Universidade POSITIVO

Engenharia Civil
Prova Bimestral: 2 / 2° Semestre de 2020
Disciplina: Teoria da Estruturas II

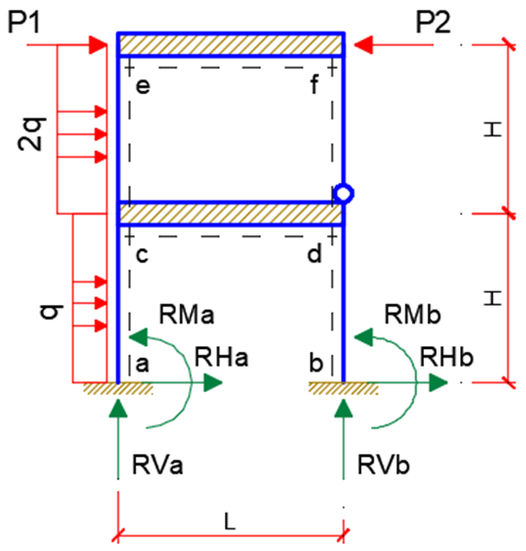
Código da Prova:
TE202-B2-4NA

Procedimento e Orientações:

1. Leia atentamente todas as instruções da prova.
2. Os dados **D1, D2, D3, D4 e D5** devem ser obtidos no site **www.jjscremin.com/provas** onde o aluno deve entrar com o código da prova (indicado no cabeçalho desta) e seu respectivo número de matrícula clicando no botão **"Buscar Dados"**.
3. Após obter as respostas para as 16 questões da prova o aluno deverá fotografar as páginas com o desenvolvimento dos cálculos e postar no AVA via item **"Postagem de TE202-B2-4NA"**;
4. Em seguida o aluno deverá postar as respostas finais para as 16 questões (inserindo somente números e utilizando "ponto" como separador de decimais) no site **www.jjscremin.com/provas.** Para tanto, o aluno deverá fazer/refazer a busca de dados com seu número de matrícula e código de prova, certificando-se de que seu nome apareça em vermelho no campo "Nome do Aluno" para em seguida preencher os 16 campos destinados às respostas, e por fim, clicar no botão **"Enviar Respostas"**.
5. **Para todos os cálculos nas questões utilize 5 algarismos significativos.**
6. Na correção dos valores numéricos das questões abertas será utilizada uma margem de erro de 5 por cento (para mais ou para menos).

Problema A (0,625 ponto cada) :

Aplique o Método da Rigidez (dos Deslocamentos) para cálculo da estrutura hiperestática ao lado respondendo os questionamentos.



Considerar que as barras verticais são inextensíveis e a as barras horizontais são infinitamente rígidas.

Deslocabilidades:
D1 - translação horizontal da barra "cd";
D2 - translação horizontal da barra "ef";

As barras verticais possuem módulo de elasticidade E = D1 . 20 GPa ;
As seções transversais das barras verticais são retangulares com base b = 20 cm (entrante no papel) e altura h = 40 cm (paralela ao plano do papel);

Dados de carregamento e geometria:
- P1 = D2 . 100 kN - P2 = D3 . 50 kN
- q = D4 . 15 kN/m
- L = 6,00 m - H = D5 . 4,00 m

Q01) Qual o valor do coeficiente de carga relativo a translação horizontal da barra "cd" como corpo rígido (F10) considerando ações e reações na deslocabilidade [em unidades de "kN" e "m" e em módulo]?
Q02) Qual o valor do coeficiente de carga relativo a translação horizontal da barra "ef" como corpo rígido (F20) ações e reações na deslocabilidade [em unidades de "kN" e "m" e em módulo]?
Q03) Qual o valor do coeficiente de rigidez k11 [em unidades de "kN" e "m" e em módulo]?
Q04) Qual o valor do coeficiente de rigidez k12 [em unidades de "kN" e "m" e em módulo]?
Q05) Qual o valor do coeficiente de rigidez k22 [em unidades de "kN" e "m" e em módulo]?
Q06) Qual o valor da translação horizontal da barra "cd" como corpo rígido [em m e com positivo conforme a convenção de Green]?
Q07) Qual o valor da translação horizontal da barra "ef" como corpo rígido [em m e com positivo conforme a convenção de Green]?
Q08) Qual o valor do momento fletor no ponto "d" da barra "bd" [em kNm e sinal conforme a convenção de diagramas]?

