Teoria das Estruturas I - Aula 04

Modelagem de Marquise de Concreto
com Platibanda

Universidade POSITIVO



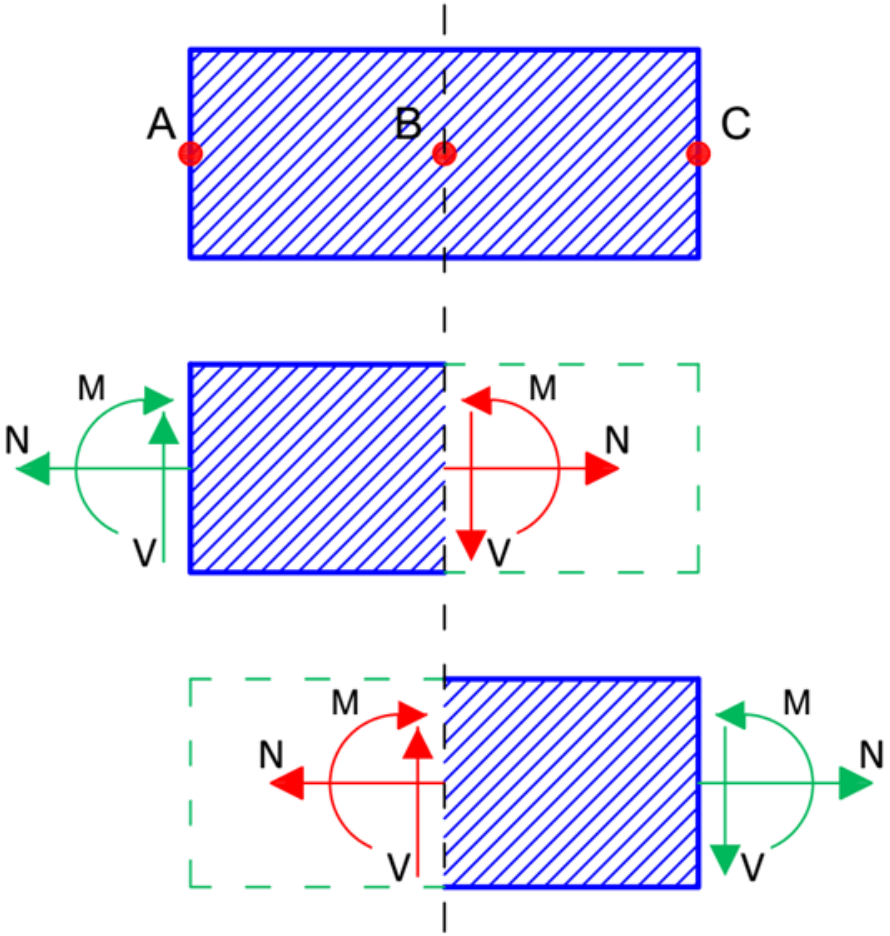
Conceitos Iniciais

Convenção de Sinais

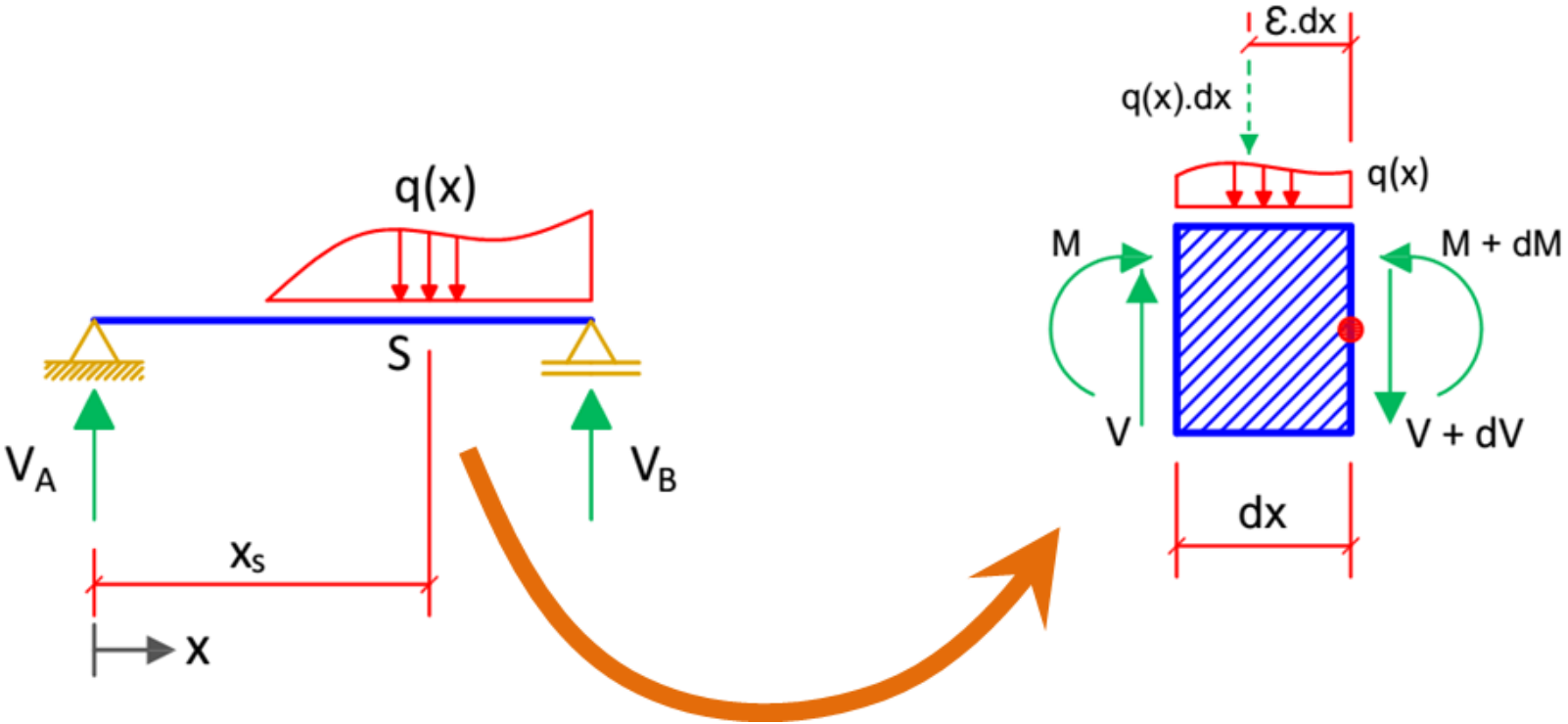
- *Método 1 : considerar a convenção aplicada ao ponto onde ocorre o corte (ponto B - **convenção em vermelho**)*

