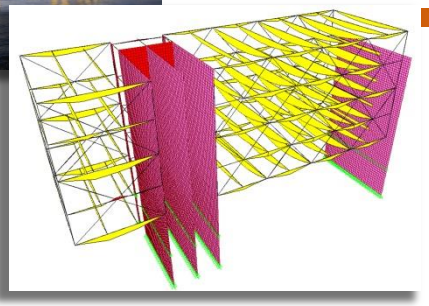
Teoria das Estruturas I - Aula 03





Relações Diferenciais entre Mom. Fletores, Esforços Cortantes e Carregamentos

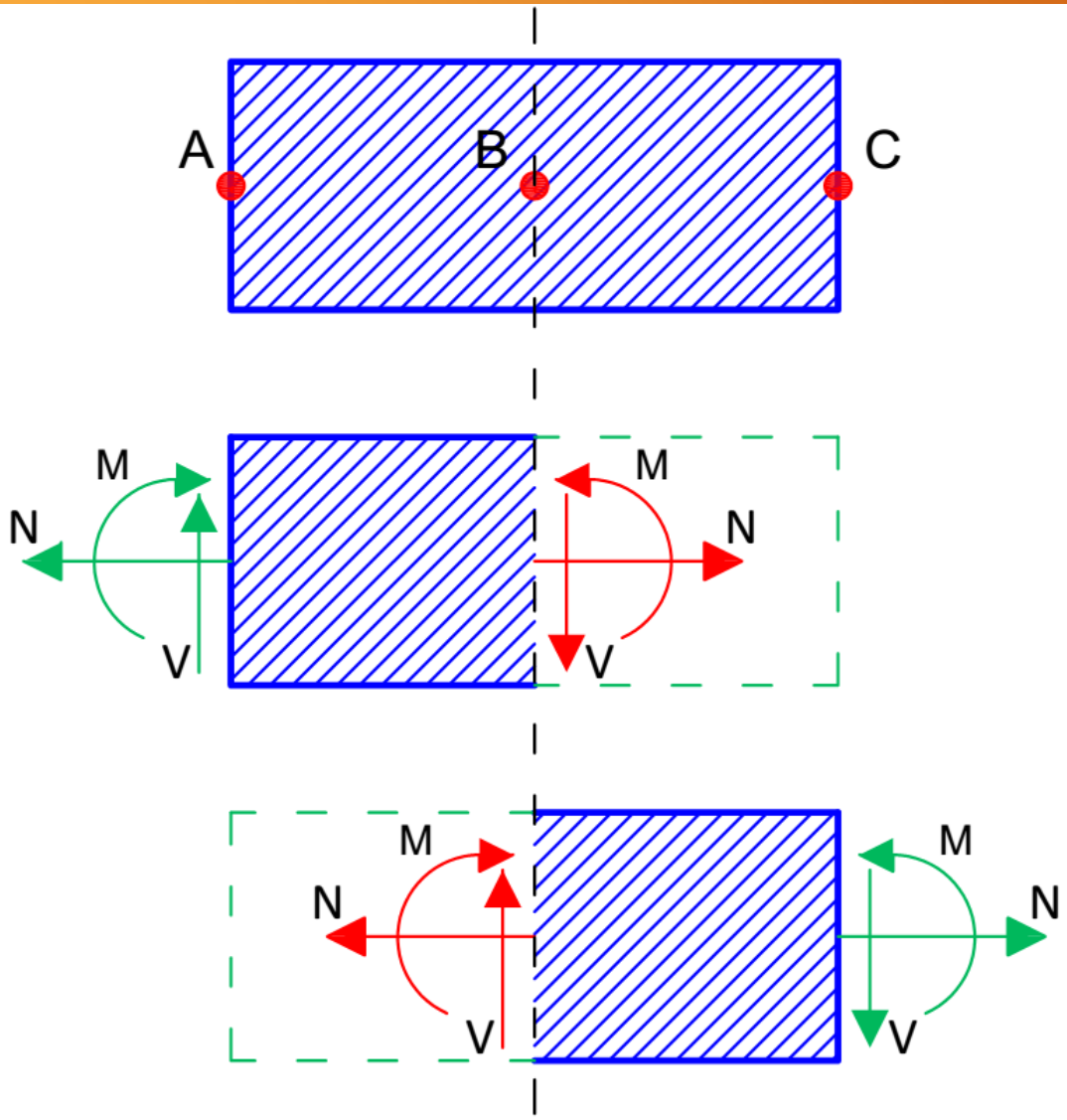
- Diagramas de Estado de Momento Fletor (M) e Esforço Cortante (V);
- Equação da Linha Elástica;
- Vigas-Gerber: Esquema Funcional

Prof. Juliano J. Scremin

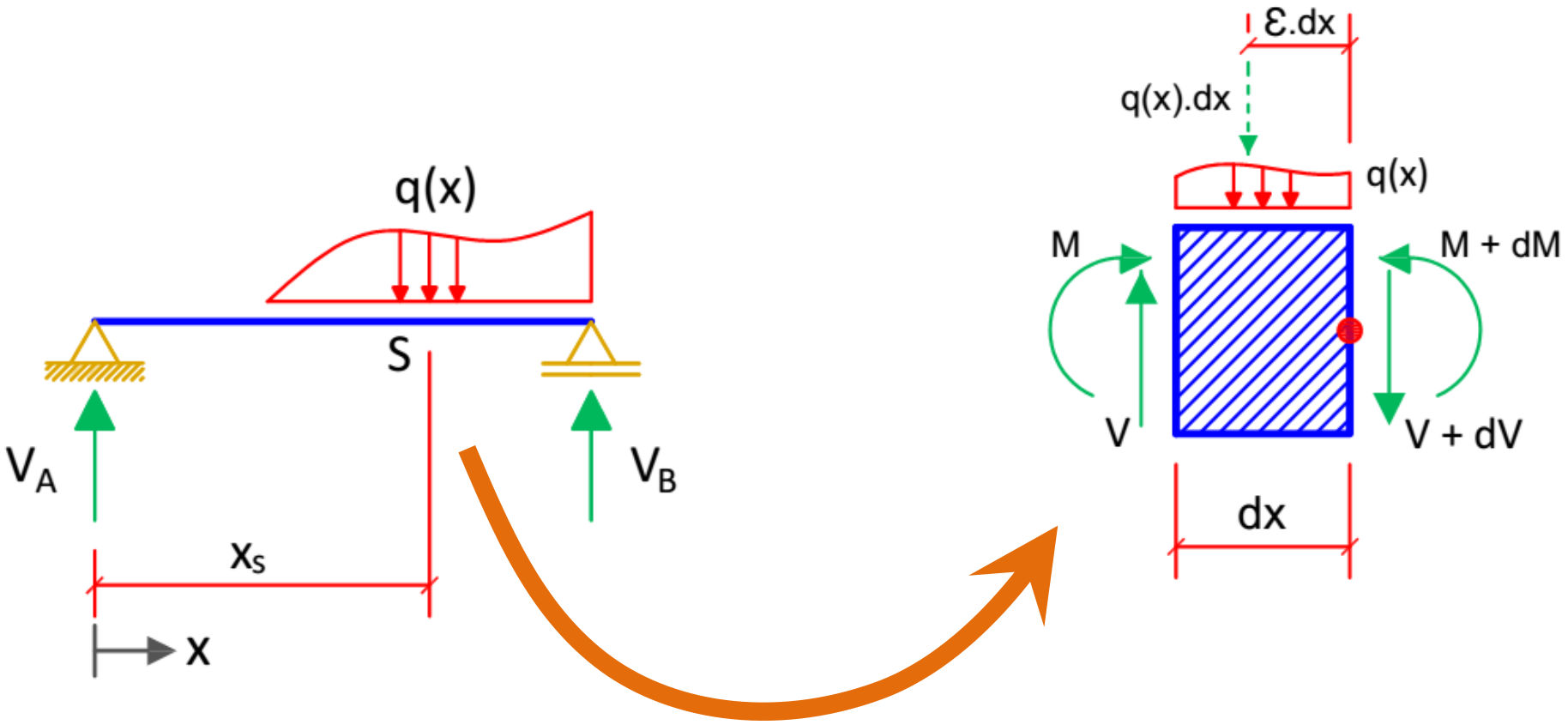
Universidade POSITIVO

Aula 03 - Seção 1:
Diagramas de Estado de Momento Fletor e Esforço Cortante em Vigas

Convenção de Sinais

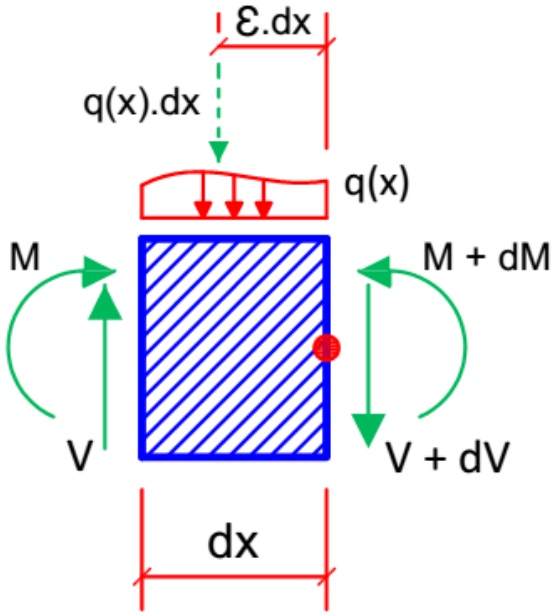


Equilíbrio de uma Porção Infinitesimal de uma Viga



Relações Diferenciais entre M, V e q(x) (1)

- Aplicação das condições de equilíbrio da estática no plano:



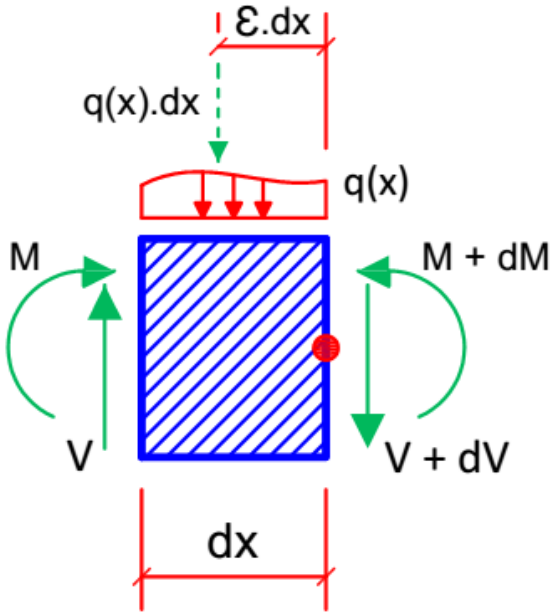
$$\sum Fy = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$\sum M = 0$$

- **Como não há cargas horizontais a somatória de forças horizontais nula não se aplica ao caso**

Relações Diferenciais entre M, V e q(x) (2)



Considerando a aplicação da convenção de sinais do lado do ponto vermelho para **forças verticais**:

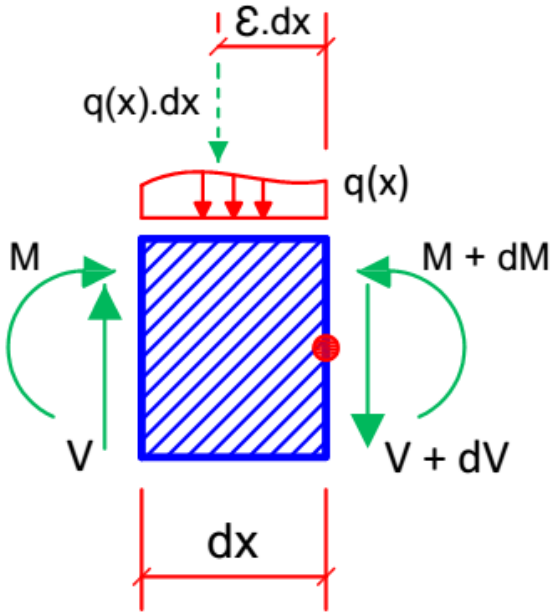
$$\sum Fy = 0$$

$$-V + (V + dV) + q(x).dx = 0$$

$$\mathrm{d}V = -\,q(x).dx$$

$$\boldsymbol{\frac{dV}{dx} = -\,q(x)}$$

Relações Diferenciais entre M, V e q(x) (3)



Considerando a aplicação da convenção de sinais do lado do ponto vermelho para **momentos fletores**:

$$\sum M = 0$$

$$-M + (M + dM) + q(x).dx.\varepsilon.dx - Vdx = 0$$

infinitésimo ao quadrado

$$dM + q(x).\varepsilon.(dx)^2 - Vdx = 0$$

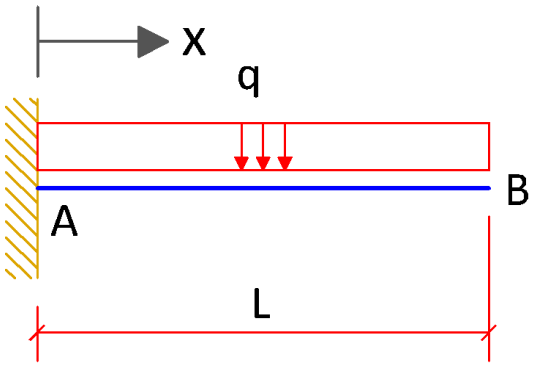
$$\mathrm{d}M = V.dx$$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = V}$$

Relações Diferenciais entre M, V e q(x) (4)

- Considerando cargas “q(x)” no sentido gravitacional:

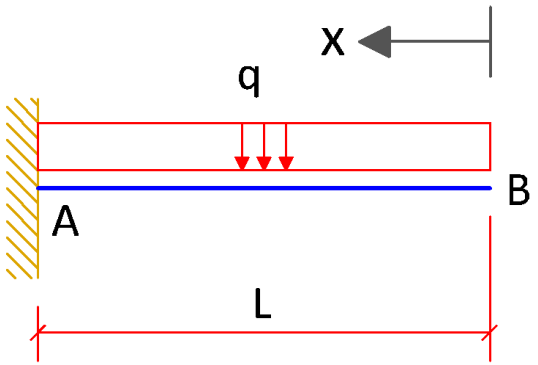
Sistema Destrógero



$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{dx} = -q(x)$$

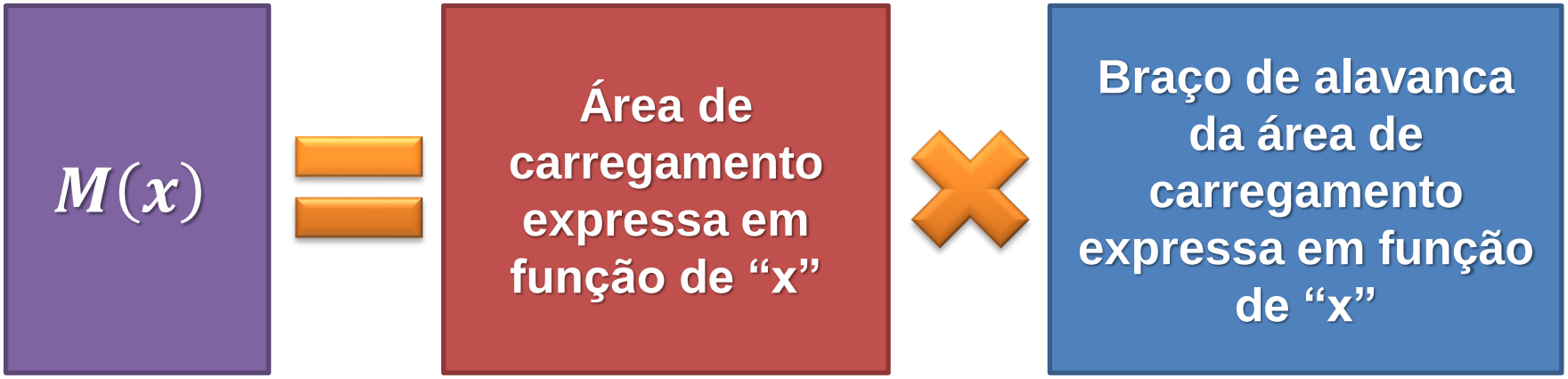
Sistema Levógero



$$\frac{dM}{dx} = -V$$

$$\frac{dV}{dx} = q(x)$$

Momento Fletor devido a Carga Distribuída q(x)

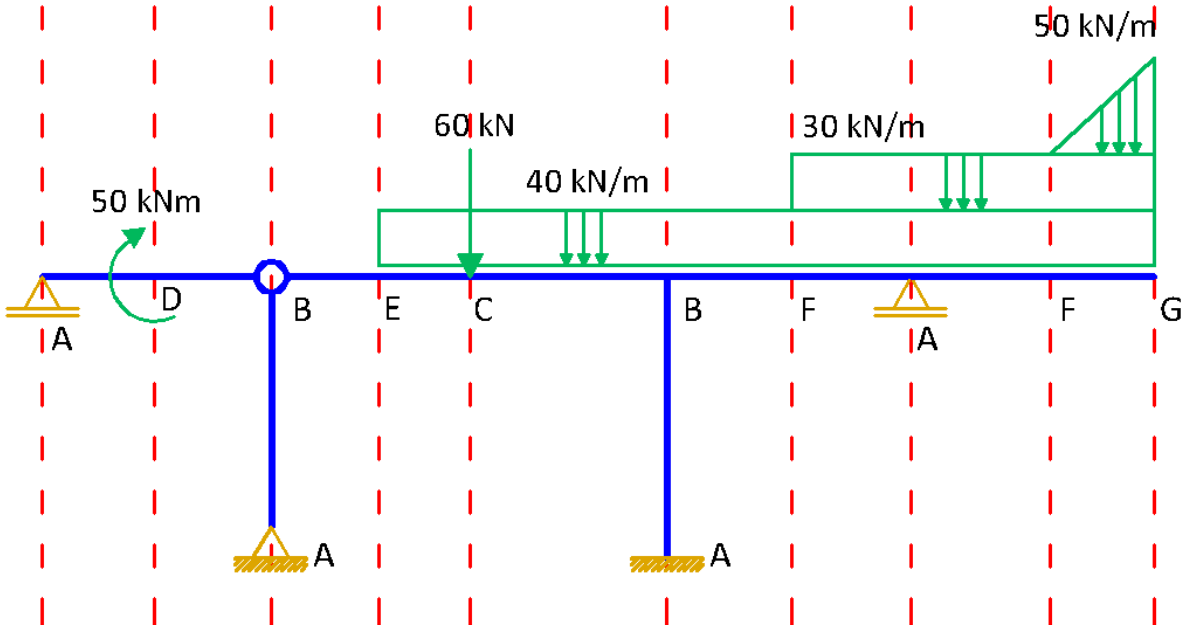


Pontos de Singularidade

- Em termos práticos, são **pontos nos quais os diagramas de estado** de momento fletor, esforço cortante ou de qualquer outro esforço interno em um modelo estrutural **não se apresentam como funções diferenciáveis**.
- Neste caso, **o esforço interno precisa ser representado por funções por partes**, o que implica na **divisão do diagrama em dominios limitados por estas singularidades**.
- Assim sendo, entre cada par de singularidades no modelo estrutural, o diagrama de estado será representado por diferentes funções matemáticas.
- De igual forma, entre cada par de pontos de singularidade teremos sistemas de coordenadas diferentes.

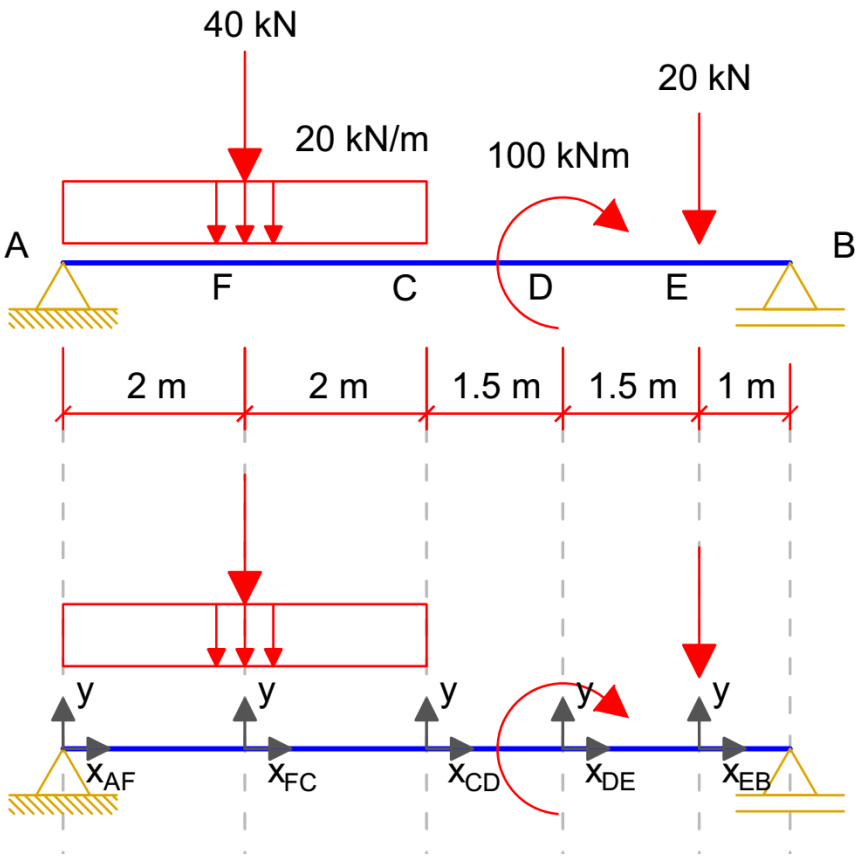
Pontos de Singularidade - Exemplos

A. Apoios;
B. Vínculos internos – rótulas e engastes;
C. Cargas concentradas;
D. Momento fletor concentrado;
E. Pontos de término de cargas distribuídas em meio a viga;
F. Pontos de variação de carga distribuída;
G. Ponta de balanço;



