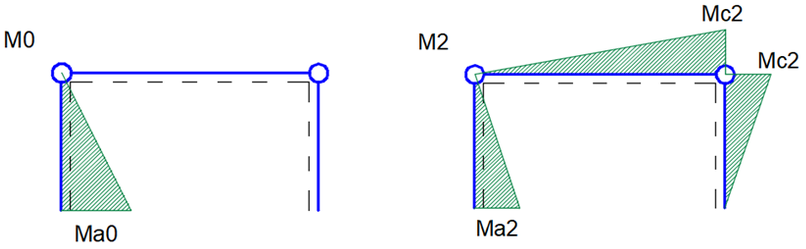


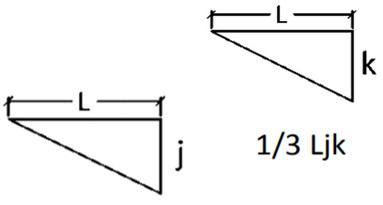
$k := Ma0 = 392\ kN\ m$ $j := Ma1 = -1\ kN\ m$ $H = 5,6\ m$

$\varphi 10 := \frac{1}{EI_ab_cd} \cdot \frac{1}{3} \cdot H \cdot j \cdot k \cdot \frac{1}{1\ kN\ m} = -731,7333$

$G09 := |\varphi 10| = 731,7333$

Combinando os diagramas M0 e M2:



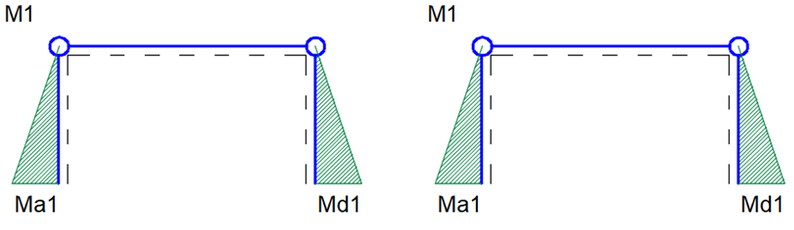


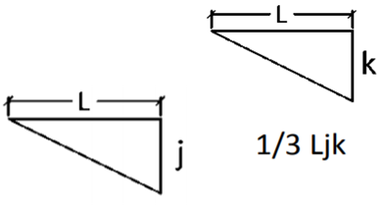
$k := Ma0 = 392\ kN\ m$ $j := Ma2 = 1\ kN\ m$ $H = 5,6\ m$

$\varphi 20 := \frac{1}{EI_ab_cd} \cdot \frac{1}{3} \cdot H \cdot j \cdot k \cdot \frac{1}{1\ kN\ m} = 731,7333$

$G10 := |\varphi 20| = 731,7333$

Combinando os diagramas M1 e M1:



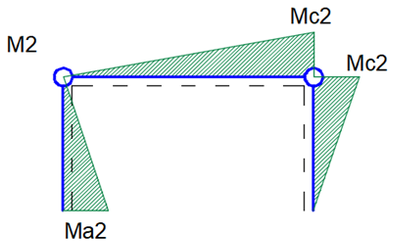


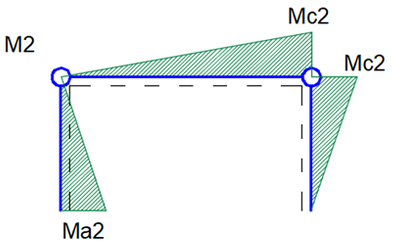
$k := Ma1 = -1\ kN\ m$ $j := Md1 = -1\ kN\ m$

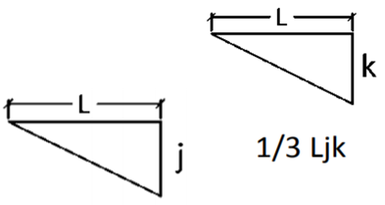
$f11 := 2 \cdot \frac{1}{EI_ab_cd} \cdot \frac{1}{3} \cdot H \cdot j \cdot k \cdot \frac{1}{1\ kN\ m} = 3,7333$

$G11 := |f11| = 3,7333$

Combinando os diagramas M2 e M2:







$k := Ma2 = 1\ \text{kN m} \qquad j := Ma2 = 1\ \text{kN m}$

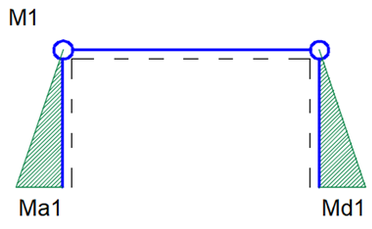
$$f22abcd := 2 \cdot \frac{1}{EI_ab_cd} \cdot \frac{1}{3} \cdot H \cdot j \cdot k \cdot \frac{1}{1\ \text{kN m}} = 3,7333$$

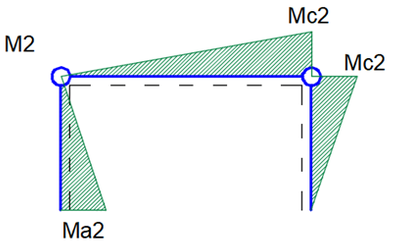
$$f22bc := 1 \cdot \frac{1}{EI_bc} \cdot \frac{1}{3} \cdot L \cdot j \cdot k \cdot \frac{1}{1\ \text{kN m}} = 0,4667$$

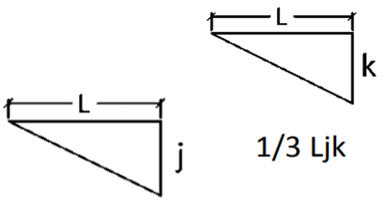
$f22 := f22abcd + f22bc = 4,2$

$G13 := |f22| = 4,2000$

Combinando os diagramas M1 e M2:

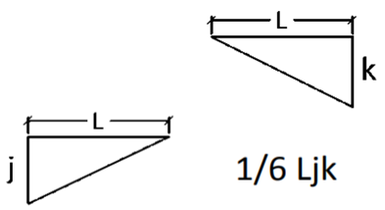






$k := Ma1 = -1\ \text{kN m} \qquad j := Ma2 = 1\ \text{kN m}$

$$f12ab := \frac{1}{EI_ab_cd} \cdot \frac{1}{3} \cdot H \cdot j \cdot k \cdot \frac{1}{1\ \text{kN m}} = -1,8667$$



$k := Mc2 = -1\ \text{kN m} \qquad j := Md1 = -1\ \text{kN m}$

$$f12cd := \frac{1}{EI_ab_cd} \cdot \frac{1}{6} \cdot H \cdot j \cdot k \cdot \frac{1}{1\ \text{kN m}} = 0,9333$$

$f12 := f12ab + f12cd = -0,93333$

$G12 := |f12| = 0,9333$

Solução do Sistema de Equações:

$$A := \begin{bmatrix} f11 & f12 \\ f12 & f22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,7333 & -0,9333 \\ -0,9333 & 4,2 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} -\varphi 10 \\ -\varphi 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 731,7333 \\ -731,7333 \end{bmatrix}$$

$$R := A^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 161,4118 \\ -138,3529 \end{bmatrix}$$

$RMd := R_1 = 161,4118$

$RMc := R_2 = -138,3529$

$G14 := -RMd = -161,4118$

$G15 := -RMc = 138,3529$

Cálculo de RVa por Sobreposição de Efeitos:

$RVa := RVa0 + RVa1 \cdot RMd + RVa2 \cdot RMc = 14,1176\ kN$

$G16 := \frac{RVa}{1\ kN} = 14,118$