- *Método 2 : considerar a convenção aplicada ao extremo oposto ao corte (pontos A ou B - **convenção em verde**)*

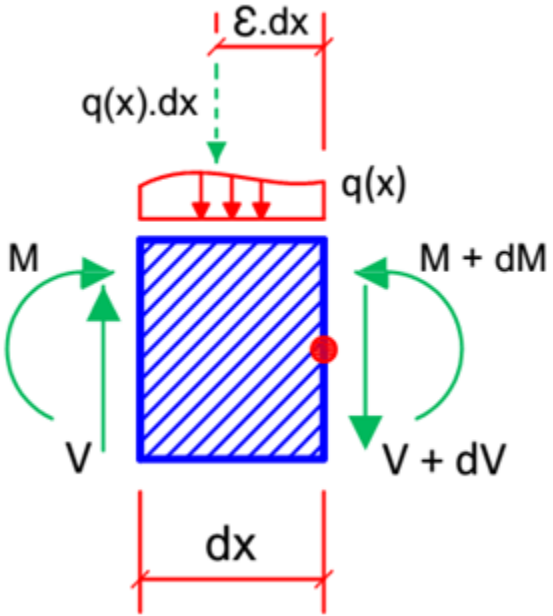
- *Em ambos os casos é necessário escolher o "lado" para o qual o corte é feito;*



Equilíbrio de uma Porção Infinitesimal de uma Viga



Relações Diferenciais entre M(x), V(x) e q(x)