$D1 = 0,8$ $D2 = 0,8$ $D3 = 1,2$ $D4 = 0,8$ $D5 = 0,6$

$E := D1 \cdot 20\ \text{GPa}$ $P1 := D2 \cdot 100\ \text{kN}$ $P2 := D3 \cdot 50\ \text{kN}$

$q := D4 \cdot 15\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ $L := 6\ \text{m}$ $H := D5 \cdot 4\ \text{m}$ $b := 20\ \text{cm}$ $h := 40\ \text{cm}$

Vetores de Forças:

$F10r := -q \cdot \frac{H}{2} - 2 \cdot q \cdot \frac{H}{2} = -43,2\ \text{kN}$ $F10n := 0 = 0\ \text{kN}$

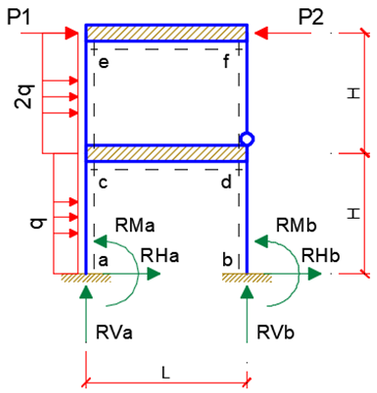
$F20r := -2 \cdot q \cdot \frac{H}{2} = -28,8\ \text{kN}$ $F20n := P1 - P2 = 20\ \text{kN}$

$F10 := \frac{F10n - F10r}{\text{kN}} = 43,2$ $G01 := |F10| = 43,2$

$F20 := \frac{F20n - F20r}{\text{kN}} = 48,8$ $G02 := |F20| = 48,8$

Coeficientes de Rigidez:

$EI := \frac{E \cdot b \cdot h^3}{12} = 17067\ \text{kN m}^2$



$k11 := \left(3 \cdot \left(12 \cdot \frac{EI}{H^3}\right) + \frac{3 \cdot EI}{H^3}\right) \frac{\text{m}}{\text{kN}} = 48148$ $G03 := k11 = 48148$

$k21 := \left(-12 \cdot \frac{EI}{H^3} - \frac{3 \cdot EI}{H^3}\right) \frac{\text{m}}{\text{kN}} = -18518,5185$

$k22 := \left(12 \cdot \frac{EI}{H^3} + \frac{3 \cdot EI}{H^3}\right) \frac{\text{m}}{\text{kN}} = 18518,5185$ $G05 := k22 = 18519$

$k12 := \left(-12 \cdot \frac{EI}{H^3} - \frac{3 \cdot EI}{H^3}\right) \frac{\text{m}}{\text{kN}} = -18518,5185$ $G04 := |k12| = 18519$

Solução o Sistema de Equações:

$K := \begin{bmatrix} k11 & k12 \\ k21 & k22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48148 & -18519 \\ -18519 & 18519 \end{bmatrix}$ $F := \begin{bmatrix} F10 \\ F20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43,2 \\ 48,8 \end{bmatrix}$

$RES := K^{-1} \cdot F = \begin{bmatrix} 0,003105 \\ 0,0057402 \end{bmatrix}$

$Des1 := RES_1 = 0,003105$ $G06 := Des1 = 0,003105$

$Des2 := RES_2 = 0,0057$ $G07 := Des2 = 0,0057$

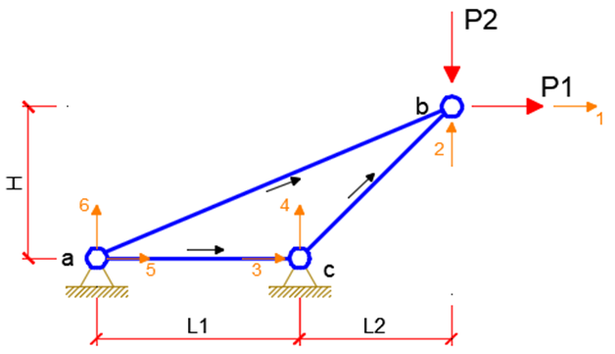
Sobreposição de Efeitos:

$Md_0 := 0$ $Md_1 := \frac{6 \cdot EI}{H^2} \cdot \frac{1}{\text{kN}} = 17778$ $Md_2 := 0$

$Md := Md_0 + Des1 \cdot Md_1 + Des2 \cdot Md_2 = 55,2$ $G08 := -Md = -55,2$

Problema B (0,625 ponto cada) :

Considerando a numeração dos graus de liberdade (em laranja) e setas de orientação dos eixos longitudinais positivos das barras (em preto), conforme indicado no modelo estrutural de treliça ao lado, aplique análise matricial via método dos deslocamentos e responda os questionamentos



Todas as barras possuem módulo de elasticidade E = D1 . 140 GPa ;

Todas as barras possuem área de seção transversal A = 800 mm^2;

Dados de carregamento e geometria:
- P1 = D2 . 80 kN
- P2 = D3 . 50 kN
- L1 = D4 . 3,60 m
- L2 = 3,00 m
- H = D5 . 3,00 m

O ponto "a" sobre um deslocamento prescrito de 15 mm para baixo.

Q09) - Qual é o valor do coeficiente "k11" da matriz de rigidez elementar da barra "ab", em coordenadas globais [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por EA]?
Q10) - Qual é o valor do coeficiente "k22" da matriz de rigidez elementar da barra "bc", em coordenadas globais [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por EA]?
Q11) - Qual é o valor do coeficiente "k11" da matriz de rigidez elementar da barra "ac", em coordenadas globais [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por EA]?
Q12) - Qual é o valor do coeficiente "k12" da matriz de rigidez da estrutura como um todo [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por EA]:
Q13) - Qual é o valor do coeficiente "k33" da matriz de rigidez da estrutura como um todo [em unidades de kN e m; considerando todos os elementos multiplicados por EA]:
Q14) - Qual é o valor do deslocamento no grau de liberdade 1 [em m e conforme a convenção de Green]?
Q15) - Qual é o valor do deslocamento no grau de liberdade 2 [em m e conforme a convenção de Green]?
Q16) - Qual é o esforço axial que ocorre na barra "ab" [em m e conforme a convenção de Green]?

$D1 := 0,8$ $D2 := 0,8$ $D3 := 1,2$ $D4 := 0,8$ $D5 := 0,6$

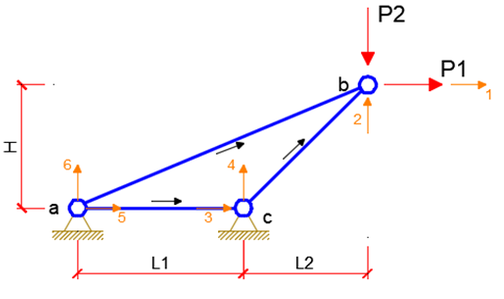
$E := D1 \cdot 140\ \text{GPa}$ $P1 := D2 \cdot 80\ \text{kN}$ $P2 := D3 \cdot 50\ \text{kN}$

$L1 := D4 \cdot 3,6$ $L2 := 3$ $H := D5 \cdot 3$

$A := 800\ \text{mm}^2 = 0,0008\ \text{m}^2$

Coordenadas (origem do sistema de eixos global no ponto "3"):

$xa := 0$ $ya := 0$
$xb := L1 + L2 = 5,88$ $yb := H$
$xc := L1 = 2,88$ $yc := 0 = 0$



$EA := \frac{E \cdot A}{\text{kN}} = 89600$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 1 (Barra "ab"):

$$L1 := \sqrt{(xb - xa)^2 + (yb - ya)^2} = 6,1493 \qquad \lambda x1 := \frac{xb - xa}{L1} = 0,9562 \qquad \lambda y1 := \frac{yb - ya}{L1} = 0,2927$$

$$k1 := \frac{EA}{L1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 \\ -\lambda x1^2 & -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda x1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 \\ -\lambda x1 \cdot \lambda y1 & -\lambda y1^2 & \lambda x1 \cdot \lambda y1 & \lambda y1^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [5\ 6\ 1\ 2] \\ \begin{bmatrix} 13322 & 4078,2 & -13322 & -4078,2 \\ 4078,2 & 1248,4 & -4078,2 & -1248,4 \\ -13322 & -4078,2 & 13322 & 4078,2 \\ -4078,2 & -1248,4 & 4078,2 & 1248,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 2 (Barra "bc"):

$$L2 := \sqrt{(xb - xc)^2 + (yb - yc)^2} = 3,4986 \qquad \lambda x2 := \frac{xb - xc}{L2} = 0,8575 \qquad \lambda y2 := \frac{yb - yc}{L2} = 0,5145$$

$$k2 := \frac{EA}{L2} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 \\ -\lambda x2^2 & -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda x2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 \\ -\lambda x2 \cdot \lambda y2 & -\lambda y2^2 & \lambda x2 \cdot \lambda y2 & \lambda y2^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [3\ 4\ 1\ 2] \\ \begin{bmatrix} 18831 & 11299 & -18831 & -11299 \\ 11299 & 6779,2 & -11299 & -6779,2 \\ -18831 & -11299 & 18831 & 11299 \\ -11299 & -6779,2 & 11299 & 6779,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de Rigidez Elementar em Coord. Globais da Barra 3 (Barra "ac"):

