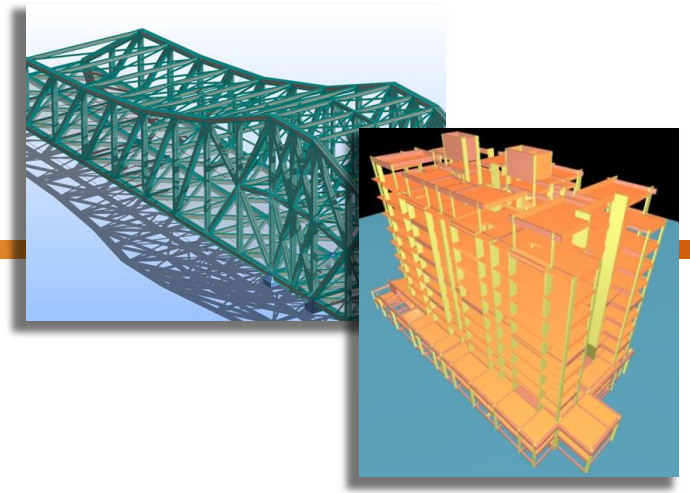
Teoria das Estruturas I - Aula 02



Modelagem Estrutural

- Introdução à Modelagem Estrutural
- Reações de Apoio em Estruturas Isostáticas Planas (Revisão)
- Modelos Estruturais Planos Usuais
- Determinação Estática e Estabilidade de Modelos Estruturais

Prof. Juliano J. Scremin

Universidade POSITIVO

Universidade POSITIVO

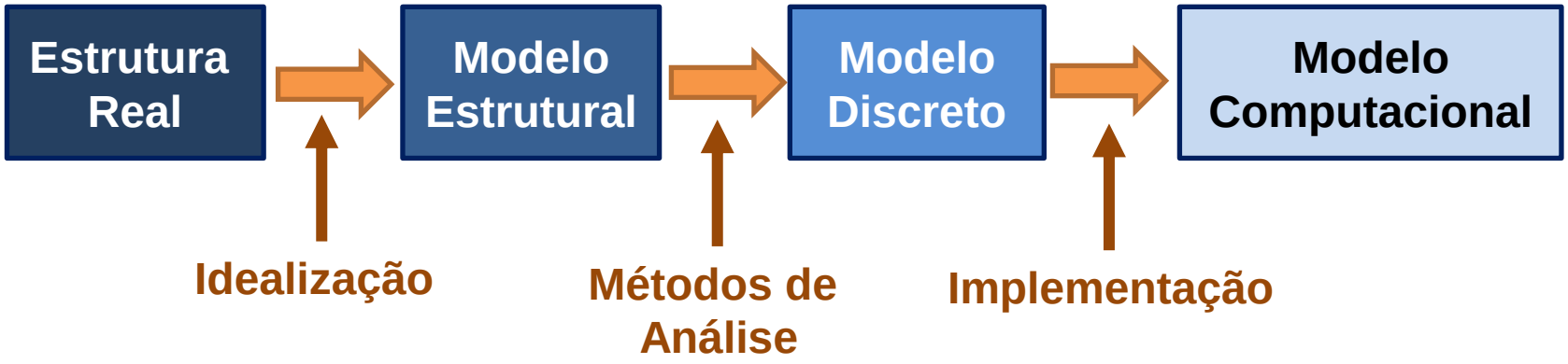
Aula 02 - Seção 01:
Introdução à Modelagem Estrutural

Passos de um Projeto Estrutural

- **Concepção (arquitetônica) da obra**
  ⇒ atendimento às necessidades funcionais e econômicas
- **Anteprojeto estrutural**
  ⇒ plantas de forma (concreto armado) ⇒ orçamento
- **Análise Estrutural**
  ⇒ previsão do comportamento da estrutura
- **Dimensionamento**
  ⇒ verificação das hipóteses do anteprojeto
- **Detalhamento**
  ⇒ especificação detalhada da construção
- **Documentação**
  ⇒ informações necessárias para construção

Análise Estrutural

- É a etapa do projeto estrutural onde é feita uma **previsão sobre o comportamento da estrutura**.
- Isto é uma **simulação** de como a estrutura responde a todas as solicitações.
- Para esta simulação é criado um modelo matemático, denominado **Modelo Estrutural**.
- Há quatro níveis de abstração da estrutura na Análise Estrutural:



Modelagem Estrutural

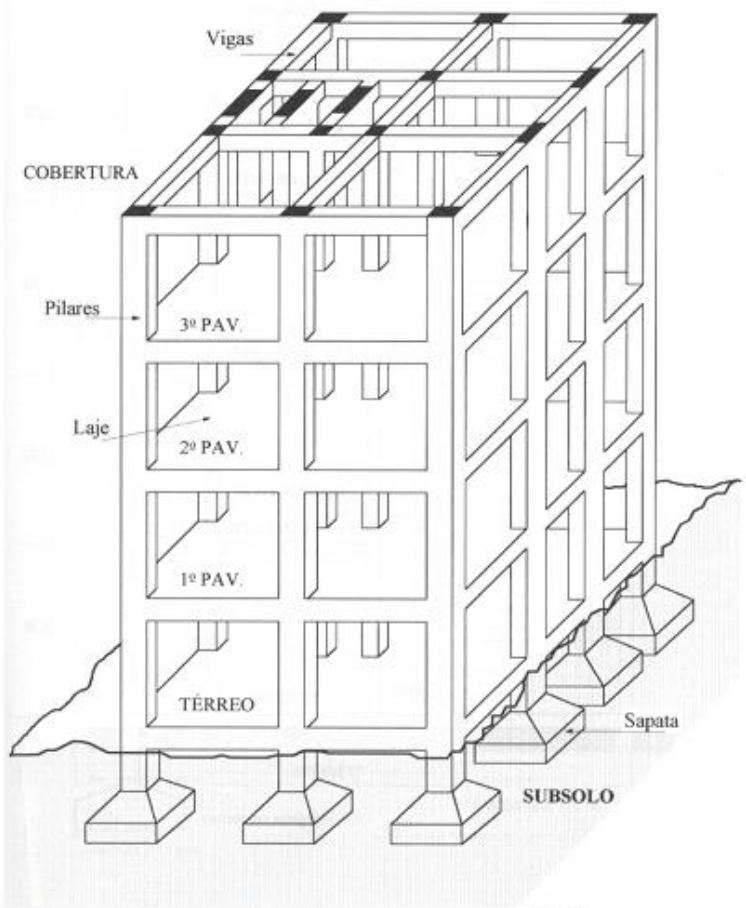
- É a **idealização do comportamento da estrutura**;
- Tem por **objetivo** a **determinação das respostas mecânicas** de uma estrutura devido à ações externas partindo do pressuposto de serem conhecidas a **geometria** e os **materiais** a serem empregados.
- Respostas Mecânicas:
  - **Tensões e Esforços Internos;**
  - **Deslocamentos e Deformações;**
  - **Cargas e Modos de Flambagem;**
  - **Freqüência Natural e Modos de Vibração;**
  - **Carga de Ruptura;**

Estrutura Real x Modelo Estrutural

- A **criação de um modelo estrutural** de uma estrutura real **é uma das partes mais importantes** da análise estrutural.
- No concepção do modelo estrutural é feita uma idealização do comportamento real em que são adotadas **HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS**
- Tipos de **Hipóteses Simplificadoras**:
  - ***quanto a geomertria;***
  - ***quanto às condições de suporte;***
  - ***quanto ao comportamento dos materiais;***
  - ***quanto às solicitações que atuam sobre a estrutura;***

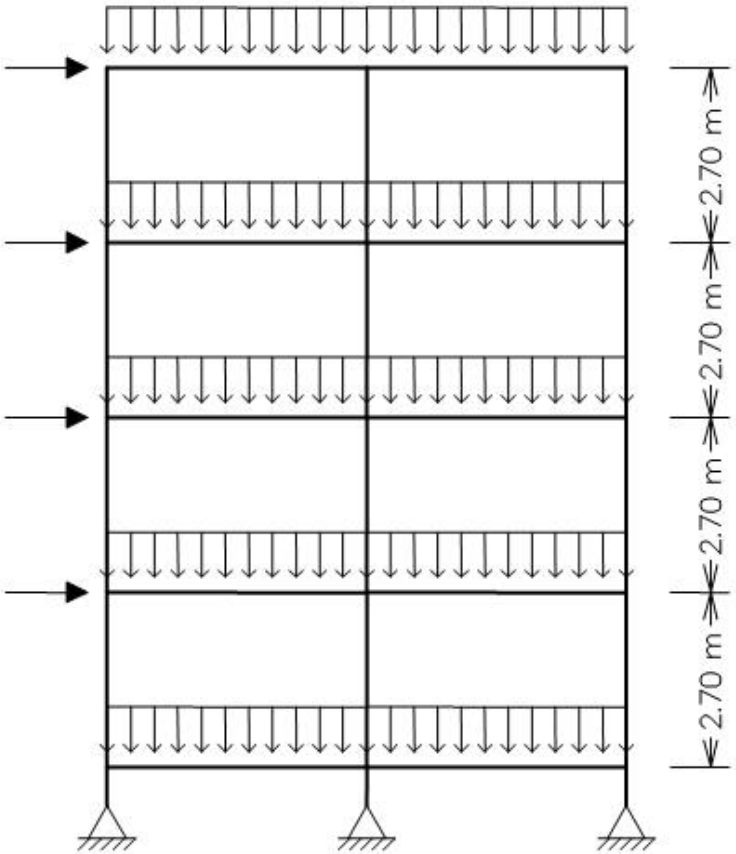
Modelo Estrutural (1)

Estrutura Real



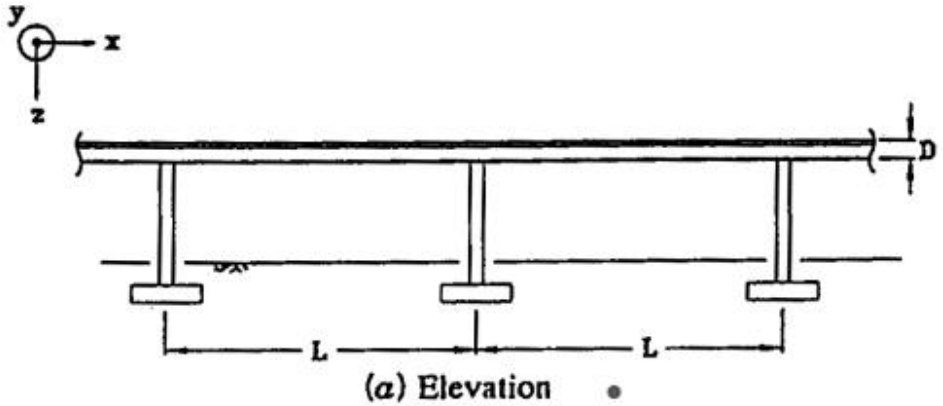
(Concreto Armado Eu te amo, pag. 17)

Modelo estrutural bidimensional (fatia do prédio)

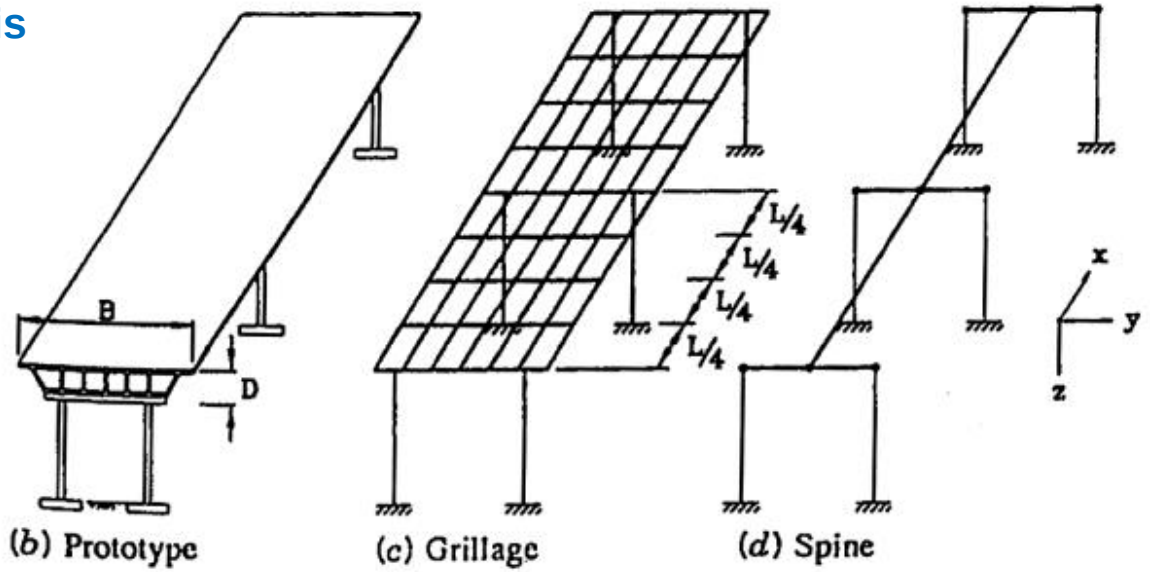


Modelo Estrutural (2)

Estrutura Real

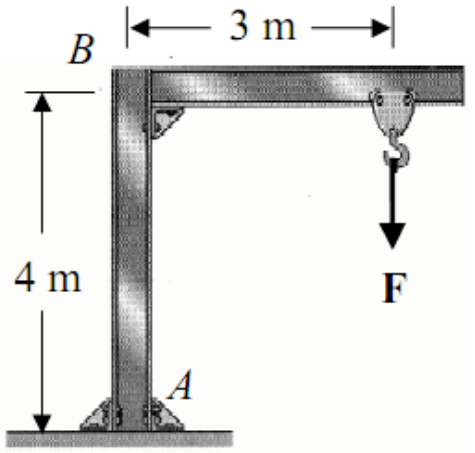


Modelo Estruturais Possíveis

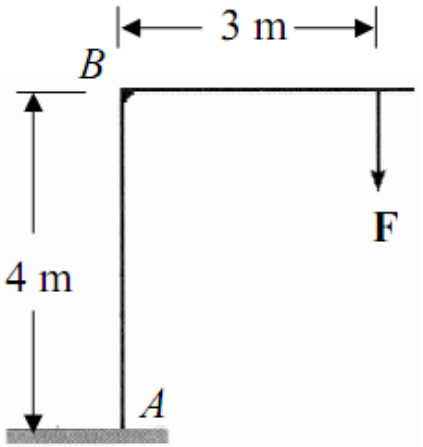


Modelo Estrutural (3)

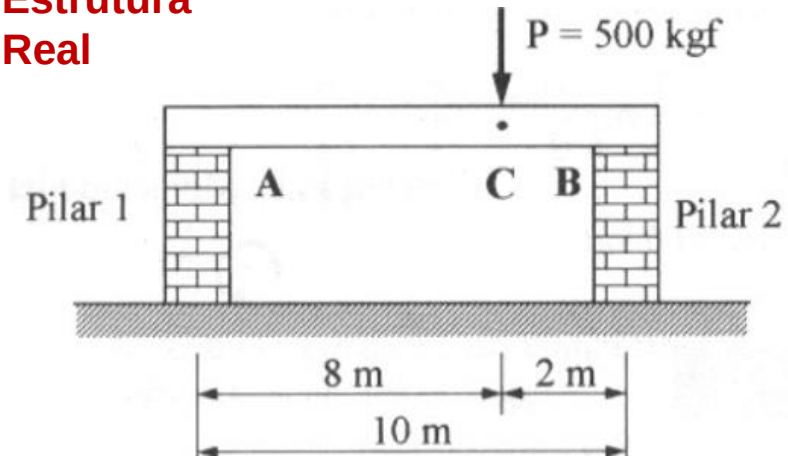
Estrutura Real



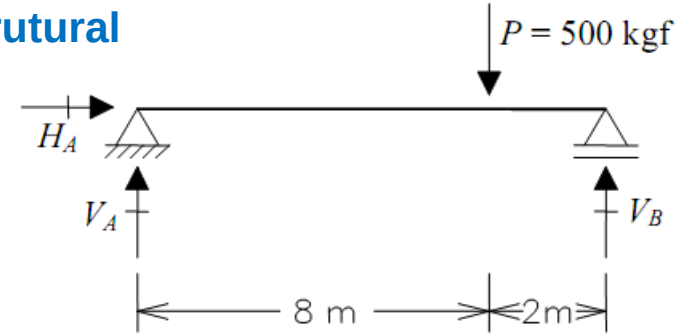
Modelo Estrutural



Estrutura Real

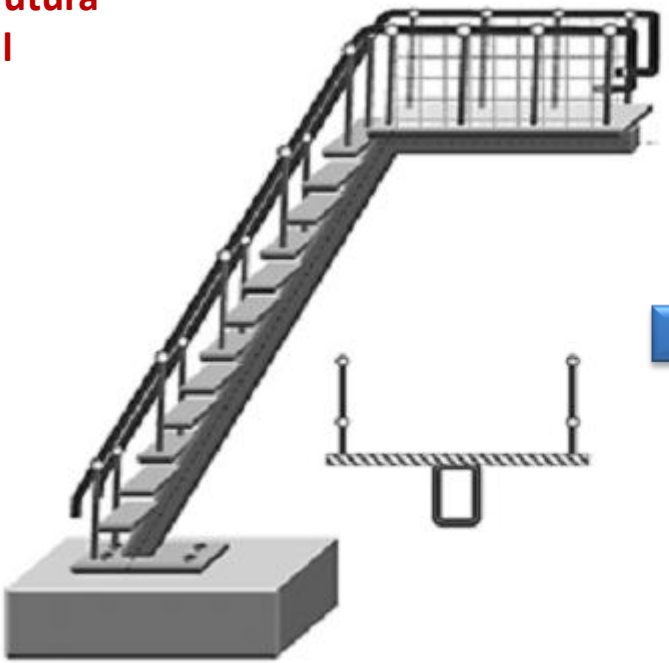


Modelo Estrutural

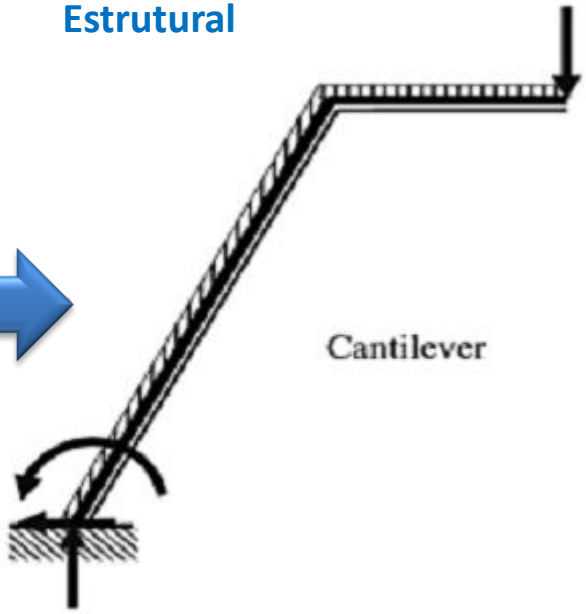


Modelo Estrutural (4)

Estrutura Real



Modelo Estrutural



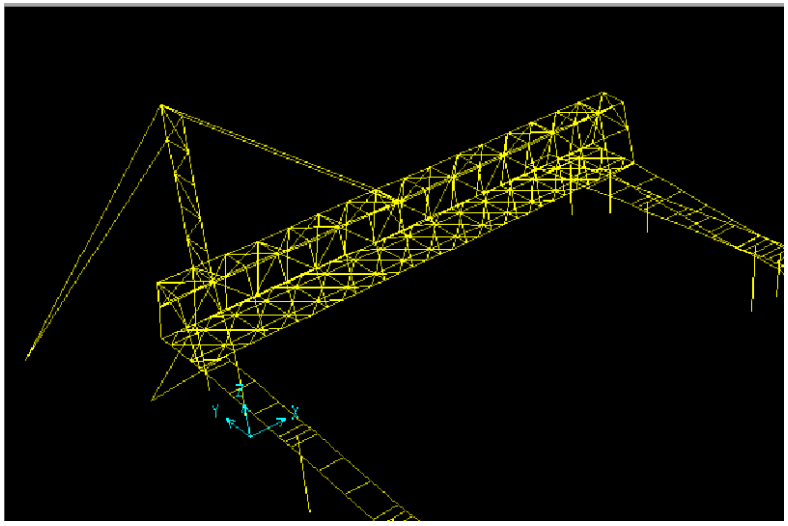
Modelo Estrutural (5)

Estrutura Real





Modelo Estrutural

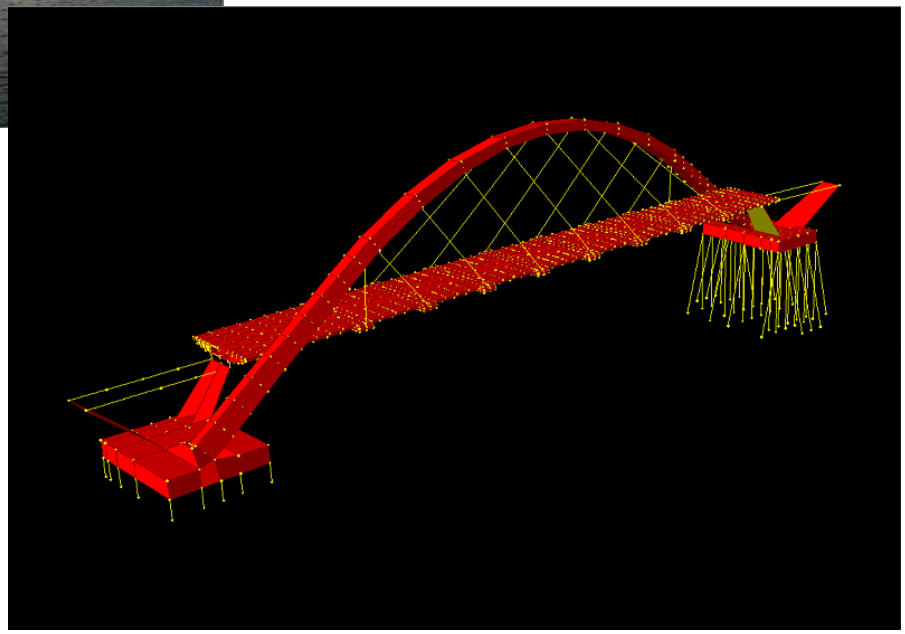


Modelo Estrutural (6)