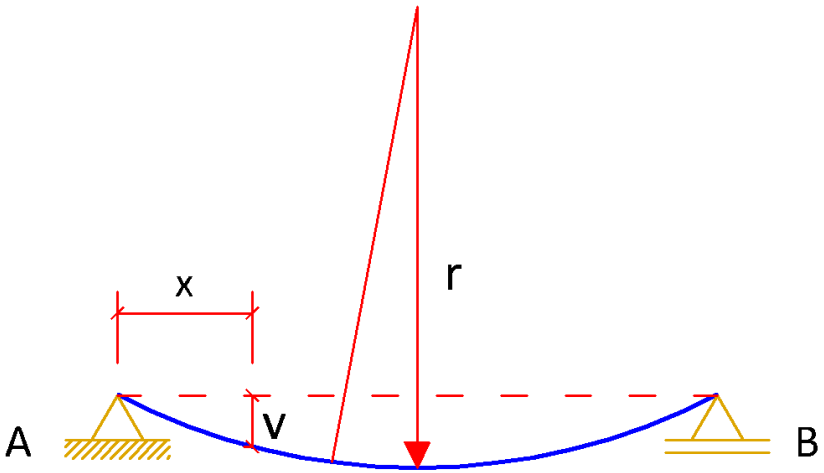
Pontos de Singularidade – Sistemas de Eixos Locais

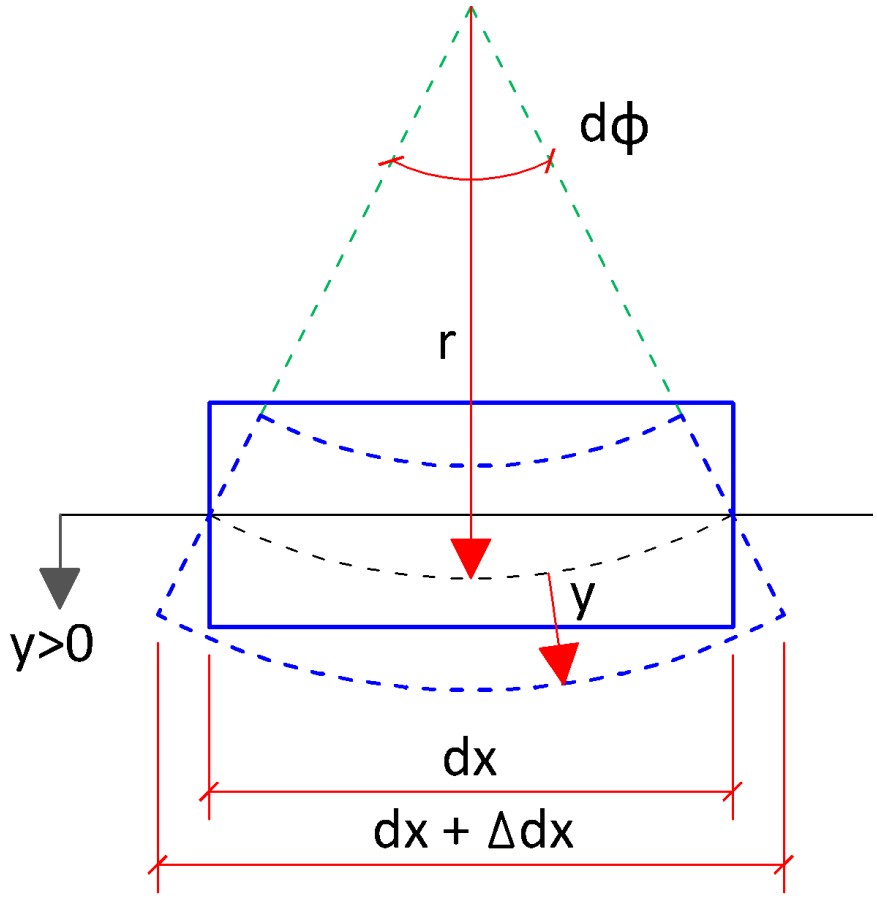
Conforme mencionado, entre cada par de pontos de singularidade será determinado um novo sistema de coordenadas cartesianas, tal como no exemplo abaixo.



Aula 02 - Seção 02:
Equação da Linha Elástica

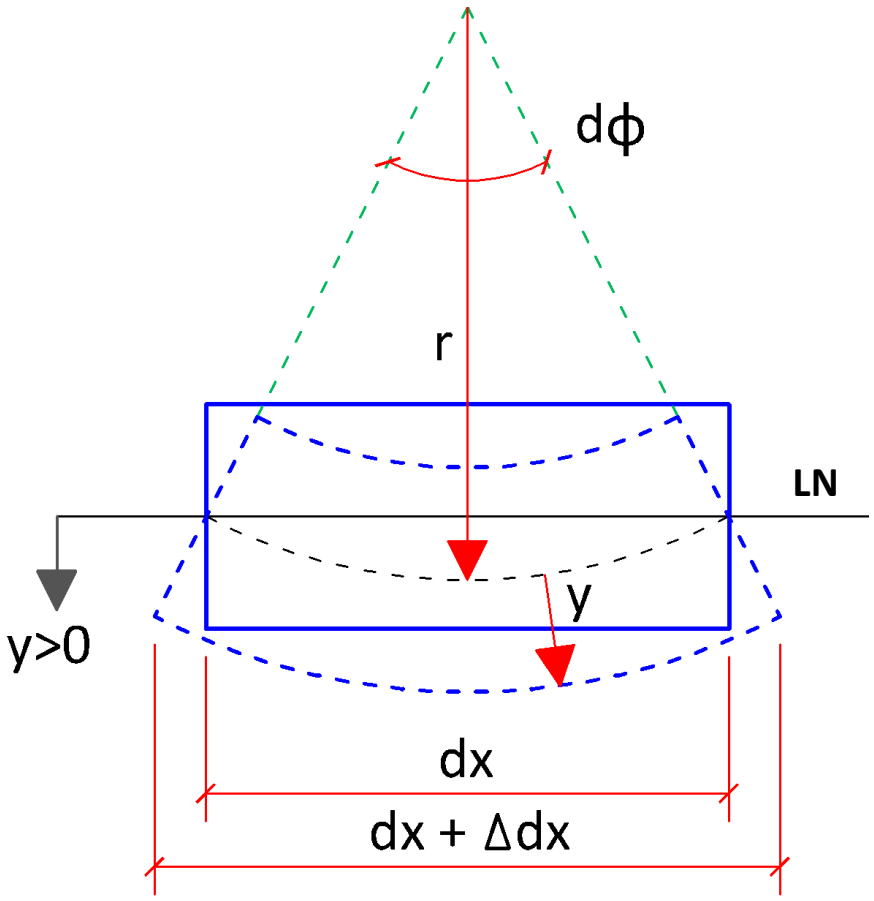
Linha Elástica (1)





Trecho de uma barra sujeita à flexão pura

Linha Elástica (2)

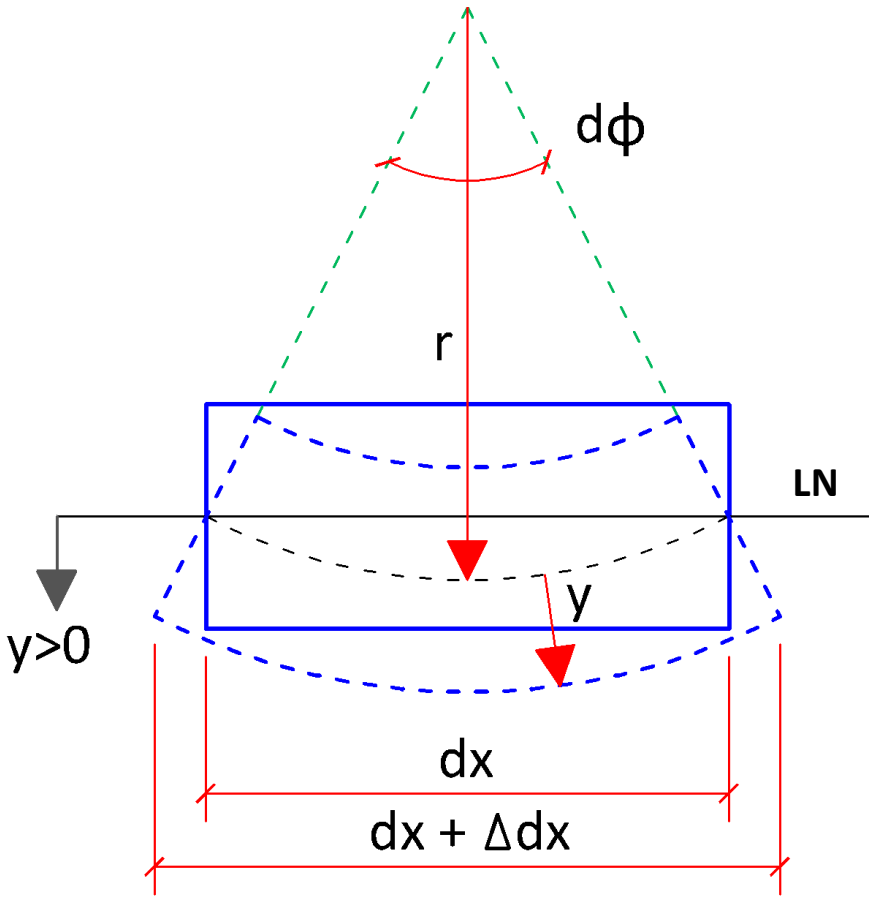


Da ***Resistência dos Materias*** temos:

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (1) \qquad \varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (2) \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3)$$

σ – tensão normal à seção transversal;
E – módulo de elasticidade;
ε – deformação longitudinal;
M – momento fletor;
dx – comprimento longitudinal infinitesimal;
Δdx – variação do comprimento logitudinal inf.;
y – distância das fibras até a linha neutra;

Linha Elástica (3)



$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (1) \qquad \varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (2) \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3)$$

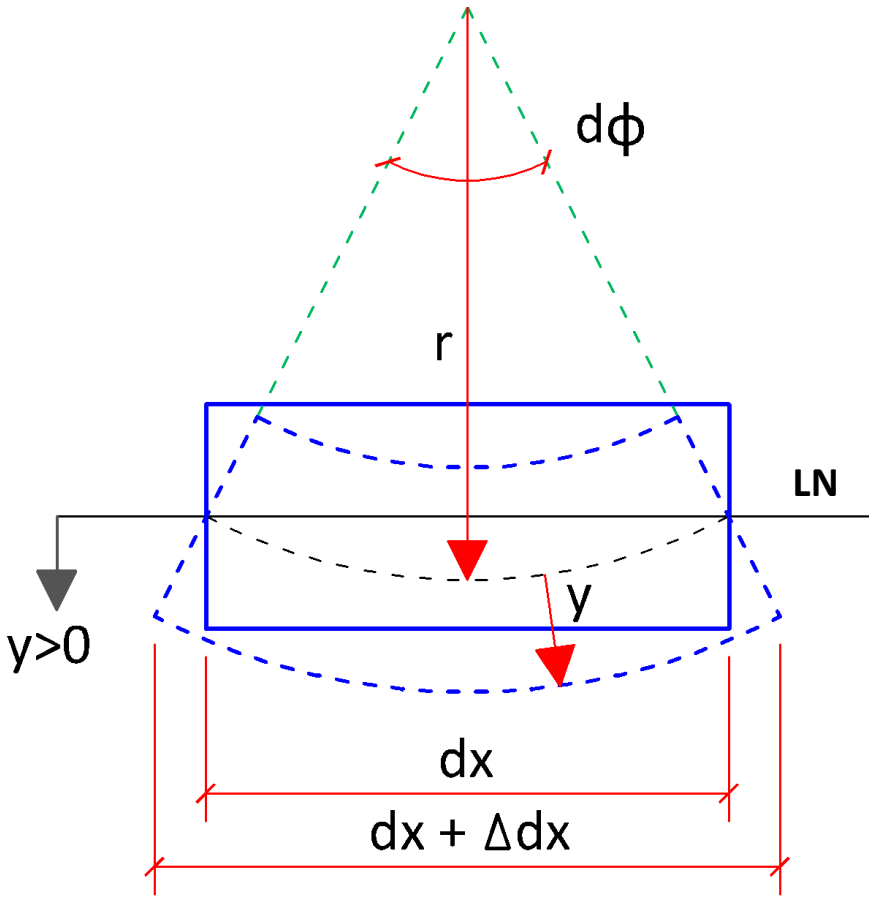
Substituindo (1) e (2) em (3) temos:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{My}{IE}$$

Trocando as posições de dx (inf.) e y:

$$\frac{\Delta dx}{y} = \frac{Mdx}{IE}$$

Linha Elástica (4)



$$\frac{\Delta dx}{y} = \frac{M dx}{IE}$$

Da figura ao lado pode-se escrever:

$$d\varphi = \frac{dx}{r} = \frac{\Delta dx}{y}$$

Logo:

$$\frac{\Delta dx}{y} = \frac{dx}{r} = \frac{M dx}{IE}$$

E ainda:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

Linha Elástica (5)

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

Nesta expressão o termo $\frac{1}{r}$ é definido como **curvatura**, ou seja, **curvatura é de fato o inverso do raio de curvatura**;

Nos livros de cálculo diferencial e integral a definição matermática de curvatura em coordenadas cartesianas é dada por :

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Entretanto, considerando que na Teoria das Estruturas são considerados apenas "pequenos deslocamentos" o quadrado de dv/dx é desprezível a parte inferior da expressão acaba reduzida ao valor 1:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{1^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2v}{dx^2}$$

Linha Elástica (6)

Assim sendo:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{d^2v}{dx^2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

- Saliente-se que “v” é uma função matemática que representa as deflexões de cada um dos infinitos pontos “x” ao longo da linha neutra de uma viga.

- Por fim, temos que:

$$M(x) = EI.\frac{d^2v(x)}{dx^2}$$

Linha Elástica (7)

- Consequentemente:

$$v(x) = deflexões\ \ dos\ pontos\ \ da\ \ linha\ \ elástica\ \ da\ \ viga$$

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = v(x)' = inclinações\ (rotações)\ \ dos\ pontos\ da\ linha\ elástica$$

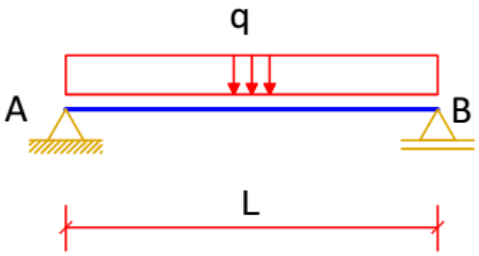
$$M(x) = EI\ \frac{d^2v(x)}{dx^2} = EI\ v(x)'' = eq.\ de\ Momentos\ Fletores$$

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \ EI\ \frac{d^3v(x)}{dx^3} = EI\ v(x)''' = eq.\ de\ Esforços\ Cortantes$$

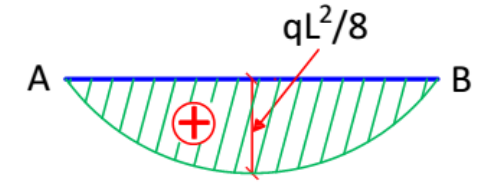
$$q(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -EI\ \frac{d^4v(x)}{dx^4} = -EI\ v(x)'''' = eq.\ do\ Carregamento$$

*** OBS: adotanto sistema de coordenadas destrógero**

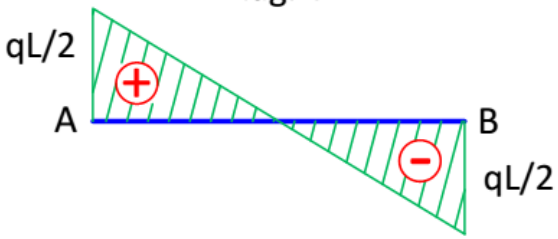
Vigas Bi-Apoiadas Básicas

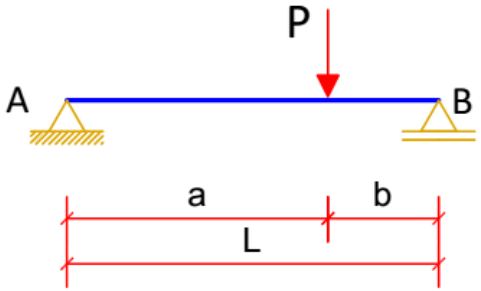


Diag. M

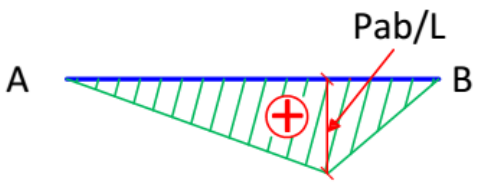


Diag. V

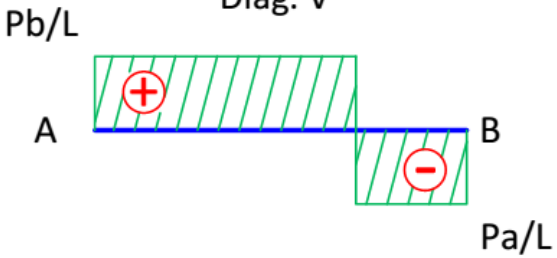


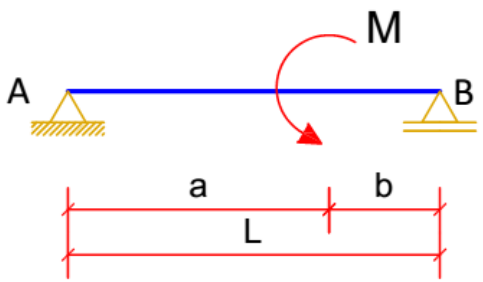


Diag. M

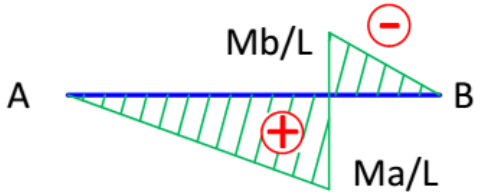


Diag. V

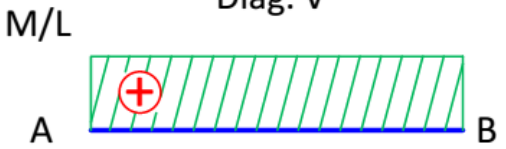




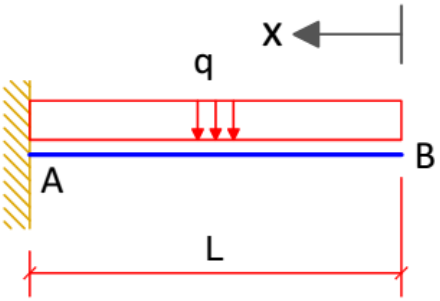
Diag. M

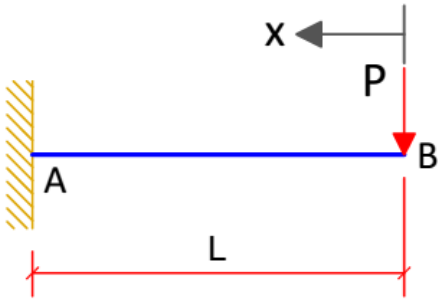


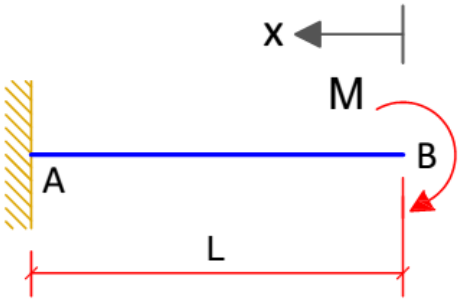
Diag. V

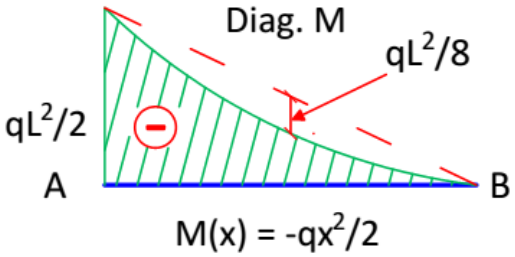


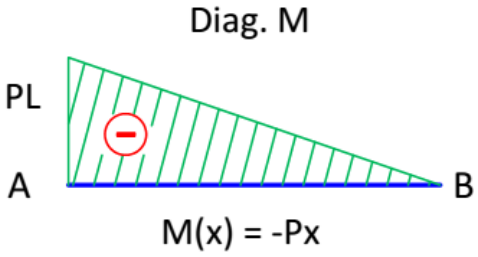
Vigas Engastadas Básicas

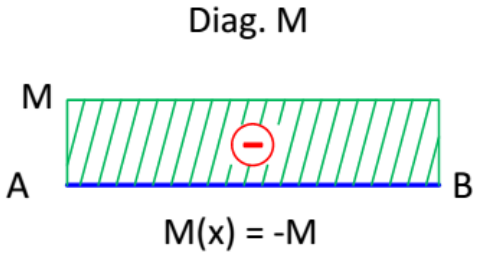


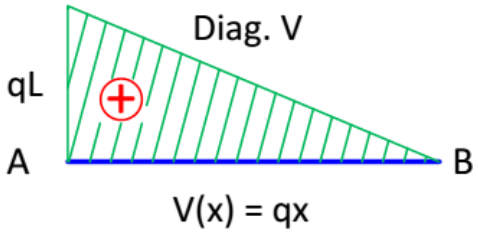


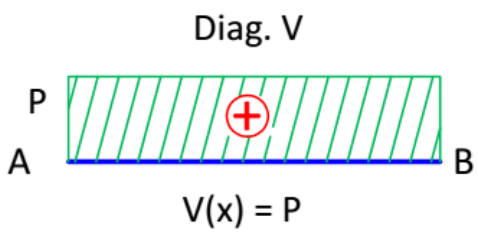


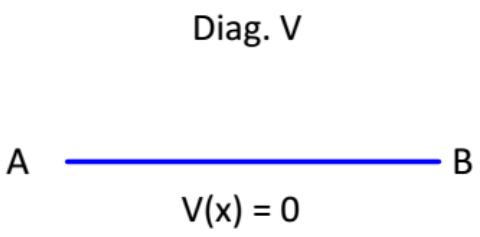












Universidade POSITIVO

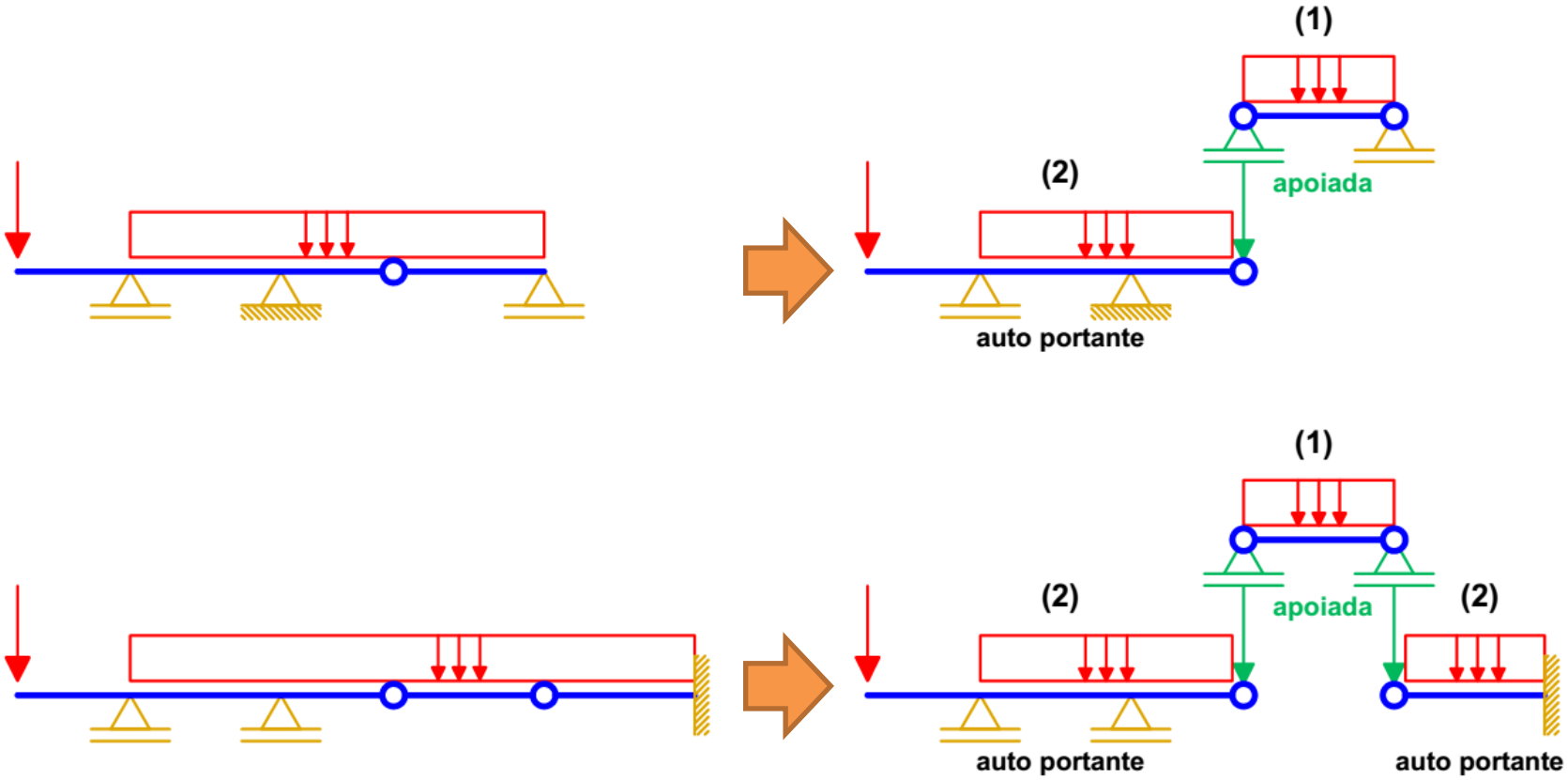
Aula 03 - Seção 03:
Vigas Gerber: Esquema Funcional

Vigas Gerber

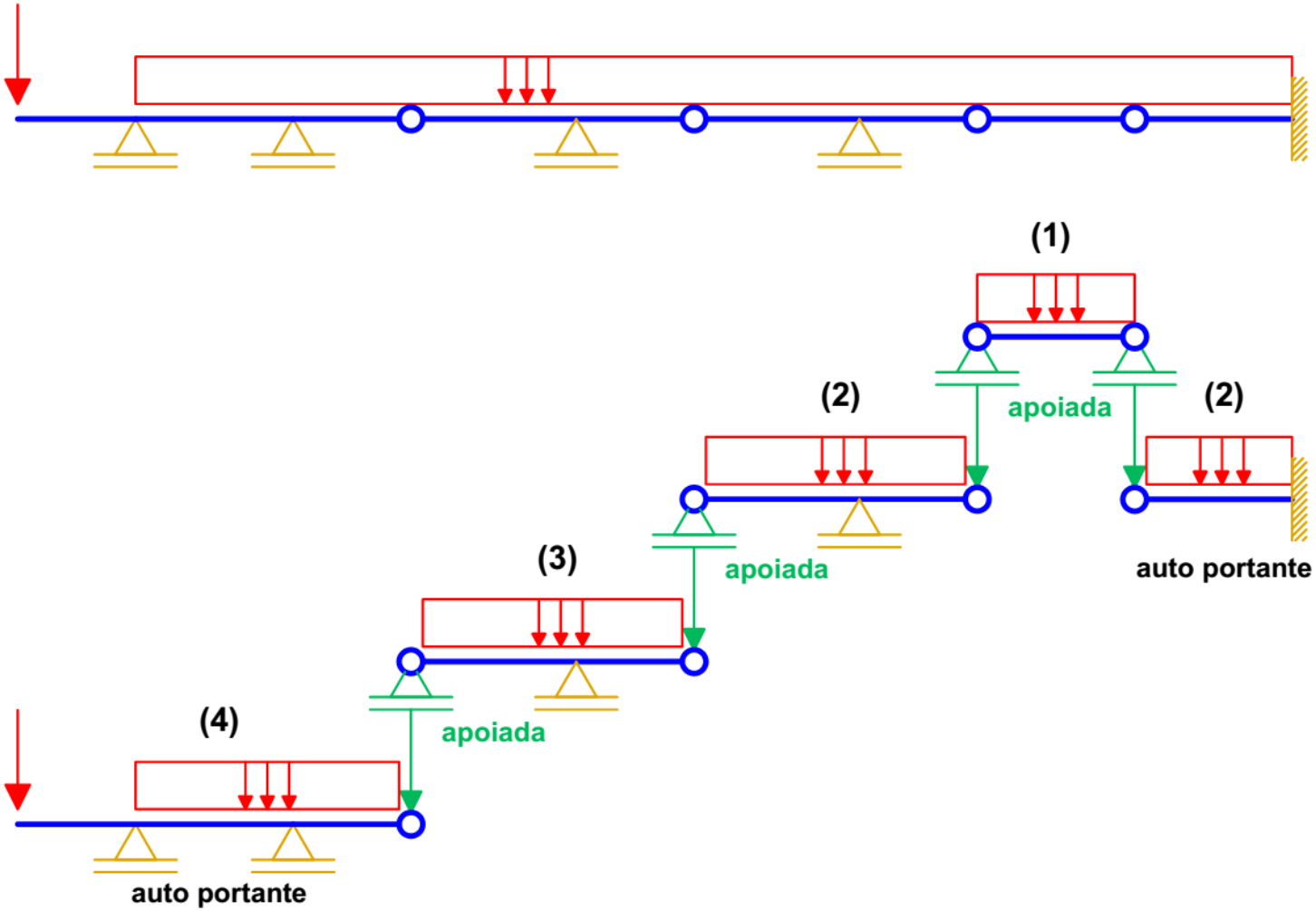
- Aplicação principal – **Pontes**;
- Surgiram por motivos de ordem estrutural e de ordem construtiva;
- Vigas Gerber Isostáticas serão **decompostas** nas diversas **vigas isostáticas simples** que as **constituem**:
- **Ideia básica do esquema funcional de uma viga Gerber:**
  - Vigas com **estabilidade própria**;
  - Vigas que **se apoiam sobre as demais**;
- **Premissa para determinação de esforços internos em vigas gerber:**

Começar pela viga apoiada mais dependente (a que não sirva de apoio para mais nenhuma outra)

Exemplo de Esquema de Decomposição (1)



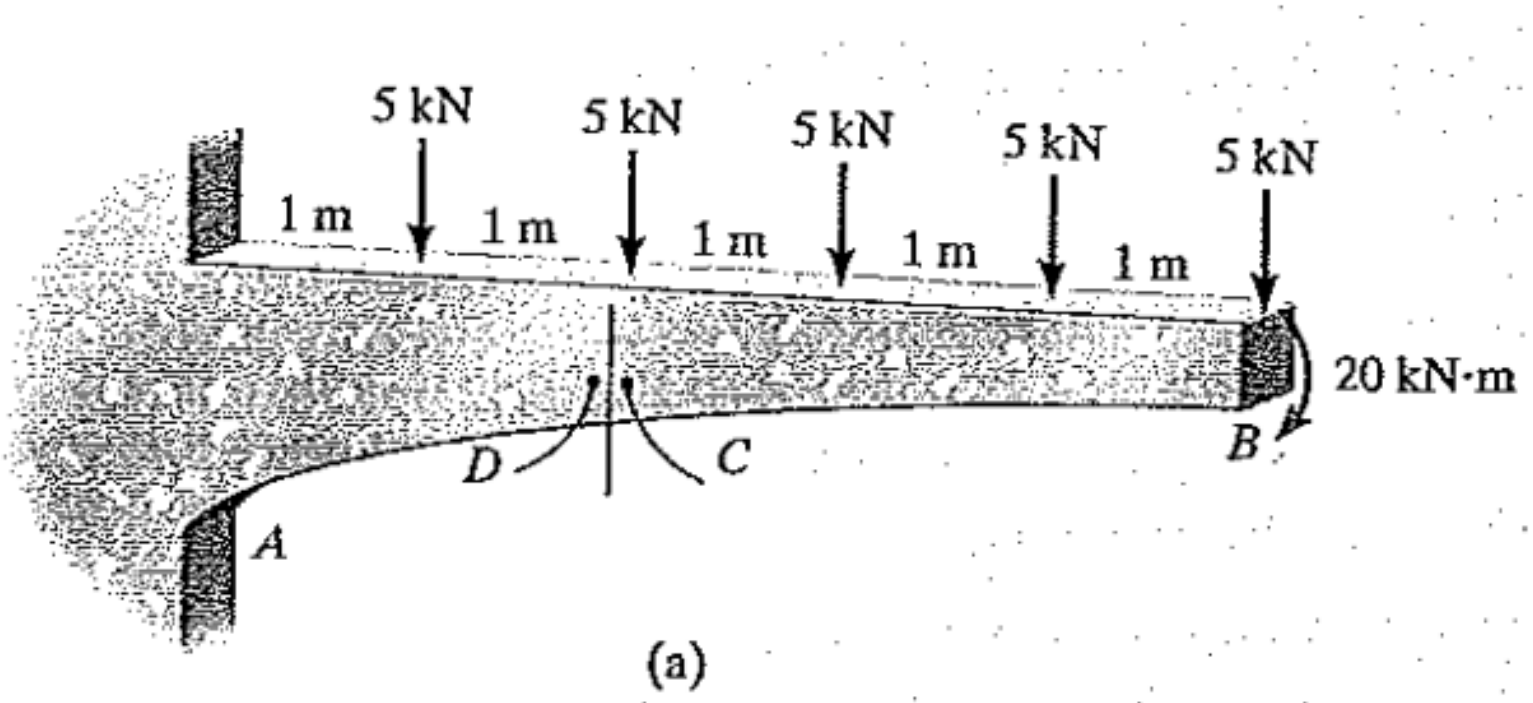
Exemplo de Esquema de Decomposição (2)



FIM

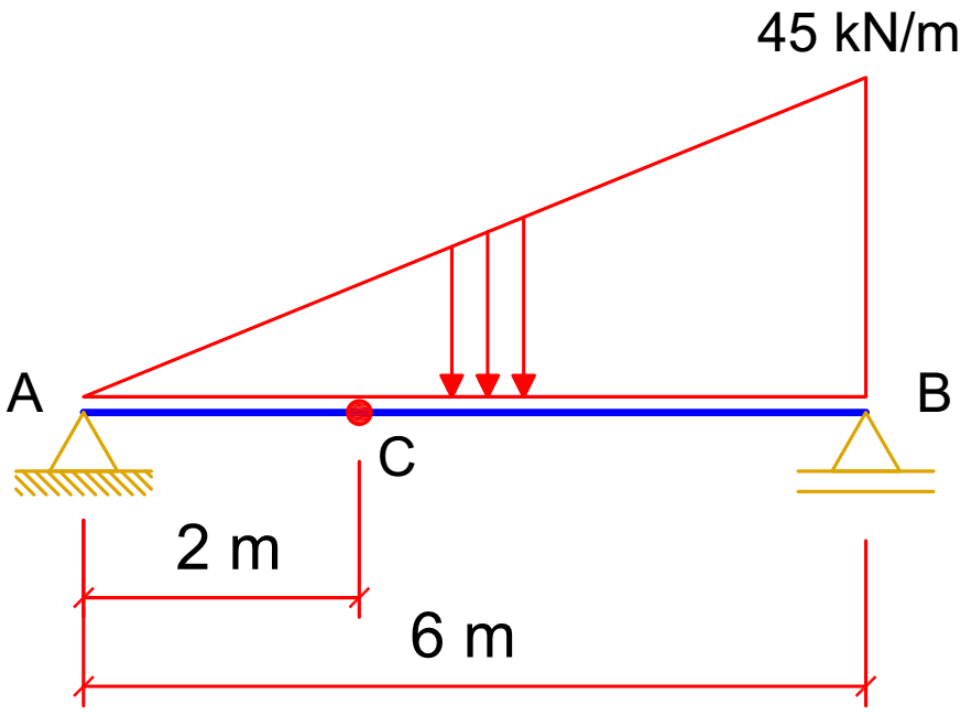
Exercício TE1-3.1

- Determine o momento fletor e o esforço cortante atuantes nas seções C e D da viga em balanço abaixo:



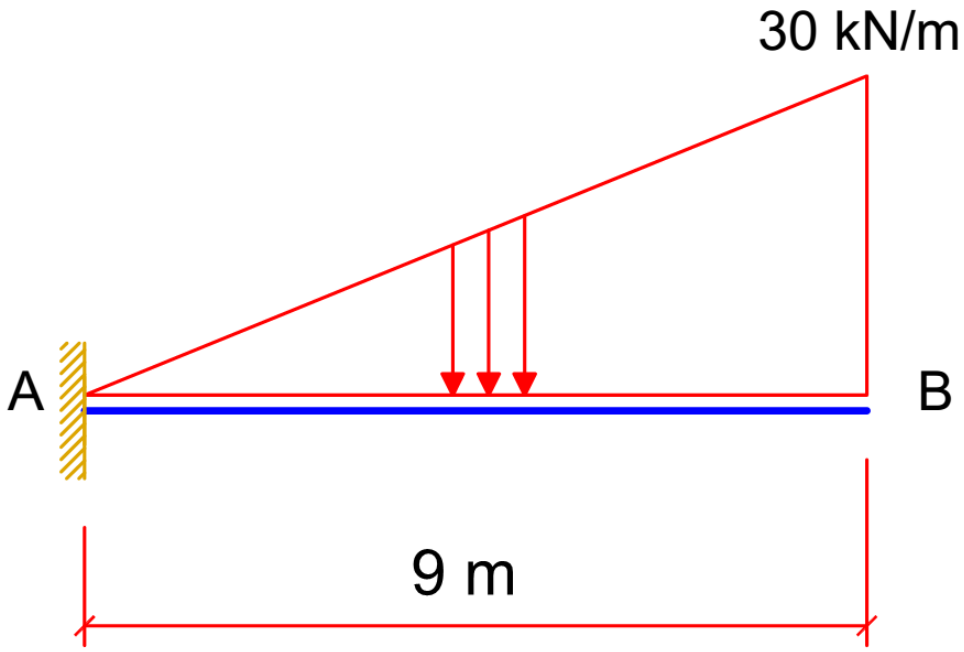
Exercício TE1-3.2

- Escreva o momento fletor e o esforço cortante atuantes na seção C da viga abaixo:



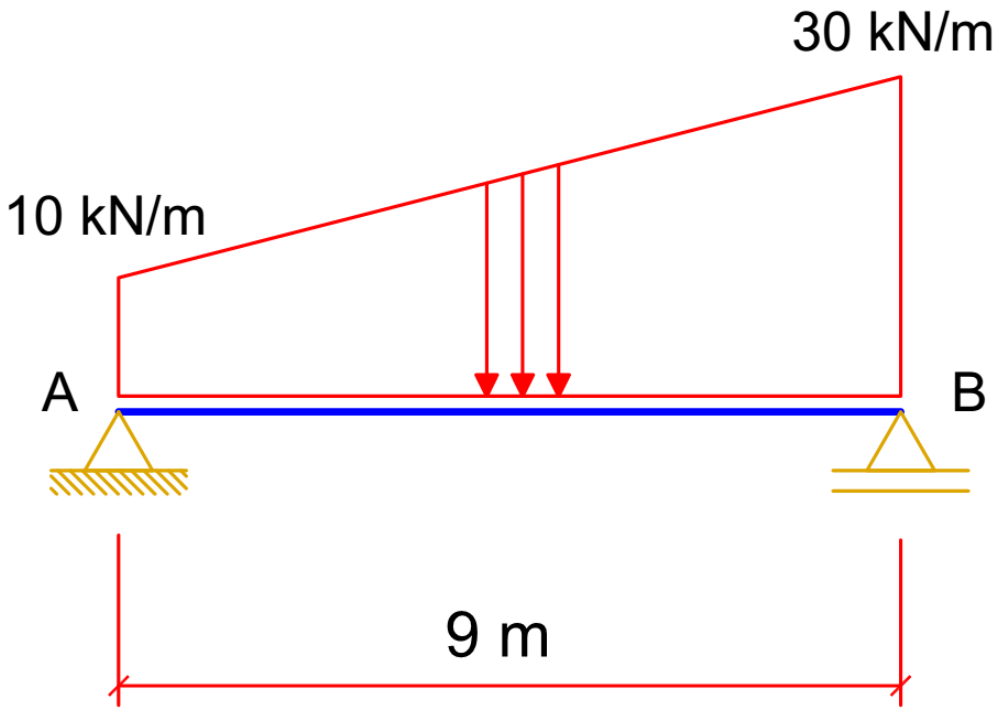
Exercício TE1-3.3

- Escreva as equações de momento fletor “M(x)” e esforço cortante “V(x)” para a viga abaixo:



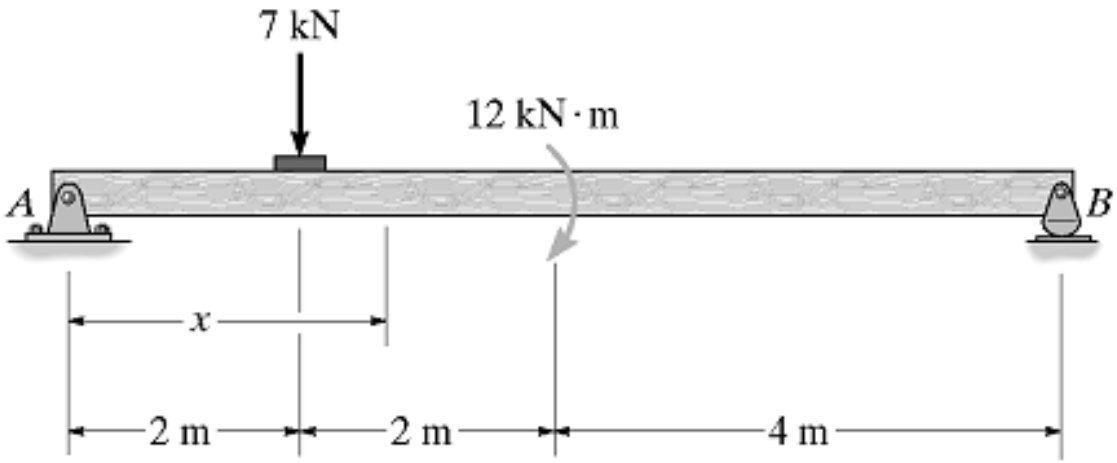
Exercício TE1-3.4

- Escreva as equações de momento fletor “M(x)” e esforço cortante “V(x)” para a viga abaixo:



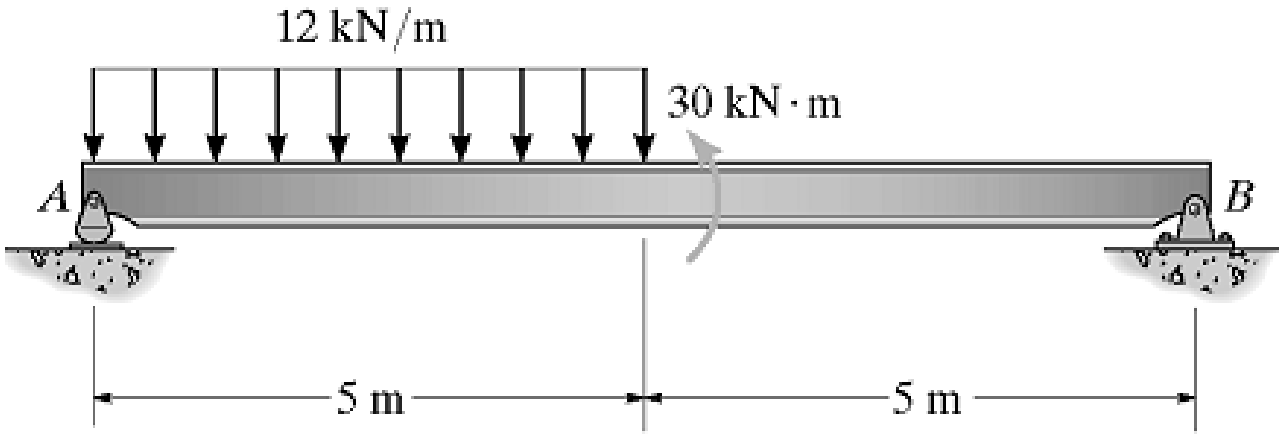
Exercício TE1-3.5

- Escreva as equações de momento fletor “M(x)” e esforço cortante “V(x)” para a viga abaixo:



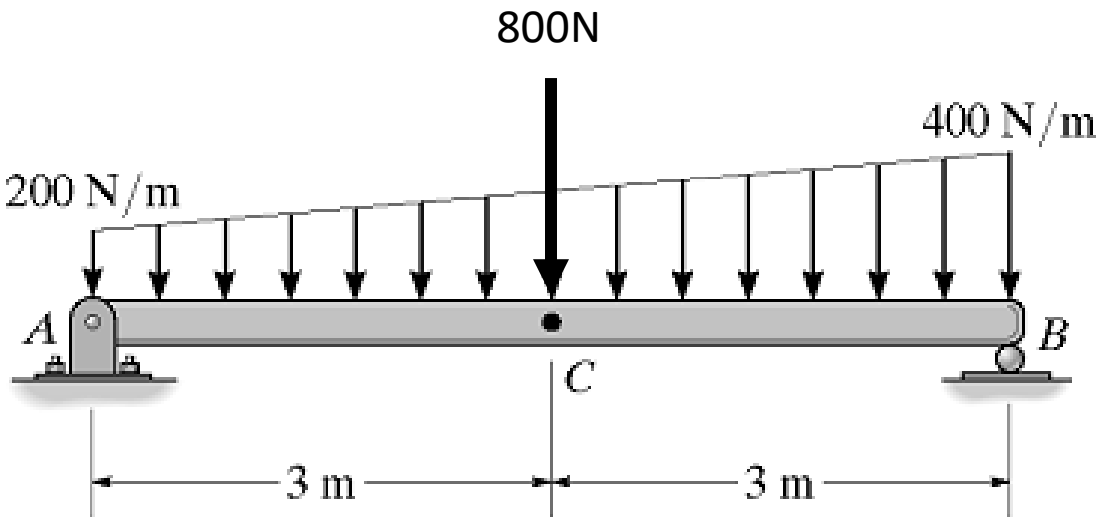
Exercício TE1-3.6

- Escreva as equações de momento fletor “M(x)” e esforço cortante “V(x)” para a viga abaixo:



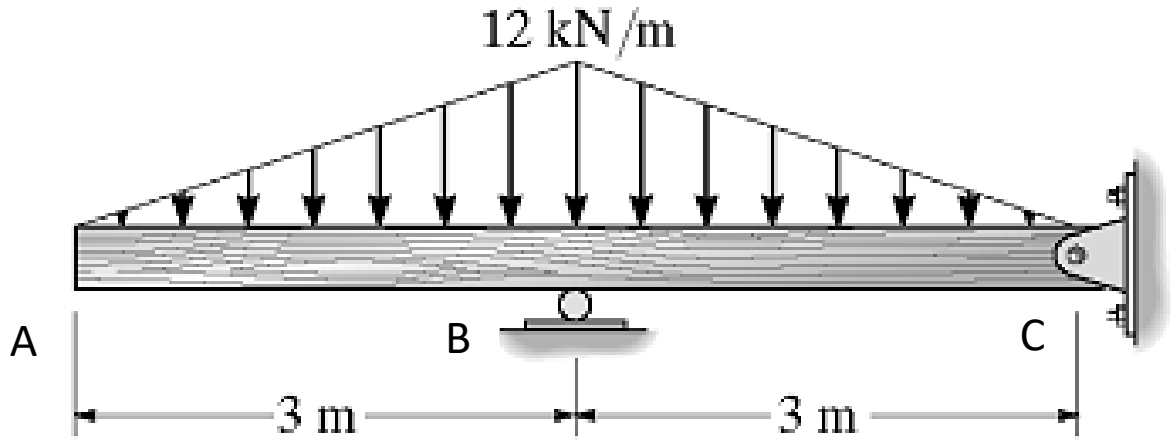
Exercício TE1-3.7

- Escreva as equações de momento fletor “M(x)” e esforço cortante “V(x)” para a viga abaixo:



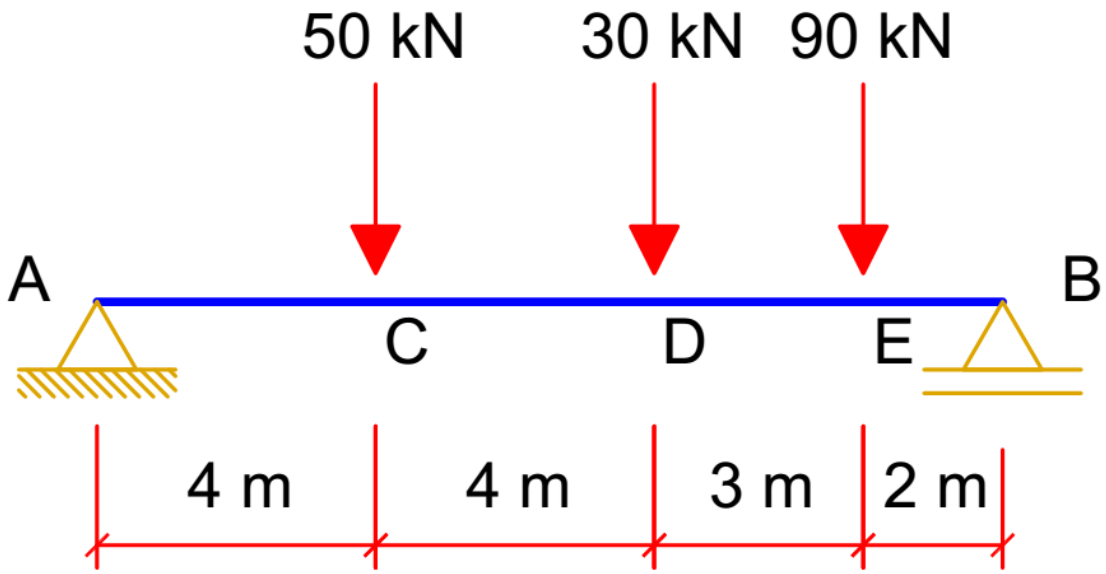
Exercício TE1-3.8

- Escreva as equações de momento fletor “M(x)” e esforço cortante “V(x)” para a viga abaixo:



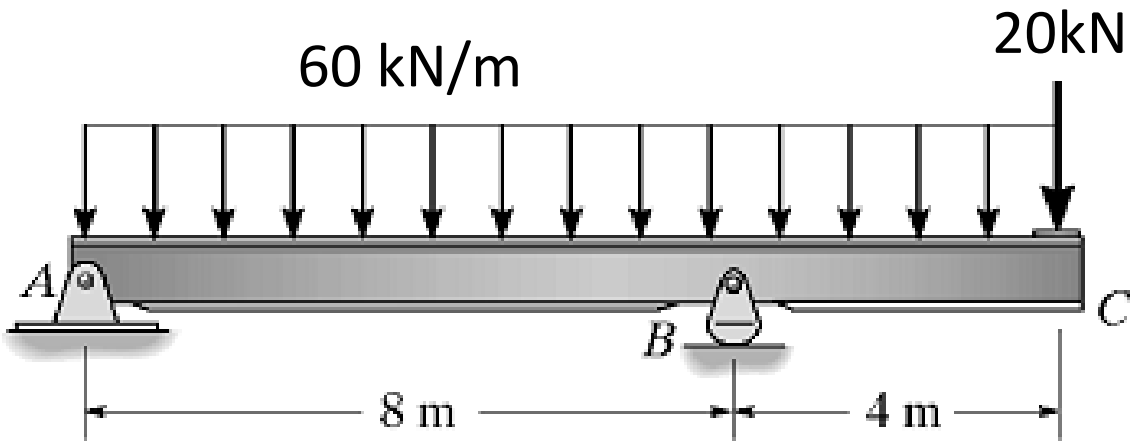
Exercício TE1-3.9

- Traçar o diagrama de momentos fletores para a viga abaixo utilizando o método da superposição:



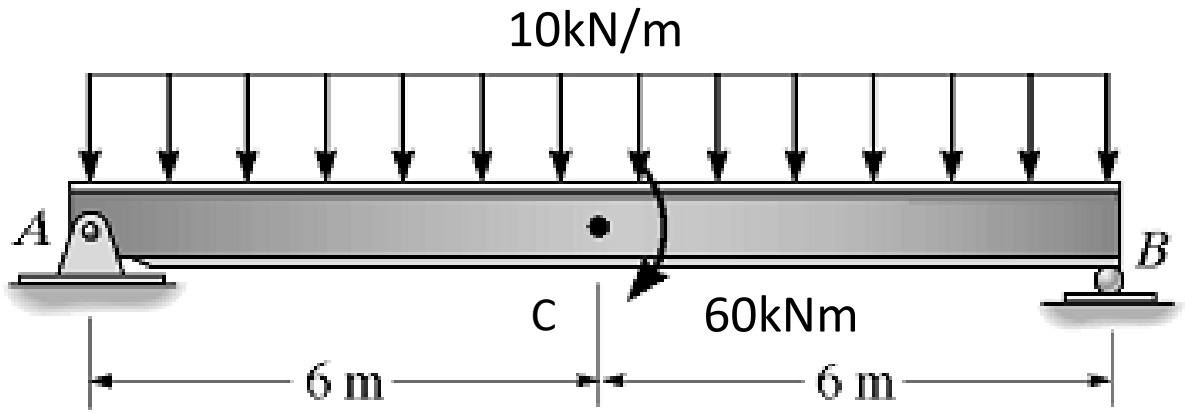
Exercício TE1-3.10

- Traçar o diagrama de esforços cortantes para a viga abaixo utilizando o método da superposição:



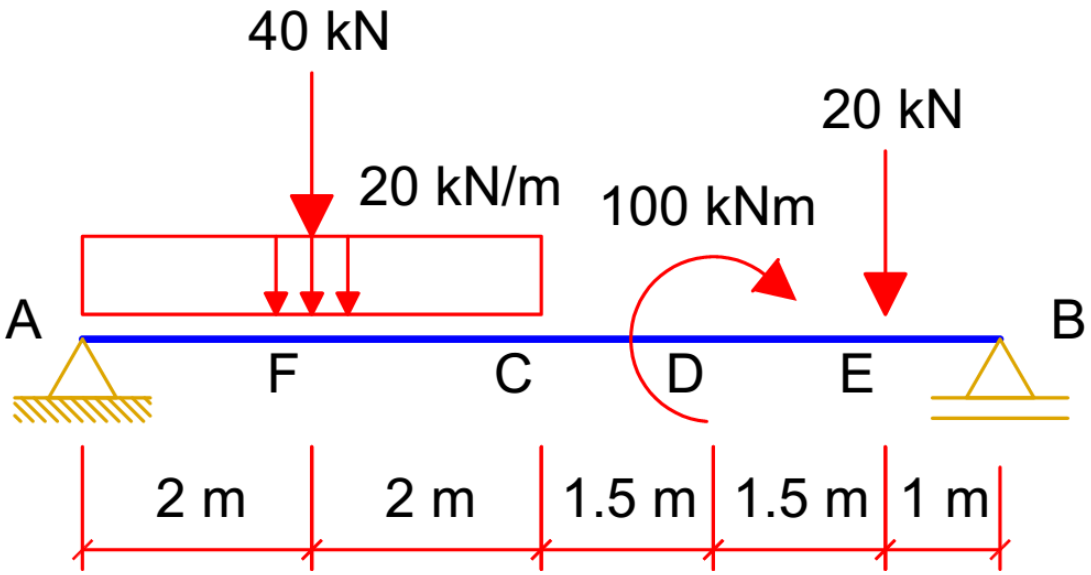
Exercício TE1-3.11

- Traçar o diagrama de momentos fletores para a viga abaixo utilizando o método da superposição:



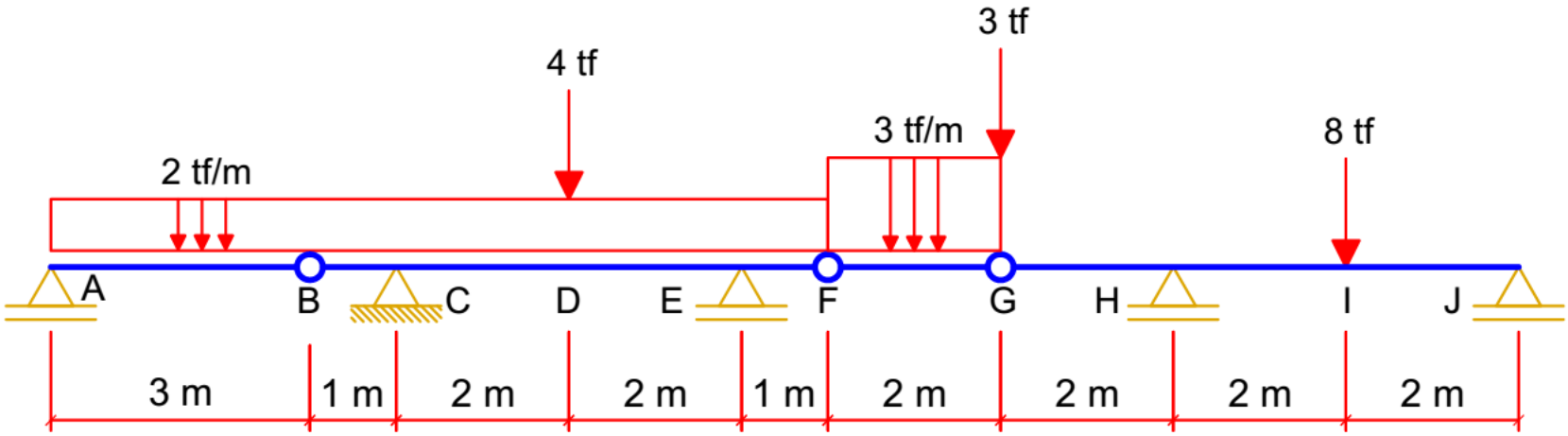
Exercício TE1-3.12

- Escreva as equações e trace os diagramas de momentos fletores e esforços cortantes para a viga abaixo:



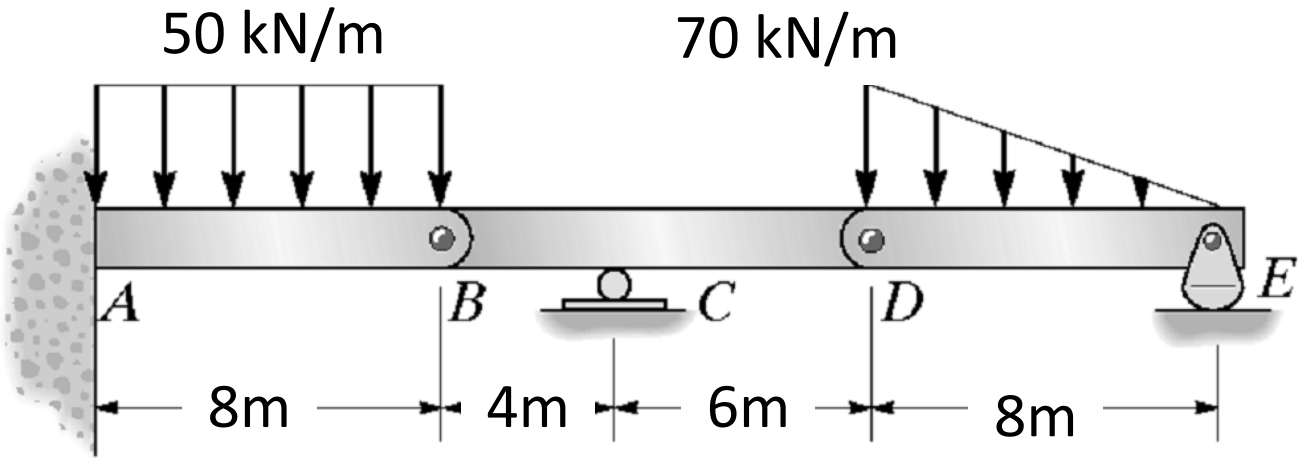
Exercício TE1-3.13

- Traçar o diagrama de momentos fletores para a viga Gerber abaixo utilizando o método da superposição:



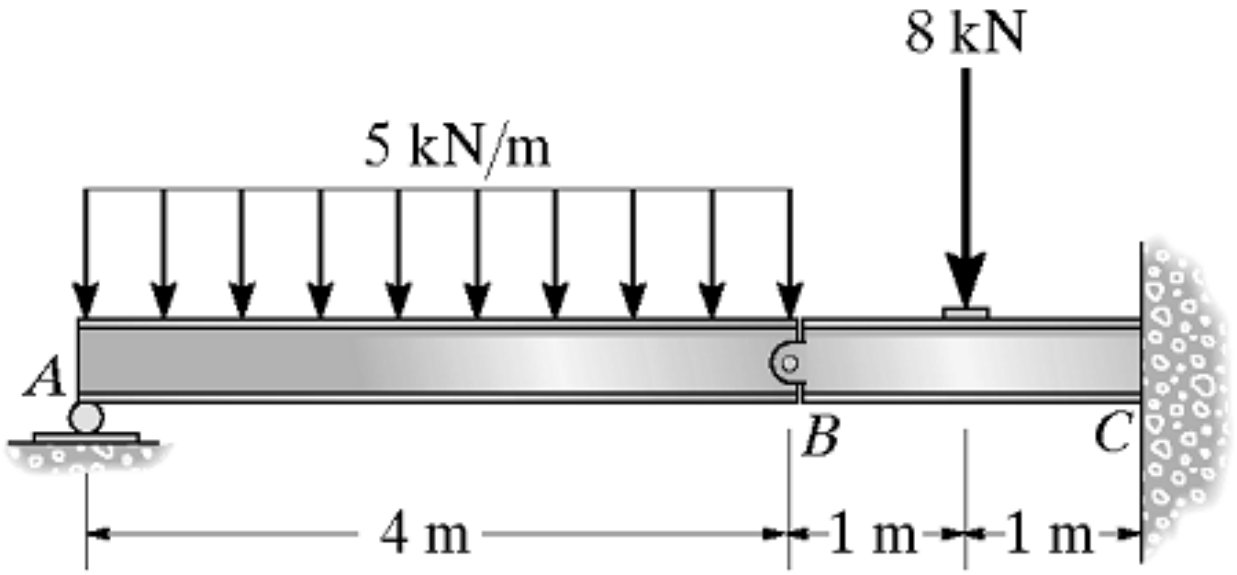
Exercício TE1-3.14

- Traçar o diagrama de momentos fletores para a viga Gerber abaixo:



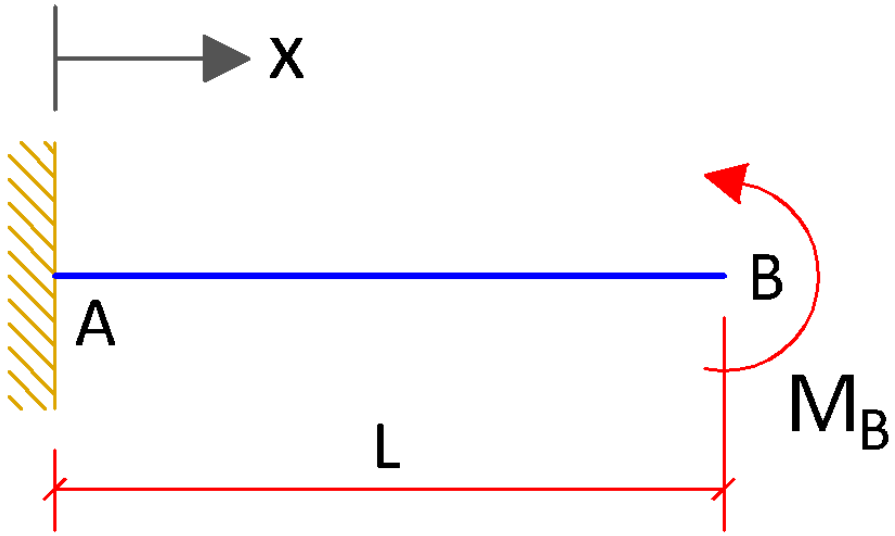
Exercício TE1-3.15

- Traçar os diagramas de momentos fletores e esforços cortantes para a viga abaixo:



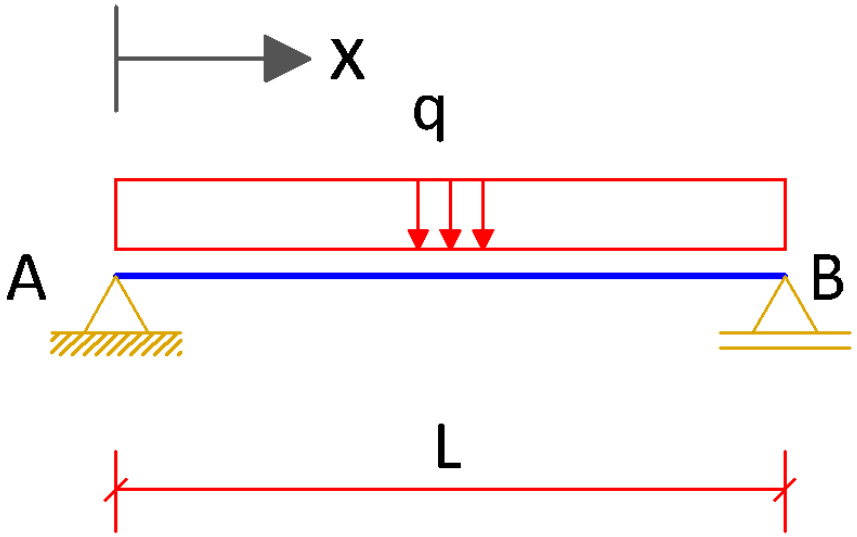
Exercício TE1-3.16

- Obter a equação da linha elástica:



Exercício TE1-3.17

- Obter a equação da linha elástica:



Exercício TE1-3.18

- Obter a equação da linha elástica:

