# Teoria das Estruturas I - Aula 07



## Arcos Isostáticos

- Definição e Tipos
- Casos Particulares de Arcos
- Equação do Arco Parabólico de 2º. Grau, Equação da Linha de Pressões e Arcos com Apoios Desnivelados

***Prof. Juliano J. Scremin***

Universidade POSITIVO

Universidade POSITIVO

# Aula 07 - Seção 1: Definição e Tipos

# Arcos (1)

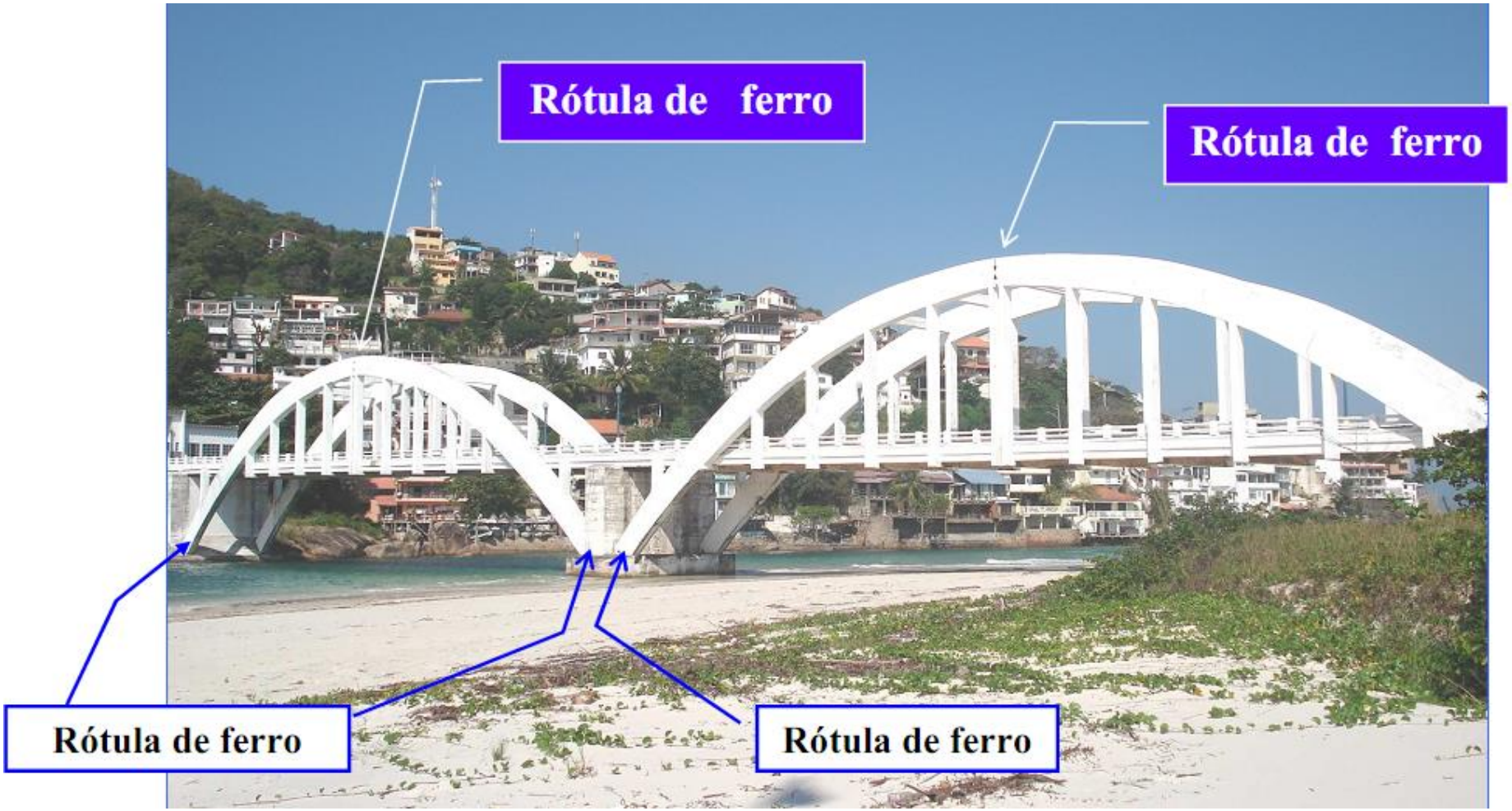
- **Definição:**

  – Arco é uma **estrutura linear de eixo curvo**, situada em um plano vertical, vinculada em suas extremidades de modo a que estas não sofram translações, solicitada por cargas contidas no plano referido, provocando esforços de compressão, flexão e cisalhamento.

- **Arco Triarticulado** : arco isostático, com apoios fixos e descontinuidade interna do tipo rótula.

- **Objetivo dos arcos: → vencer grandes vãos com a redução dos esforços de flexão.**

# Arcos (2)


Rótula de ferro
Rótula de ferro
Rótula de ferro
Rótula de ferro

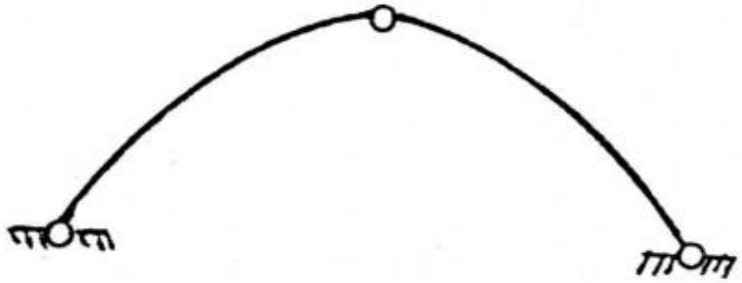
# Arcos (3)