$$L3 := \sqrt{(xc - xa)^2 + (yc - ya)^2} = 2,88 \qquad \lambda x3 := \frac{xc - xa}{L3} = 1 \qquad \lambda y3 := \frac{yc - ya}{L3} = 0,0000$$

$$k3 := \frac{EA}{L3} \cdot \begin{bmatrix} \lambda x3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda x3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 \\ \lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda y3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda y3^2 \\ -\lambda x3^2 & -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda x3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 \\ -\lambda x3 \cdot \lambda y3 & -\lambda y3^2 & \lambda x3 \cdot \lambda y3 & \lambda y3^2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} [5\ 6\ 3\ 4] \\ \begin{bmatrix} 31111 & 0 & -31111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31111 & 0 & 31111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$G09 := k1_{1\,1} = 13322 \qquad G10 := k2_{2\,2} = 6779,2 \qquad G11 := k3_{1\,1} = 31111$$

Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura como um Todo:

$$KG := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k1":

$$k1 = \begin{matrix} [5\ 6\ 1\ 2] \\ \begin{bmatrix} 13322 & 4078,2 & -13322 & -4078,2 \\ 4078,2 & 1248,4 & -4078,2 & -1248,4 \\ -13322 & -4078,2 & 13322 & 4078,2 \\ -4078,2 & -1248,4 & 4078,2 & 1248,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k1_{3\,3} & k1_{3\,4} & 0 & 0 & k1_{3\,1} & k1_{3\,2} \\ k1_{4\,3} & k1_{4\,4} & 0 & 0 & k1_{4\,1} & k1_{4\,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k1_{1\,3} & k1_{1\,4} & 0 & 0 & k1_{1\,1} & k1_{1\,2} \\ k1_{2\,3} & k1_{2\,4} & 0 & 0 & k1_{2\,1} & k1_{2\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13322 & 4078,2 & 0 & 0 & -13322 & -4078,2 \\ 4078,2 & 1248,4 & 0 & 0 & -4078,2 & -1248,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13322 & -4078,2 & 0 & 0 & 13322 & 4078,2 \\ -4078,2 & -1248,4 & 0 & 0 & 4078,2 & 1248,4 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k2":

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k2 = \begin{bmatrix} 18831 & 11299 & -18831 & -11299 \\ 11299 & 6779,2 & -11299 & -6779,2 \\ -18831 & -11299 & 18831 & 11299 \\ -11299 & -6779,2 & 11299 & 6779,2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k1_{33}+k2_{33} & k1_{34}+k2_{34} & k2_{31} & k2_{32} & k1_{31} & k1_{32} \\ k1_{43}+k2_{43} & k1_{44}+k2_{44} & k2_{41} & k2_{42} & k1_{41} & k1_{42} \\ k2_{13} & k2_{14} & k2_{11} & k2_{12} & 0 & 0 \\ k2_{23} & k2_{24} & k2_{21} & k2_{22} & 0 & 0 \\ k1_{13} & k1_{14} & 0 & 0 & k1_{11} & k1_{12} \\ k1_{23} & k1_{24} & 0 & 0 & k1_{21} & k1_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32153 & 15377 & -18831 & -11299 & -13322 & -4078,2 \\ 15377 & 8027,7 & -11299 & -6779,2 & -4078,2 & -1248,4 \\ -18831 & -11299 & 18831 & 11299 & 0 & 0 \\ -11299 & -6779,2 & 11299 & 6779,2 & 0 & 0 \\ -13322 & -4078,2 & 0 & 0 & 13322 & 4078,2 \\ -4078,2 & -1248,4 & 0 & 0 & 4078,2 & 1248,4 \end{bmatrix}$$

Espalhamento de "k3":

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$k3 = \begin{bmatrix} 31111 & 0 & -31111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31111 & 0 & 31111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$KG := \begin{bmatrix} k1_{33}+k2_{33} & k1_{34}+k2_{34} & k2_{31} & k2_{32} & k1_{31} & k1_{32} \\ k1_{43}+k2_{43} & k1_{44}+k2_{44} & k2_{41} & k2_{42} & k1_{41} & k1_{42} \\ k2_{13} & k2_{14} & k2_{11}+k3_{33} & k2_{12}+k3_{34} & k3_{31} & k3_{32} \\ k2_{23} & k2_{24} & k2_{21}+k3_{43} & k2_{22}+k3_{44} & k3_{41} & k3_{42} \\ k1_{13} & k1_{14} & k3_{13} & k3_{14} & k1_{11}+k3_{11} & k1_{12}+k3_{12} \\ k1_{23} & k1_{24} & k3_{23} & k3_{24} & k1_{21}+k3_{21} & k1_{22}+k3_{22} \end{bmatrix}$$

$$KG = \begin{bmatrix} 32153 & 15377 & -18831 & -11299 & -13322 & -4078,2 \\ 15377 & 8027,7 & -11299 & -6779,2 & -4078,2 & -1248,4 \\ -18831 & -11299 & 49942 & 11299 & -31111 & 0,0000 \\ -11299 & -6779,2 & 11299 & 6779,2 & 0,0000 & 0,0000 \\ -13322 & -4078,2 & -31111 & 0,0000 & 44433 & 4078,2 \\ -4078,2 & -1248,4 & 0,0000 & 0,0000 & 4078,2 & 1248,4 \end{bmatrix}$$

$$G12 := KG_{12} = 15377 \qquad G13 := KG_{33} = 49942$$

$$K11 := \begin{bmatrix} KG_{11} & KG_{12} \\ KG_{21} & KG_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32153,4445 & 15376,9632 \\ 15376,9632 & 8027,6768 \end{bmatrix}$$

$$K12 := \begin{bmatrix} KG_{13} & KG_{14} & KG_{15} & KG_{16} \\ KG_{23} & KG_{24} & KG_{25} & KG_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18831,2172 & -11298,7303 & -13322,2274 & -4078,2329 \\ -11298,7303 & -6779,2382 & -4078,2329 & -1248,4386 \end{bmatrix}$$

$$K21 := \begin{bmatrix} KG_{31} & KG_{32} \\ KG_{41} & KG_{42} \\ KG_{51} & KG_{52} \\ KG_{61} & KG_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18831,2172 & -11298,7303 \\ -11298,7303 & -6779,2382 \\ -13322,2274 & -4078,2329 \\ -4078,2329 & -1248,4386 \end{bmatrix}$$

$$K22 := \begin{bmatrix} KG_{33} & KG_{34} & KG_{35} & KG_{36} \\ KG_{43} & KG_{44} & KG_{45} & KG_{46} \\ KG_{53} & KG_{54} & KG_{55} & KG_{56} \\ KG_{63} & KG_{64} & KG_{65} & KG_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49942,3283 & 11298,7303 & -31111,1111 & 0,0000 \\ 11298,7303 & 6779,2382 & 0,0000 & 0,0000 \\ -31111,1111 & 0,0000 & 44433,3385 & 4078,2329 \\ 0,0000 & 0,0000 & 4078,2329 & 1248,4386 \end{bmatrix}$$

$$Qk := \begin{bmatrix} \frac{P1}{kN} \\ -\frac{P2}{kN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ -60 \end{bmatrix}$$

$$Qu := \begin{bmatrix} Q3 \\ Q4 \\ Q5 \\ Q6 \end{bmatrix} \qquad Dk := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,015 \end{bmatrix}$$

Solução do Sistema de Equações:

Solução do Sistema de Equações: Qk = K11*Du + K12*Dk (1ª Linha)
Qu = K21*Du + K22*Dk (2ª Linha)

Resolvendo a 1ª Linha: Du = K11^-1 * (Qk - K12*Dk)

$$Du := K11^{-1} \cdot (Qk - K12 \cdot Dk) = \begin{bmatrix} 0,056920 \\ -0,11884 \end{bmatrix}$$

$$Des1 := Du_1 = 0,056920 \qquad Des2 := Du_2 = -0,11884$$

$$Des3 := 0 \qquad Des4 := 0 \qquad Des5 := 0 \qquad Des6 := -0,015$$

$$G14 := Des1 = 0,056920 \qquad G15 := Des2 = -0,11884$$

Resolvendo a 2ª Linha: Qu = K21*Du + K22*Dk

$$Qu := K21 \cdot Du + K22 \cdot Dk = \begin{bmatrix} 270,8333 \\ 162,5 \\ -334,8333 \\ -102,5 \end{bmatrix}$$

Reações de apoio nos graus de liberdade 3, 4, 5 e 6 respectivamente

Esforços Axiais nas Barras:

Na Barra 1:

$$N1 := \frac{EA}{L1} \cdot \left(\left(\begin{bmatrix} -\lambda x1 & -\lambda y1 & \lambda x1 & \lambda y1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Des5 \\ Des6 \\ Des1 \\ Des2 \end{bmatrix} \right)_{\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}_1} \right) = 350,1708$$

$$G16 := N1 = 350,1708$$