Estrutura Real



Modelo Estrutural

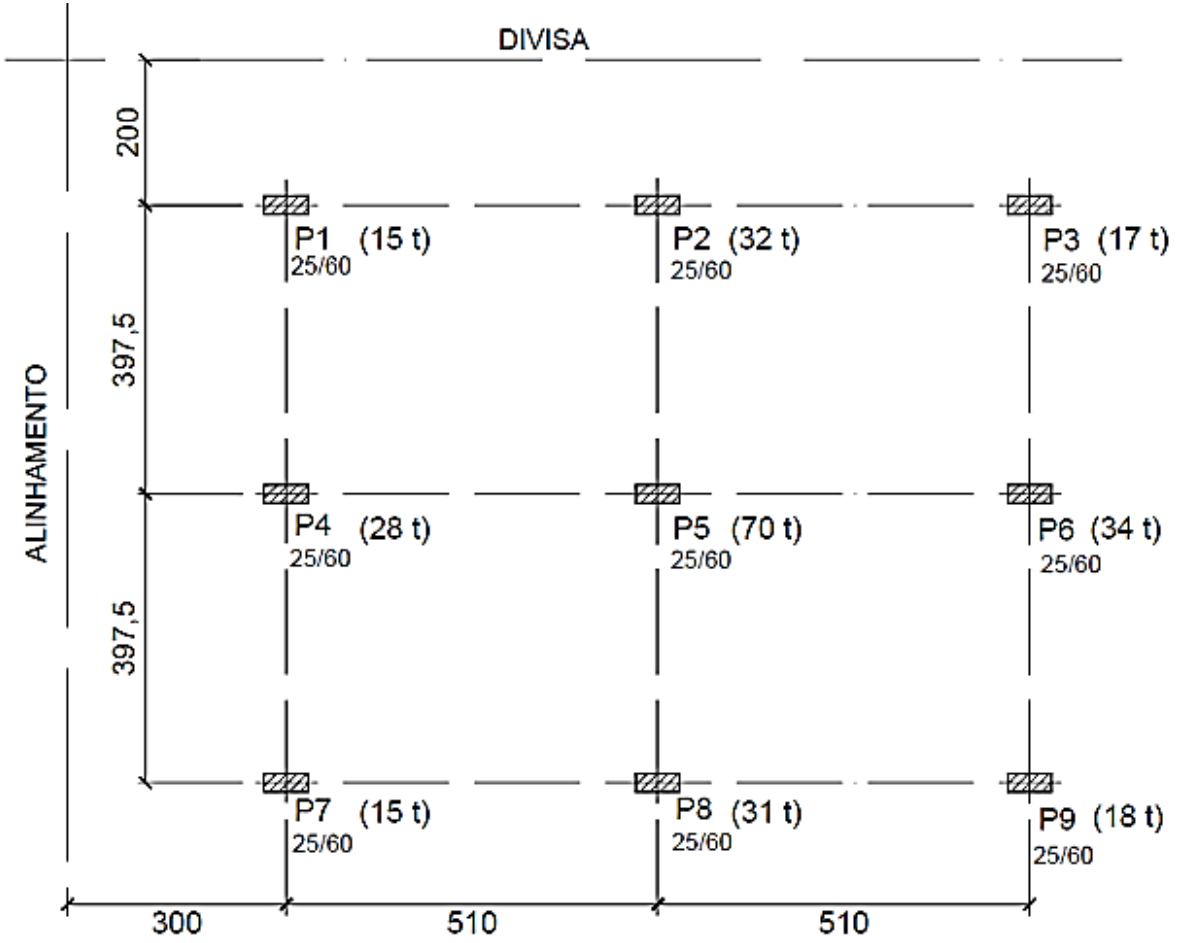


Hipóteses Simplificadoras

- **Com respeito à geometria:**
  - **Modelo de barras ou contínuo, modelo bi ou tridimensional, etc.?**
  - **Como representar os elementos estruturais: vigas, pilares, lajes, etc.?**
- **Sobre as condições de suporte:**
  - **Como a estrutura se conecta com o meio externo?**
  - **Que tipos de apoio considerar?**
- **Sobre as condições de vinculação entre os elementos:**
  - **Como os elementos resistentes conectam-se entre si?**
- **Com respeito ao comportamento dos materiais:**
  - **Como representar matematicamente um material?**
- **Sobre as solicitações:**
  - **Como representar as cargas que atuam na estrutura?**
  - **Quais são os tipos de solicitação: peso próprio, vento, cargas de ocupação de prédios, variação de temperatura?**

Exemplo de um Detalhamento Estrutural (1)

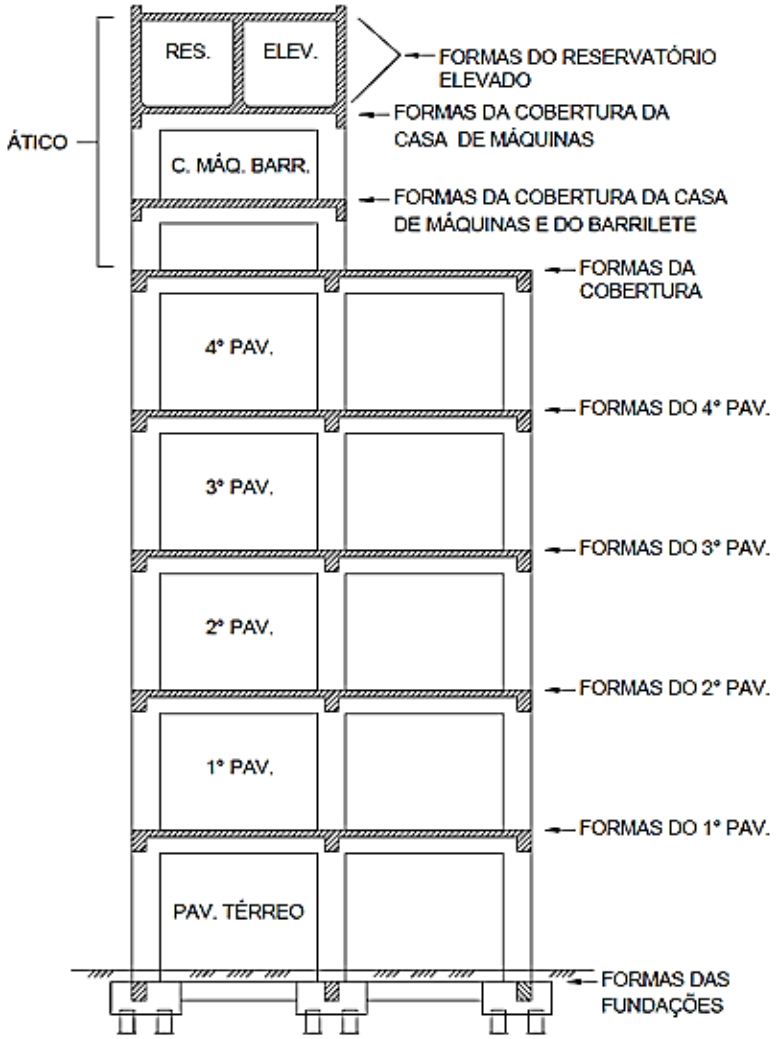
Planta de Cargas e Locação de Pilares



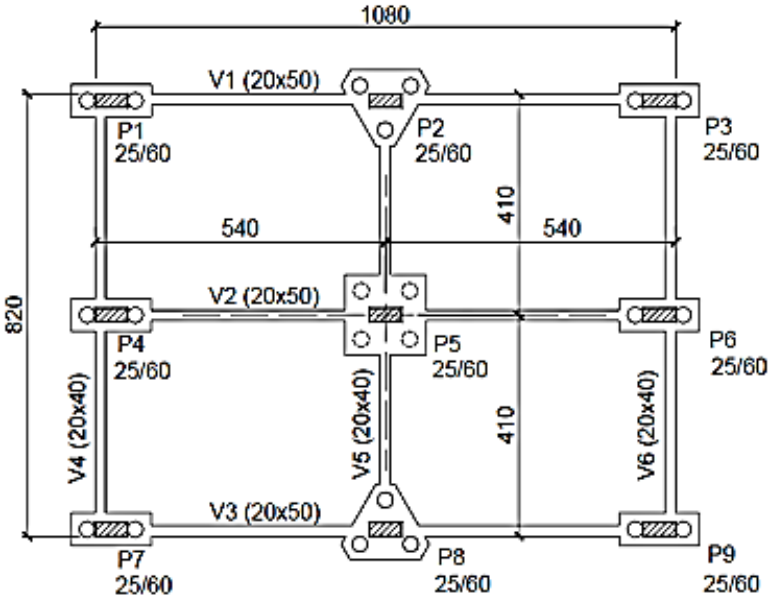
Exemplo de um Detalhamento Estrutural (2)

Plantas de Formas

O desenho para execução de formas de um pavimento é composto por uma planta da estrutura que sustenta aquele pavimento, isto é, o conjunto de pilares, vigas e lajes;

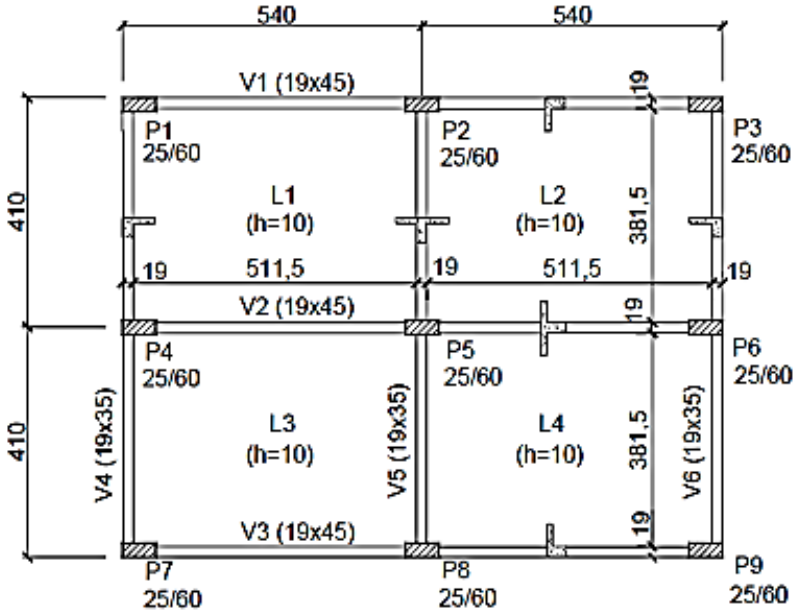


Exemplo de um Detalhamento Estrutural (3)



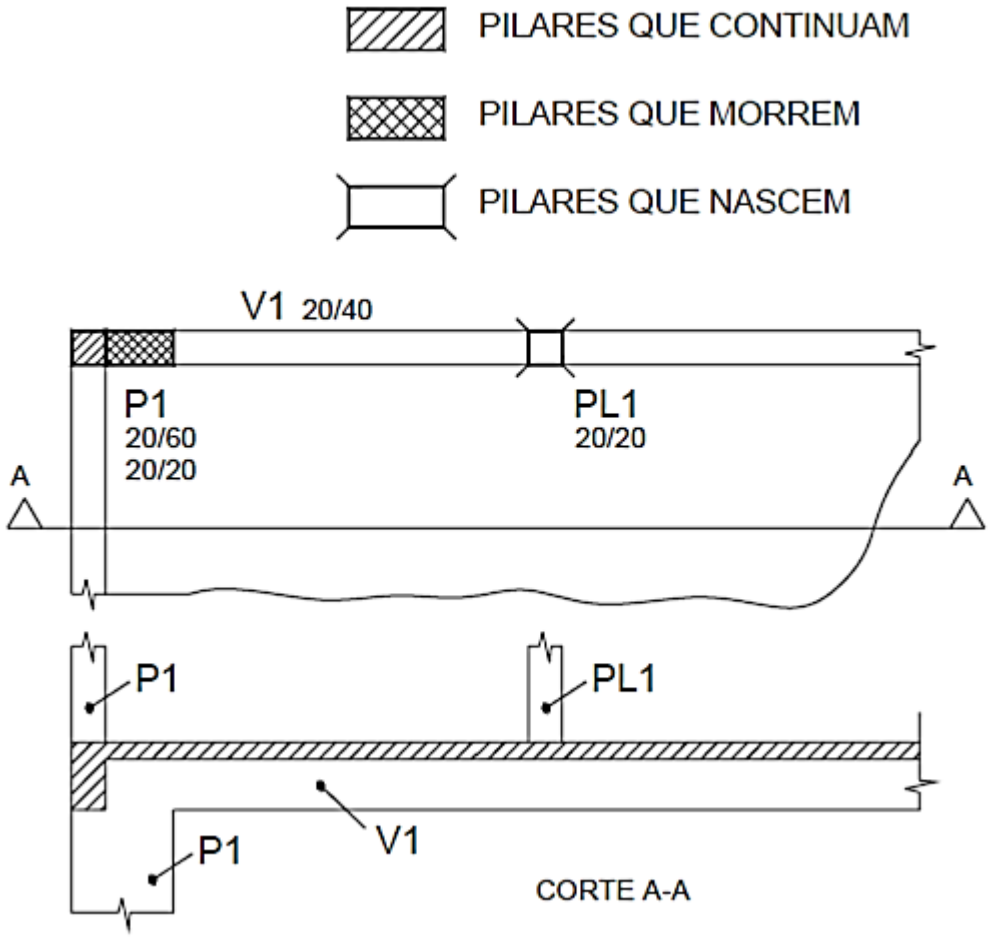
Forma das fundações

Forma do pavimento tipo



Exemplo de um Projeto Estrutural (4)

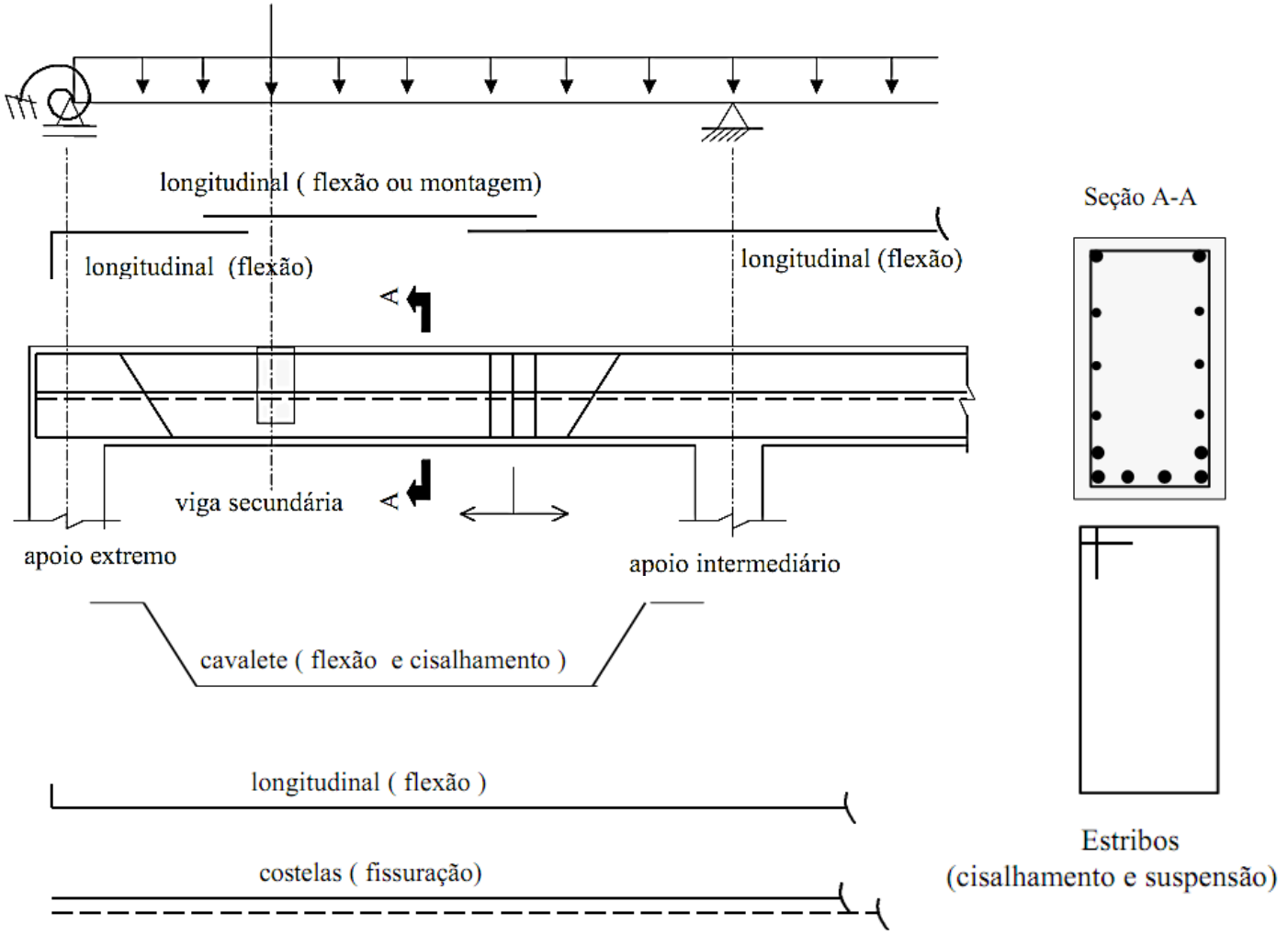
Representação de Elementos nos Desenhos de Formas



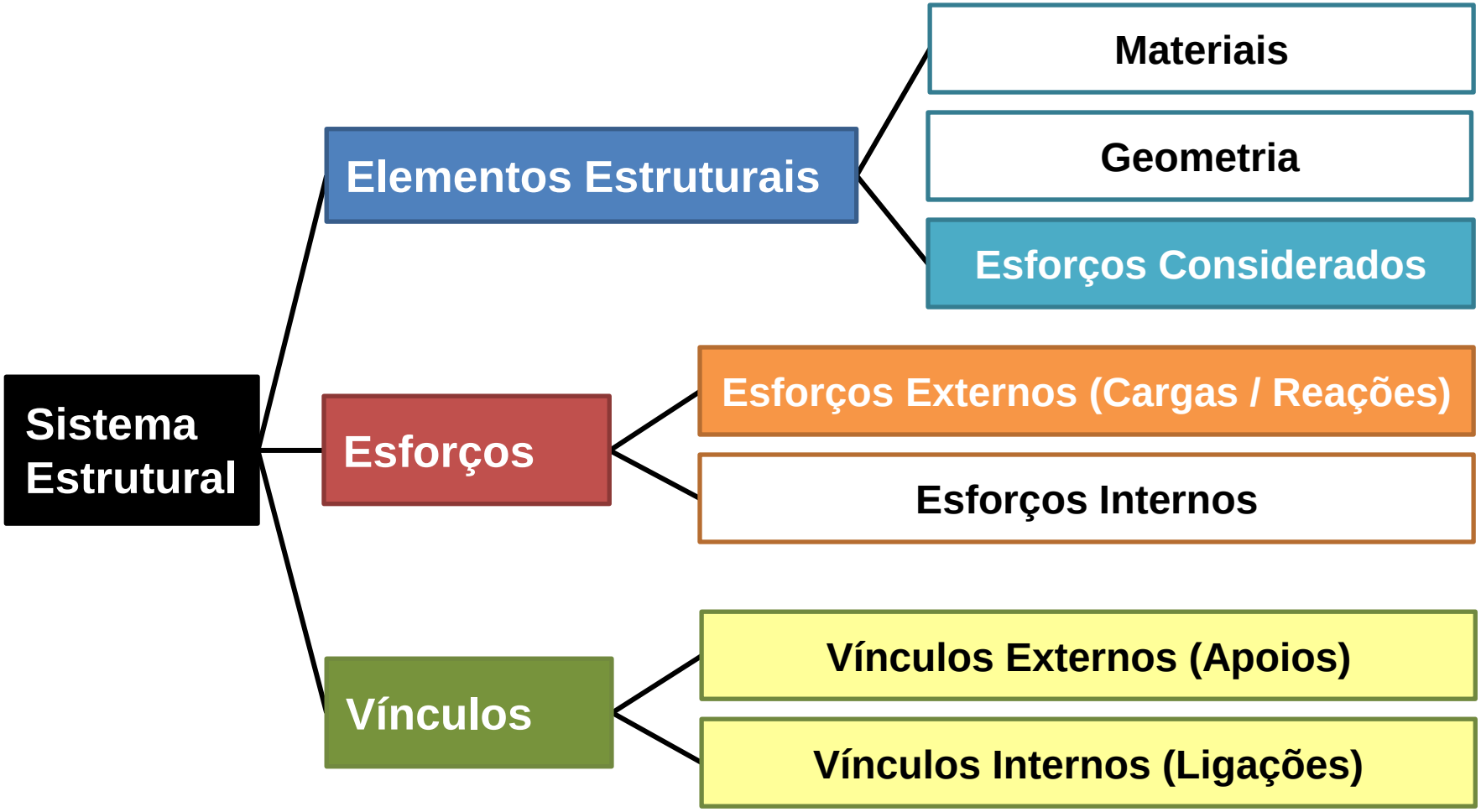
Do Modelo ao Detalhamento

Modelo Estrutural

Detalhamento de Armaduras



Sistema Estrutural



Vínculos (1)

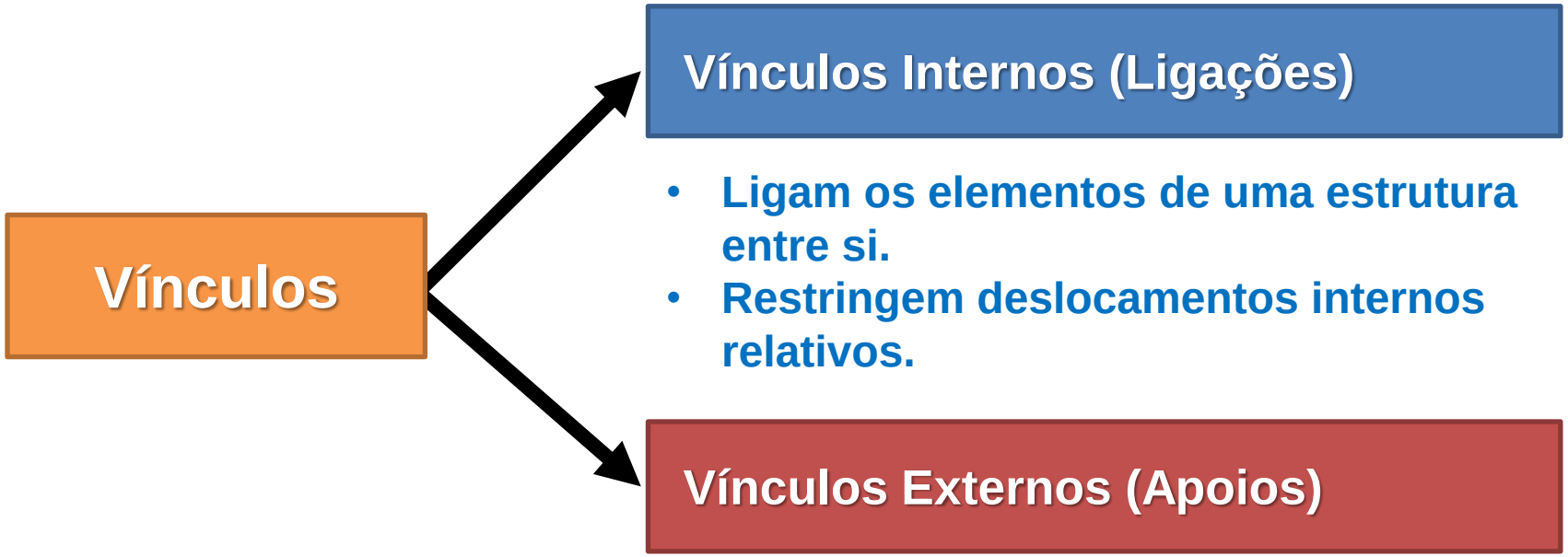
São condições que **limitam a possibilidade de deslocamento de um ponto (interno / externo)** do elemento resistente.

O número de vínculos pode ser:

Insuficiente	Suficiente	Superabundante
→ estrutura hipostática ou cadeia cinemática;	→ estrutura isostática ou estaticamente determinada	→ estrutura hiperestática ou estaticamente indeterminada

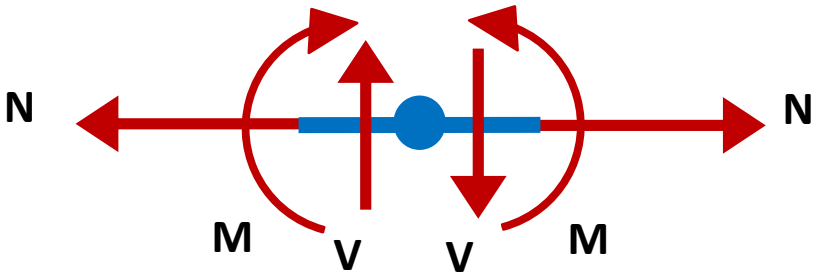
Vínculos (2)

Os vínculos podem ser divididos em:

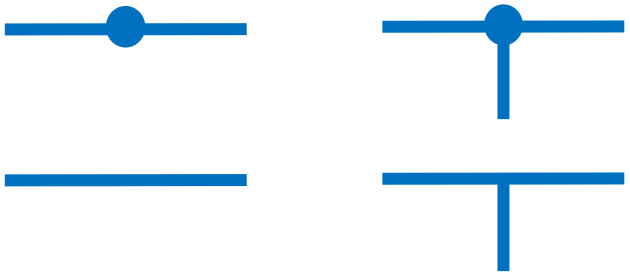


Ligações ou Apoios em Engaste

- 3 graus de liberdade restritos no plano **(Ux, Uy e Rz)**;
- **Possui 3 vínculos internos pois impede 2 translações e 1 rotação relativas.**
- Corresponde a 3 esforços internos solicitantes**: M,V e N**

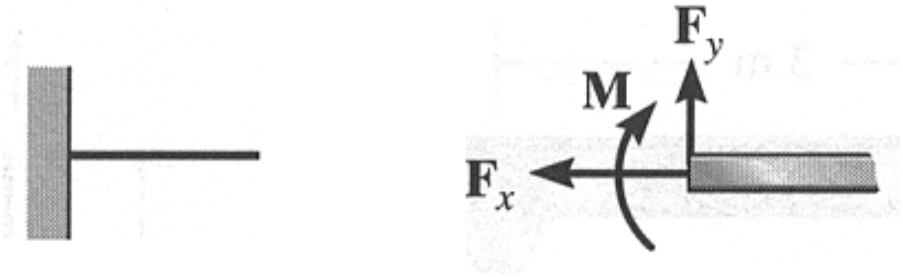


Representações:

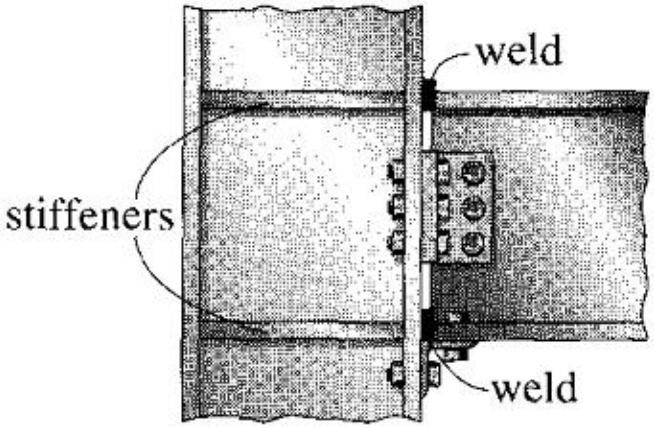


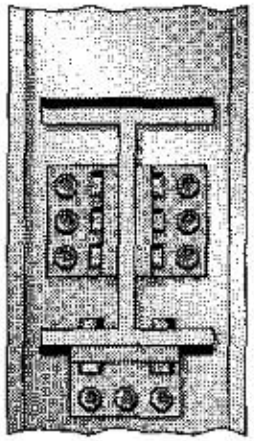
Exemplo de Ligação em Engaste

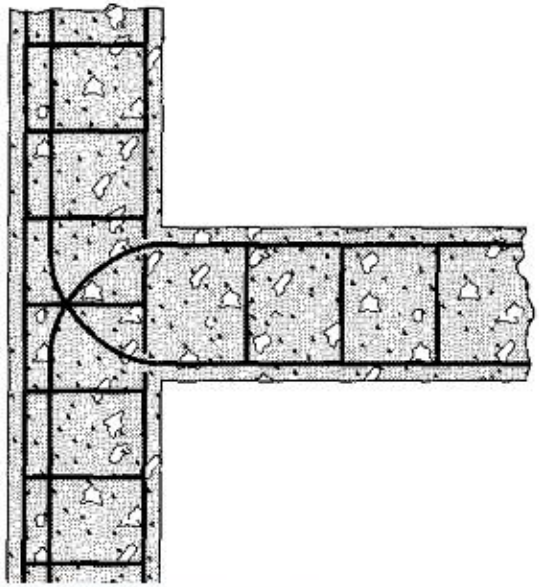




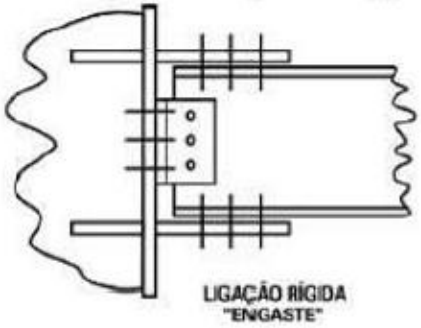
Exemplos de Ligações em Engaste







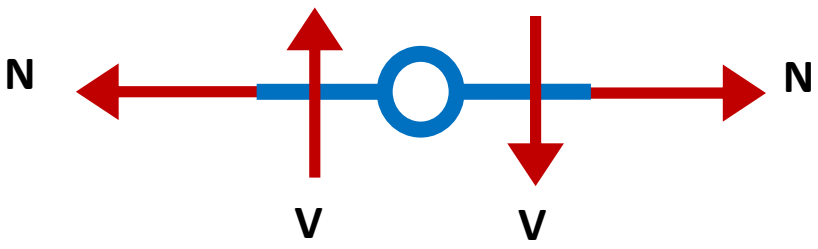
Ligação Rígida "Engaste"





Ligações ou Apoios em Rótula (Articulação)

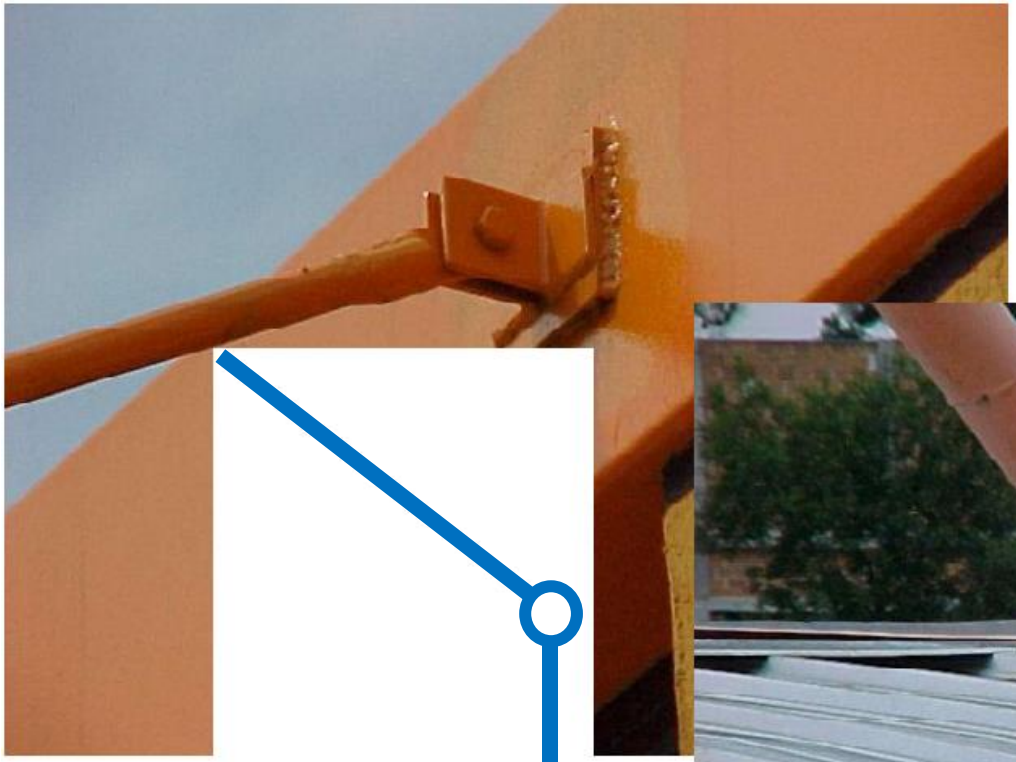
- 2 graus de liberdade restritos no plano **(Ux e Uy);**
- **Possui 2 vínculos internos pois impede 2 translações relativas.**
- Corresponde a 2 esforços internos solicitantes: **V e N.**
- **O momento fletor M é nulo (M=0)**



Representações:



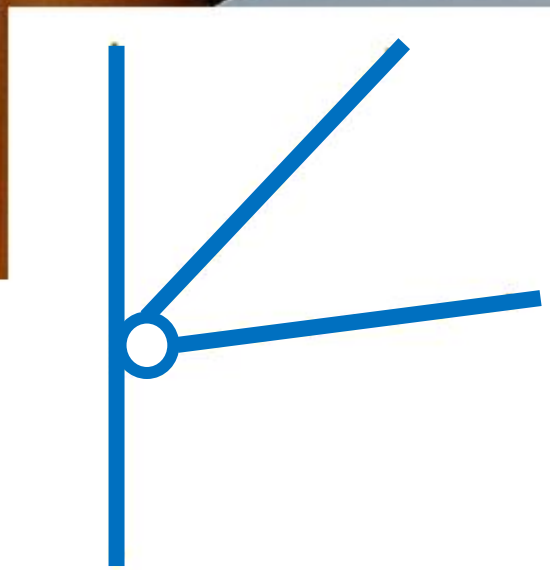
Exemplos de Ligação por Rótula (Articulação)





Exemplos de Ligação por Rótula (Articulação)

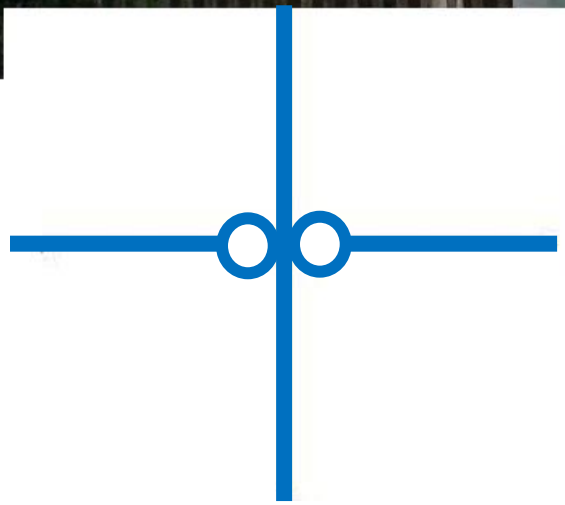






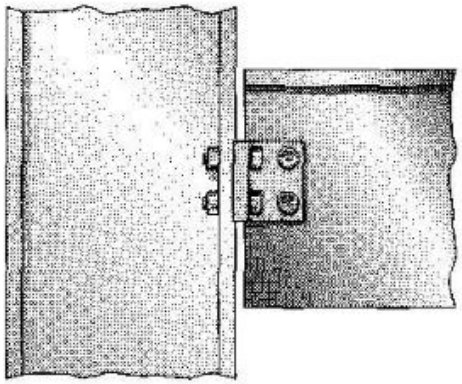
Exemplos de Ligação por Rótula (Articulação)

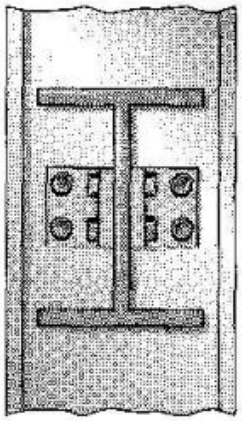


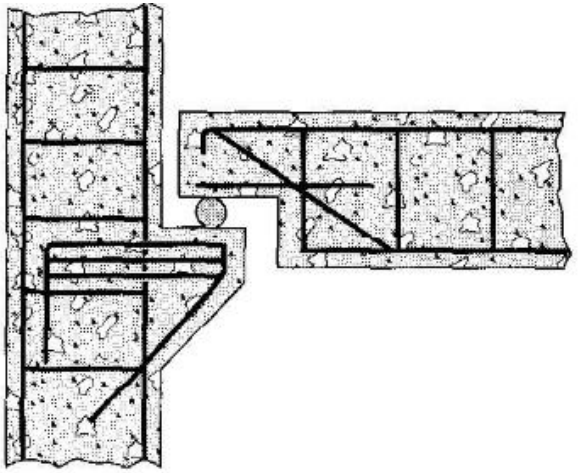




Exemplos de Ligações por Rótula (Articulação)



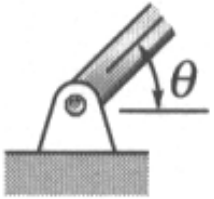


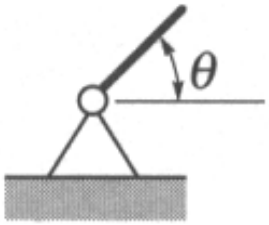


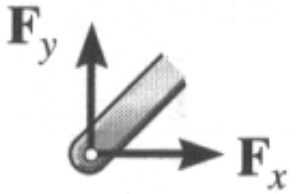


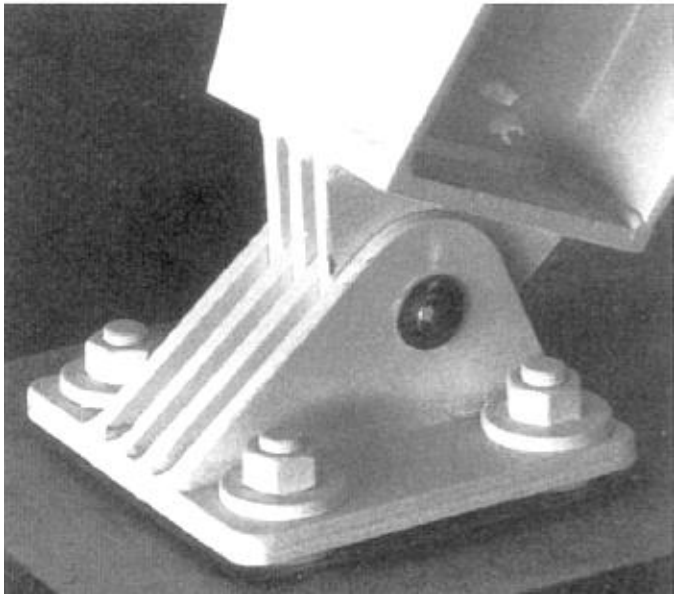


Exemplos de Apoio por Rótula (Articulação)





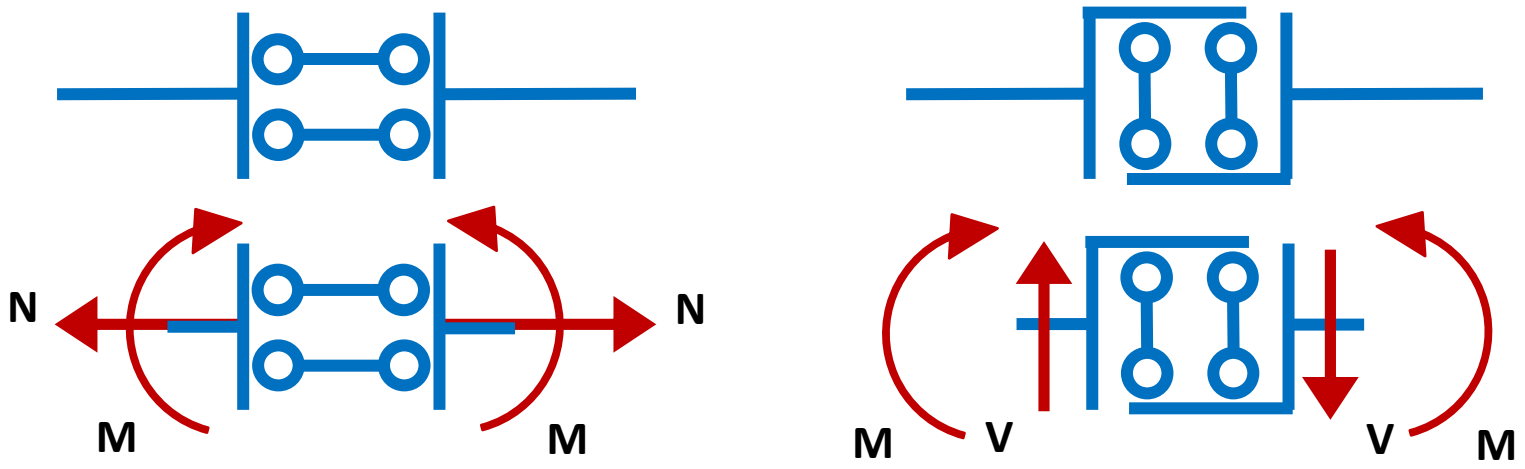






Ligações ou Apoios Pantográficos

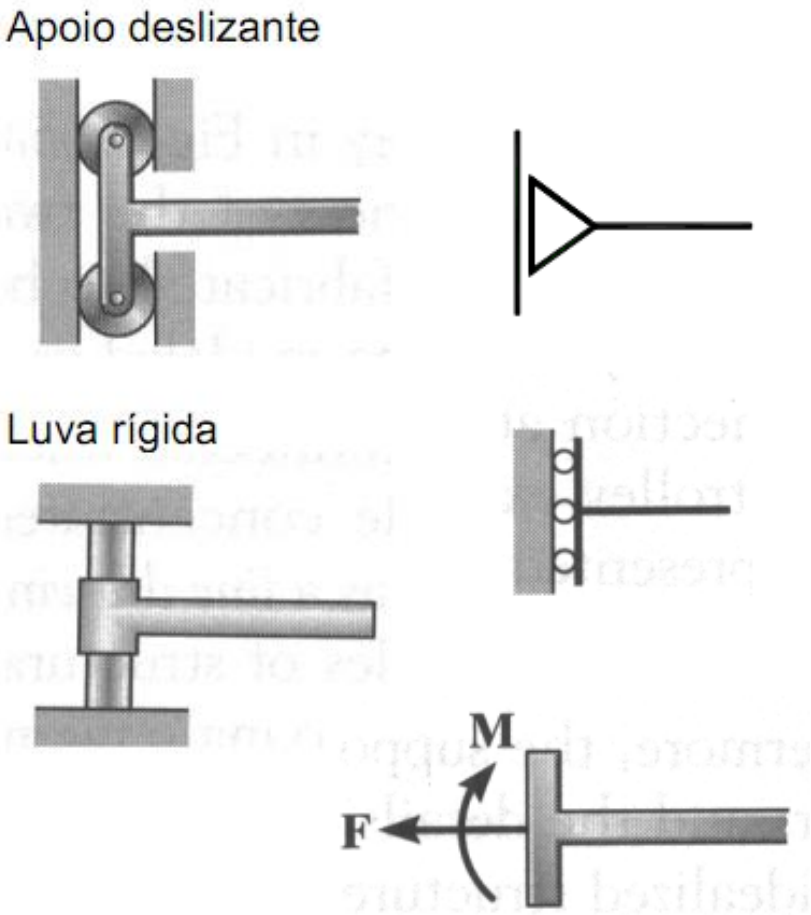
- 2 graus de liberdade restritos no plano podendo ser **(Ux e Rz) ou (Uy e Rz);**
- **Possuem 2 vínculos internos pois impedem 1 translação e 1 rotação relativas.**
- Correspondem a 2 esforços internos solicitantes: **M e N ou M e V**



Exexmplo de Ligação / Apoio Pantográfico



Ligação Pantográfica na Ponte Rio-Niterói
Fonte: Aluno Diego Ukasinski



Apoios Simples

- **Restringem apenas 1 grau de liberdade de translação;**

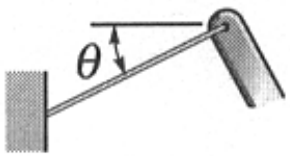


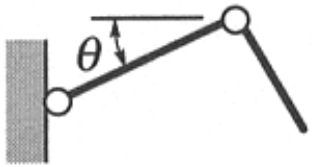


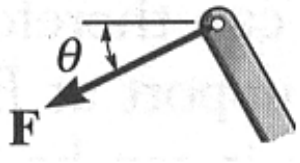


Exemplos de Apoio Simples

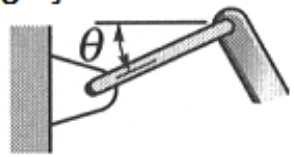
Cabo



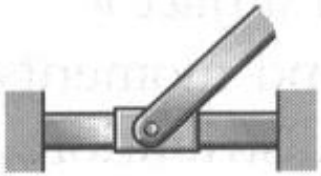


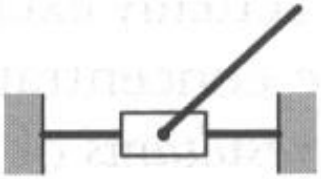


Ligação esbelta



Luva com articulação

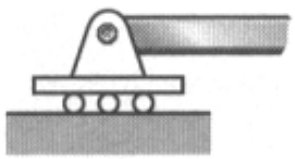


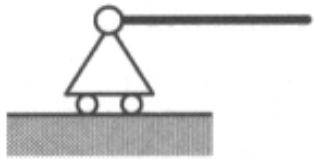


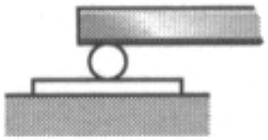


Exemplos de Apoio Simples

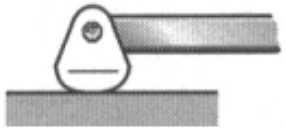
Roletes

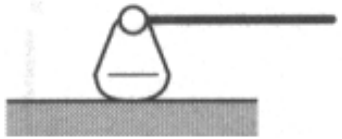


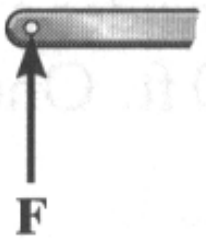




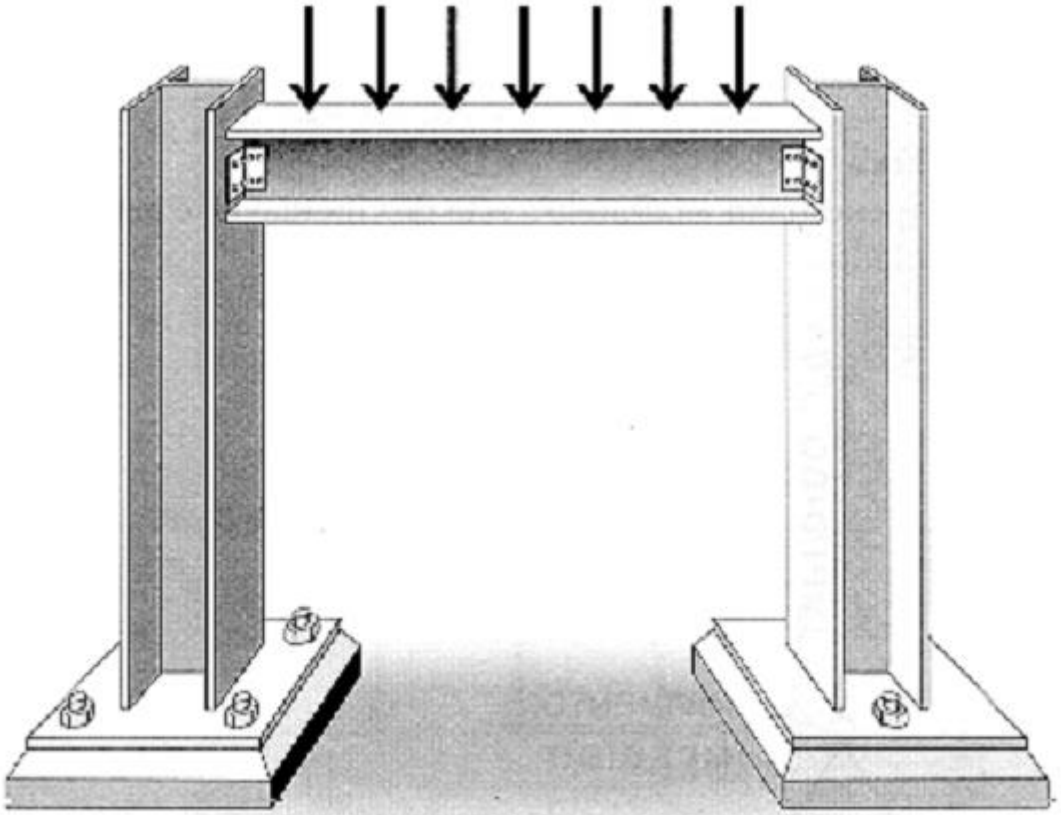






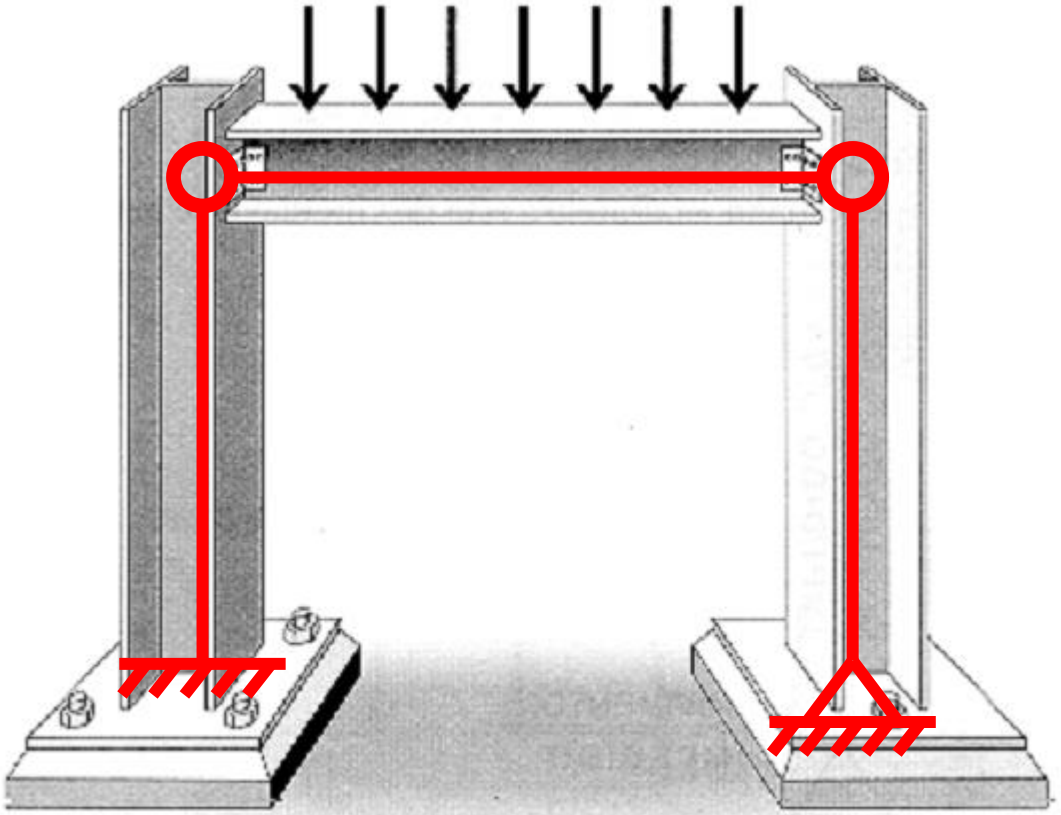


Exemplo de Modelo com Diferentes Vínculos



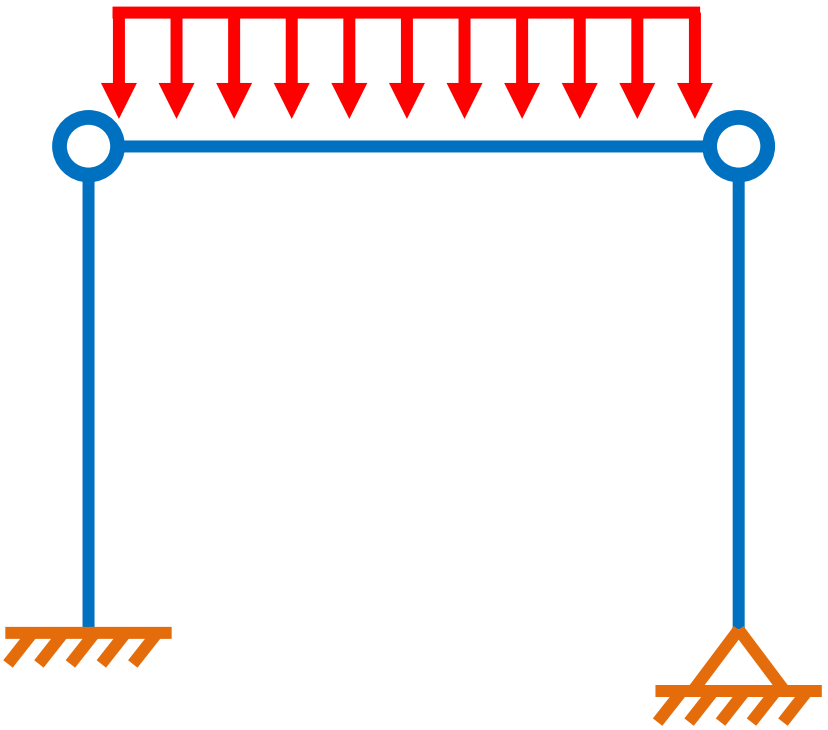
Esquema Estrutural

Exemplo de Modelo com Diferentes Vínculos



Esquema Estrutural

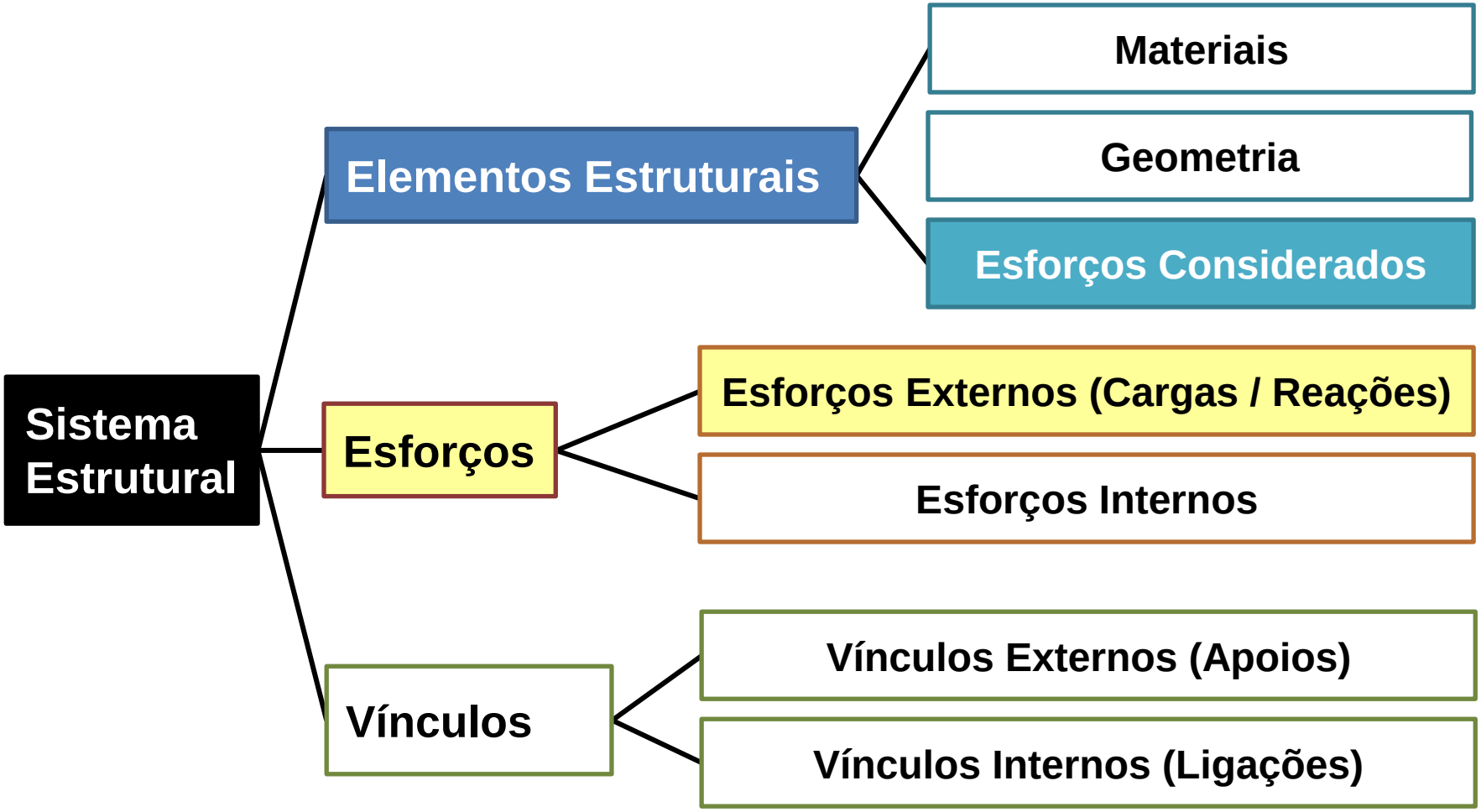
Exemplo de Modelo com Diferentes Vínculos



Modelo Estrutural

Aula 03 - Seção 02:
Reações de Apoio em Estruturas Isostáticas Planas (Revisão)

Sistema Estrutural



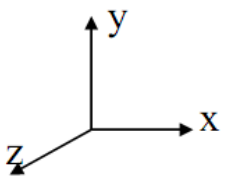
Equações de Equilíbrio no Plano

- Sabemos que um corpo está em equilíbrio quando a resultante de todas as forças que nele atuam é nula

- Com isso a **força resultante F** e o **momento resultante M devem se anular**, e portanto, considerando as três dimensões no espaço, têm-se as seguintes de equilíbrio:

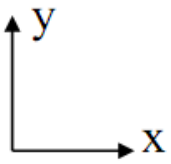
$$\sum Fx = 0 \quad \sum Fy = 0 \quad \sum Fz = 0$$

$$\sum Mx = 0 \quad \sum My = 0 \quad \sum Mz = 0$$



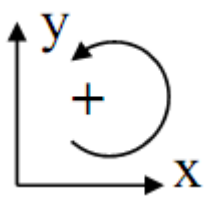
- **Particularizando-se para o caso de estruturas no plano:**

$$\sum Fx = 0 \quad \sum Fy = 0 \quad \sum Mz = 0$$



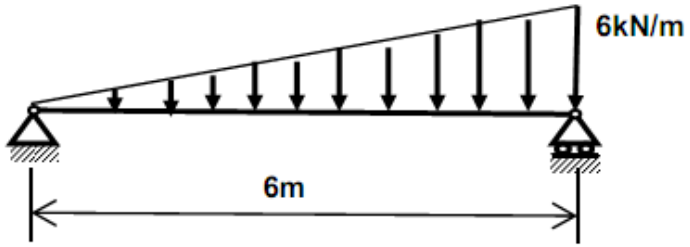
Cálculo de Reações de Apoio

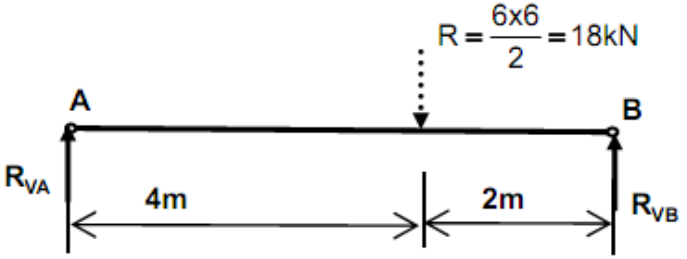
- A correta aplicação das equações e equilíbrio necessita da **completa especificação de todas as forças externas** atuantes sobre a estrutura;
- **Diagrama de Corpo Livre** é a **representação esquemática do corpo com as o forças atuantes**, substituindo-se os vínculos por forças que correspondem às reações de apoio;
- Faz-se necessário **estabelecer uma convenção de sinais** para a direção e sentido das forças, bem como sentido de giro em relação a um ponto qualquer da estrutura

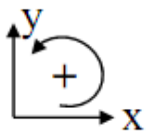


Inicialmente admite-se um sentido para as reações e após aplicadas as equações de equilíbrio, caso algum valor resulte negativo, basta inverter o sentido do esforço

Exemplo de Cálculo de Reações de Apoio







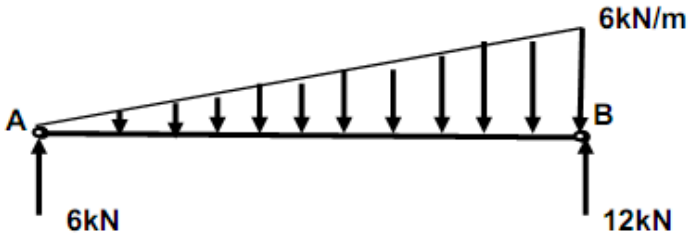
$$\sum M_A = 0$$

$$6xR_{VB} - 4x2 - 18 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 12kN$$

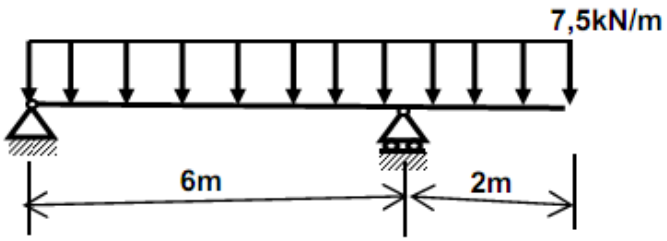
$$\sum M_B = 0$$

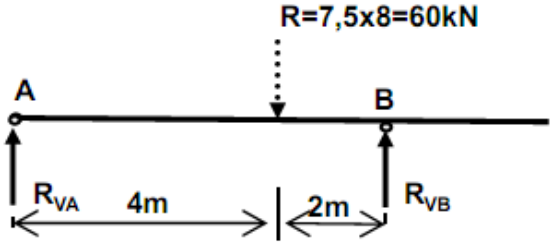
$$-6xR_{VA} + 2x18 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 6kN$$

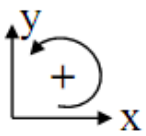
Diagrama de corpo livre



Exemplo de Cálculo de Reações de Apoio







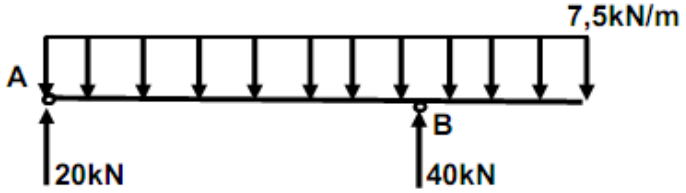
$$\sum M_A = 0$$

$$6xR_{VB} - 4x60 = 0 \quad \therefore \quad R_{VB} = 40kN$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-6xR_{VA} + 2x60 = 0 \quad \therefore \quad R_{VA} = 20kN$$

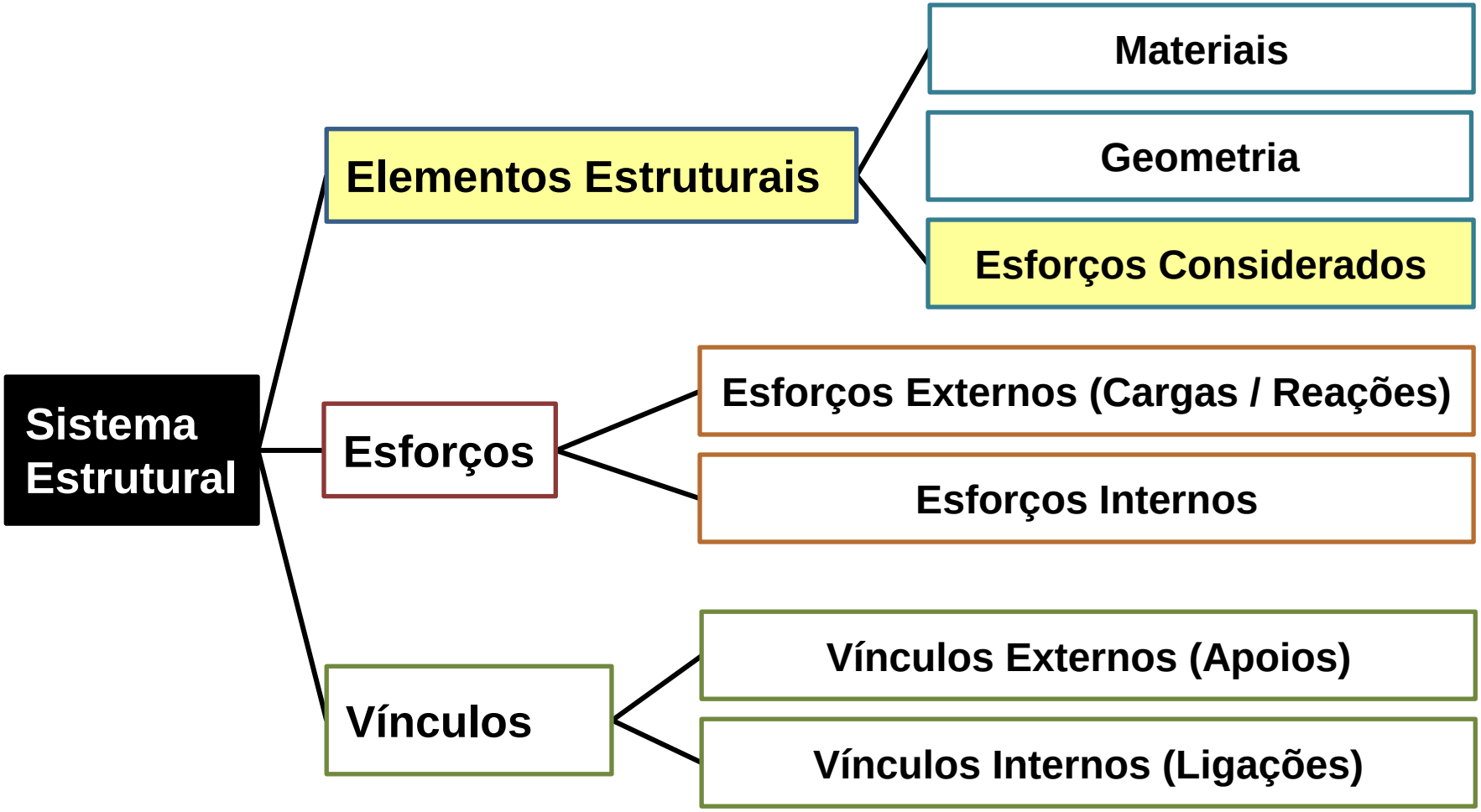
Diagrama de corpo livre



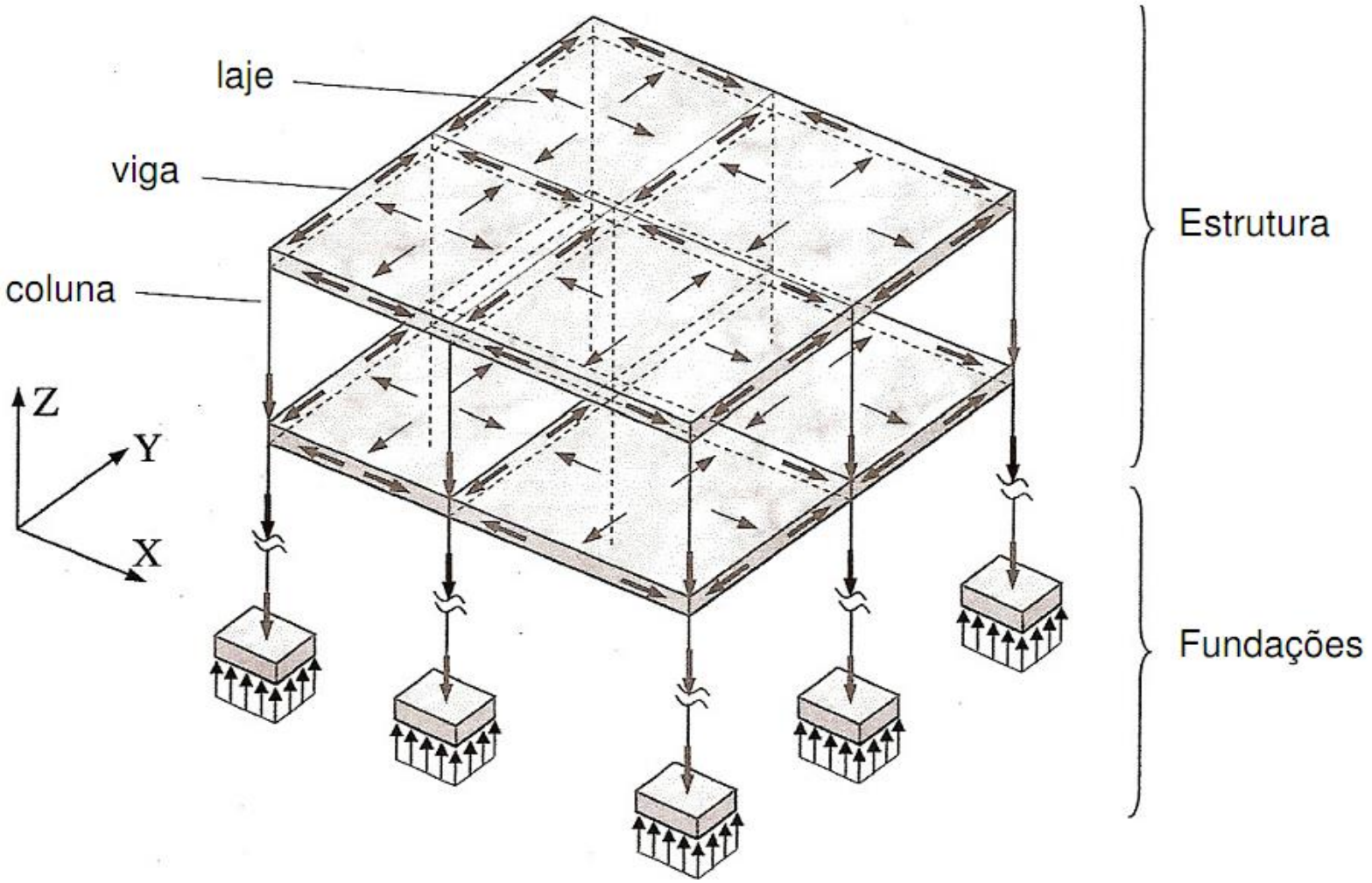
Universidade POSITIVO

Aula 03 - Seção 03:
Modelos Estruturais Planos Usuais

Sistema Estrutural

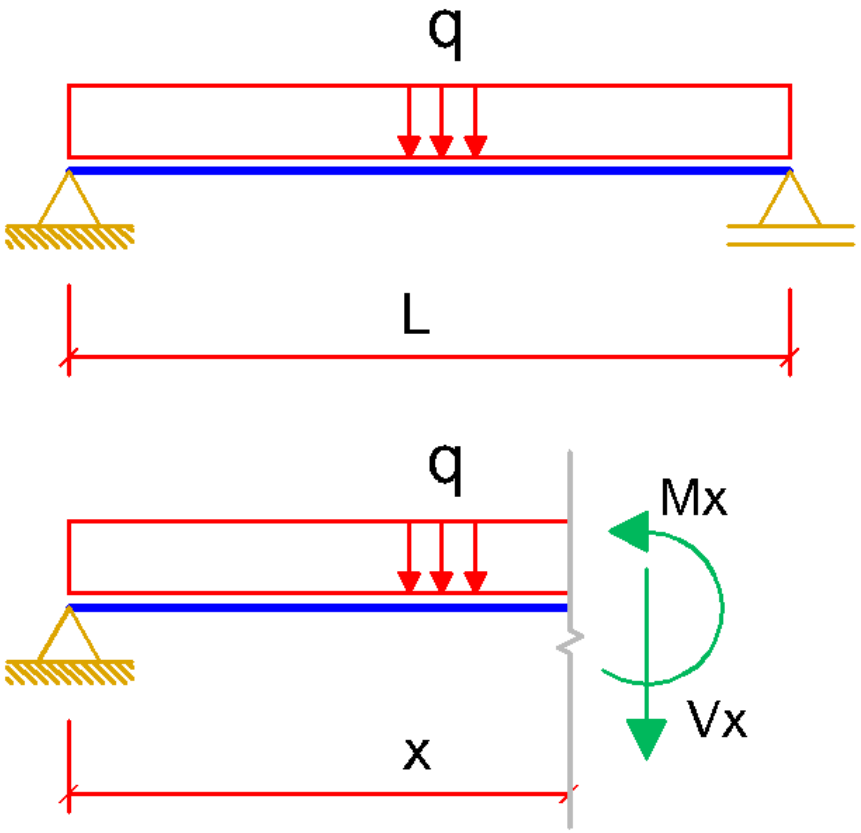


Elementos Estruturais



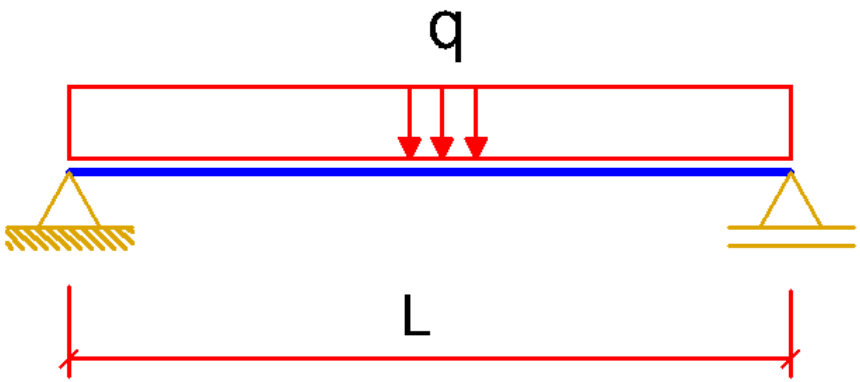
Modelo de Elemento Estrutural Viga Plana (1)

- **Descrição:**
  Elemento de barra horizontal com apenas carregamento transversal ao eixo longitudinal
- **Esforços Internos:**
  M e V
- **Deslocamentos possíveis:**
  Rotação e Translação
- **Vinculações :**
  Todas (engaste, rótula e apoio simples)



Modelo de Elemento Estrutural Viga Plana (2)

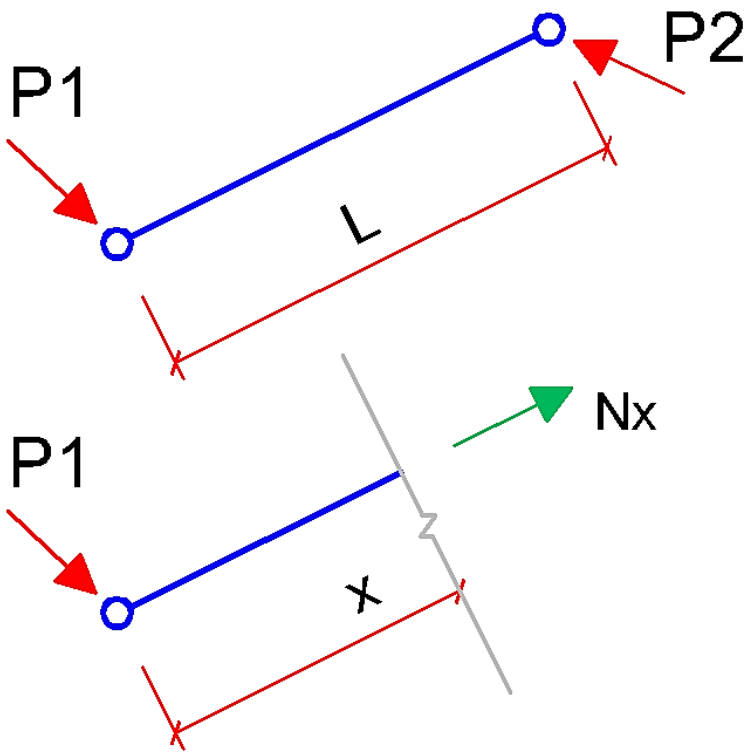




Modelo de Elemento Estrutural Escora / Tirante Plano

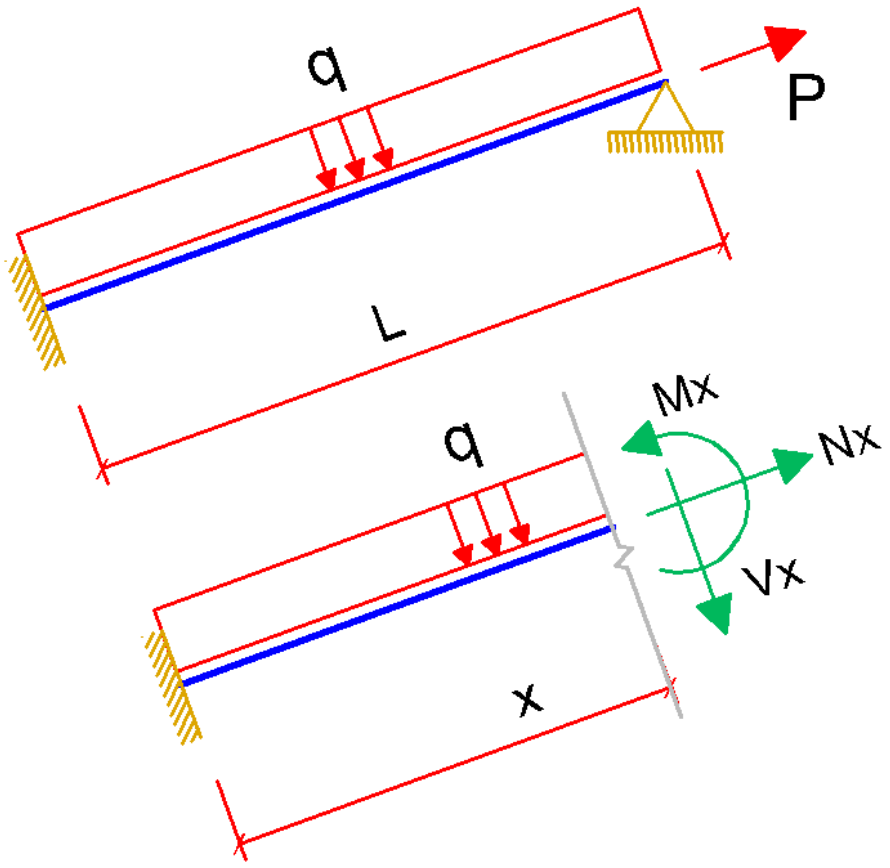
- **Descrição:**
  Elemento de barra com extremidades rotuladas ou em apoio simples, sem carregamento transversal , com cargas apenas nas extremidades e podendo ser inclinado (não apenas na horizontal)
- **Esforços Internos:**
  N (esforço axial) apenas
- **Deslocamentos possíveis:**
  Translações horizontal e vertical das extremidades
- **Vinculações :**
  Rótula ou Apoio Simples

- **OBS:**
  - em caso de tração o elemento é denominado **tirante**.
  - em caso de compressão o elemento é denominado **escora**.

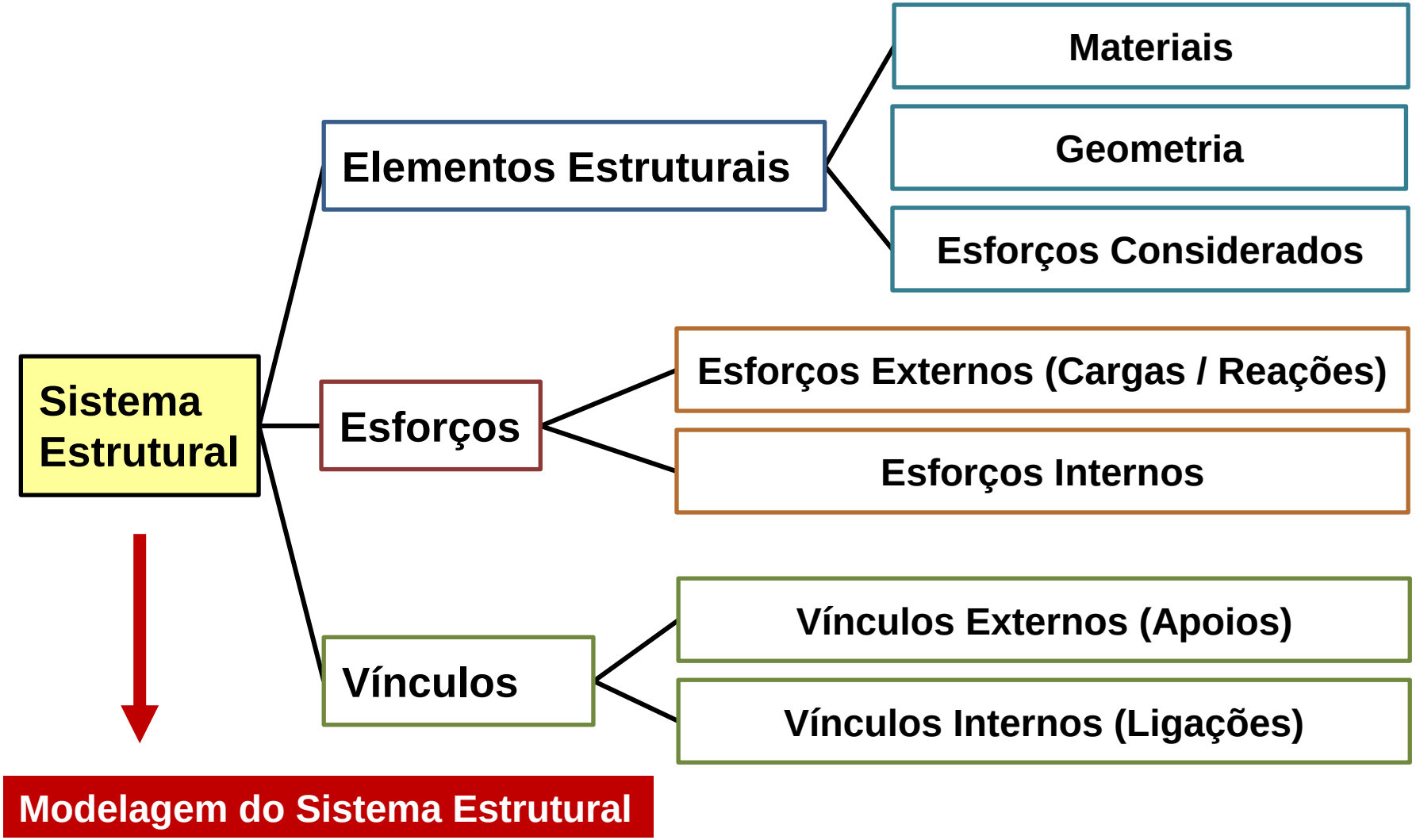


Modelo de Elemento Estrutural de Barra de Pórtico Plano

- **Descrição:**
  Elemento de barra com extremidades em qualquer tipo de vinculação, com carregamento transversal e podento ser inclinado
- **Esforços Internos:**
  M, V e N
- **Deslocamentos possíveis:**
  Translações na horizontal e na vertical e rotações no plano
- **Vinculações:**
  Todas possíveis para o plano



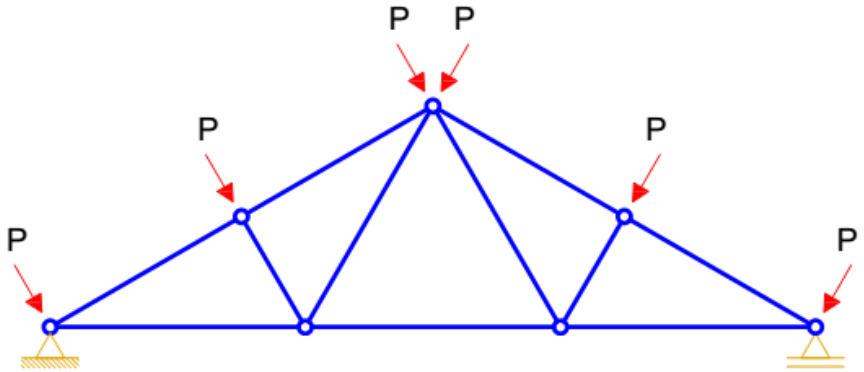
Sistema Estrutural

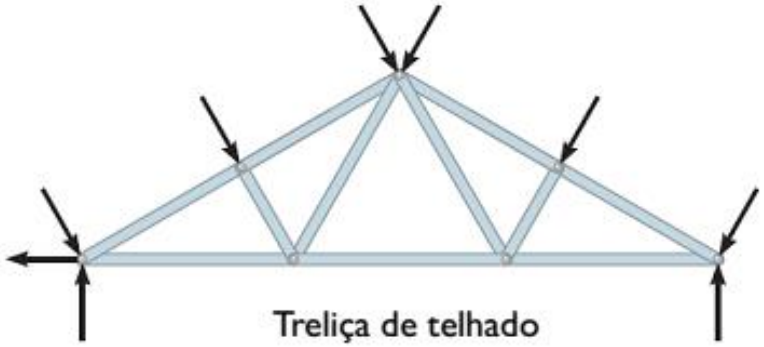


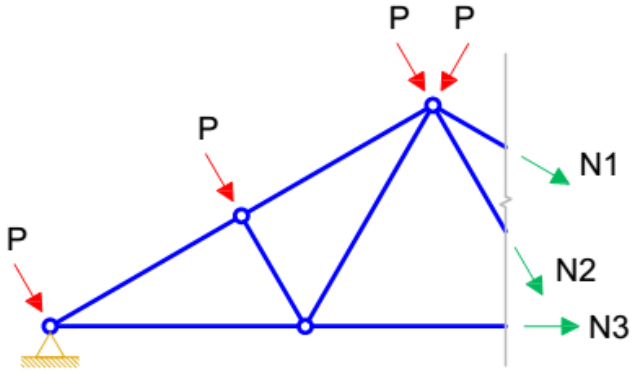
Modelo Estrutural de Treliça Plana

- Composto por barras do tipo escora/tirante.
- A cargas são consideradas como sendo aplicadas somente nos nós.
- **As barras estão sujeitas somente à Esforço Axial (N)**;





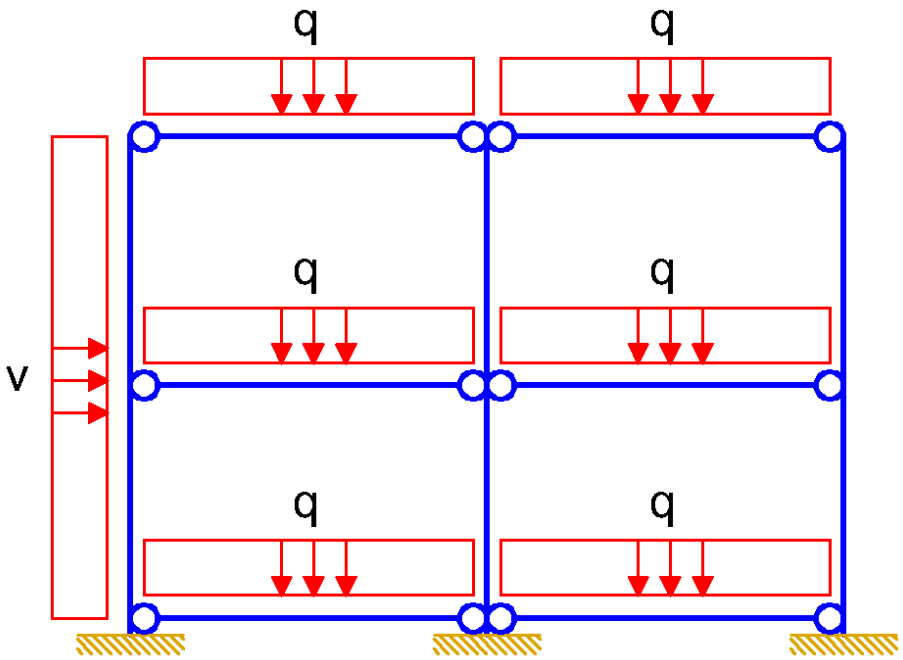




Modelo Estrutural de Pórtico Plano

- Pode ser composto por barras do tipo viga, escora/tirante ou pórtico.
- Pode ter cargas nodais, transversais e longitudinais.
- **As barras podem estar sujeitas a Momento (M), Corte (V) e Axial (N).**

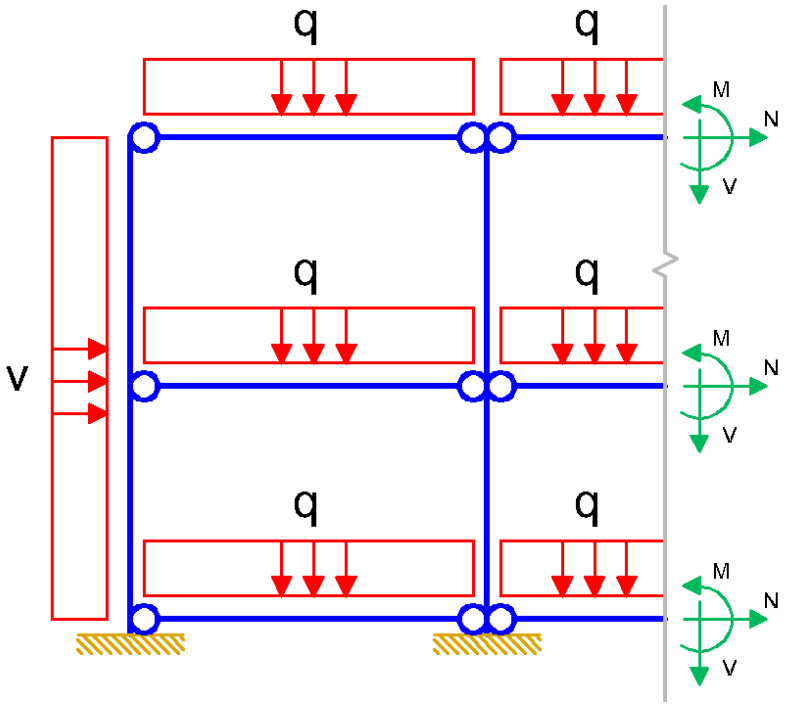




Modelo Estrutural de Pórtico Plano

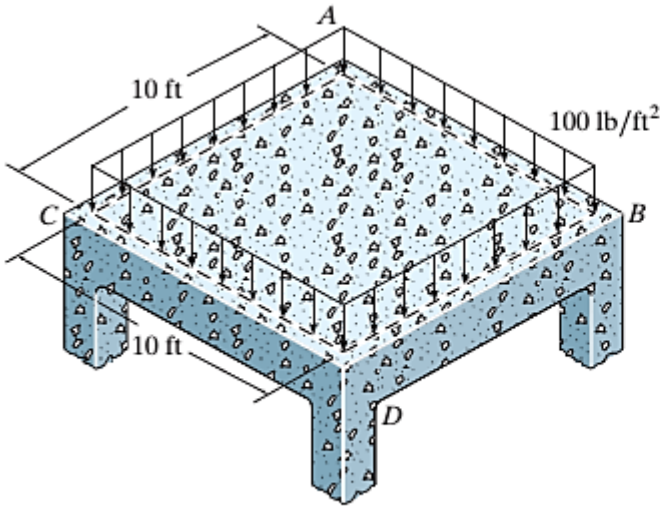
- Pode ser composto por barras do tipo viga, escora/tirante ou pórtico.
- Pode ter cargas nodais, transversais e longitudinais.
- **As barras podem estar sujeitas a Momento (M), Corte (V) e Axial (N).**



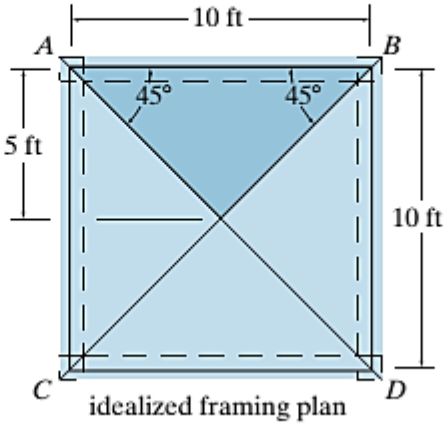


Exemplo de Modelagem Estrutural (Hibbeler)

- Laje quadrada e pilares de concreto em conjunto monolítico.

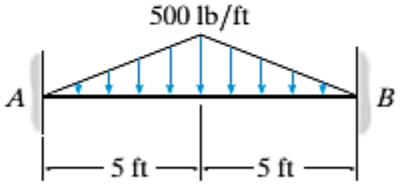


(a)



idealized framing plan

(b)

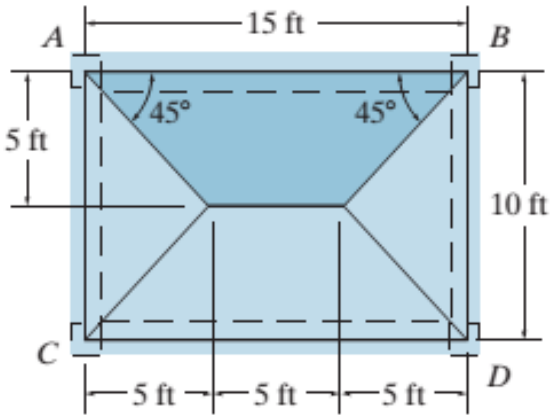


idealized beam

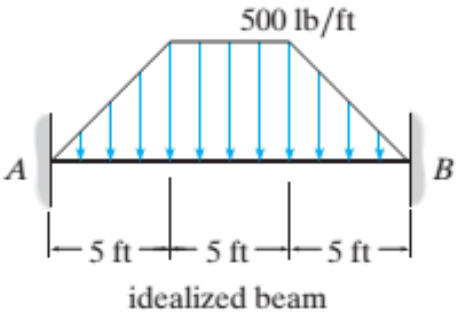
(c)

Exemplo de Modelagem Estrutural (Hibbeler)

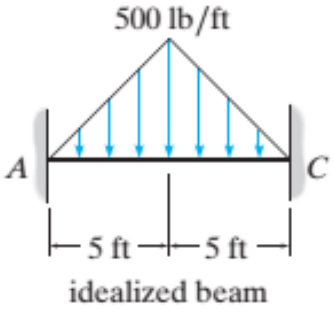
- Laje retangular e pilares de concreto em conjunto monolítico.



idealized framing plan



idealized beam



idealized beam

Modelo Estrutural? Pra que?

- Tacoma Bridge:
  - https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs
- Silver Bridge:
  - https://www.youtube.com/watch?v=dGQfUWvP0II

Universidade POSITIVO

Aula 02 - Seção 04: Determinação Estática e Estabilidade de Modelos Estruturais

Determinação Estática

- As equações de equilíbrio ($\Sigma Fx = 0$, $\Sigma Fy = 0$, $\Sigma Mz = 0$) fornecem as **condições necessárias** **porém não suficientes** para o **equilíbrio**.

- Em termos de determinação estática as estruturas podem ser:

Estruturas Estaticamente Determinadas :

- Estruturas nas quais todas as **forças (reações de apoio e esforços internos)** podem ser **determinadas estritamente a partir das equações de equilíbrio.**

Estruturas Estaticamente Indeterminadas :

- Estruturas nas quais **equações adicionais** correlatas aos deslocamentos relativos **(equações de compatibilidade) são necessárias para determinação** de todas as forças.

Identificação do Grau Estático

- **Traçar o diagrama de corpo livre para cada uma das "barras" componentes da estrutura**;
- **Comparar o número de componentes de momento e força reativa desconhecidos (r) com o número de barras componentes (n);**
- No plano há 3 equações de equilíbrio para cada barra logo:

h = r - 3n = 0	• **Estaticamente Determinada**
h = r - 3n > 0	• **Estaticamente Indeterminada**

Exemplos de Determinação do Grau Estático (1)

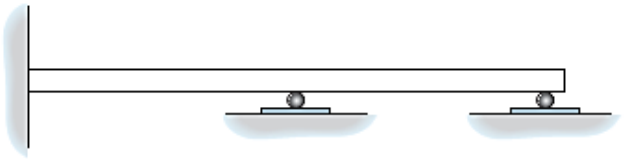


(a)

$r = 3, n = 1,3 = 3(1)$



Estaticamente Determinada



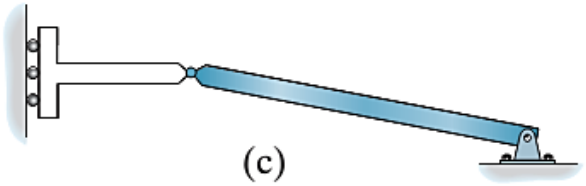
(b)

$r = 5, n = 1,5 > 3(1)$



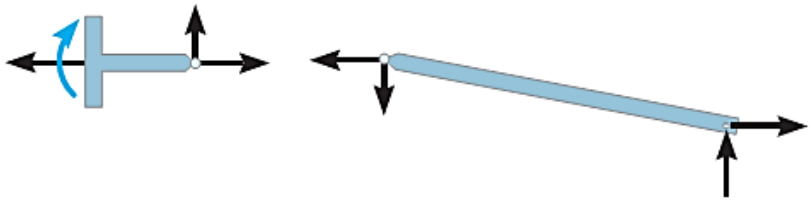
Estaticamente Indeterminada de Grau 2

Exemplos de Determinação do Grau Estático (2)

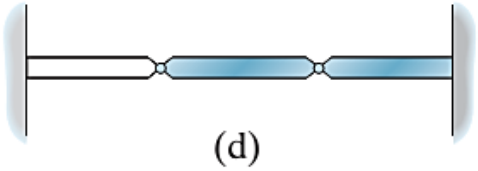


(c)

$r = 6, n = 2, 6 = 3(2)$



Estaticamente Determinada



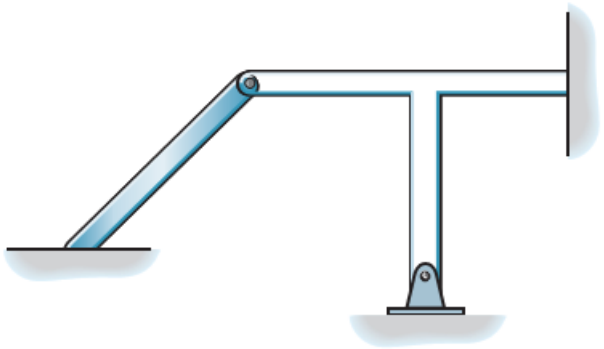
(d)

$r = 10, n = 3, 10 > 3(3)$

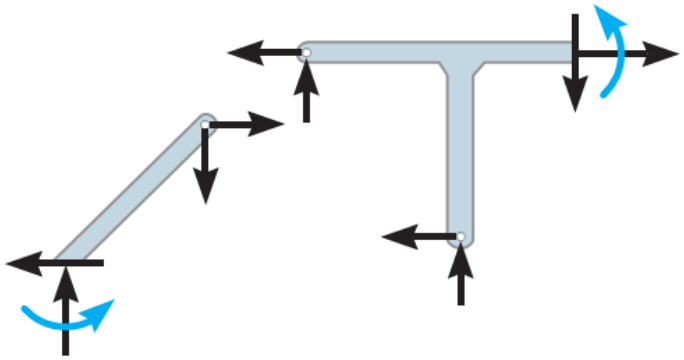


Estaticamente Indeterminada de Grau 1

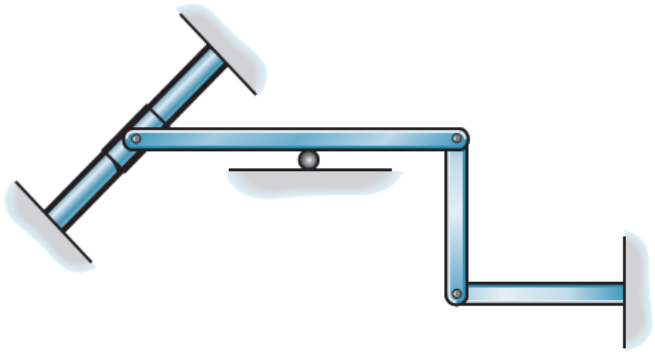
Exemplos de Determinação do Grau Estático (3)



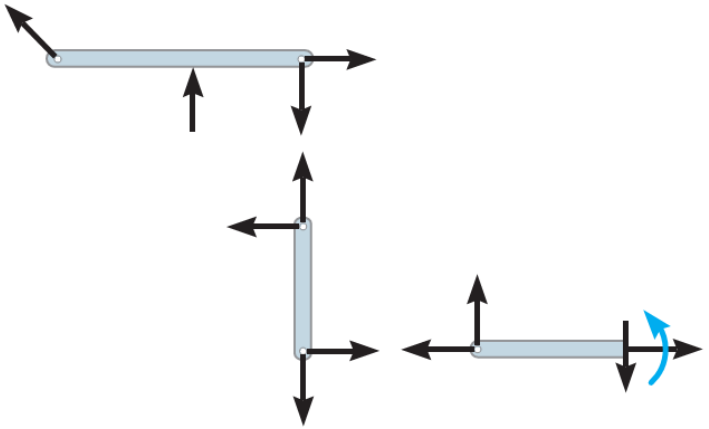
$r = 10, n = 2, 10 > 6,$



Estaticamente Indeterminada de Grau 4



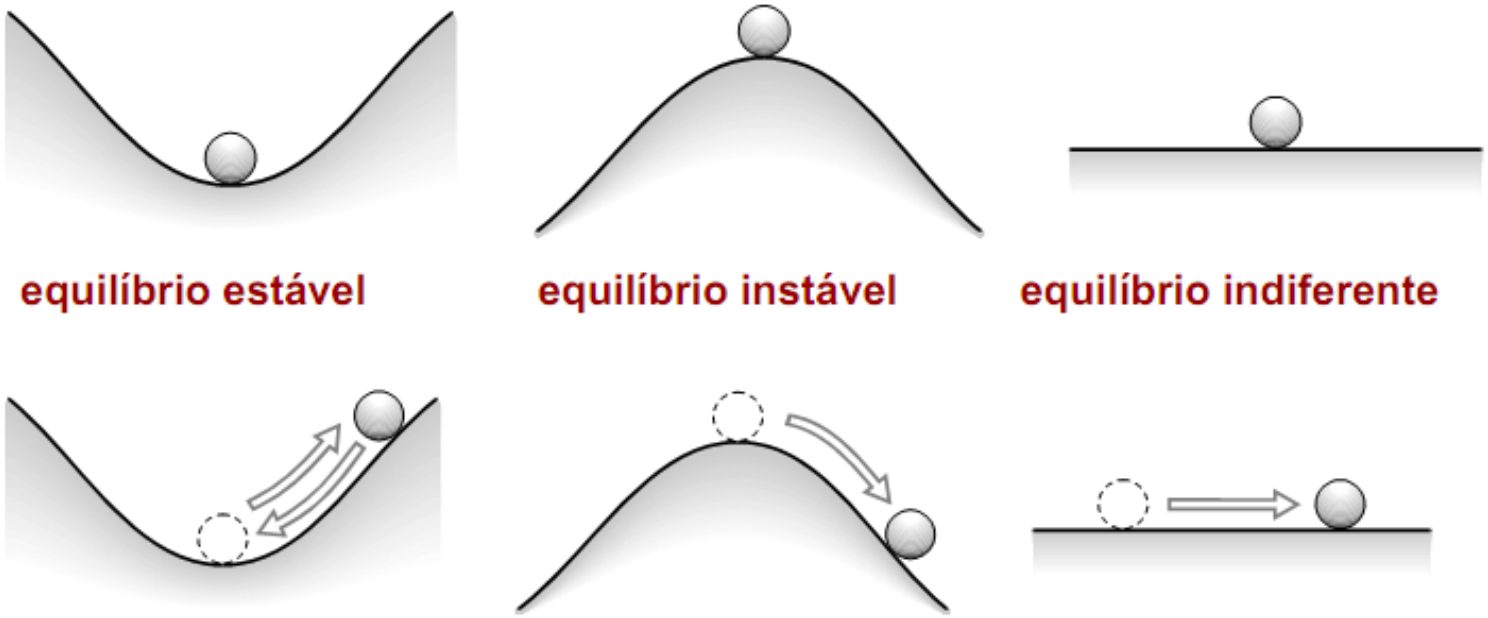
$r = 9, n = 3, 9 = 9,$



Estaticamente Determinada

Estabilidade do Equilíbrio (1)

- A configuração do equilíbrio do arranjo estrutural não poder ser alterada drasticamente na presença de imperfeições e das ações perturbadoras.
- Nestes termos é possível indentificar 3 tipos de equilíbrio:



Estabilidade do Equilíbrio (2)

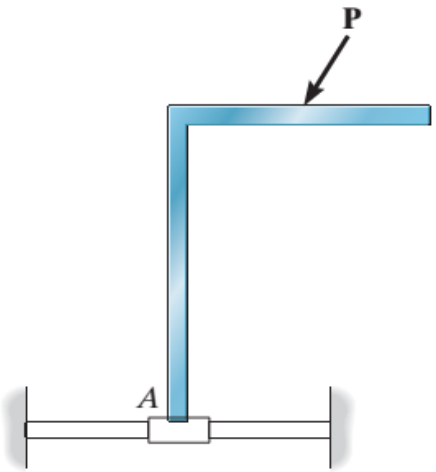
- Uma estrutura é dita **INSTÁVEL** quando ocorrem duas situações:
  - **Restrições Parciais:**
    - Caso em que uma estrutura ou um dos seus membros não atende uma das equações de equilíbrio ($\Sigma Fx = 0$, $\Sigma Fy = 0$, $\Sigma Mz = 0$) ;
  - **Restrições Impróprias:**
    - Estruturas que podem ser estaticamente determinadas ou indeterminadas porém as linhas de ação das forças reativas cruzam em um ponto comum ou são todas paralelas entre si.

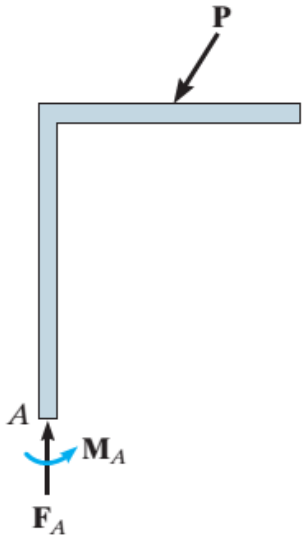
Estabilidade do Equilíbrio (3)

- Em resumo, uma estrutura é dita **INSTÁVEL** se:

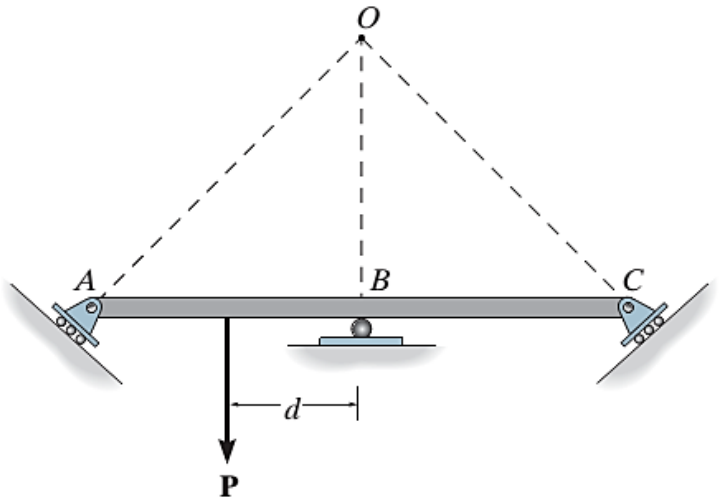
$h = r - 3n < 0$	• **Número de forças reativas menor do que o número de equações de equilíbrio**
$h = r - 3n \geq 0$	• **Número de forças reativas maior ou igual ao número de equações de equilíbrio porém:** - reações dos membros são concorrentes - alguns componentes formam um mecanismo colapsável

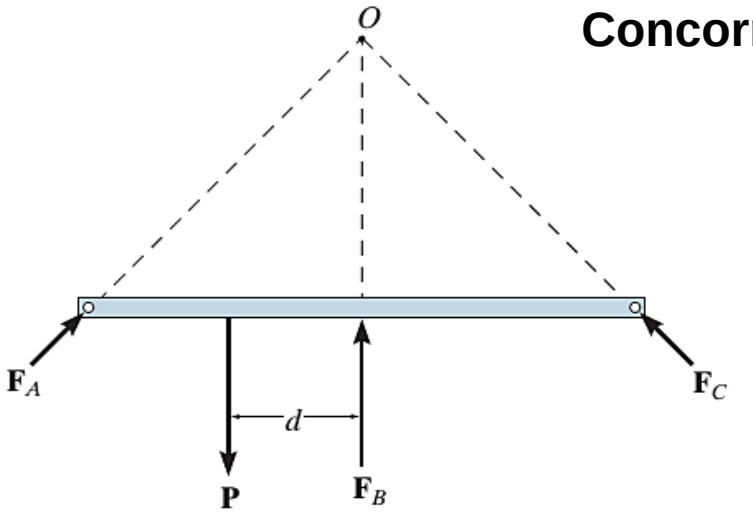
Exemplos de Estruturas Instáveis (1)





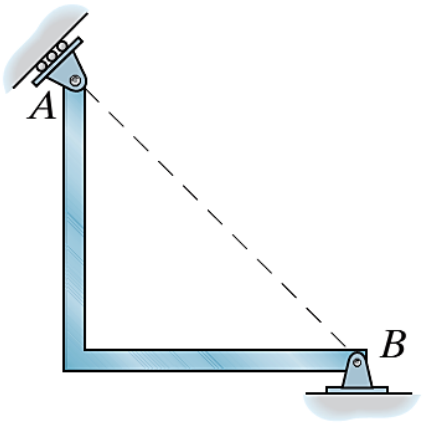
Restrição Parcial

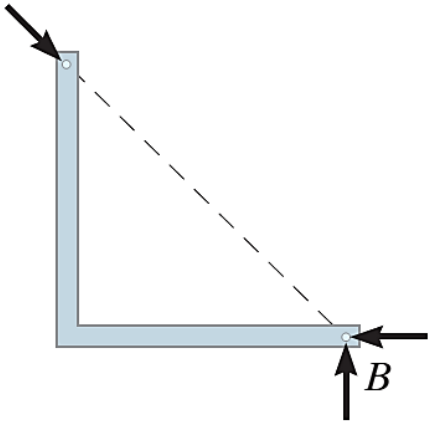




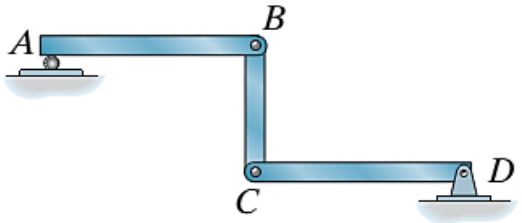
Reações Concorrentes

Exemplos de Estruturas Instáveis (2)

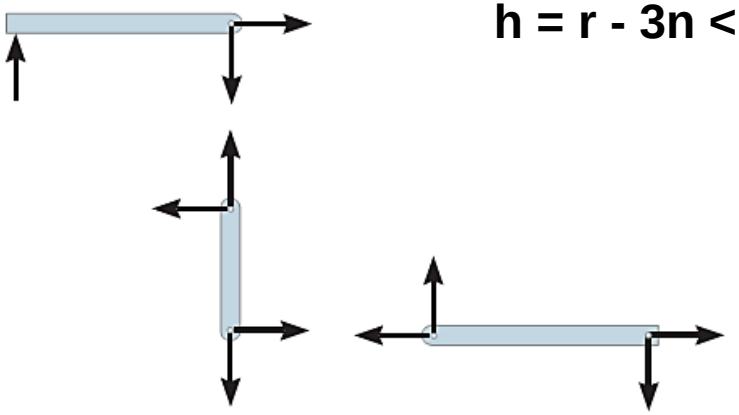




Reações Concorrentes



(d)



h = r - 3n < 0

Classificação Estática das Estruturas

Estruturas Hipostáticas

- Se h < 0
  ou
- Se h >= 0 em Equilíbrio Instável ou Indiferente

Estruturas Isostáticas

- h = 0
- Equilíbrio Estável

Estruturas Hiperestáticas

- h > 0
- Equilíbrio Estável

Alternativa para Definição do Grau Estático de Pórticos

- Indica o número de equações suplementares necessárias para o cálculo das reações de apoio da estrutura.

$$h_{port} = R - \sum (n' - 1) . N_{ri} - N_{ee} + 3 . Q$$

Hiperestaticidade Externa

Hiperestaticidade Interna

R – número de reações de apoio;
n' – número de barras que concorrem a uma rótula interna;
N_{ri} – número de rótulas com n' barras;
N_{ee} – número de equações de equilíbrio;
Q – número de quadros fechados no modelo estrutural.