# Tipos de Arcos



**Biengastado**



**Triarticulado**

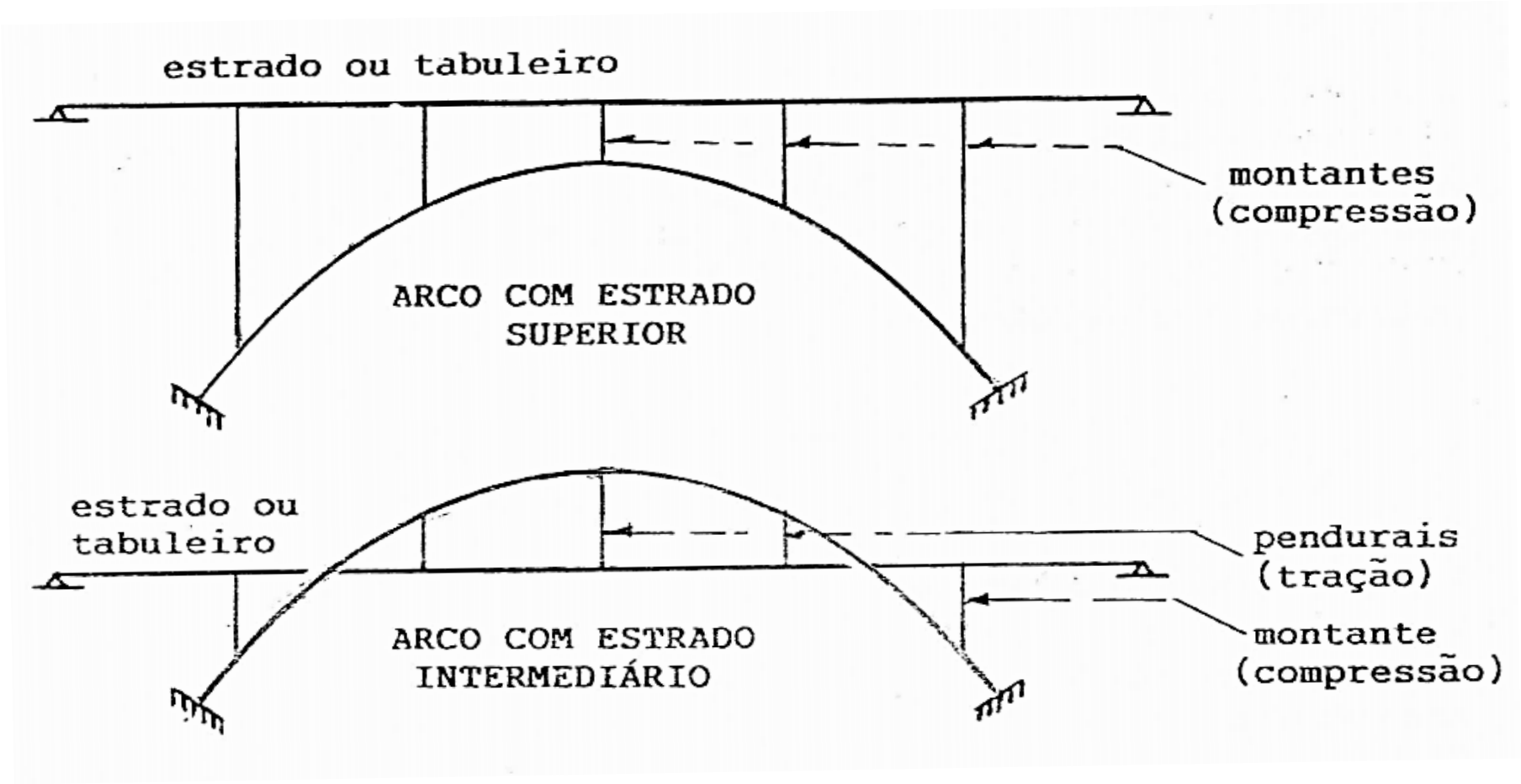


**Biarticulado**

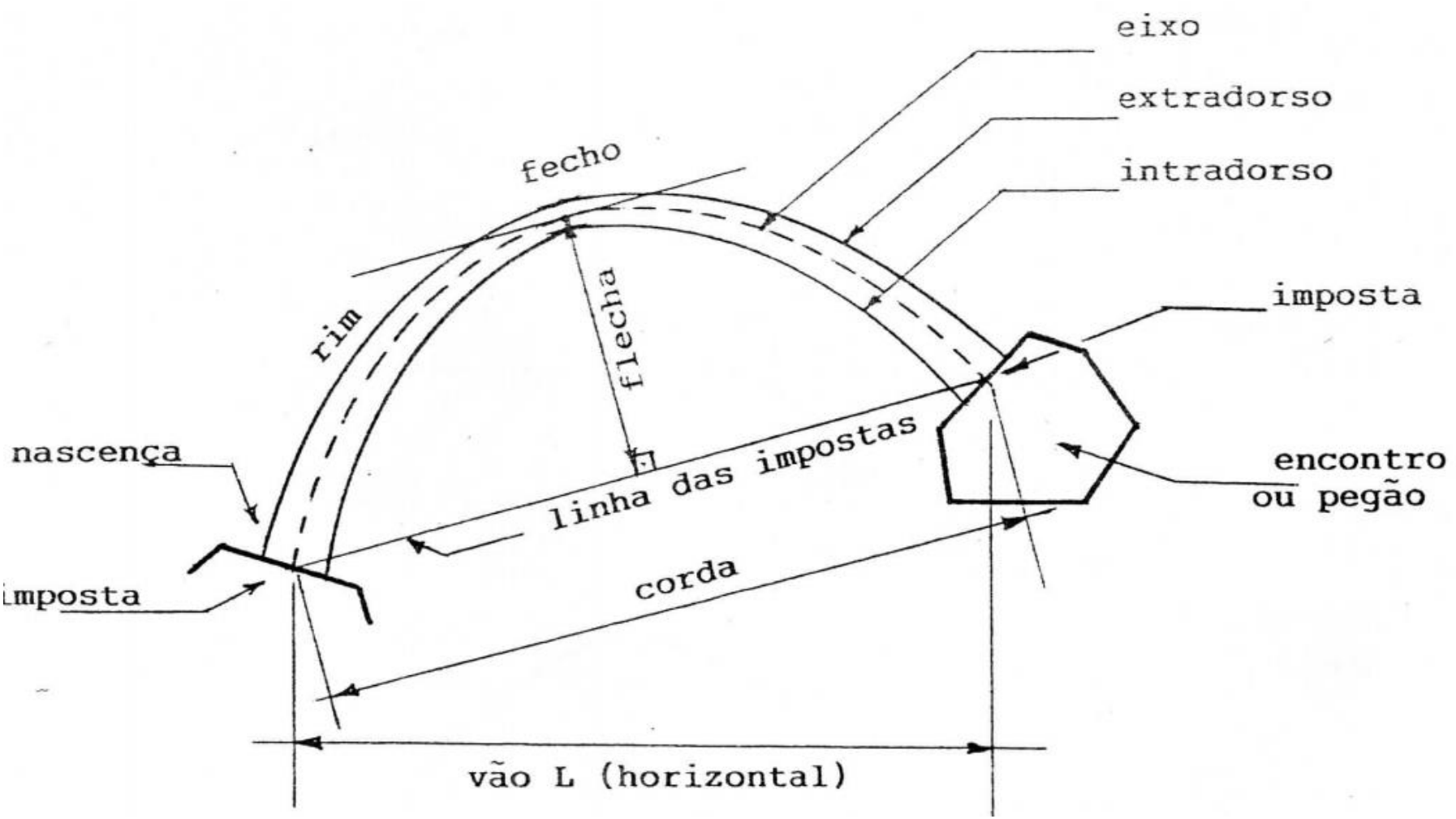


**Viga Curva**

# Exemplos de Utilização



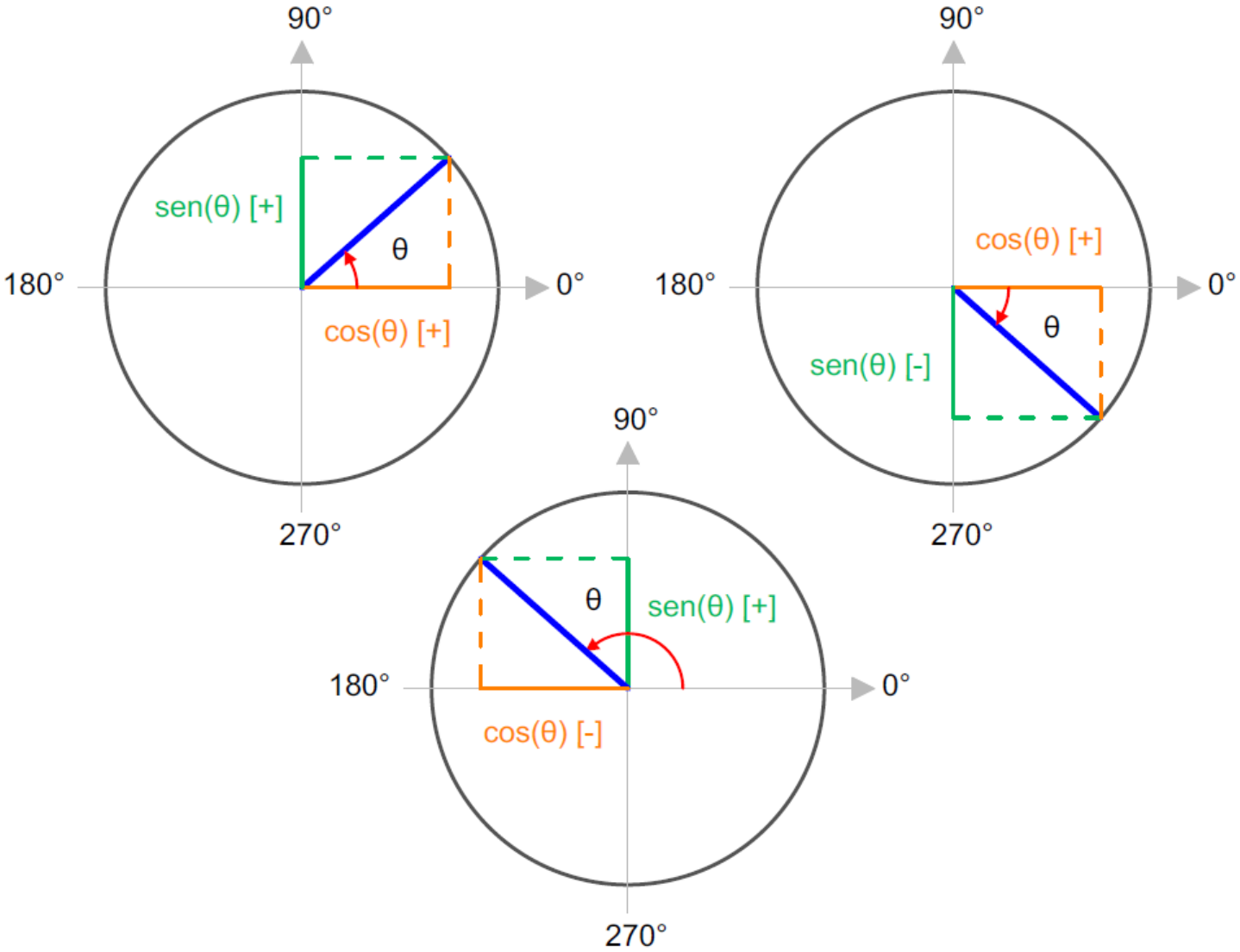
# Nomenclatura



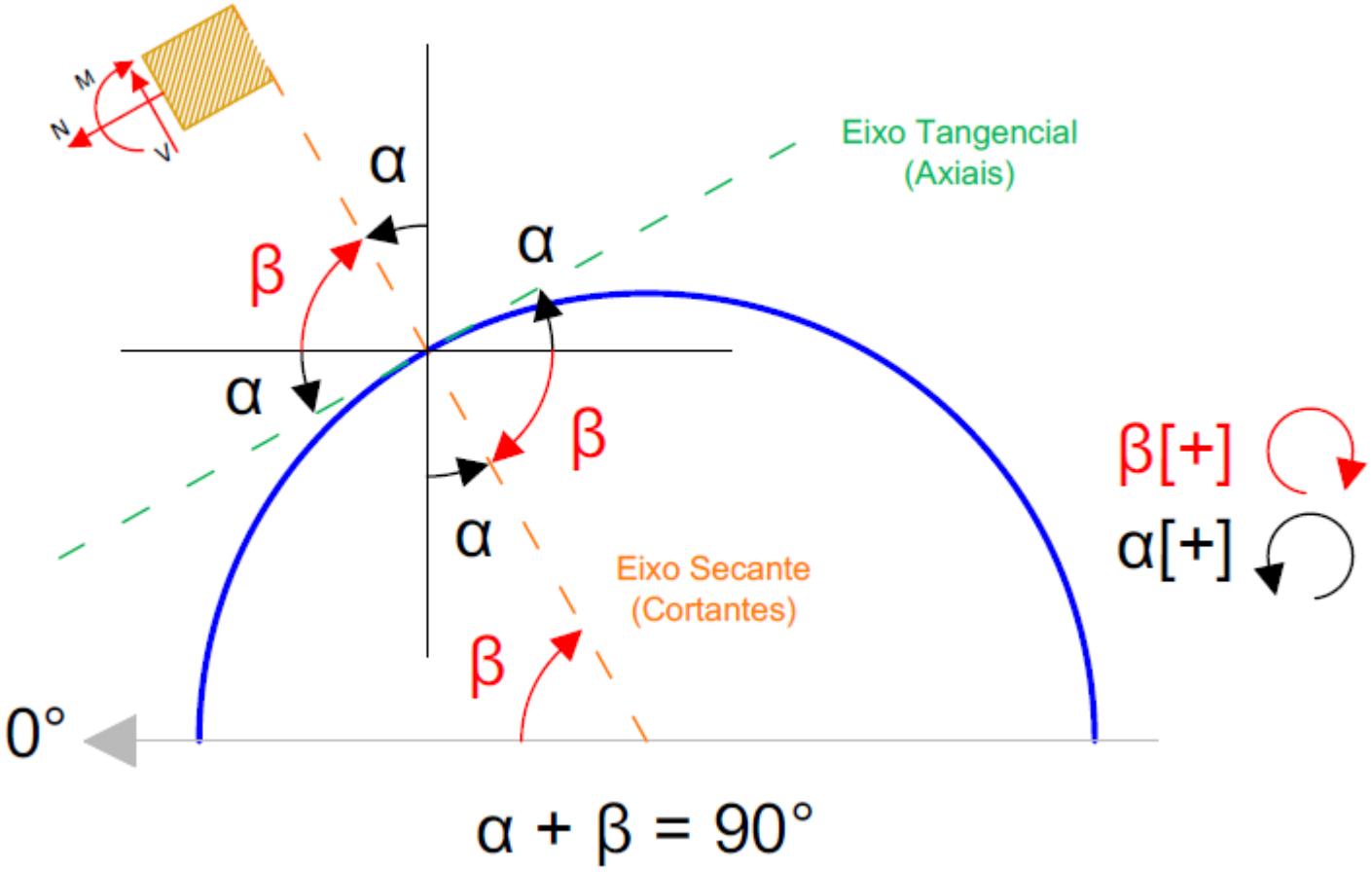
Universidade POSITIVO

# Aula 07 - Seção 2: Arcos Circulares

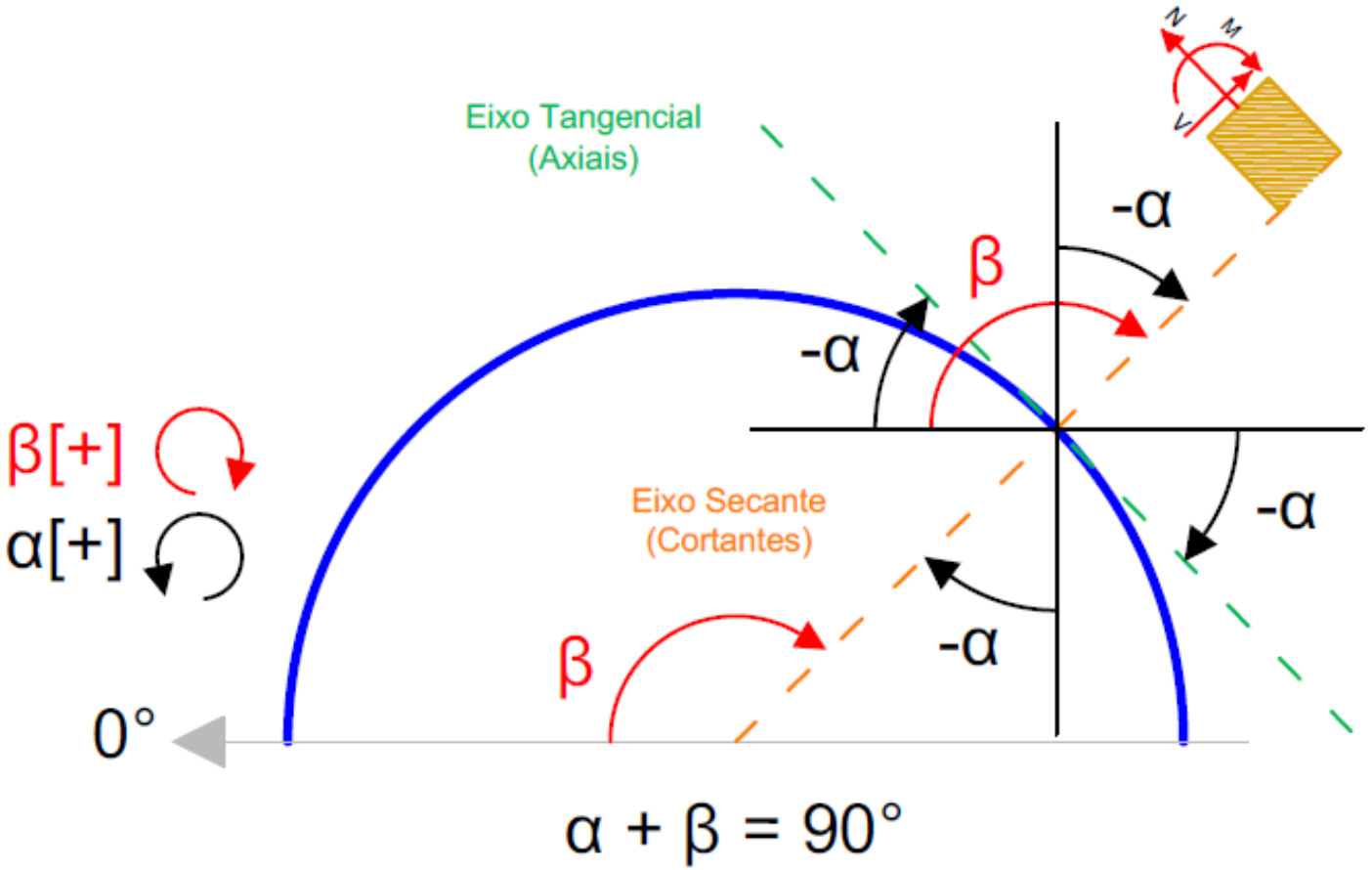
# Revisão do Círculo Trigonométrico



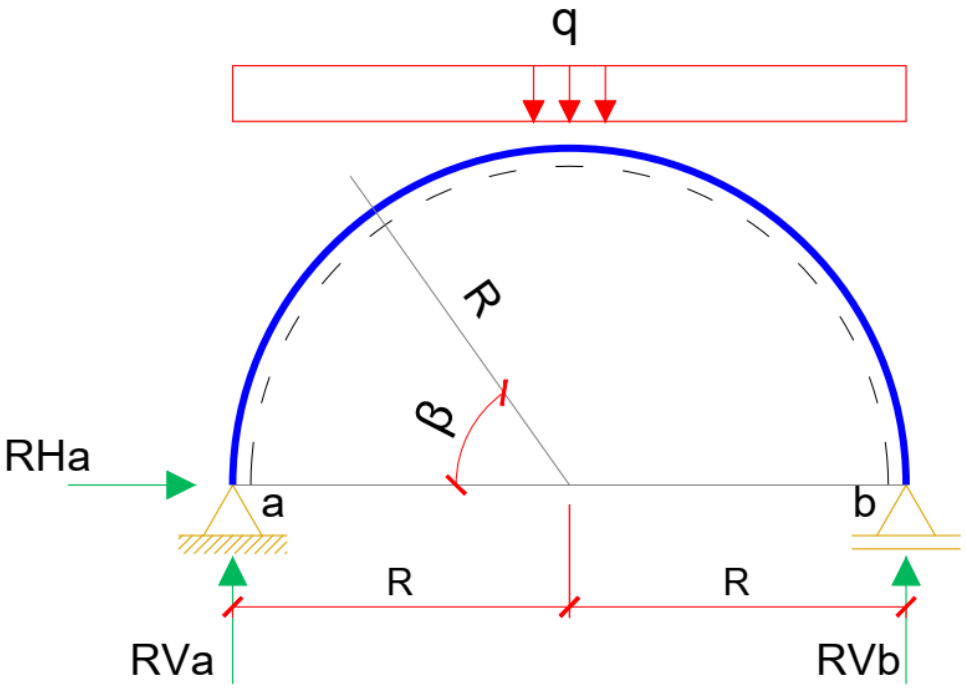
# Mapeamento de Arcos Circulares (1)

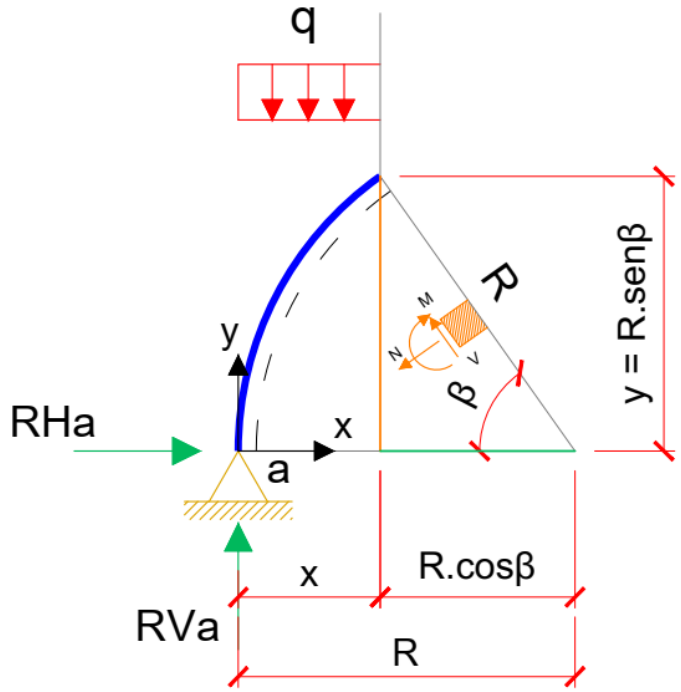


# Mapeamento de Arcos Circulares (2)



# Barras Curvas Carregadas Verticalmente



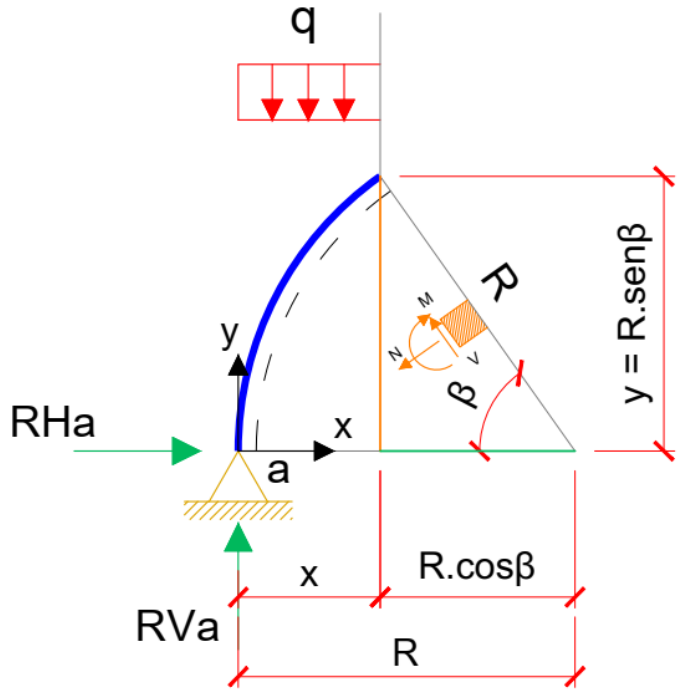

$$M(\beta) = M_h(x) + M_v(y) \begin{cases} M_h(x) = RVa.x - \dfrac{q.x^2}{2} \\ M_v(y) = -RHa.y \end{cases}$$

# Barras Curvas Carregadas Verticalmente: Momentos Fletores

$$x = R - R.cos\beta \qquad y = R.sen\beta$$

$$M_h(x) = RVa.x - \frac{q.x^2}{2}$$

$$M_h(\beta) = RVa.(R - Rcos\beta) - \frac{q.(R - Rcos\beta)^2}{2}$$



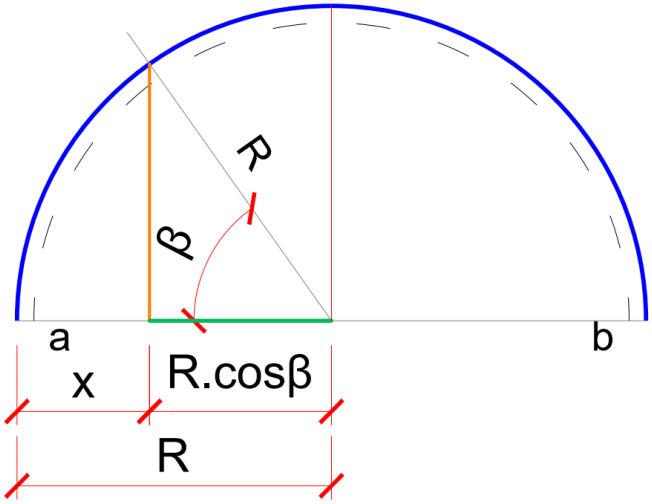

$$M_v(y) = -RHa.y$$

$$M_v(\beta) = -RHa.R.sen\beta$$

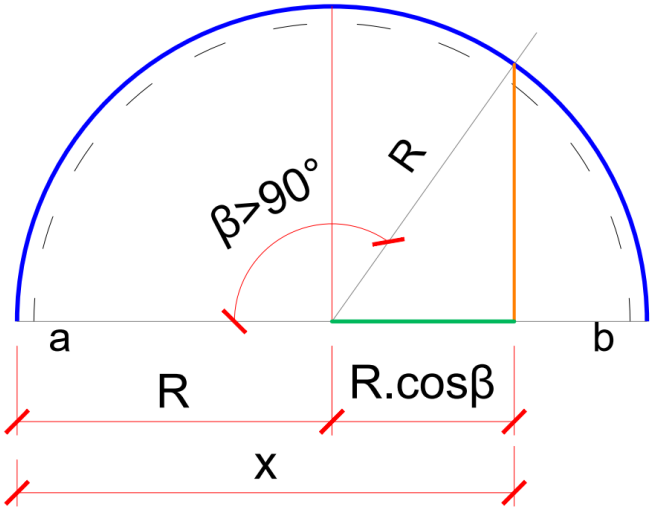
$$M(\beta) = M_h(x) + M_v(y)$$

$$M(\beta) = RVa.(R - Rcos\beta) - \frac{q.(R - Rcos\beta)^2}{2} - RHa.R.sen\beta$$

# Barras Curvas: 90° < $\beta$ < 180°




$$x = R\ - R.cos\beta$$




$$x = R + R.cos\beta$$

**Conclusão:**
Em arcos circulares a distância "x" é medida sempre com a mesma expressão, logo o equacionamento do momento fletor não se altera com a variação angular de $\beta$

porém, para $90° < \beta < 180°$ tem-se que $cos\beta < 0\ \ (-)$ logo:

$$x = R - R.cos\beta$$

$$M(\beta) = RVa.(R - Rcos\beta) - \frac{q.(R - Rcos\beta)^2}{2} - RHa.R.sen\beta$$

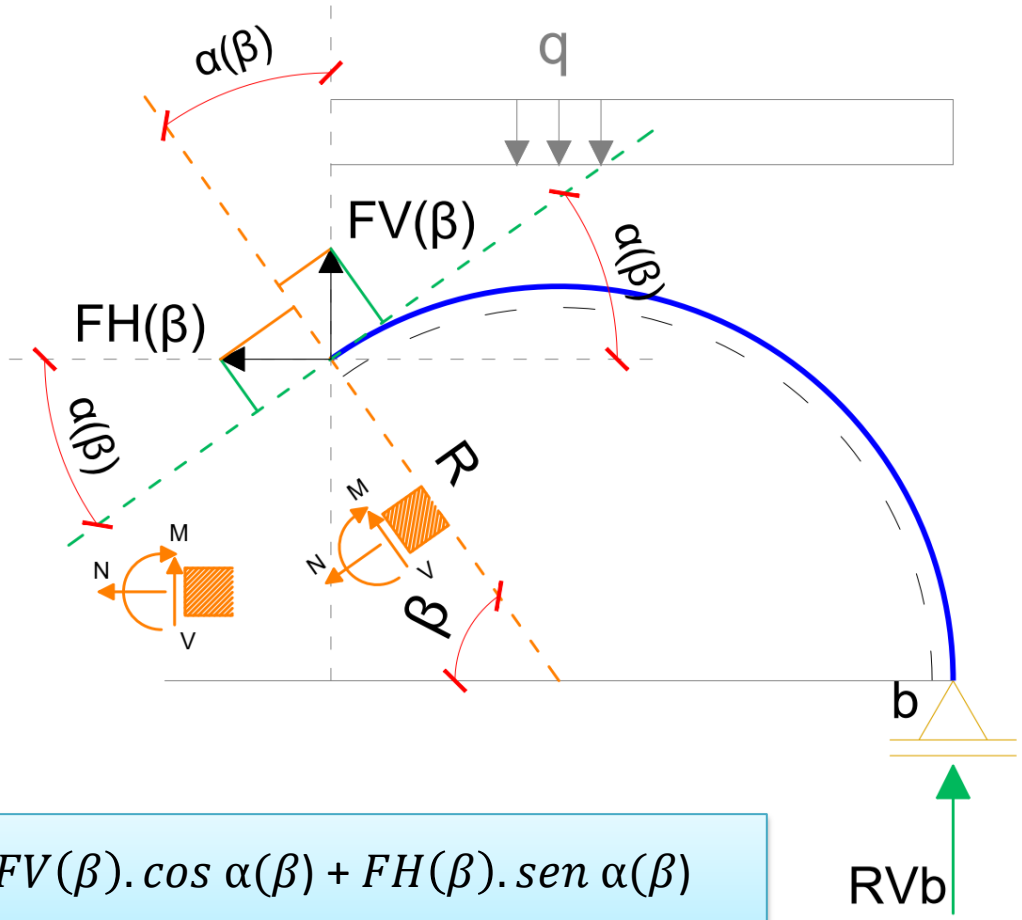
# Barras Curvas Carregadas Verticalmente: Cortante e Axial

$$\alpha + \beta = 90° = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha°(\beta°) = 90° - \beta°$$

$$\alpha(\beta) = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\alpha(\beta°) = \frac{\pi}{2} - \beta°.\frac{\pi}{180}$$




$$V(\beta) = FV(\beta).cos\ \alpha(\beta) + FH(\beta).sen\ \alpha(\beta)$$

$$N(\beta) = -FV(\beta).sen\ \alpha(\beta) + FH(\beta).cos\ \alpha(\beta)$$

# Barras Curvas Carregadas Verticalmente: Cortante e Axial

Conforme a figura ao lado:

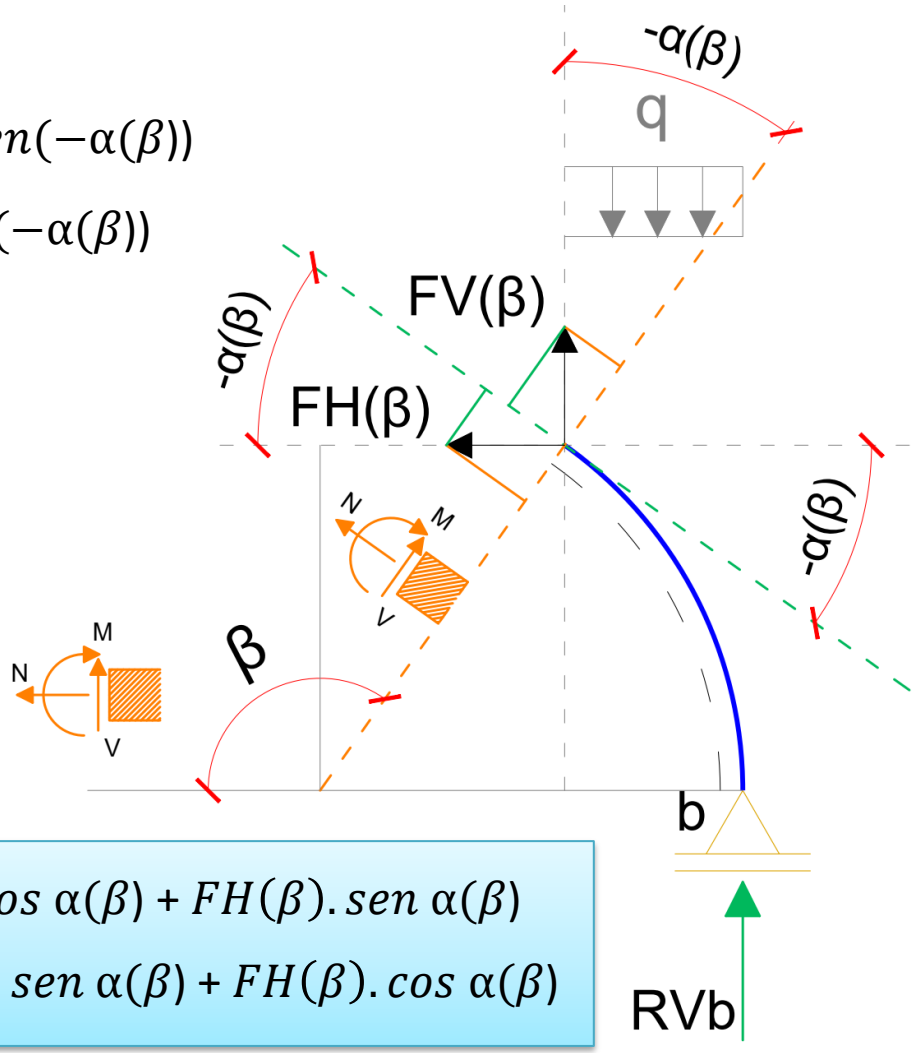
$$V(\beta) = FV(\beta).\cos(-\alpha(\beta)) - FH(\beta).sen(-\alpha(\beta))$$

$$N(\beta) = FV(\beta).sen(-\alpha(\beta)) + FH(\beta).cos(-\alpha(\beta))$$

Porém:

$\cos(-\alpha(\beta)) = \cos\alpha(\beta)$

$\text{sen}(-\alpha(\beta)) = -\text{sen}\,\alpha(\beta)$




**Conclusão:**

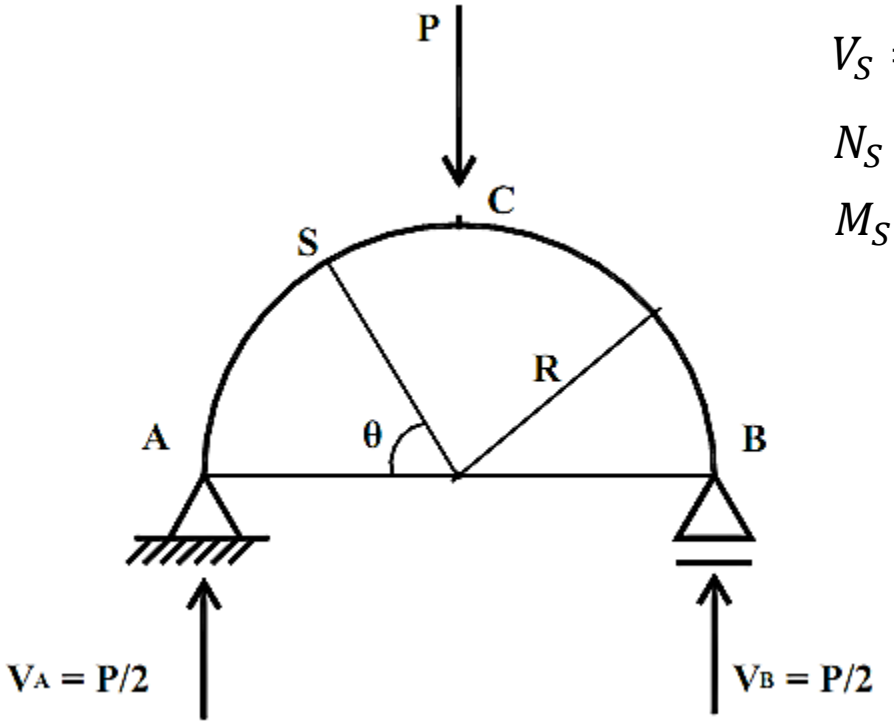
Mapeando cortante e axial com $\alpha(\beta)$
a variação angular não interfere na expressão
"enlatada" para decomposição de forças;

$$V(\beta) = FV(\beta).cos\,\alpha(\beta) + FH(\beta).sen\,\alpha(\beta)$$

$$N(\beta) = -FV(\beta).sen\,\alpha(\beta) + FH(\beta).cos\,\alpha(\beta)$$

# Viga Curva Biapoiada Carregada Verticalmente (1)

- Quando um arco é solicitado somente por cargas verticais, um recurso interessante é a utilização de uma viga análoga para auxílio no cálculo dos esforços**:**

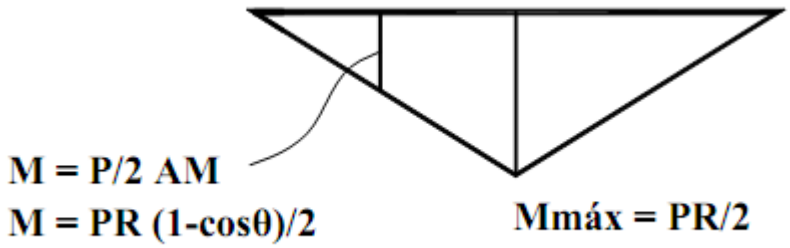



$$V_S = V_A sen\theta = P\ sen\theta/2$$

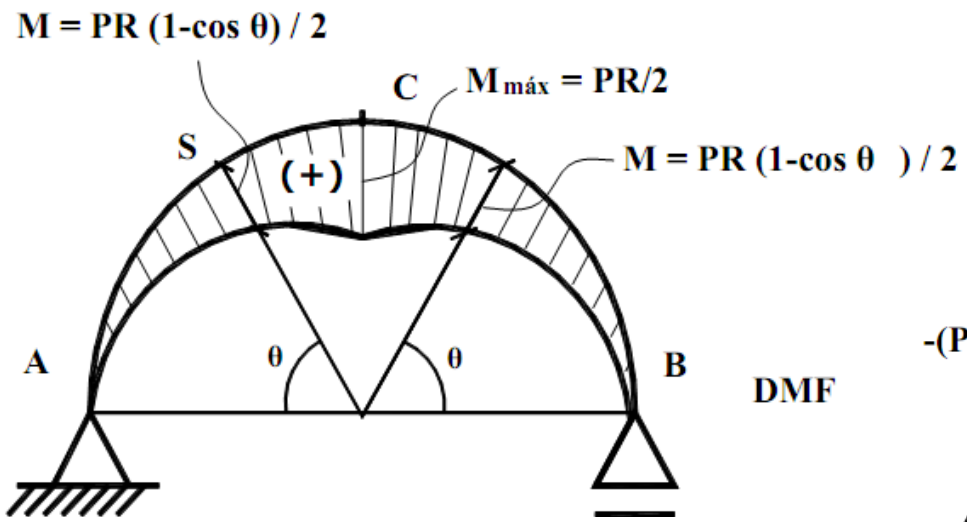
$$N_S = -V_A cos\theta = -P\ cos\theta/2$$

$$M_S = V_A(R\ - Rcos\theta) = PR(1\ - cos\theta)/2$$

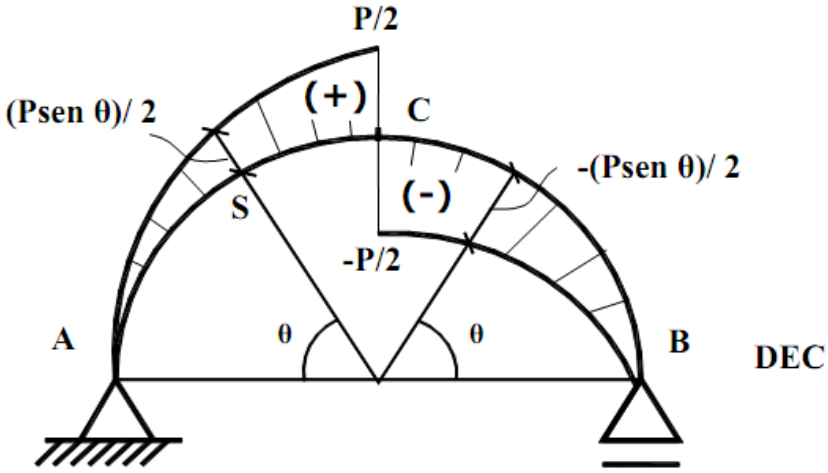
***Diagrama de Momentos Fletores de uma Viga Análoga***



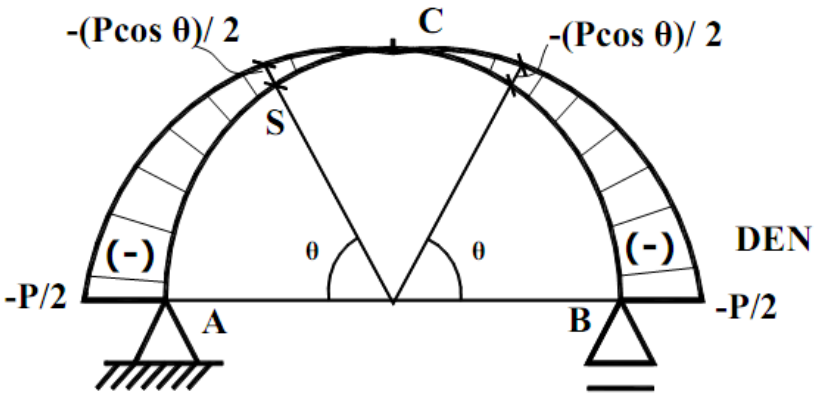
# Viga Curva Biapoiada Carregada Verticalmente (2)




DMF

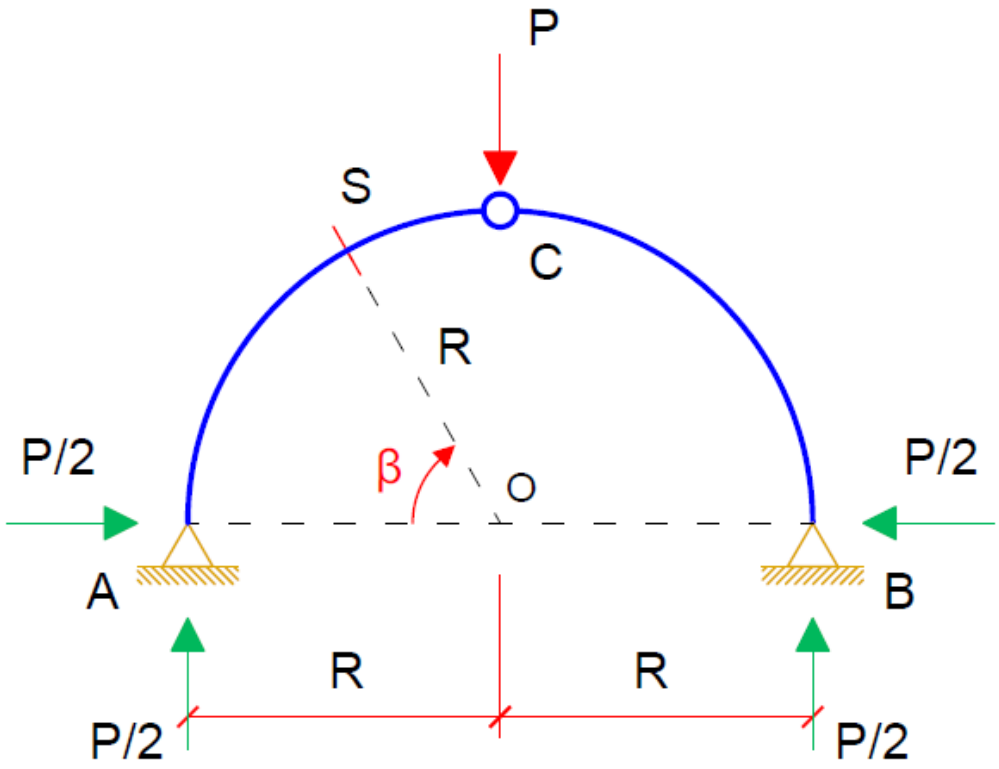



DEC




DEN

# Arco Semicircular Tri-Articulado  Carregado Verticalmente (1)




Cálculo das Reações de Apoio:

$$\sum M_A = V_B.2R - PR = 0$$

$$V_B = P/2$$

$$\sum FV = V_A - P + V_B = 0$$

$$V_A = P/2$$

$$\sum M_C = -H_B.R + P/2.R = 0$$

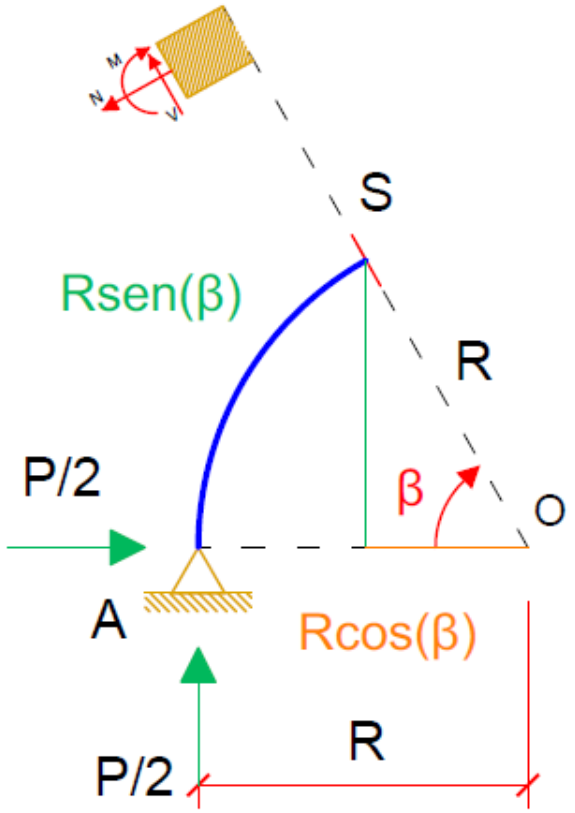
$$H_B = P/2$$

$$\sum FH = H_A - H_B = 0$$

$$H_A = P/2$$

# Arco Semicircular Tri-Articulado Carregado Verticalmente (2)

## Equacionamento dos Momentos Fletores:



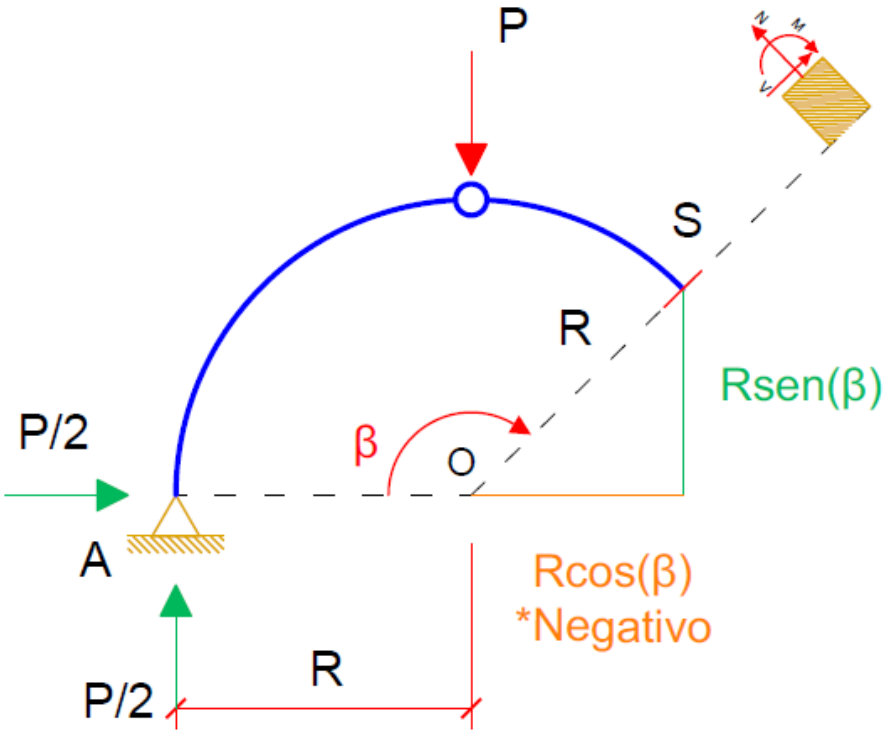

**Trecho I : β entre 0° e 90°**

$$M_I(\beta) = \frac{P}{2}(R - Rcos\beta) - \frac{P}{2}R\ sen\beta$$

$$M_I(\beta) = \frac{PR}{2}(1 - cos\beta - sen\beta)$$

# Arco Semicircular Tri-Articulado Carregado Verticalmente (3)

## Equacionamento dos Momentos Fletores:




**Trecho II : β entre 90° e 180°**

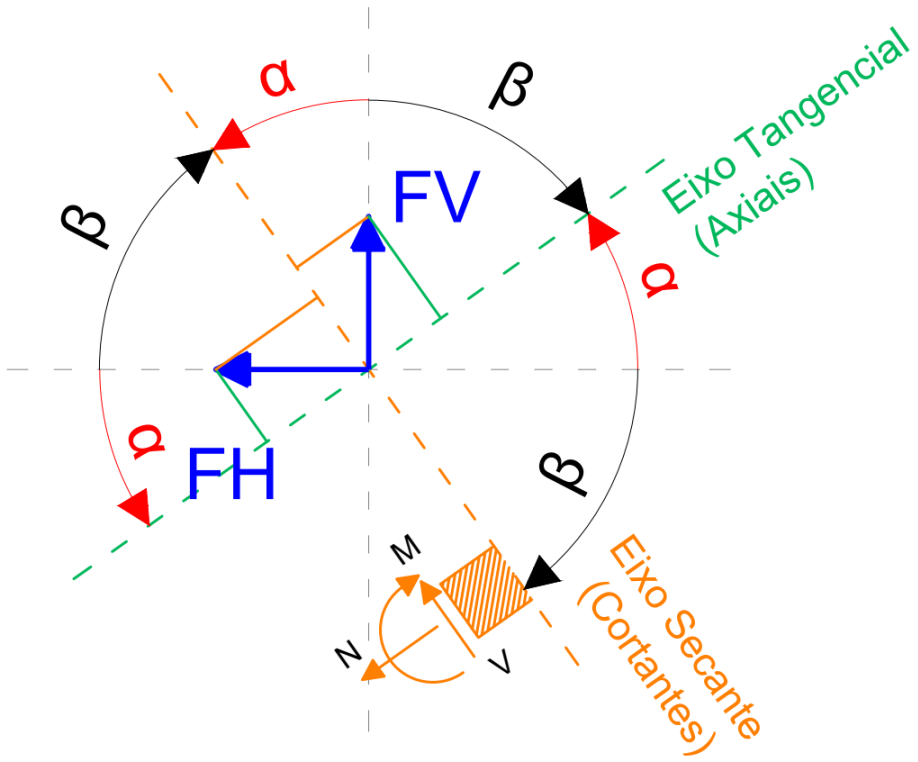
$$M_I(\beta) = \frac{P}{2}(R - Rcos\beta) - \frac{P}{2}R\ sen\beta$$

$$M_{II}(\beta) = M_I(\beta) + PR\ cos\beta$$

$$M_{II}(\beta) = \frac{PR}{2}(1 + cos\beta - sen\beta)$$

* O braço de alavanca da reação vertical P/2 é R + R cos β , porém, como β esta entre 90° e 180° seu cosseno é negativo sendo a distância calculada como R – R cos β

# Ideia Geral do Equacionamento de Cortantes e Axiais em Arcos




1. Fazer o somatório de todas as forçar verticais à esquerda da seção de análise (FV);

2. Fazer o somatório de todas as forçar horizontais à esquerda da seção de análise (FH);

3. Decompor FV e FH nos eixos Secante e Tangencial obedecendo a convenção de sinais para diagramas.

OBS: a decomposição pode ser feita em relação tanto ao ângulo β quanto ao ângulo α indicados.

# Resumo do Equacionamento de Cortantes e Axiais (2)

- **Como equacionar cortantes e axiais no arco circular com equações válidas para todo o domínio de 0° a 180° no ângulo β ?**

- RESPOSTA:
  Dado que ângulo alfa não afeta a convenção de sinais de diagramas basta substituir a relação:

$$\alpha + \beta = 90° \text{ ou } \alpha = 90° - \beta$$

  no equacionamento feito com alfa.

$$V(\alpha) = FV.cos\alpha + FH.sen\alpha$$
$$N(\alpha) = -FV.sen\alpha + FH.cos\alpha$$

$$V(\beta) = FV.cos(90° - \beta) + FH.\text{sen}(90° - \beta)$$
$$N(\beta) = -FV.sen(90° - \beta) + FH.\cos(90° - \beta)$$

Universidade POSITIVO

# Aula 07 - Seção 3:
# Arcos Parabólicos de 2° Grau e Uso da Viga Análoga

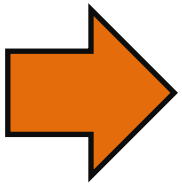
# Arcos Triarticulados Parabólicos de 2° Grau

- Um dos formatos mais comuns de arco triarticulado é o parabólico, sendo as posições “y” do arco definidas por uma equação do tipo:

$$y(x) = a + bx + cx^2$$

- Conhecidos 3 pontos da parábola é possível montar um sistema linear para definição da equação do arco.
- Ex., dados os pontos: (X1,Y1), (X2,Y2) e (X3,Y3):

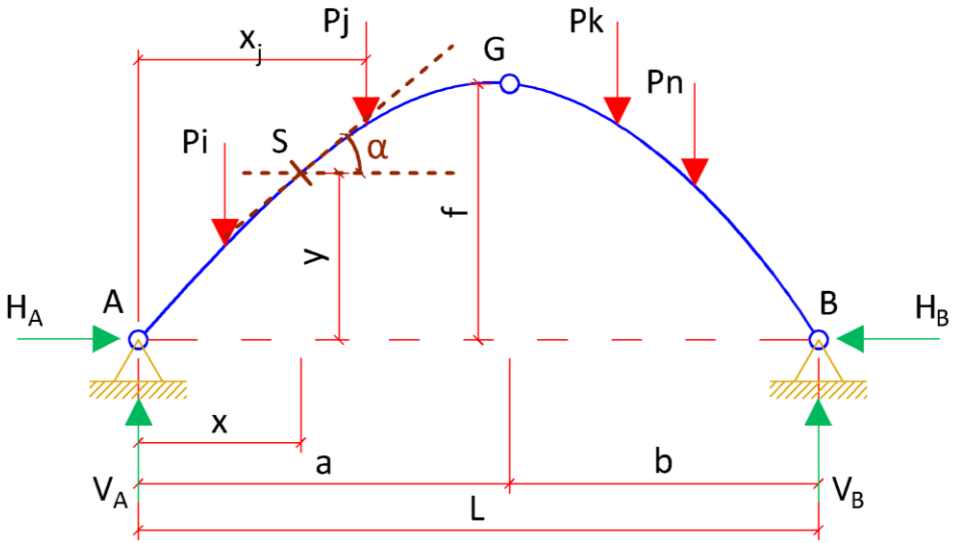
$$\begin{aligned} Y1 &= a + bX1 + cX1^2 \\ Y2 &= a + bX2 + cX2^2 \\ Y3 &= a + bX3 + cX3^2 \end{aligned}$$



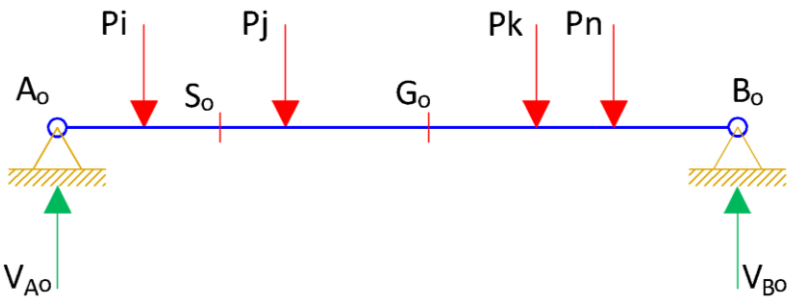
$$\begin{bmatrix} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X1 & X1^2 \\ 1 & X2 & X2^2 \\ 1 & X3 & X3^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

# Arcos Triarticulados Carregados Verticalmente (1)

- Arcos triarticulados possuem **reações horizontais em seus apoios denominadas "Empuxo"** que podem ser quantificadas (também) fazendo uso da viga análoga antes mencionada.

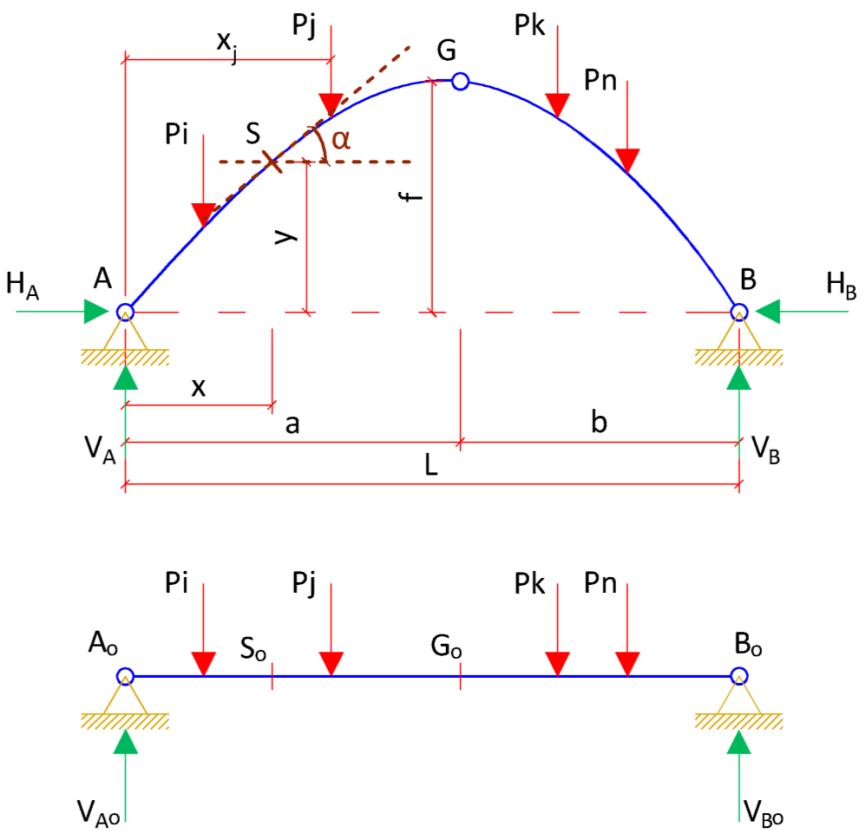



**Arco**




**Viga Análoga**

# Arcos Triarticulados Carregados Verticalmente (2)




$$\sum H = H_A - H_B = 0 \qquad H_A = H_B = H$$

$$\sum M_B = -V_A.L + \sum Pi(L - x_i) = 0$$

$$V_A = +\sum Pi(L - x_i) \,/\, L = V_{Ao}$$

$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; V_B = V_{Bo}$$

**Arco:**

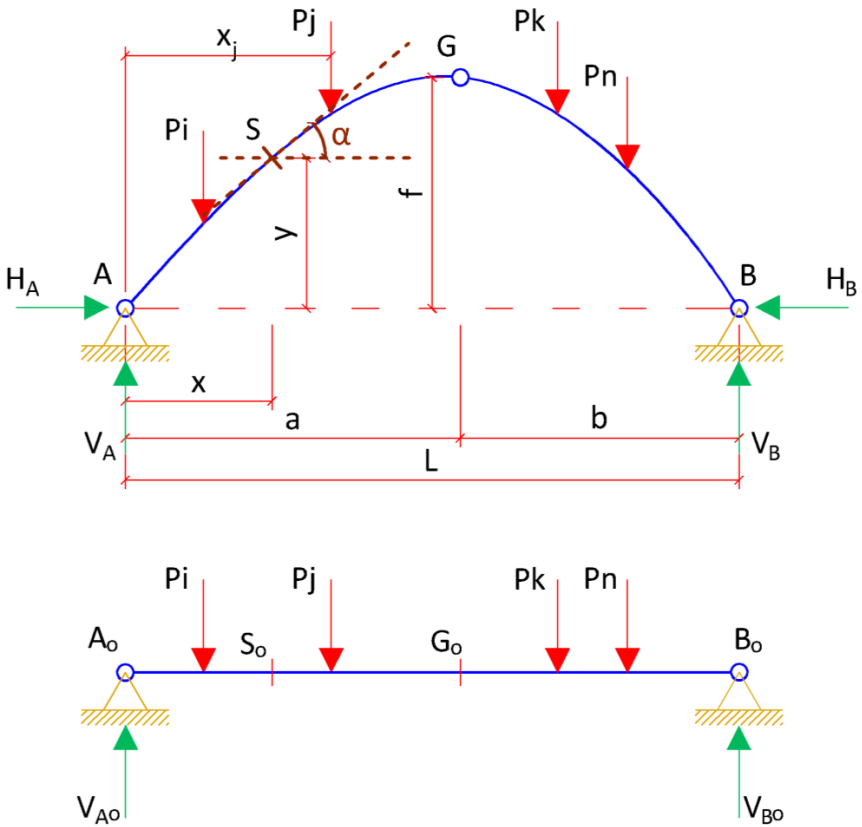
$$M_G = 0 \;:\; V_A.a - \sum Pi(a - x_i) \text{ - H.f = 0}$$

**Viga Análoga:**

$$M_{Go} = 0 \;:\; V_{Ao}.a - \sum Pi(a - x_i) = 0$$

$$H = \frac{M_{Go}}{f}$$

# Arcos Triarticulados Carregados Verticalmente (3)




$$H_A = H_B = H$$

Logo, para Momentos Fletores:

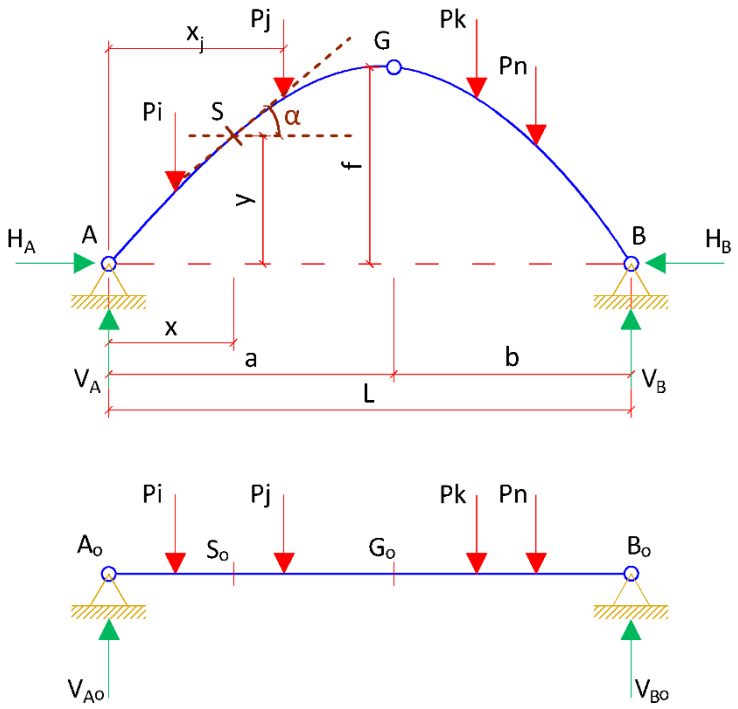
$$\boldsymbol{M_s(x) = M_{so}(x) - H.y(x)}$$

$\boldsymbol{M_{so}(x)}$ : equação de momentos fletores da viga análoga;

$\boldsymbol{H}$: reação de apoio horizontal do arco (empuxo para apoios nivelados);

$\boldsymbol{y(x)}$: equação do arco;

# Arcos Triarticulados Carregados Verticalmente (4)



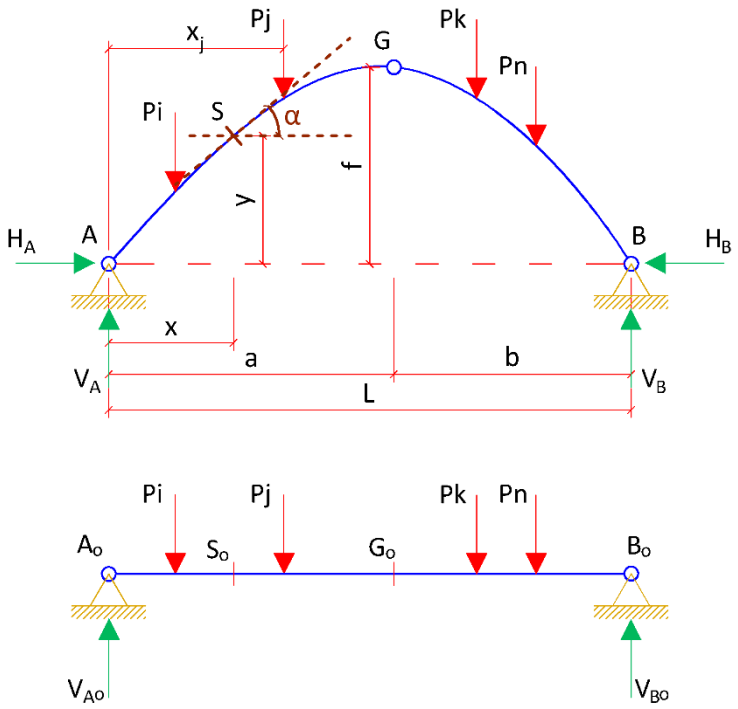

Para esforços corantes e axiais é possível usar a expressão “enlatada” de decomposição de esforços:

$$V(\alpha) = FV.cos\alpha + FH.sen\alpha$$
$$N(\alpha) = -FV.sen\alpha + \mathrm{F}H.cos\alpha$$

Considerando que “H” sempre tenta fechar o arco, seu sinal será negativo, logo:

$$\boldsymbol{V_s(x) = V_{so}(x).cos\big(\alpha(x)\big) - H.sen(\alpha(x))}$$
$$\boldsymbol{N_s(x) = -V_{so}(x).sen\big(\alpha(x)\big) - H.cos(\alpha(x))}$$

# Arcos Triarticulados Carregados Verticalmente (5)




$$V_s(x) = V_{so}(x).cos(\alpha(x)) - H.sen(\alpha(x))$$

$$N_s(x) = -V_{so}(x).sen(\alpha(x)) - H.cos(\alpha(x))$$

$V_{so}(x)$ : equação de esforços cortantes da viga análoga;

$H$: reação de apoio horizontal do arco (empuxo para apoios nivelados);

$y(x)$: equação do arco;

$\alpha(x)$: ângulos das tangentes dos pontos do arco mapeados em função da coordenada “x”;

# Ângulo α(x)

- Conhecida a equação do arco “y(x)” é possível determinar o ângulo das tangentes do arco com a horizontal, em qualquer um dos infinitos pontos que compõe o arco contínuo por meio de:

$$\alpha(x) = arctg\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)$$

Universidade POSITIVO

# Aula 07 - Seção 4:
# Equação da Linha de Pressões e Arcos com Apoios Desnivelados

# Linha de Pressões

- A **linha de pressões** para um determinado carregamento permanente é a linha que define a **geometria do arco de modo que este trabalhe somente com esforços normais**.

- Um arco com estas característica é denominado **arco funicular**.

- **Equação da Linha de Pressões:**

  – como a equação dos momentos fletores de um arco é função da equação do formato do arco, para se chegar à $M_S(x) = 0$, tem-se que:

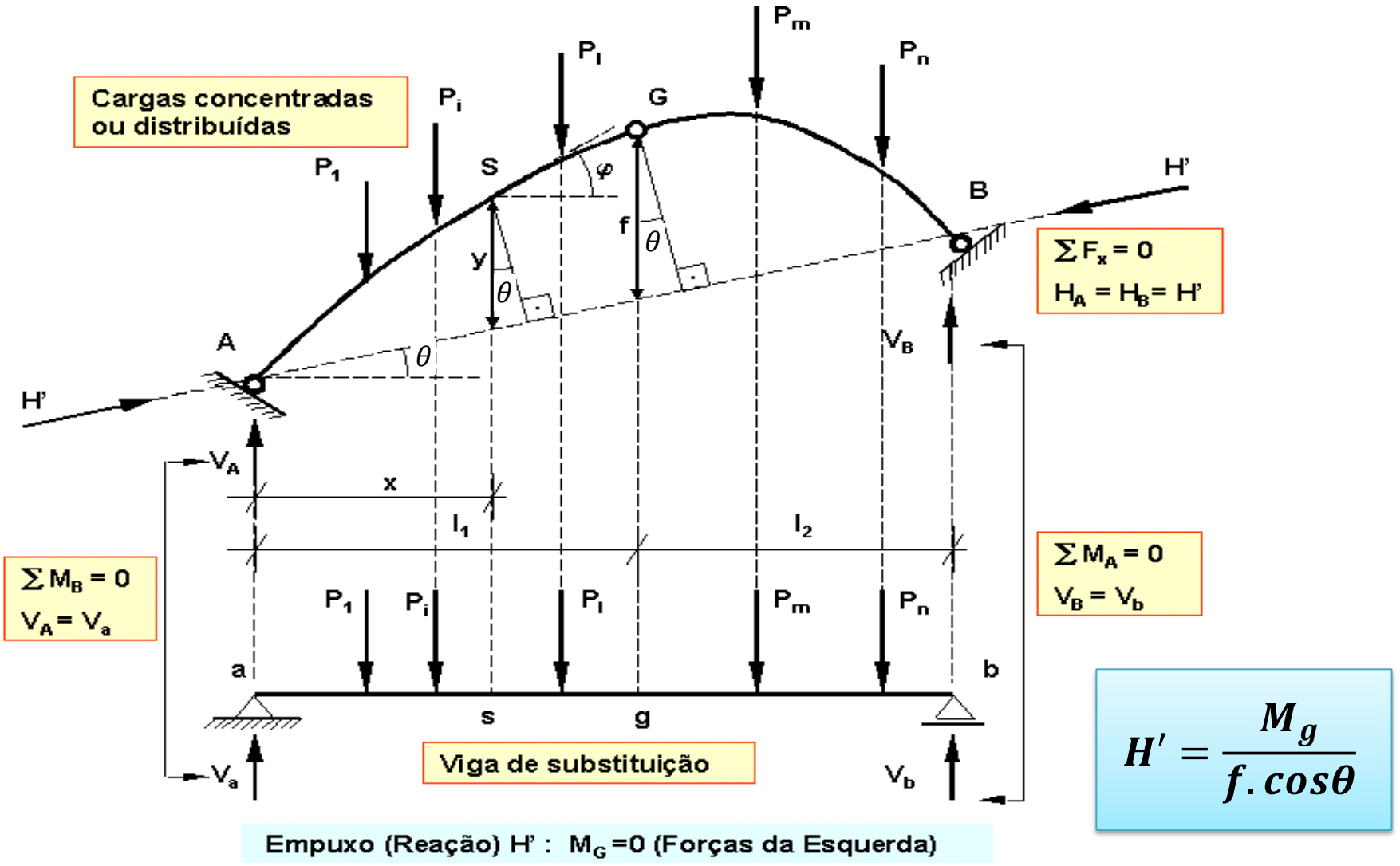
$$M_s(x) = M_{so}(x) - H.y(x)$$

$$0 = M_{so}(x) - H.y(x)$$

$$y(x) = \frac{M_{So}(x)}{H}$$

  – Assim sendo, y(x) **(equação da linha de pressões)** pode ser escrita em função da equação de momentos fletores da viga análoga ($M_{So}(x)$) dividida pelo empuxo nas laterais do arco ($H$).

# Arcos Triarticulados com Apoios Desnivelados



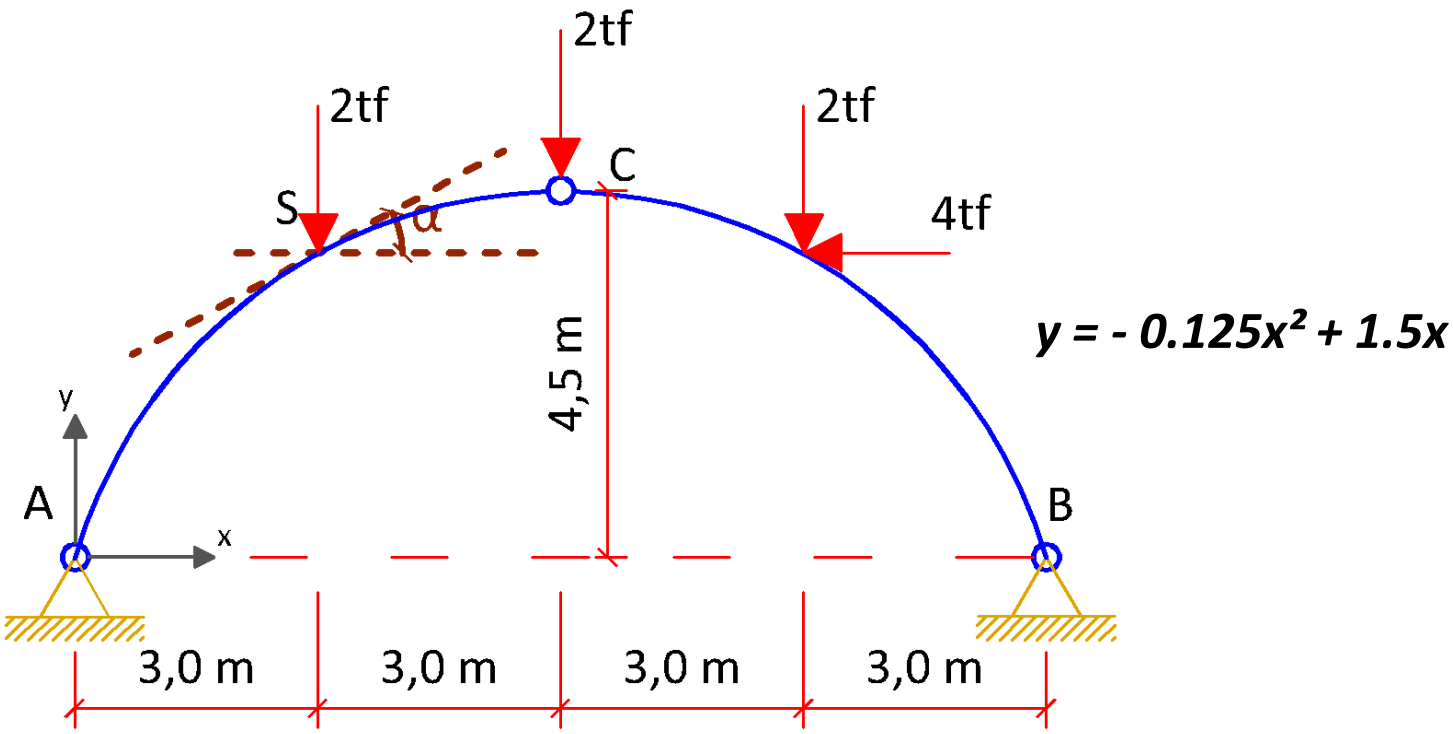

$$H' = \frac{M_g}{f.cos\theta}$$

Fonte: http://www.geocities.ws/isostatica/Transpar/5ArcosTriarticulados/Slide1.html

# FIM

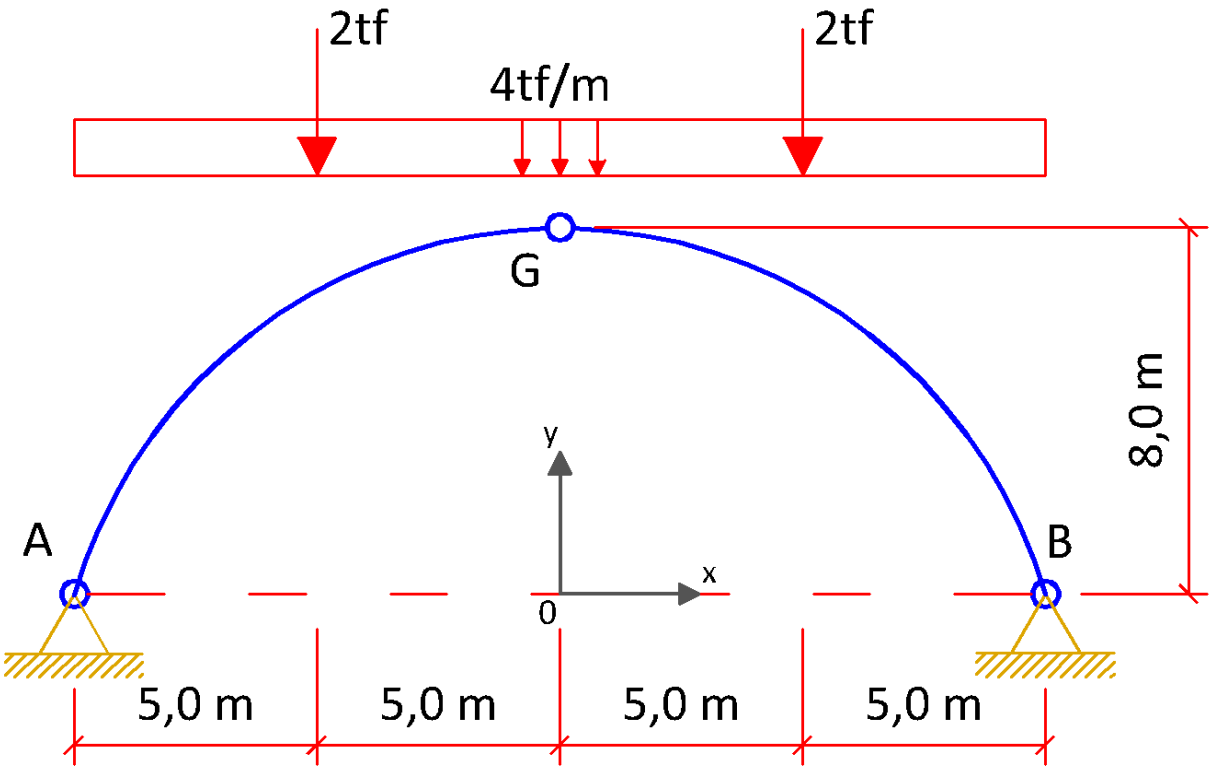
# Exercício TE1-7.1

- Para o arco triarticulado abaixo, obter as reações de apoio e os esforços Ms, Ns, e Qs:



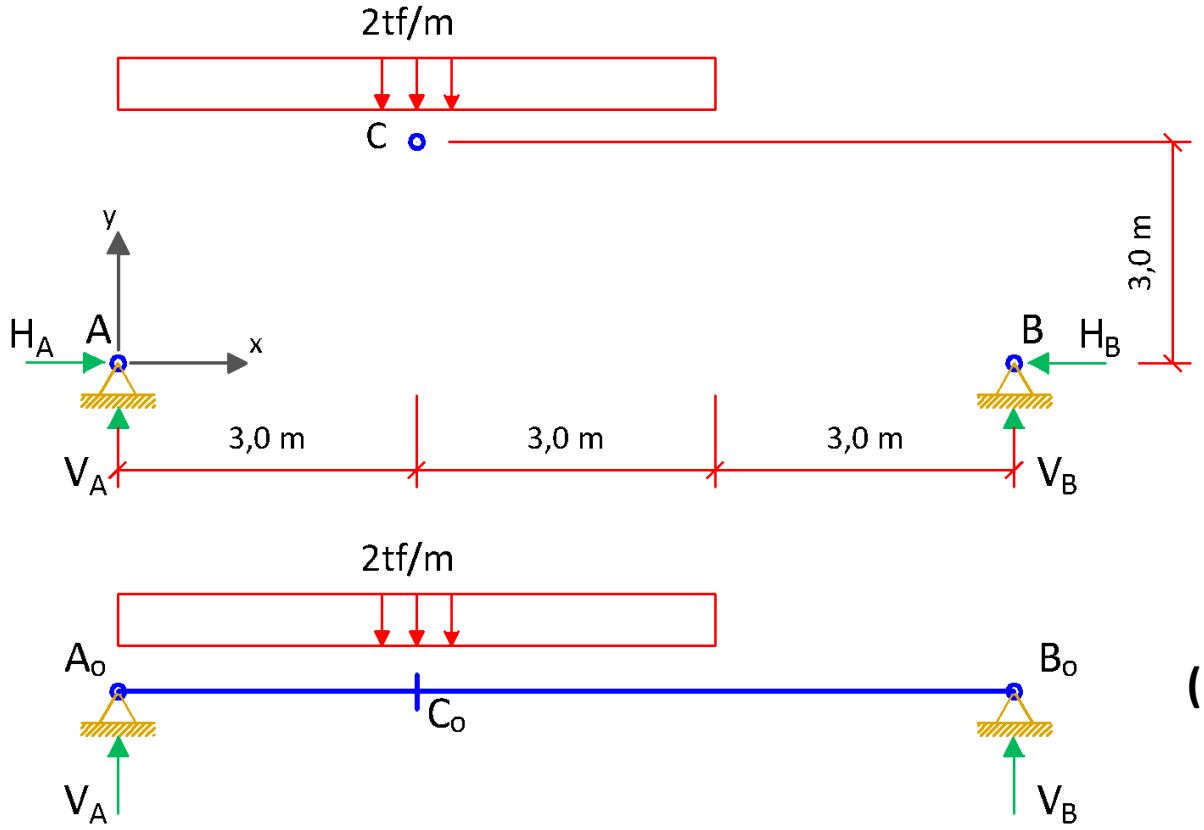
# Exercício TE1-7.2

- Traçar o diagrama de momentos fletores para o arco parabólico de 2º grau abaixo:



# Exercício TE1-7.3

- Obter as equações da linha de pressões da estrutura triarticulada com os apoios A e B e articulação interna em C.
- Calcular a força normal na seção onde a tangente é nula:

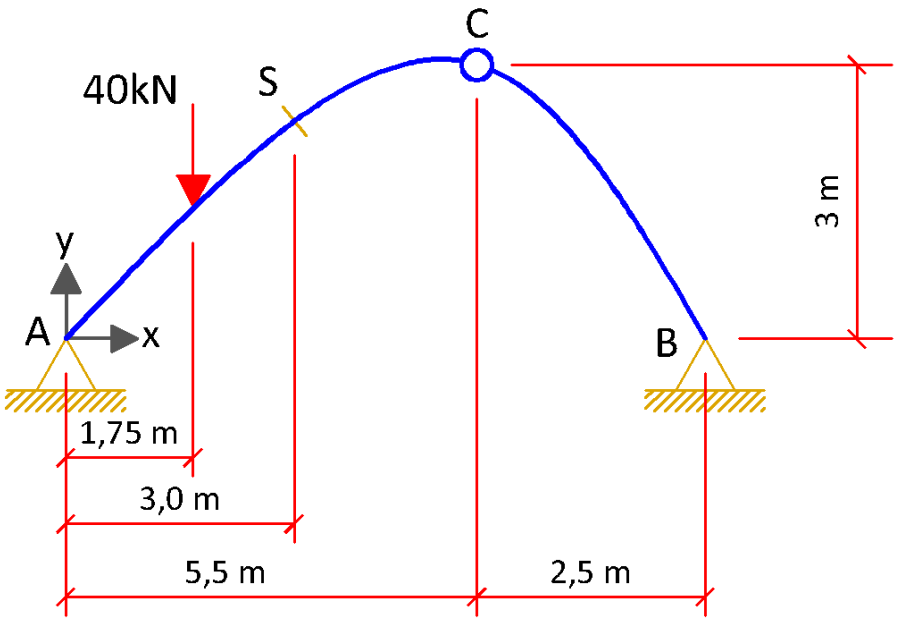



**( Viga Análoga )**

# Exercício TE1-7.4

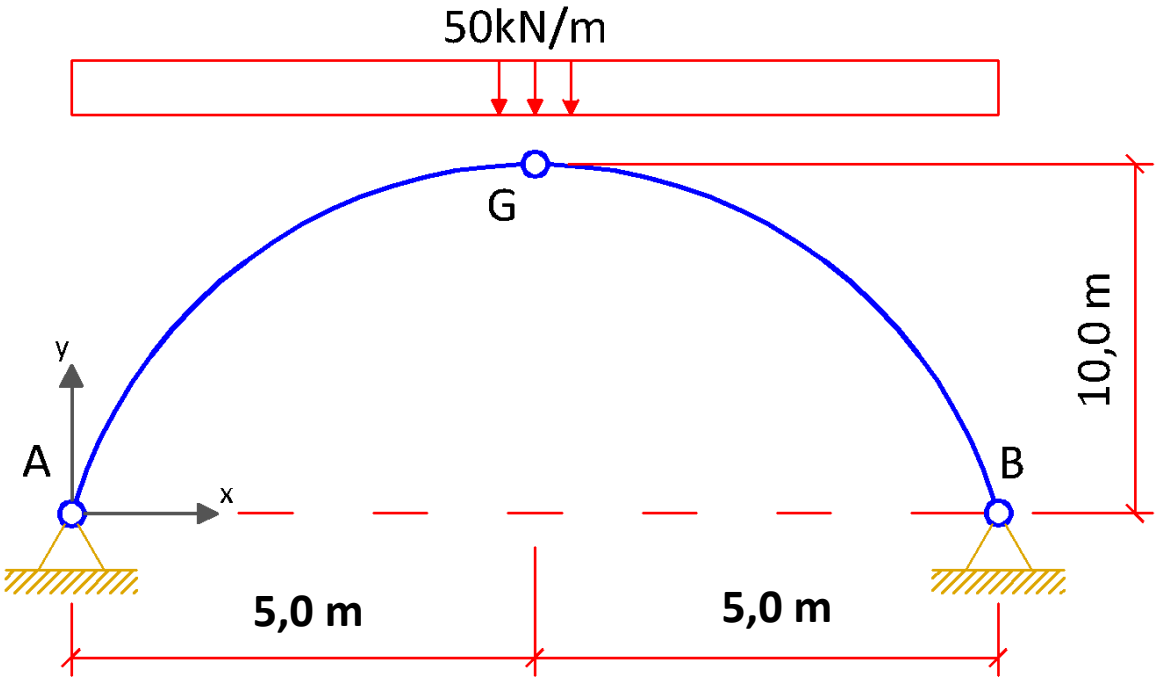
- Para o arco parabólico de 2º grau triarticulado da figura abaixo determine:

  a) A equação do arco (considerar a origem do sistema cartesiano indicada na figura);
  b) As reações de apoio ($V_A$, $H_A$, $V_B$, $H_B$);
  c) O momento fletor , o esforço cortante e o esforço normal na seção S indicada;



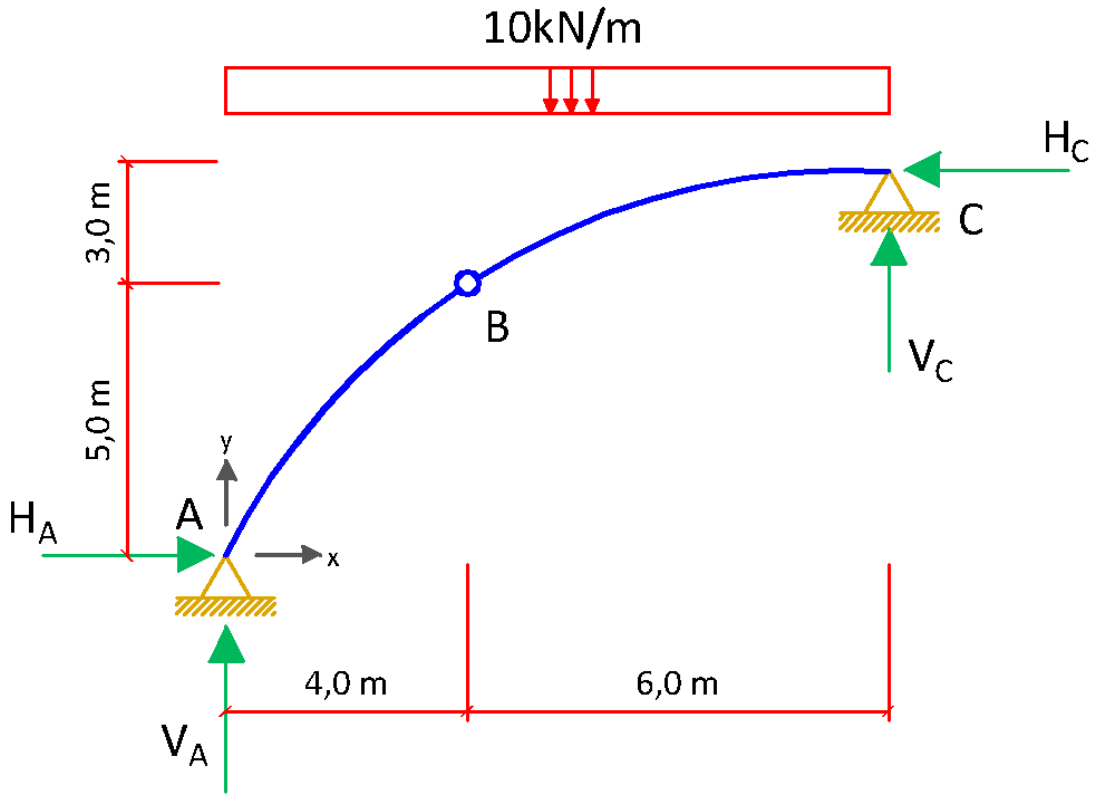
# Exercício TE1-7.5

- Traçar o diagrama de esforços axiais para o arco parabólico de 2º grau abaixo:



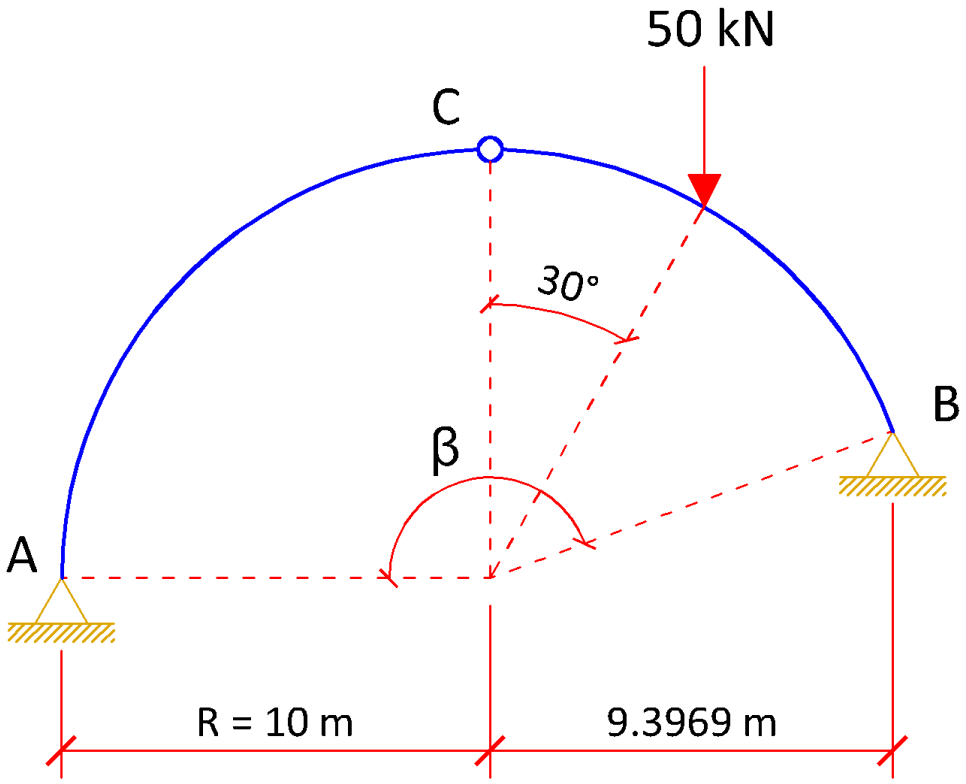
# Exercício TE1-7.6

- Traçar os diagramas de esforço internos para o arco parabólico de 2° grau esboçado abaixo:



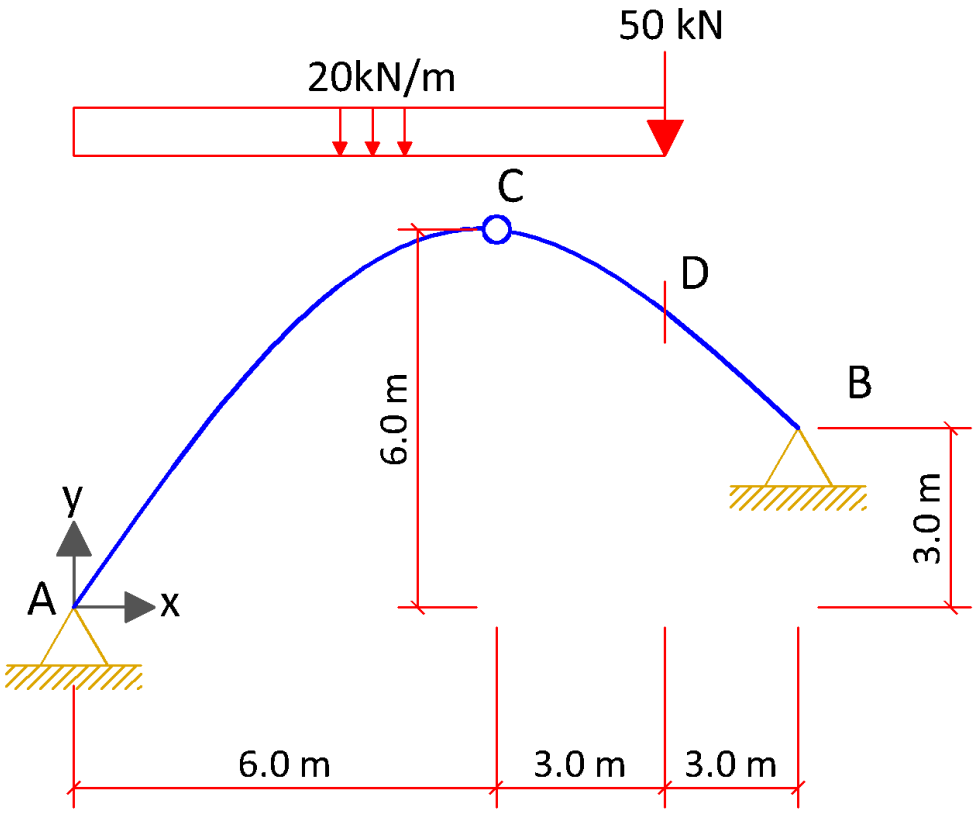
# Exercício TE1-7.7

- Determinar os momentos fletores, os esforços cortantes e os esforços axiais para o arco circular abaixo no ponto A e no ponto B bem como no ângulos β = 30°, 60°, 90°, 120° e 150° (sentido horário):



# Exercício TE1-7.8

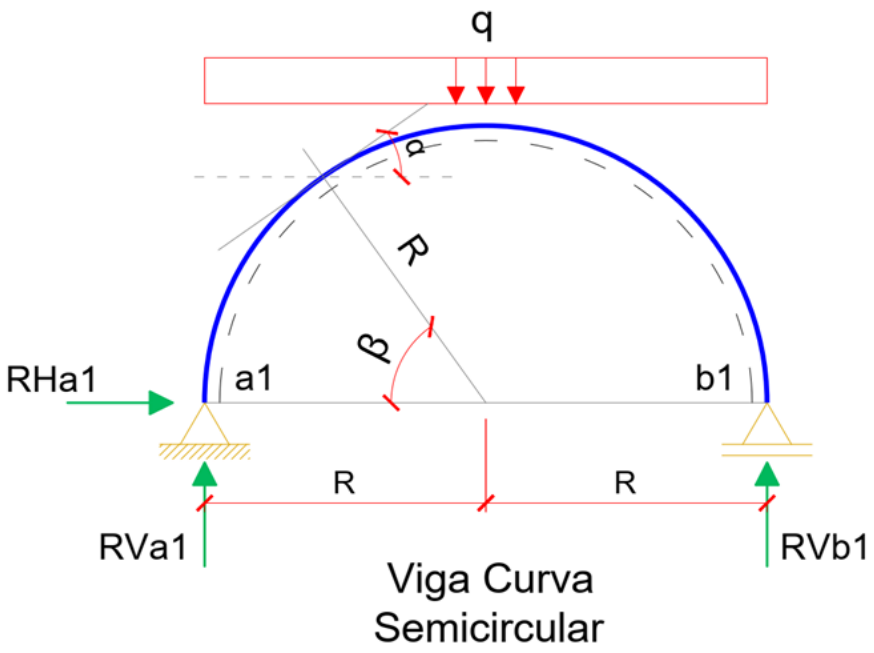
- Traçar os diagramas de momento fletor, esforço cortante e esforço axial para o arco parabólico de segundo grau abaixo, determinando os valores destes esforços internos a cada 1 metro do eixo horizontal (x).



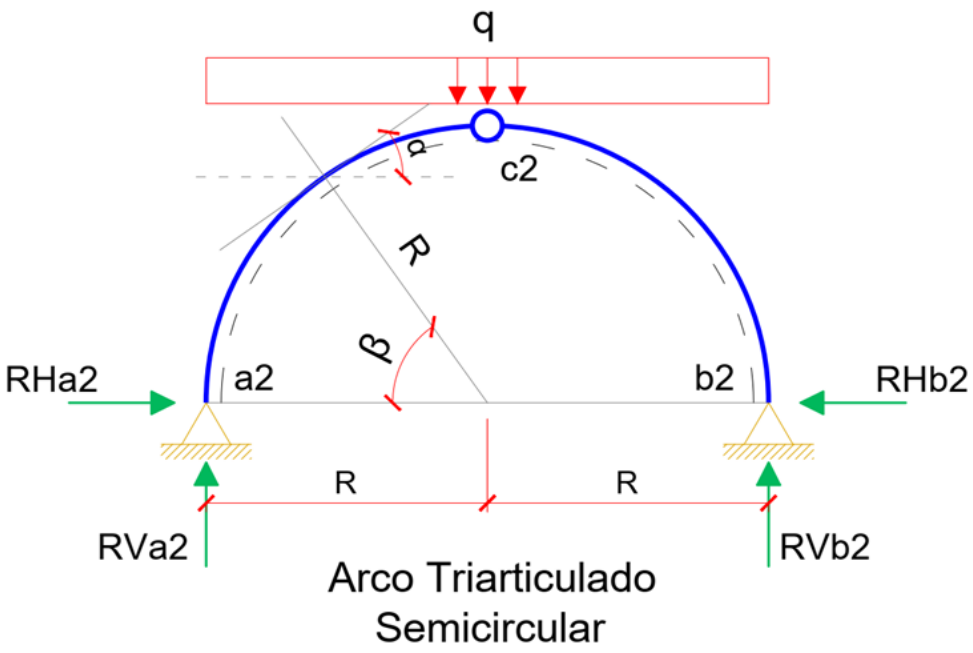
# Exercício TE1-7.9

- Proceder os traçados dos diagramas de Momentos Fletores, Esforços Cortantes e Esforços Axiais para os dois modelos estruturais abaixo .

  Dados comuns aos dois modelos: q = 25 kN/m e R = 4 m




Viga Curva Semicircular

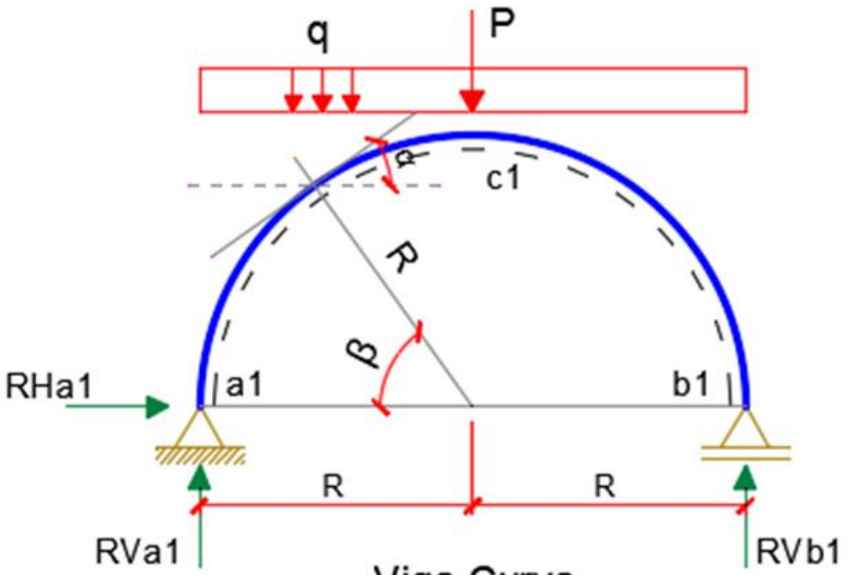



Arco Triarticulado Semicircular

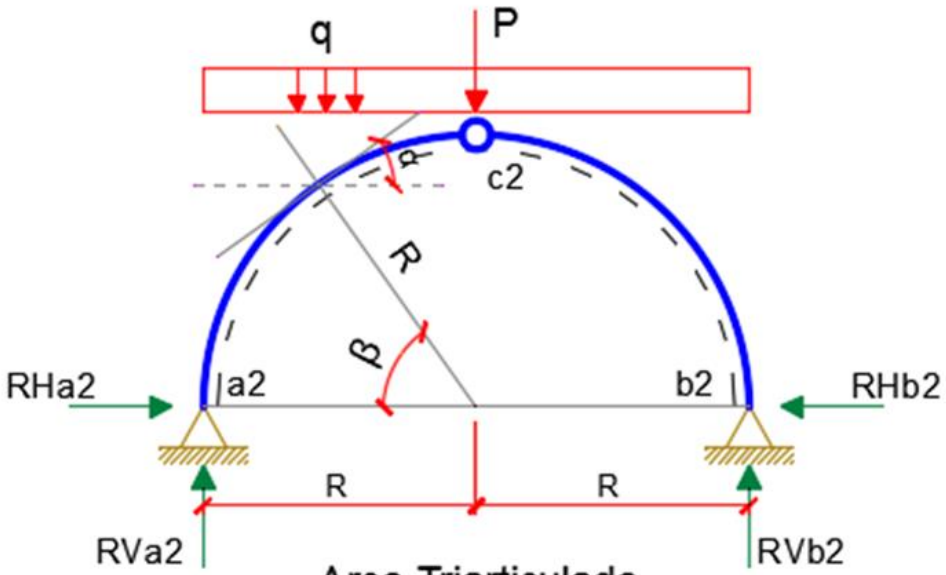
# Exercício TE1-7.10

- Proceder os traçados dos diagramas de Momentos Fletores, Esforços Cortantes e Esforços Axiais para os dois modelos estruturais abaixo .

  Dados comuns aos dois modelos: q = 25 kN/m, P = 120kN e R = 4 m




Viga Curva Semicircular




Arco Triarticulado Semicircular