M(x) - equação de momentos fletores;
V(x) - equação de esforços cortantes;
q(x) - equação do carregamento;

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

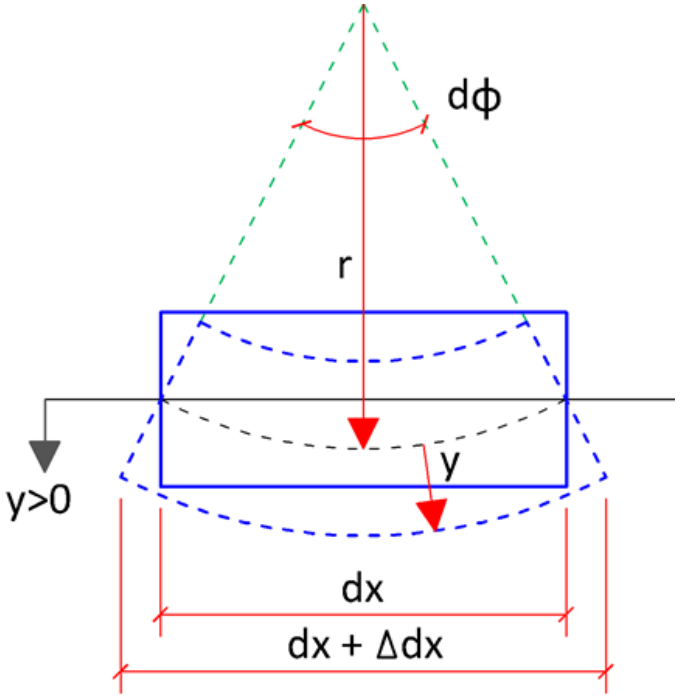
$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x)$$

Integração da Linha Elástica

$$(1)\quad \sigma = \frac{M.y}{I}$$

$$(2)\quad \varepsilon = \frac{\Delta.dx}{dx}$$

$$(3)\quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$



$\boldsymbol{\sigma}$: tensão normal

$\boldsymbol{\varepsilon}$: deformação longitudinal

E : módulo de Elasticidade

M : momento fletor

y : afastamento na vertical a partir da LN

I : momento de inércia da seção transversal

$\boldsymbol{\Delta}$.dx : acréscimo (decréscimo) do comprimento longitudinal

Integração da Linha Elástica

$$(1)\ \sigma = \frac{M.y}{I} \quad (2)\ \varepsilon = \frac{\Delta.dx}{dx} \quad (3)\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

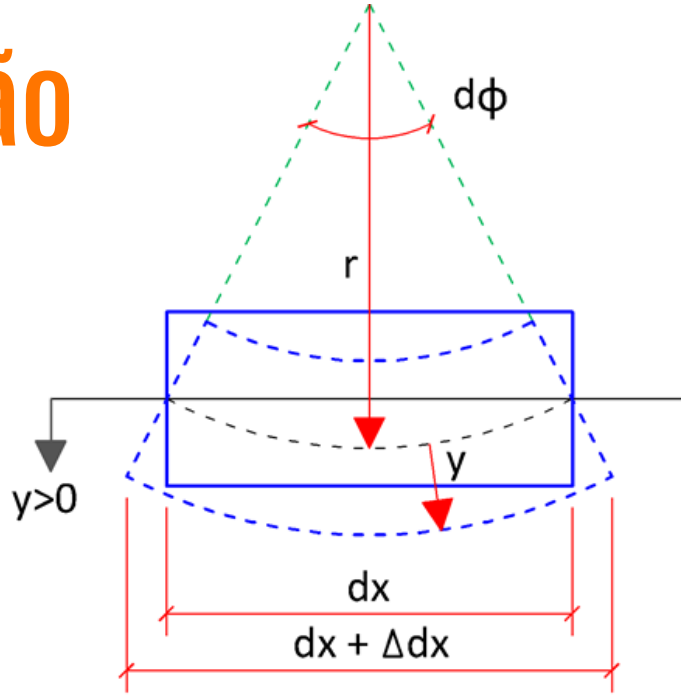
Substituíndo (1) e (2) em (3):

$$\frac{\Delta.dx}{dx} = \frac{M.y}{E.I}$$

Trocando as posições de dx (inf.) e y:

$$\frac{\Delta.dx}{y} = \frac{M.dx}{E.I}$$

Integração da Linha Elástica



$$\frac{\Delta.dx}{y} = \frac{M.dx}{E.I}$$

Olhando para a figura é possível constatar que:

$$d\phi = \frac{dx}{r} = \frac{\Delta.dx}{y}$$

Logo:

$$\frac{dx}{dr} = \frac{M.dx}{EI}$$

Eliminando dx presente em ambos os termos chega-se a:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

Nesta expressão o termo $\frac{1}{r}$ é definido como **curvatura**, ou seja, **curvatura é de fato o inverso do raio de curvatura**;

Nos livros de cálculo diferencial e integral a definição matermática de curvatura em coordenadas cartesianas é dada por :

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Entretanto, considerando que na Teoria das Estruturas são considerados apenas "pequenos deslocamentos" o quadrado de dv/dx é desprezível a parte inferior da expressão acaba reduzida ao valor 1:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{1^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2v}{dx^2}$$

Equação da Viga de Euler-Bernoulli

$$\frac{1}{r} \approx \frac{d^2v}{dx^2} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$M(x) = EI.\frac{d^2v(x)}{dx^2}$$

Hipótese de Euler-Bernoulli:

Seções transversais planas permanecem planas e perpendiculares à LN após a deformação da viga;

Consequentemente a Teoria de Viga de Euler-Bernoulli prevê que a linha elástica deforma conforme "arcos de circunferência".

Consequência da Teoria de Viga de Euler-Bernoulli:

$$v(x) = deflexões\ dos\ pontos\ da\ linha\ elástica\ da\ viga$$

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = v(x)' = inclinações\ (rotações)\ dos\ pontos\ da\ linha\ elástica$$

$$M(x) = EI\ \frac{d^2v(x)}{dx^2} = EI\ v(x)'' = eq.\ de\ Momentos\ Fletores$$

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = EI\ \frac{d^3v(x)}{dx^3} = EI\ v(x)''' = eq.\ de\ Esforços\ Cortantes$$

$$q(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -EI\ \frac{d^4v(x)}{dx^4} = -EI\ v(x)'''' = eq.\ do\ Carregamento$$

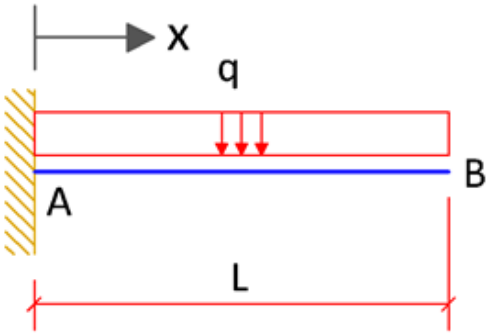
Atividade Prática



Esclarecimentos

Sistema Destrógero x Sistema Levógero

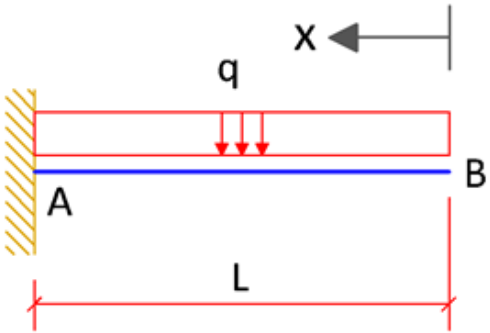
Sistema Destrógero



$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{dx} = -q(x)$$

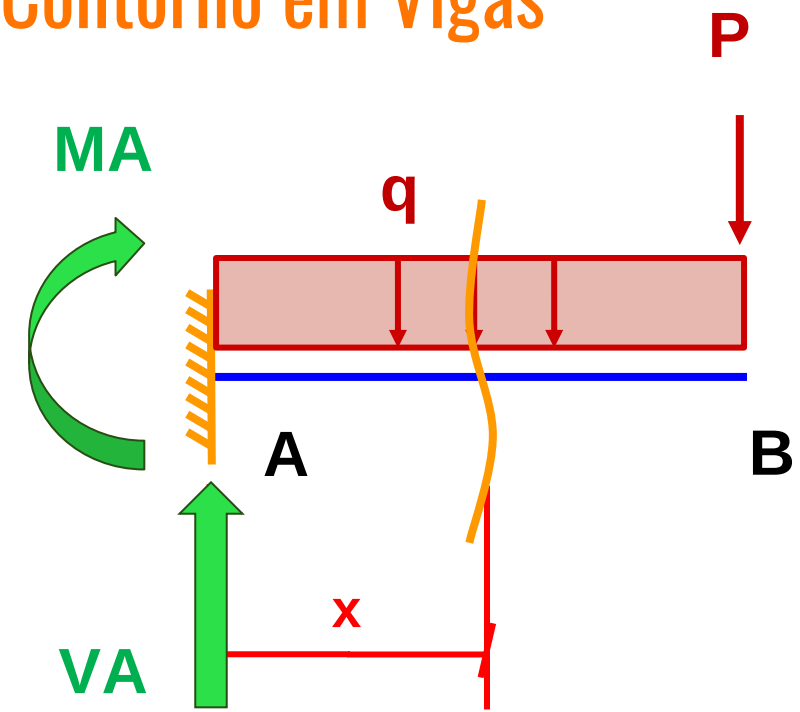
Sistema Levógero



$$\frac{dM}{dx} = -V$$

$$\frac{dV}{dx} = q(x)$$

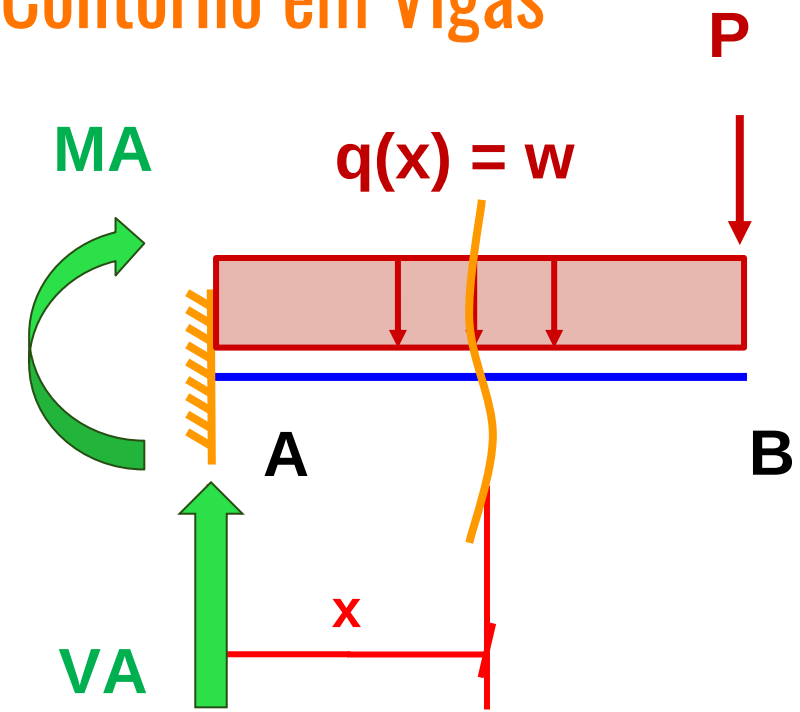
Condições de Contorno em Vigas



Definição "Simplória":

São as forças / momentos
e os deslocamentos de
translação / rotação
que ocorrem nas
extremidades das barras

Condições de Contorno em Vigas



$$q(x) = w$$

$$V(x) = \int -q(x)dx = -w * x + C_1$$

$$como\ V(x = 0) = V_A$$

$$assim\ sendo: \quad -w * 0 + C_1 = V_A$$

$$logo: \quad C_1 = V_A$$

$$\boxed{V(x) = -w * x + V_A}$$

$$M(x) = \int V(x)dx$$

$$M(x) = -w * \frac{x^2}{2} + V_A * x + C_2$$

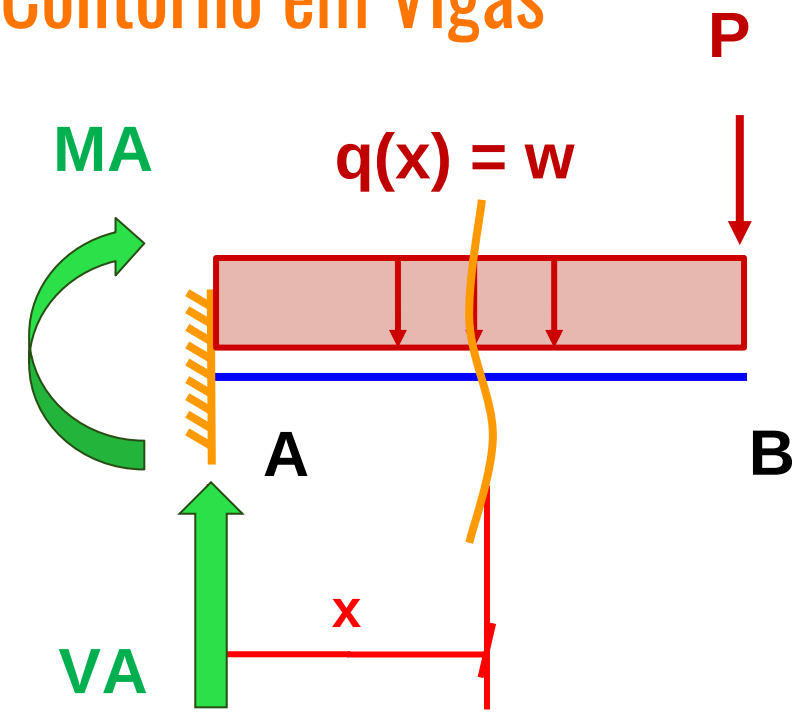
$$como\ M(x = 0) = M_A$$

$$assim\ sendo: \quad -w * \frac{0^2}{2} + V_A * 0 + C_2 = M_A$$

$$logo: \quad C_2 = M_A$$

$$\boxed{M(x) = -w * \frac{x^2}{2} + V_A * x + M_A}$$

Condições de Contorno em Vigas



$$\theta(x) = \frac{1}{EI}\int M(x)dx$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI}(-w * \frac{x^3}{6} + V_A * \frac{x^2}{2} + M_A * x + C_3)$$

$como:$

$$\theta(x = 0) = 0$$

$assim\ sendo:$

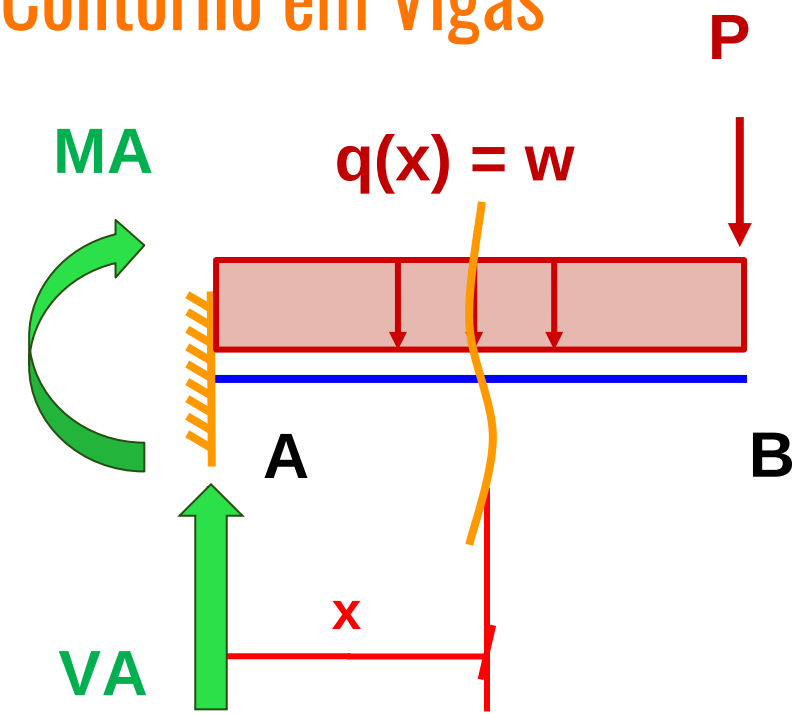
$$\frac{1}{EI}(-w * \frac{0^3}{6} + V_A * \frac{0^2}{2} + M_A * 0 + C_3) = 0$$

$logo:$

$$C_3 = 0$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI}(-w * \frac{x^3}{6} + V_A * \frac{x^2}{2} + M_A)$$

Condições de Contorno em Vigas



$$v(x) = \frac{1}{EI}\int \theta(x)dx$$

$$v(x) = \frac{1}{EI}(-w * \frac{x^4}{24} + V_A * \frac{x^3}{6} + M_A * \frac{x^2}{2} + C_4)$$

como :

$$v(x = 0) = 0$$

assim sendo :

$$\frac{1}{EI}(-w * \frac{x^4}{24} + V_A * \frac{x^3}{6} + M_A * \frac{x^2}{2} + C_4) = 0$$

logo :

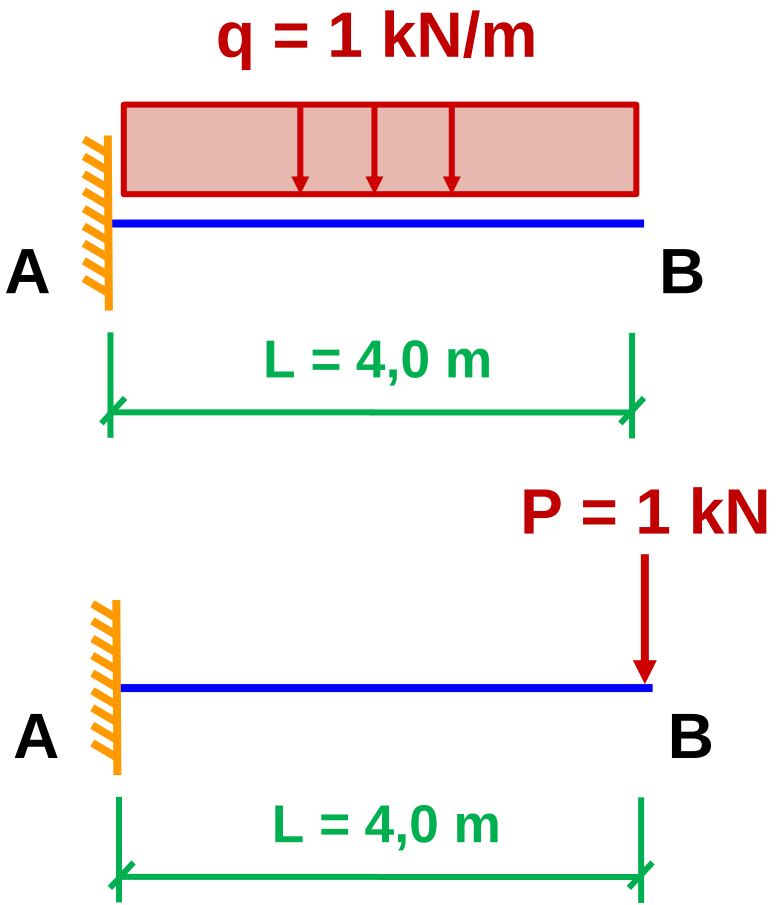
$$C_4 = 0$$

$$v(x) = \frac{1}{EI}(-w * \frac{x^4}{24} + V_A * \frac{x^3}{6} + M_A * \frac{x^2}{2})$$

Rigidez de Viga Engastada em Balanço

Rigidez:

Deslocamento de translação / rotação associado à um carregamento (força ou momento) unitário;



Modelagem da Marquise nos Softwares SAP 2000 / Autodesk Robot : Influência da Rigidez da Laje e da Platibanda

FIM