Alternativa para Definição do Grau Estático de Treliças

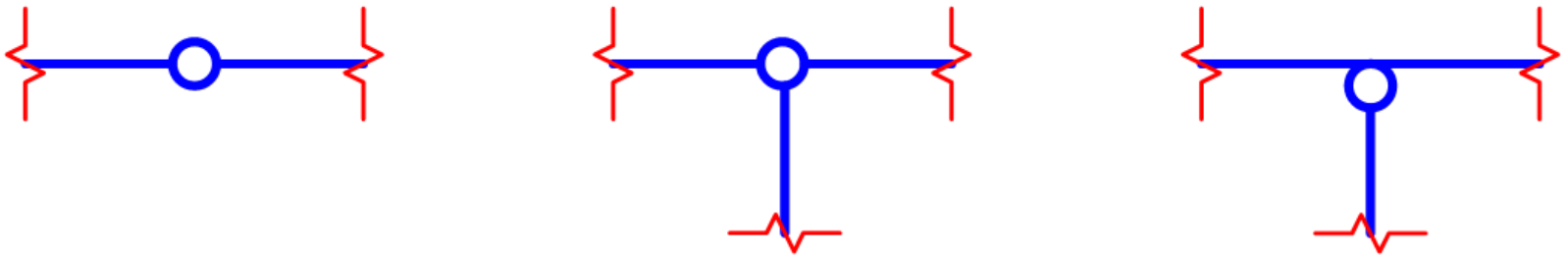
- Em treliças o grau estático é calculado de forma mais simples através de uma única da expressão:

$$h_{trel} = R + b - 2n$$

R – número de reações de apoio;
b – número de barras de uma treliça;
n – número de nós que compõe a treliça;

Rótulas x Equações de Equilíbrio

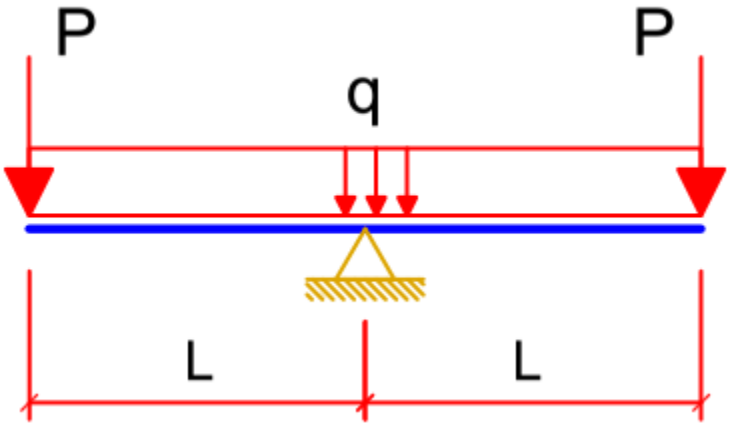
- Em uma estrutura reticulada hiperestática plana, a **adição de uma rótula com "n" barras convergindo** implica na **criação de "(n-1)" equações adicionais** para determinação do equilíbrio da estrutura;
- Isto de seve ao fato de que **em uma rótula** é conhecido o valor do momento fletor atuante, ou seja, **M = 0 (zero)**;



+1 equação **+2 equações** **+1 equação**

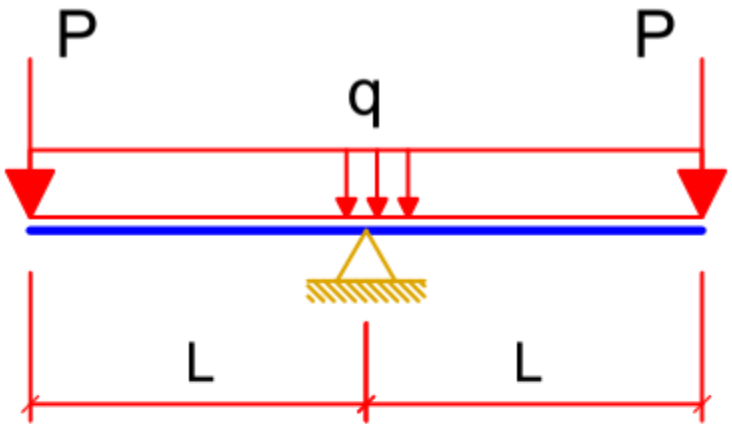
Modelo Estrutural da Gangorra (1)

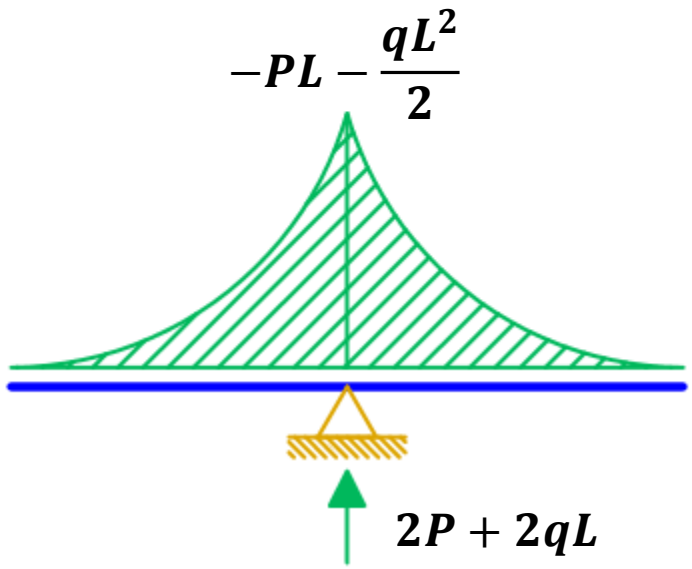




- **Estrutura Hipostática;**
  * *h = r - 3n < 0*
  * *Não há restrição ao giro*
- **Vínculo Interno:**
  Engaste
  (a barra é interiça – há momento transmitido ao longo da barra)
- **Vínculo Externo:**
  Apoio Rotulado
  (não há momento transmitido à fundação)

Modelo Estrutural da Gangorra (2)





- **Estrutura Hipostática;**
  * *h = r - 3n < 0*
  * *Não há restrição ao giro*

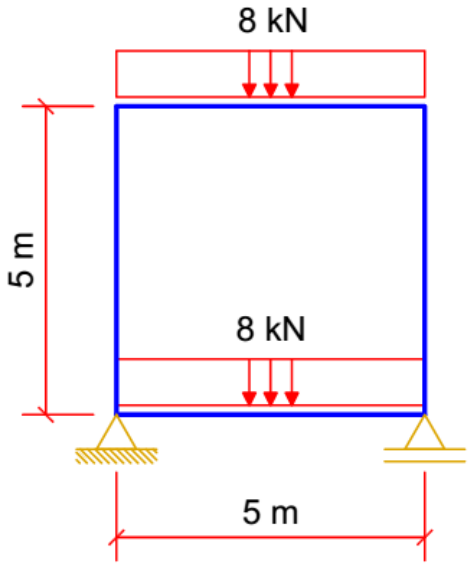
  Equilíbrio Indiferente

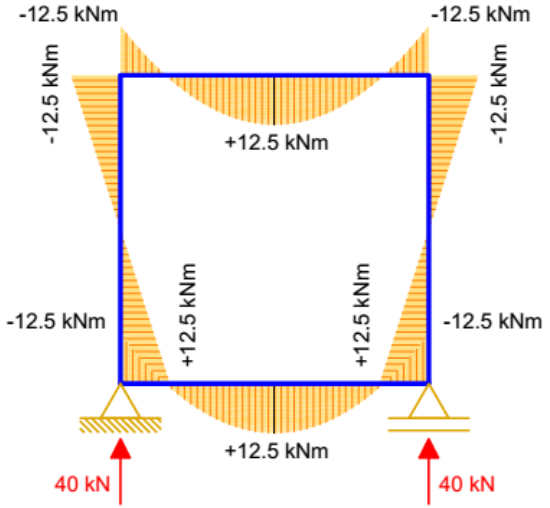
- **Vínculo Interno:**
  Engaste
  (a barra é interiça – há momento transmitido ao longo da barra)

- **Vínculo Externo:**
  Apoio Rotulado
  (não há momento transmitido à fundação)

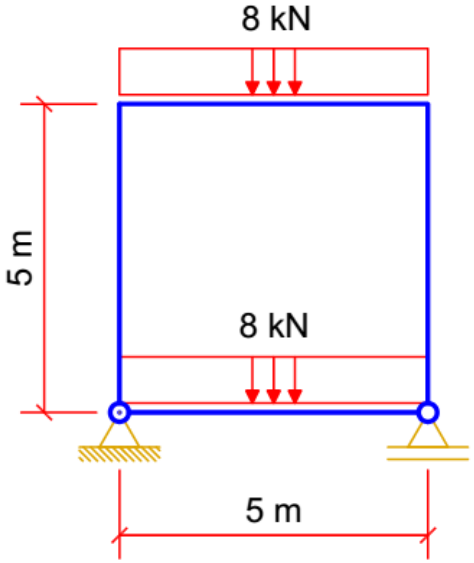
Modelo de Pórtico com Quadro Fechado (1)

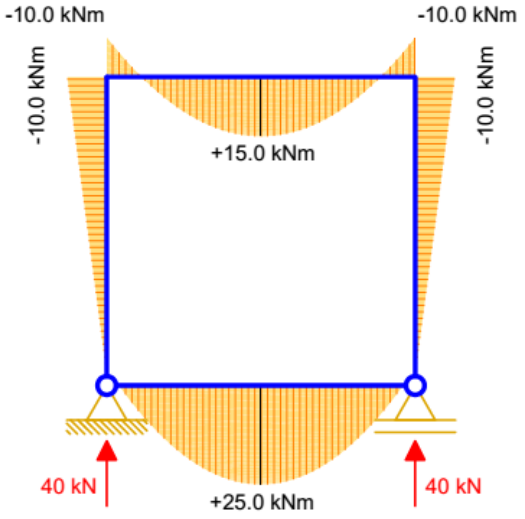
- Hiperestacidade Interna: 3
- Hiperestacidade Externa: 0
- Barra da base vinculada por engastes nas barras verticais;



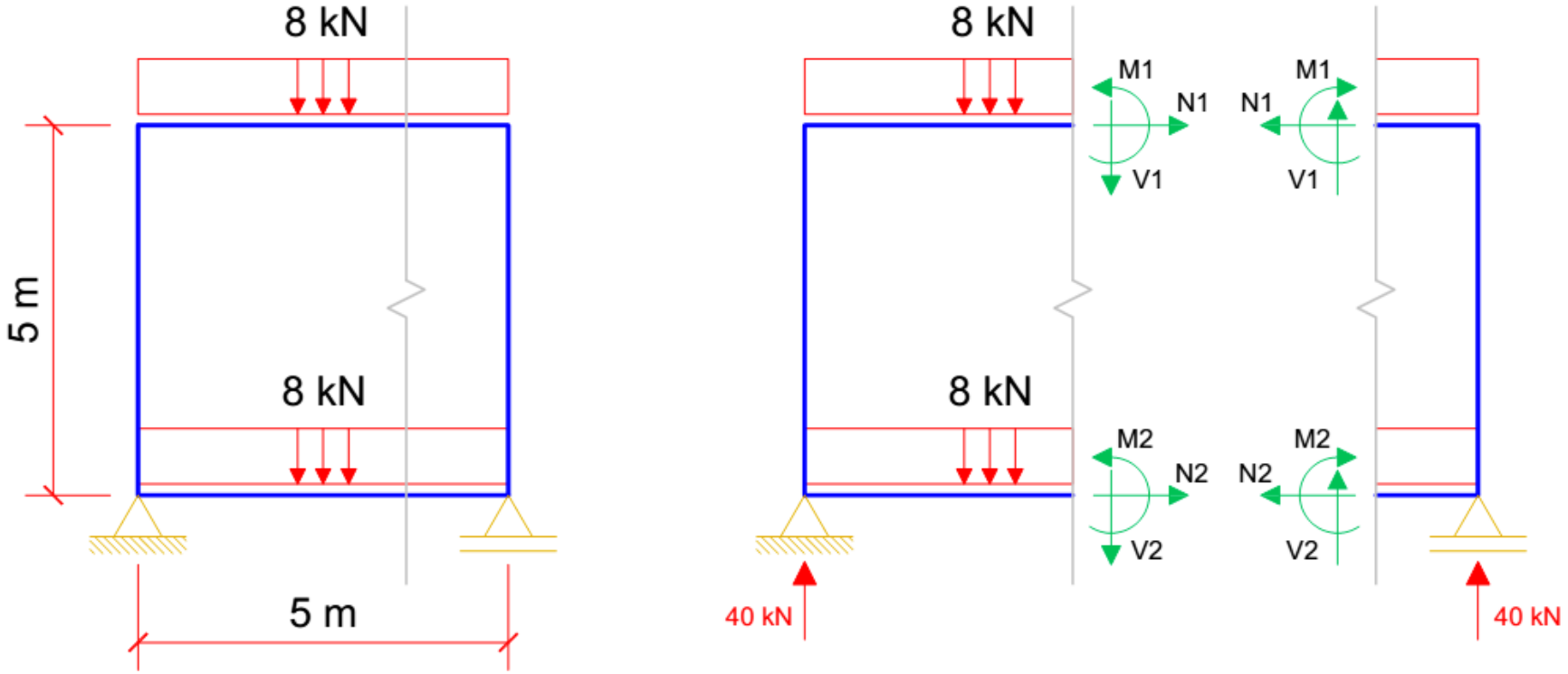


- Hiperestacidade Interna: 3
- Hiperestacidade Externa: 2
- Barra da base vinculada por rótulas nas barras verticais;

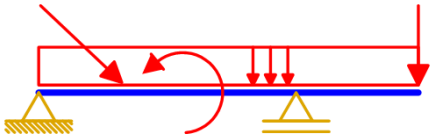




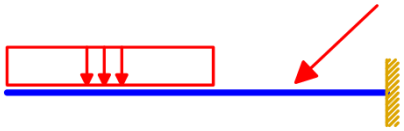
Modelo de Pórtico com Quadro Fechado (2)



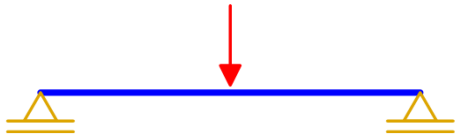
Exemplos de Classificação Estática



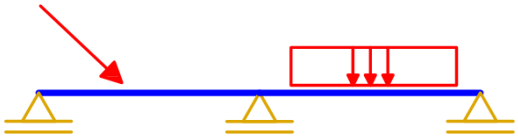
Isostática
r = 3
h = 0



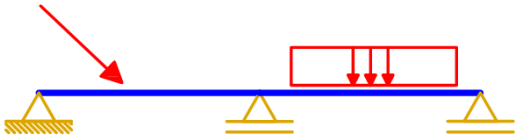
Isostática
r = 3
h = 0



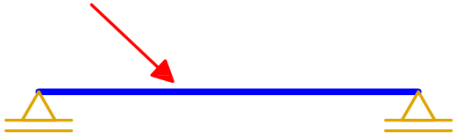
Hipostática
r = 2
h < 0



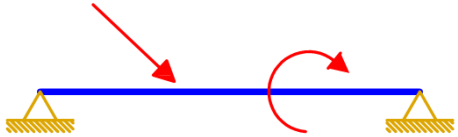
Hipostática
r = 3
h = 0 (restrição imprópria)



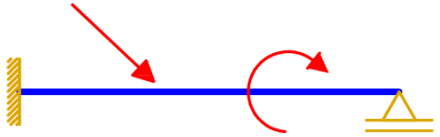
Hiperestática
r = 4
h = 1



Hipostática
r = 2
h < 0



Hiperestática
r = 4
h = 1

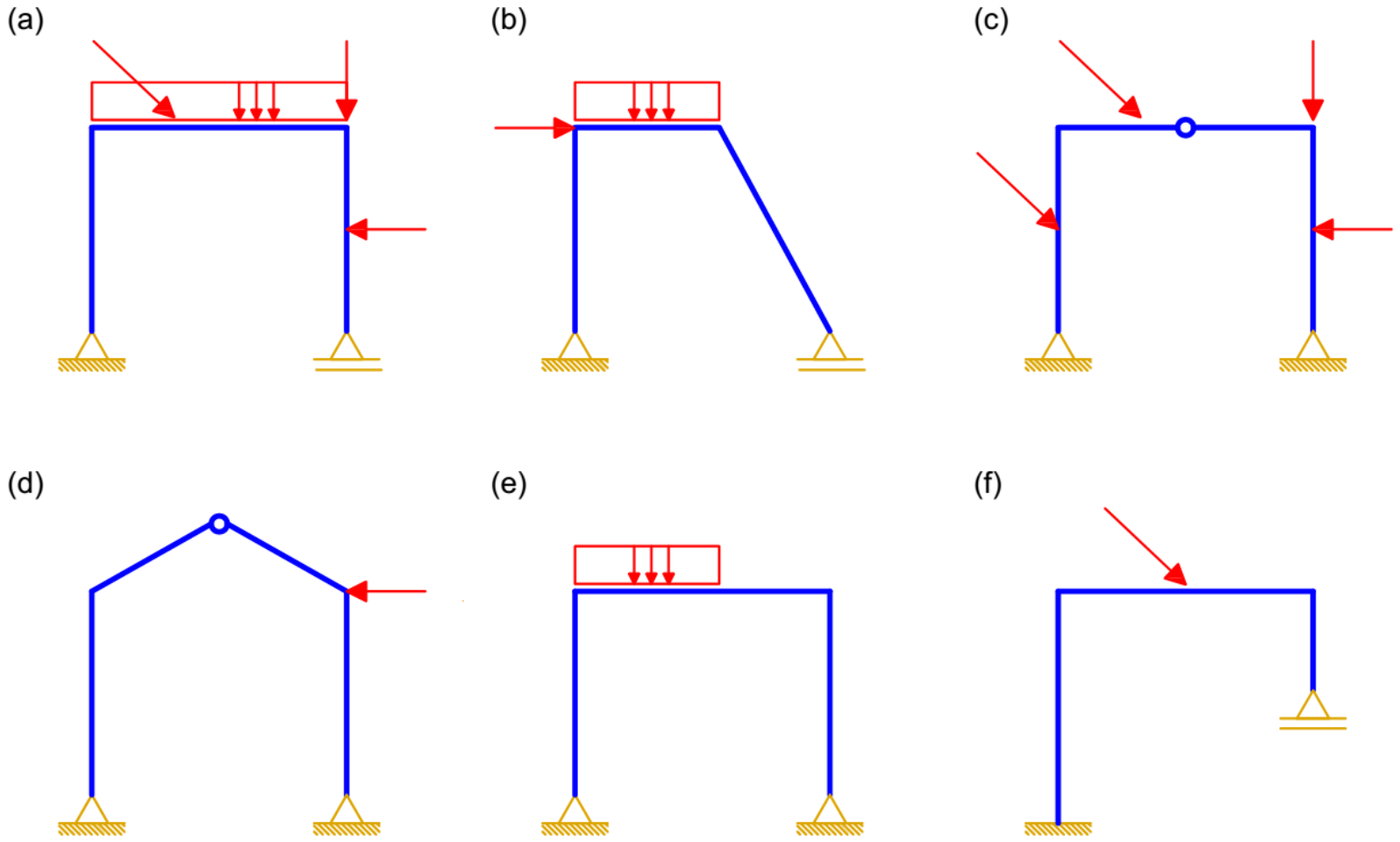


Hiperestática
r = 4
h = 1

FIM

Exercícios TE1-2.1 (1)

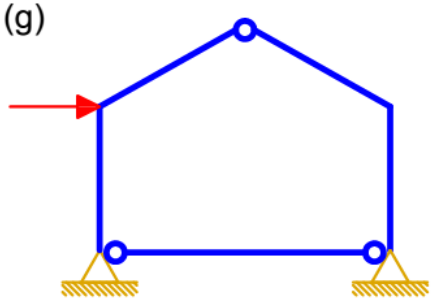
- Determinar o grau estático:



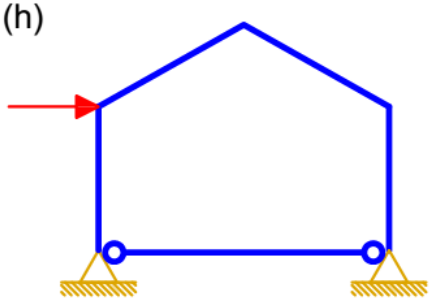
Exercícios TE1-2.1 (2)

- Determinar o grau estático:

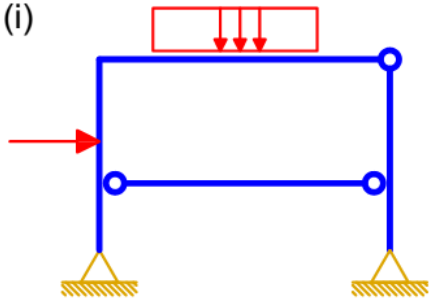
(g)



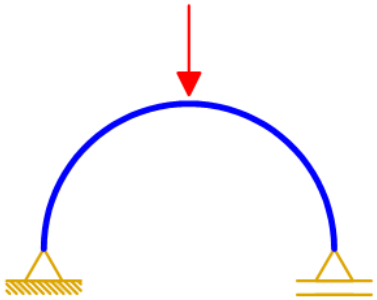
(h)



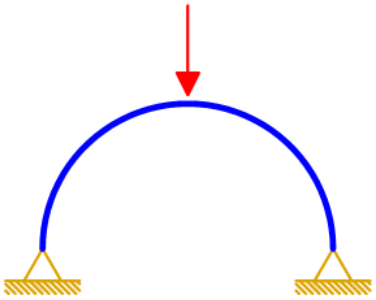
(i)



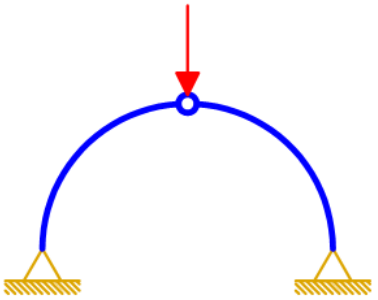
(j)



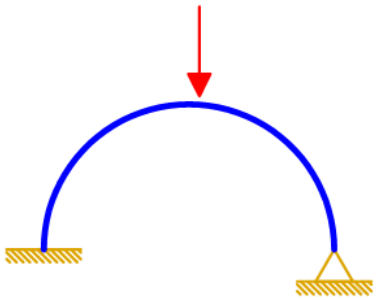
(k)



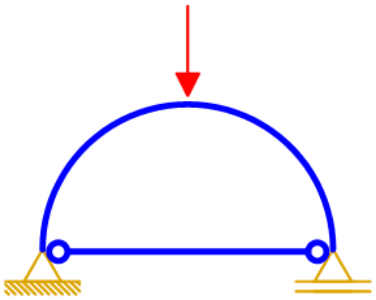
(l)



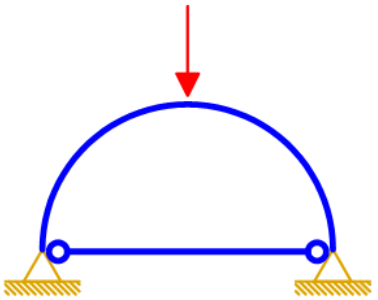
(m)



(n)



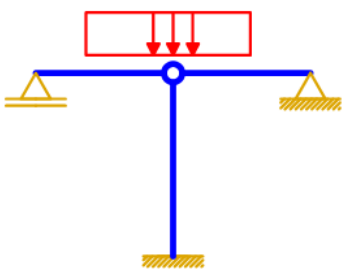
(o)



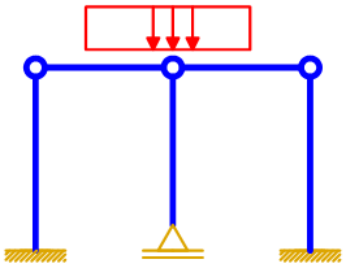
Exercícios TE1-2.1 (3)

- Determinar o grau estático:

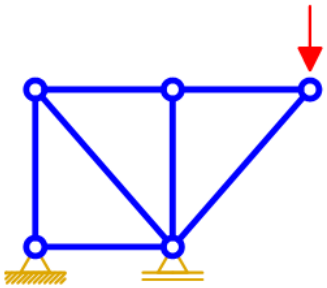
(p)



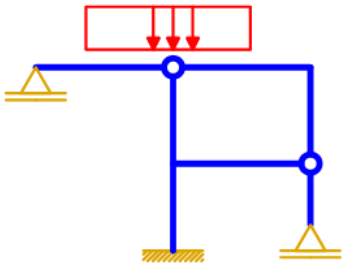
(q)



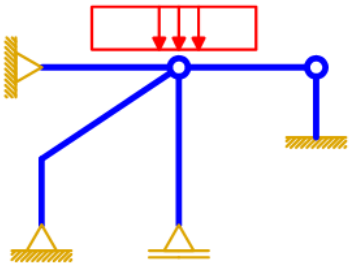
(r)



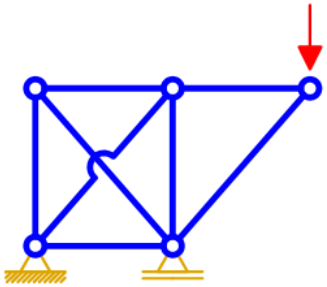
(s)



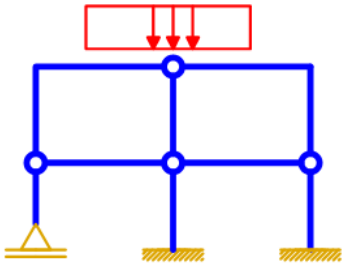
(t)



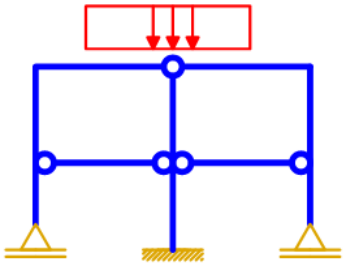
(u)



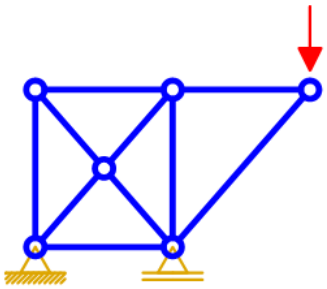
(v)



(w)

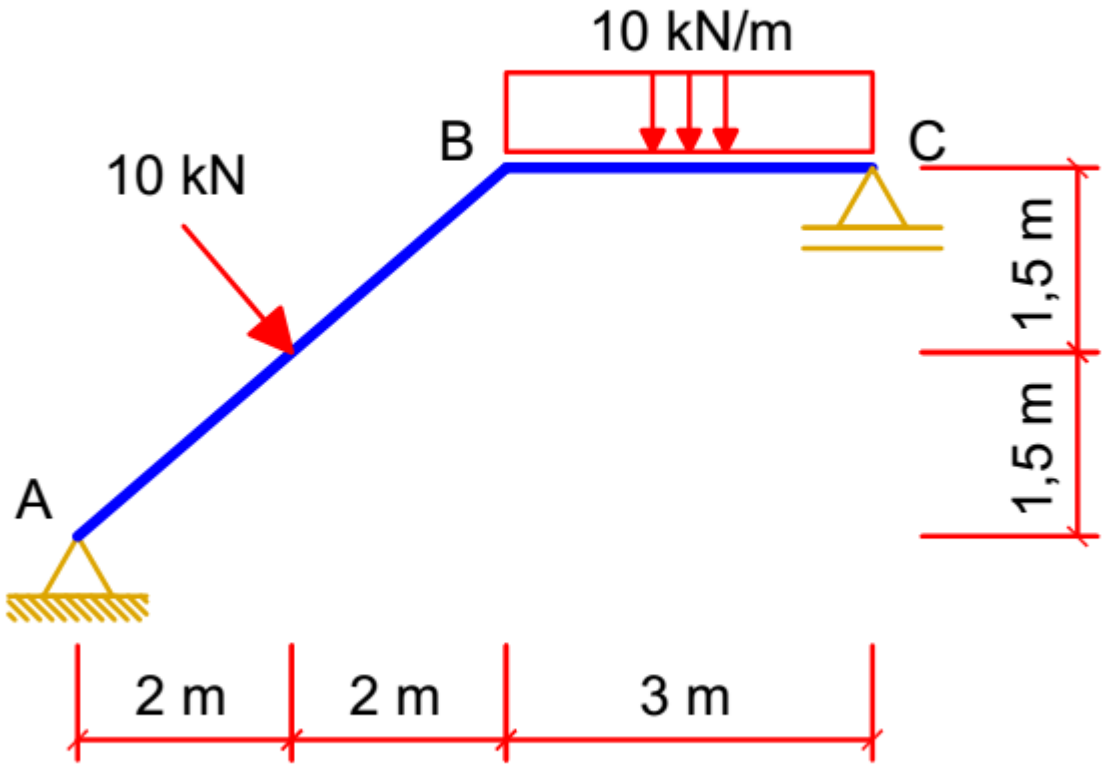


(x)



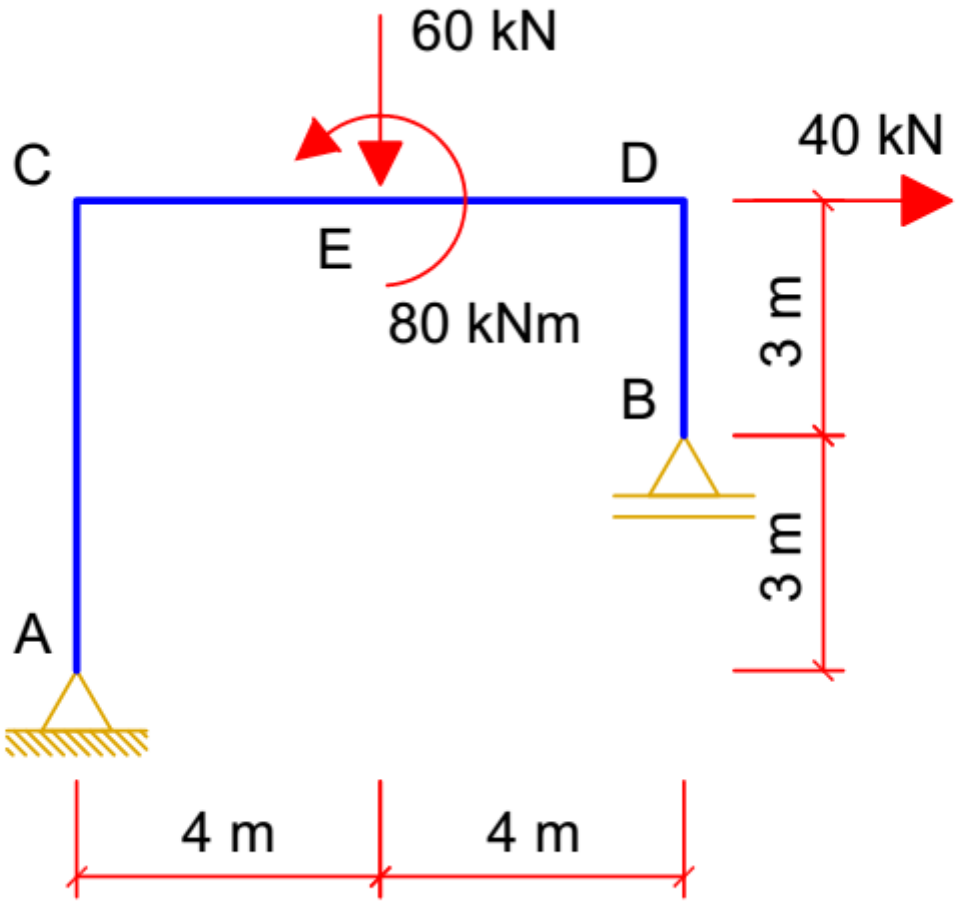
Exercício TE1-2.2

- Calcule as reações de apoio:



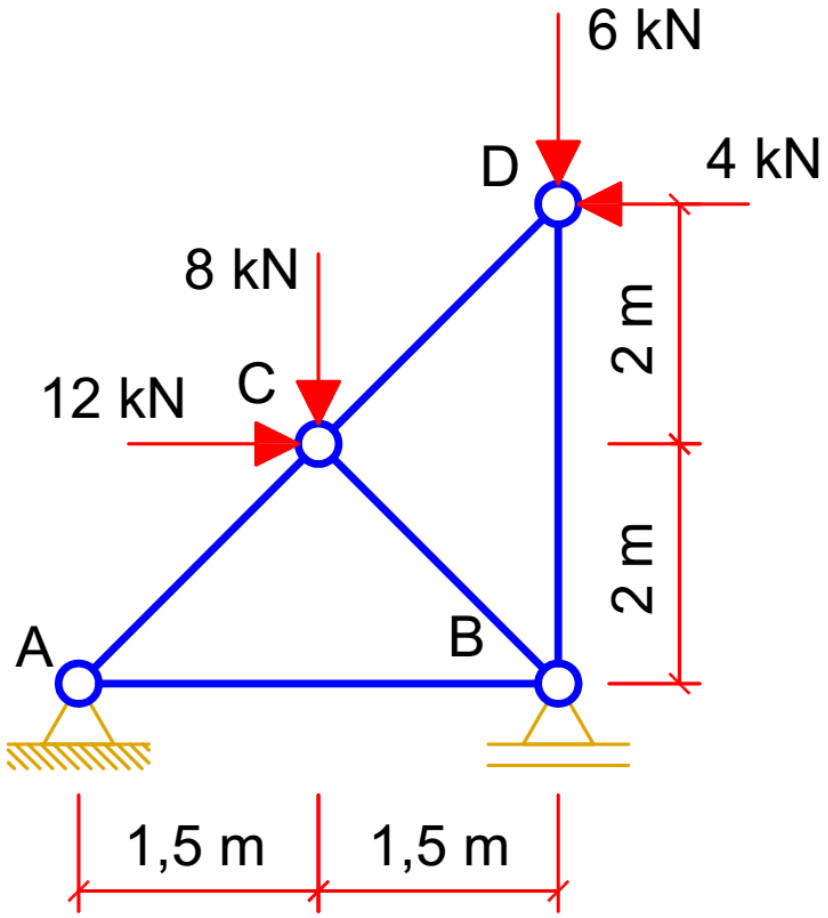
Exercício TE1-2.3

- Calcule as reações de apoio:



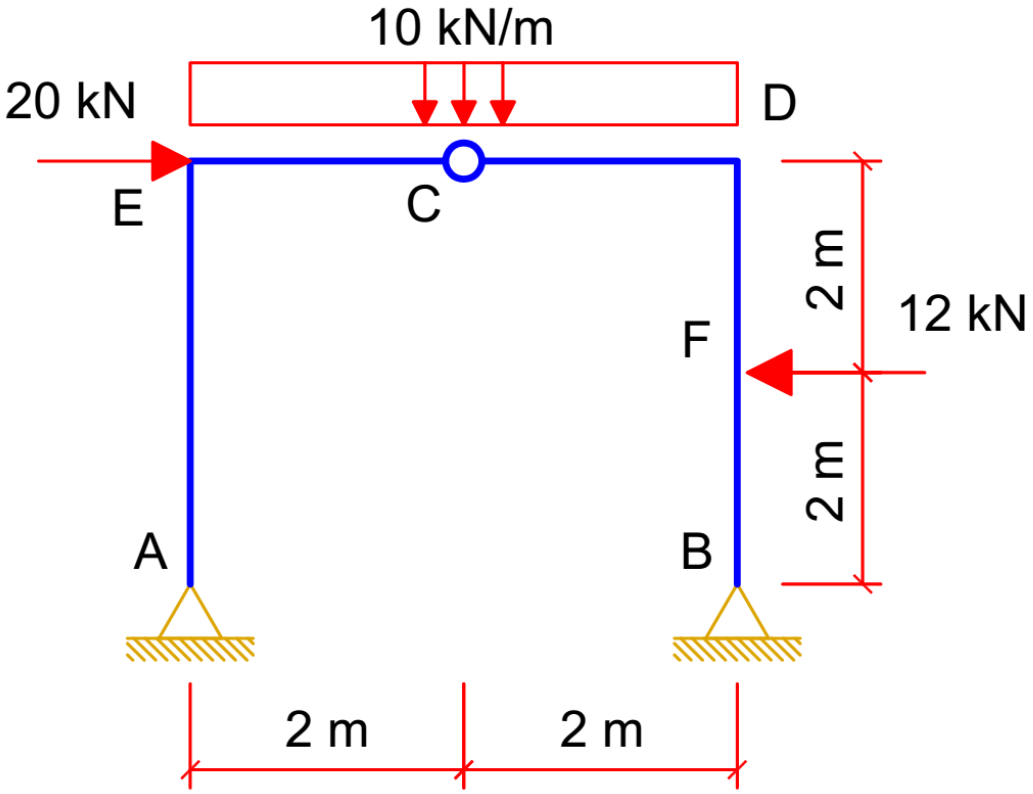
Exercício TE1-2.4

- Calcule as reações de apoio:



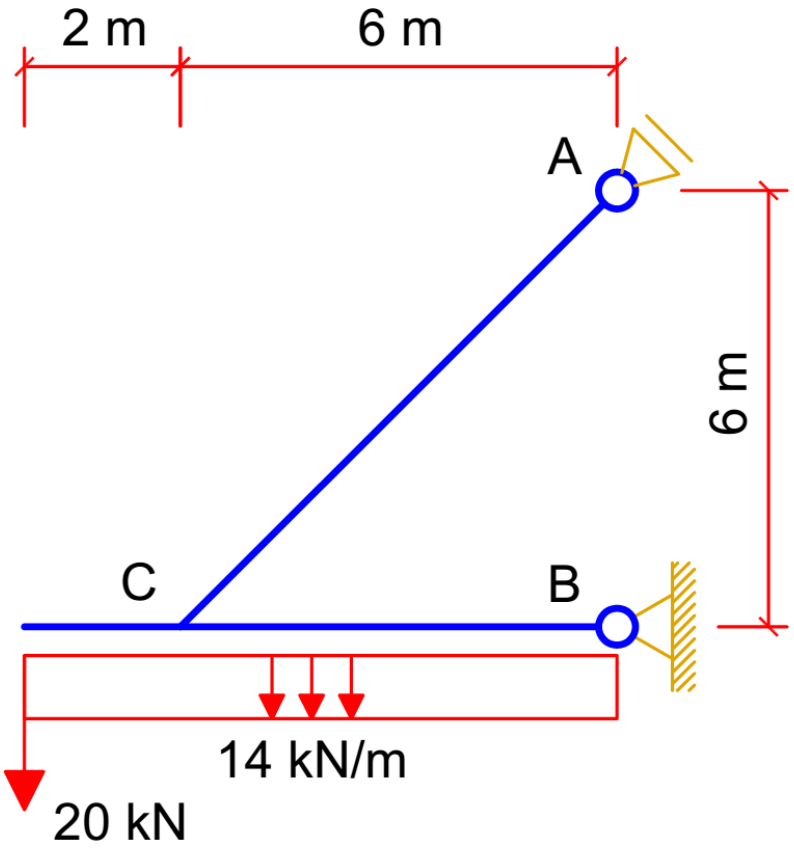
Exercício TE1-2.5

- Calcule as reações de apoio:



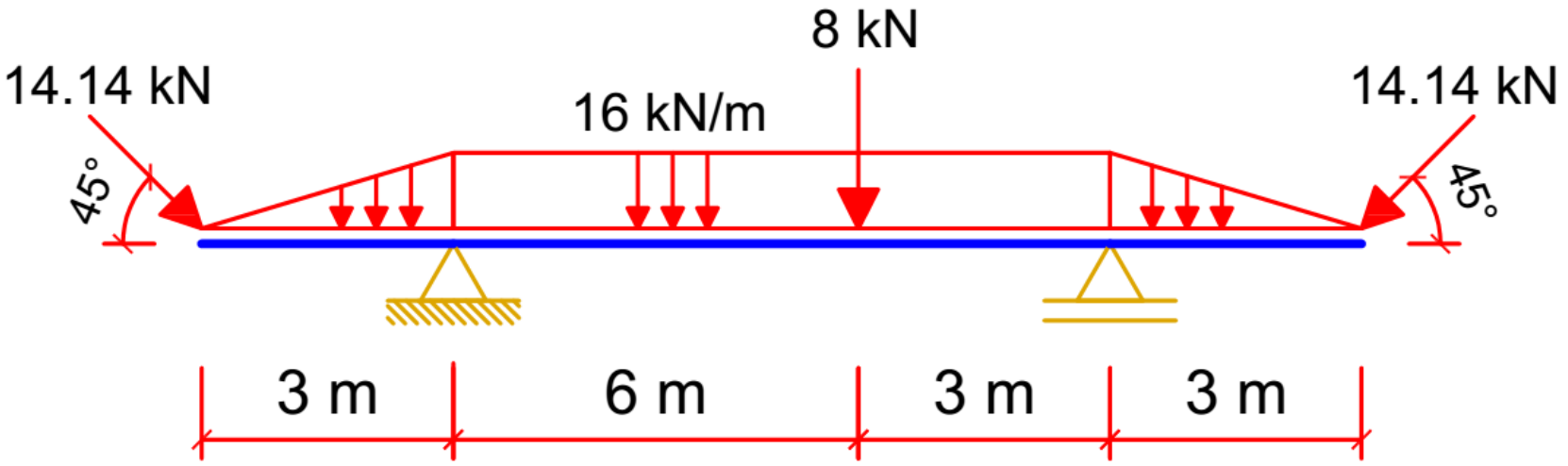
Exercício TE1-2.6

- Calcule as reações de apoio:



Exercício TE1-2.7

- Calcule as reações de apoio:



Exercício TE1-2.8

- Calcule as reações de apoio:

