Teoria das Estruturas I - Aula 08



Cálculo de Deslocamentos em Estruturas Isostáticas (1)

- Trabalho Externo das Cargas e Energia Interna de Deformação;
- Relações entre Energia de Deformação e Esforços Internos;
- Aplicação da Igualdade entre o Trabalho das Forças Externas e a Energia Interna de Deformação;

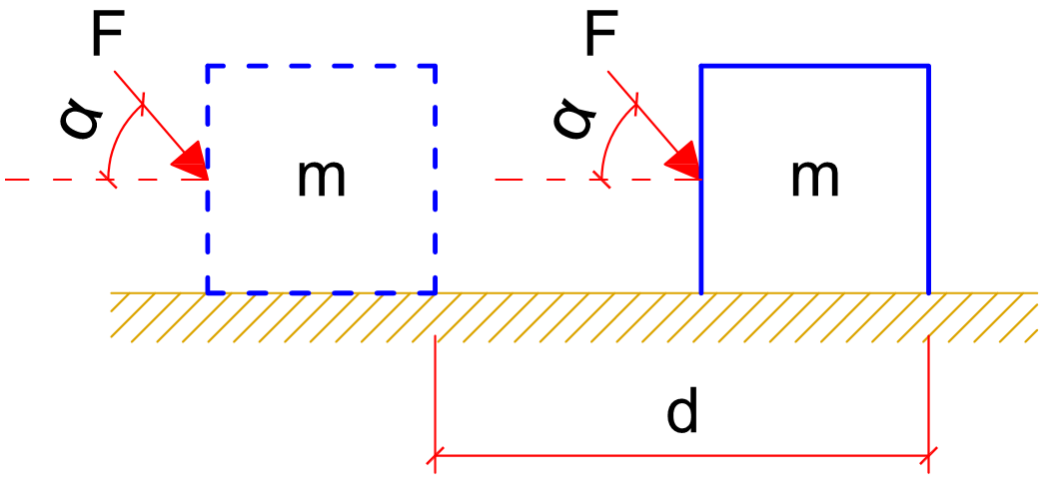
Prof. Juliano J. Scremin

Universidade POSITIVO

Universidade POSITIVO

Aula - Seção 1:
Trabalho Externo das Cargas e Energia Interna de Deformação

Trabalho de Uma Força (W)

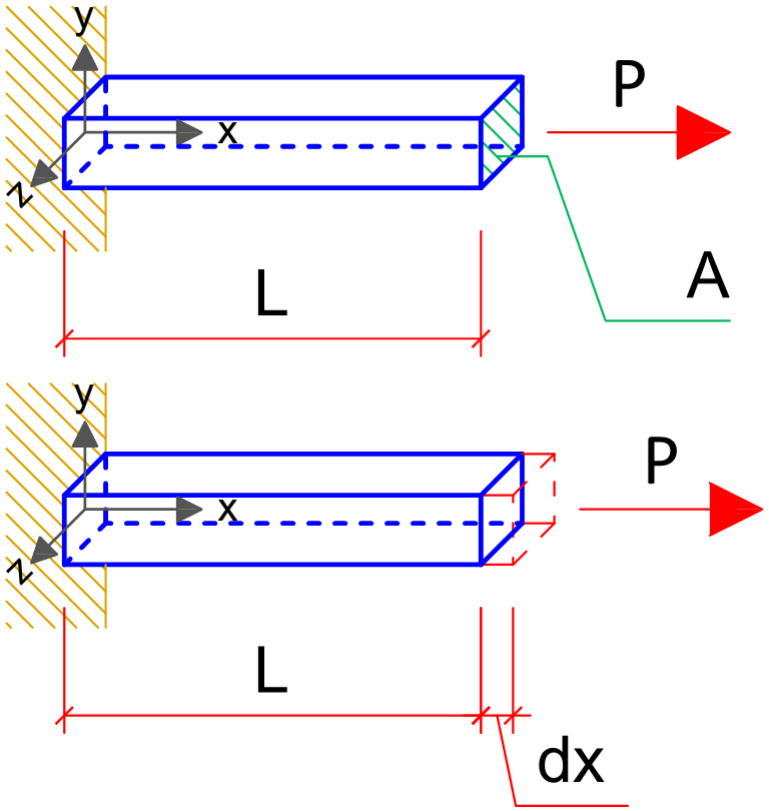


$$W = F.d.cos\alpha$$

d : deslocamento de corpo rígido;
F : força;
α : ângulo da força com a horizontal;
m : massa do corpo

*** Só há trabalho da direção do deslocamento**

Trabalho Externo de uma Carga Aplicada “W” (1)

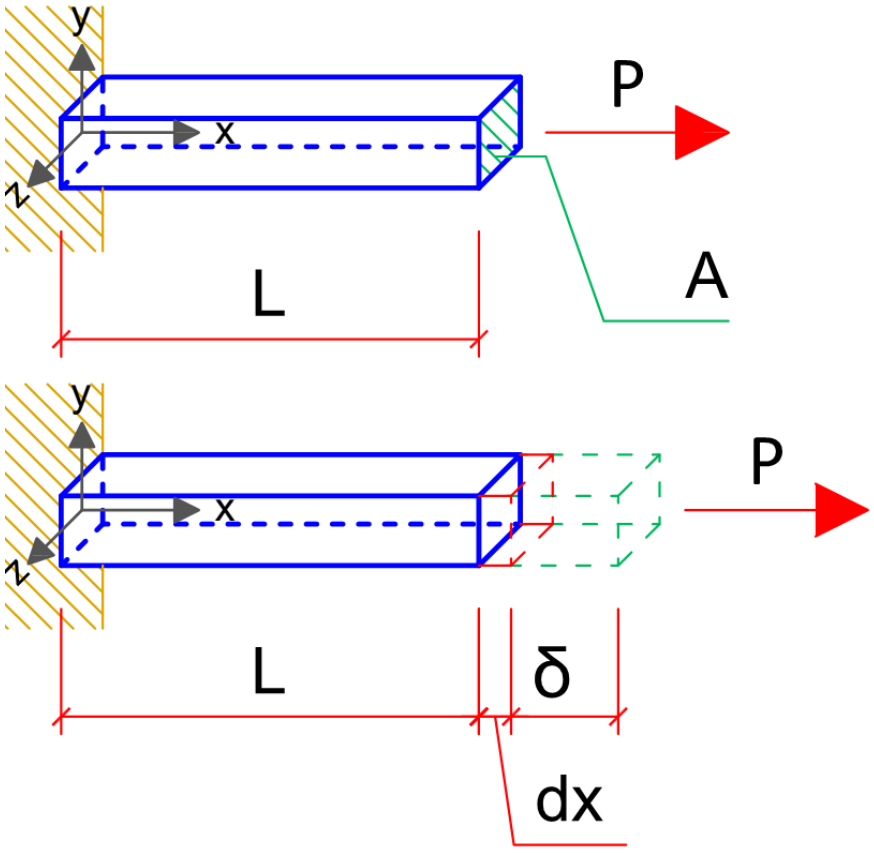


L : comprimento longitudinal da barra;
P : força axial aplicada
dx : deslocamento relativo infinitesimal ao longo do eixo longitudinal (eixo x);
A : área da seção transversal da barra;

dW : trabalho realizado pela força P enquanto a barra se alonga de um comprimento “dx”

$$dW = P.dx$$

Trabalho Externo de uma Carga Aplicada “W” (2)

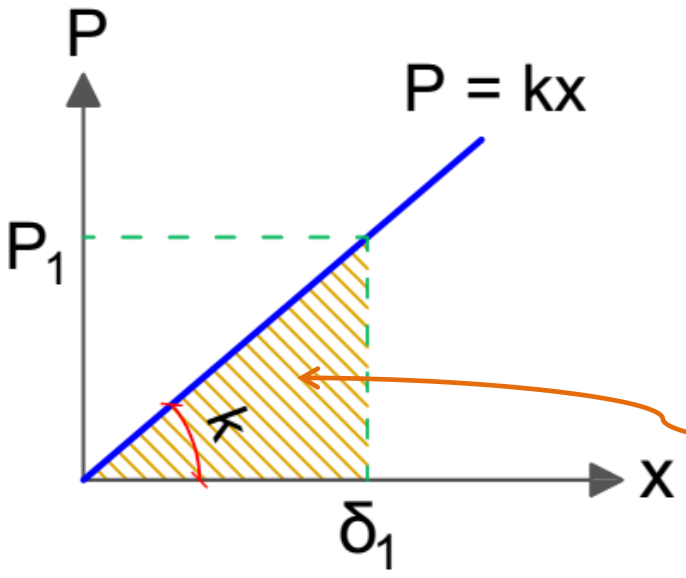


O trabalho total realizado pela **força P** enquanto ela é **gradualmente aplicada** à barra resulta em:

$$W = \int_0^{\delta} P dx$$

Trabalho Externo de uma Carga Aplicada “W” (3)

- No caso de uma deformação linear e elástica, a porção do diagrama **força-deslocamento** referente ao problema estudado pode ser representada por uma linha reta de equação **P = kx**

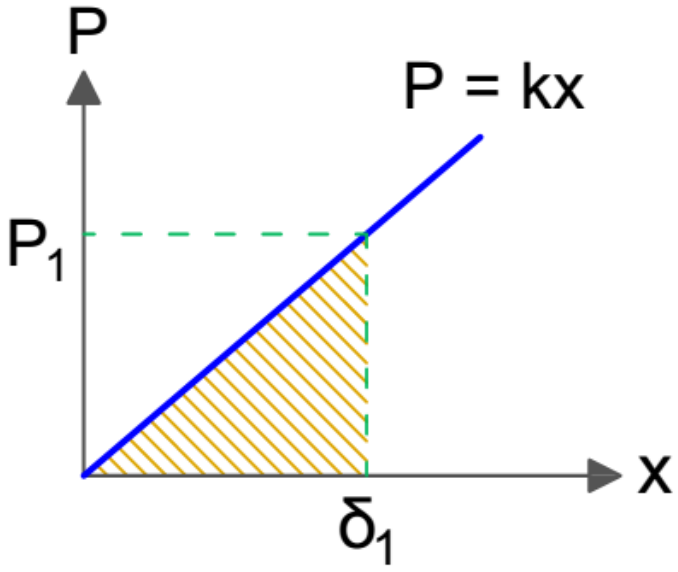


$$W = \int_0^{\delta_1} P(x)dx = \int_0^{\delta_1} kx\,dx$$

$$W = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{\delta_1} = \frac{1}{2}k{\delta_1}^2 = \frac{1}{2}k\delta_1.\delta_1$$

$$W = \frac{1}{2}P.\delta_1$$

Teorema de Clapeyron

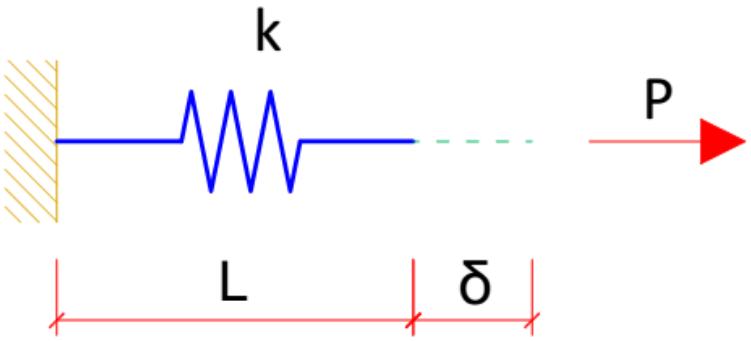


“ O trabalho realizado pelas forças externas, variáveis desde zero, em um corpo de material elástico linear e que sofre pequenos deslocamentos, é igual a metade do trabalho que resultaria se as forças externas agissem de modo instantâneo”

$$W = \frac{1}{2} P\delta$$

Analogia de Mola Elástica Linear

Mola

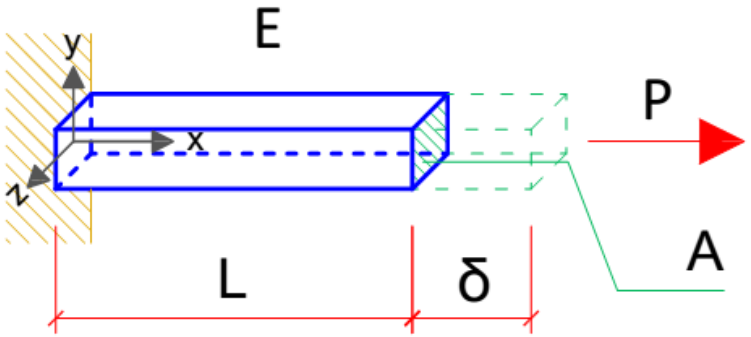


- Equação de Mola:
(Relação Força x Deslocamento)

$$P = k.\delta$$

k : constante de rigidez da mola

Barra Solicitada Axialmente



- Relação Força x Deslocamento

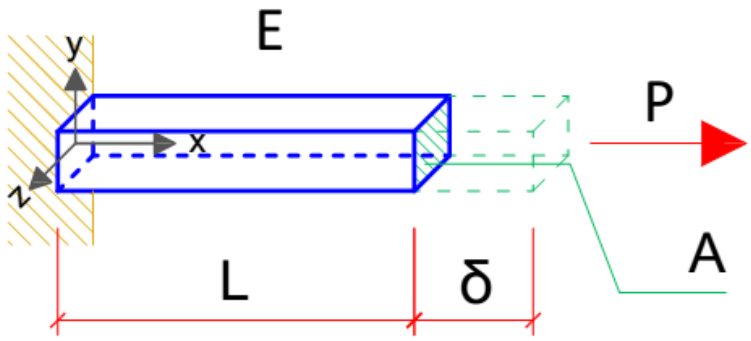
$$P = k.\delta$$

k : rigidez axial da barra

Como determinar "k"?

Revisão de RESMAT (1)

Barra Solicitada Axialmente

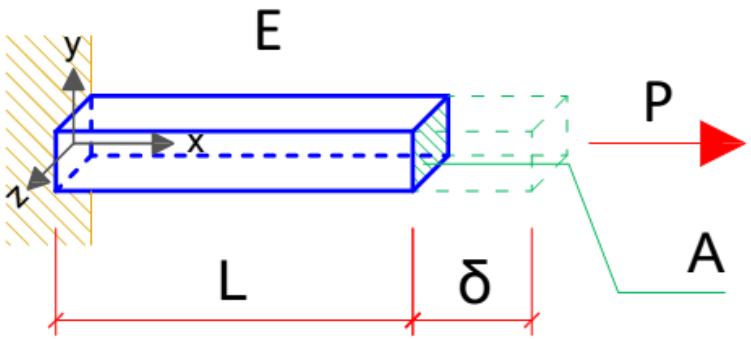


Deslocamento (δ) → **δ**
[unidade de comprimento]

Deformação (ε) → **δ / L**
[adimensional (%)]

Revisão de RESMAT (2)

Barra Solicitada Axialmente



- Relação Força x Deslocamento

$$P = k.\delta$$

Como determinar "k"?

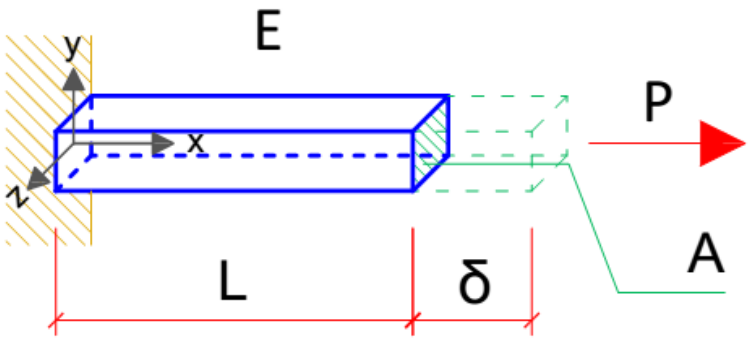
$$\sigma = \frac{P}{A}$$ **: tensão normal**

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$ **: deformação axial**

$$\sigma = E.\varepsilon$$ **: relação tensão x deformação (Módulo de Elasticidade E)**

Revisão de RESMAT (3)

Barra Solicitada Axialmente



- Relação Força x Deslocamento

$$P = k.\delta$$

Como determinar "k"?

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow \sigma = E.\varepsilon \leftarrow \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\frac{P}{A} = E.\frac{\delta}{L} \rightarrow P = \frac{AE}{L}\delta$$

Logo, para uma barra solicitada axialmente a rigidez axial "k" é:

$$k = \frac{AE}{L}$$

Energia Interna de Deformação “U” e o Princípio da Conservação de Energia Mecânica

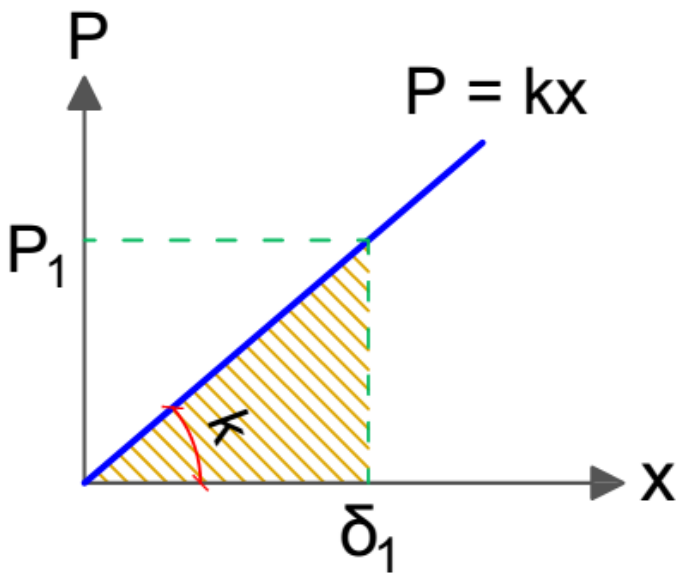
- Quando aplicadas a um corpo, as cargas deformam o **“material”**. Desde que não haja perda de energia sob a forma de calor, o trabalho externo por elas realizado será convertido em trabalho interno denominado **“Energia Interna de Deformação (U)”.**

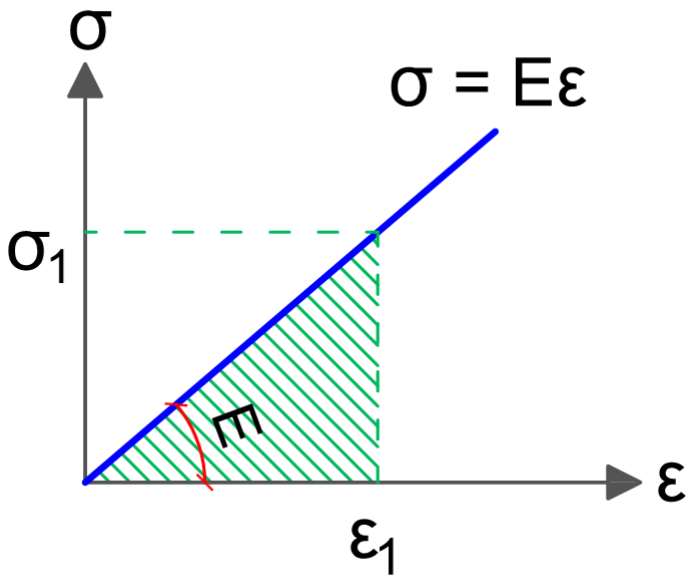
- Esta energia, sempre positiva, armazena-se no corpo e é provocada pela ação das **tensões normais e/ou cisalhantes**.

- Assim sendo, o **Princípio da Conservação de Energia Mecânica** pode ser expresso como :



Rigidez x Módulo de Elasticidade (Barra Solicitada Axialmente)





$$P = k.\delta$$

$$\sigma = E.\varepsilon$$

$$P = \frac{EA}{L}.\delta \quad \longleftrightarrow \quad \frac{P}{A} = E.\frac{\delta}{L}$$

Energia de Deformação Específica *(por Unidade de Volume)* **"u"**

- Se tomarmos a expressão da energia de deformação e dividirmos pelo volume do corpo solicitado (barra prismática axialmente solicitadada) temos:

$$u = \frac{U}{V} = \int_0^{\delta} \frac{P}{V} dx = \int_0^{\delta} \frac{P}{A}\frac{dx}{L} = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$$

- A **energia de deformação específica "u"** independe da geometria do elemento sendo definida em função da integração das tensões em termos das deformações:

$$u = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$$

Energia de Deformação x Energia Específica de Deformação

- É interessante reconhecer que a ***Energia de Deformação*** pode ser escrita como a integral de volume da ***Energia de Deformação Específica*** sobre o corpo:

$$U = \int_V du$$

Escrita em função das cargas

Escrita em função dos esforços internos (M,V, N e T)

Estruturas com Comportamento Elástico Linear

- Nos estudos que se seguem, o conceito de Energia de Deformação será aplicado às **estruturas de comportamento elástico linear**.

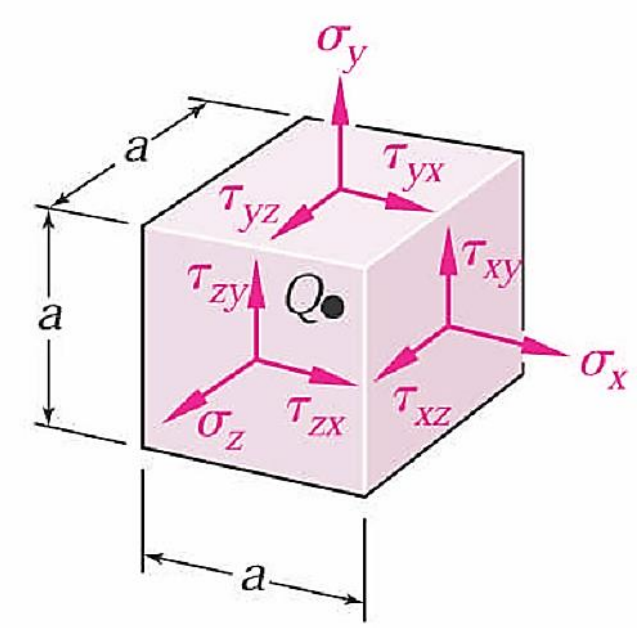
- Em tais estruturas:

  a) É valida a **Lei de Hooke** (*linearidade física*, ou seja, tensões diretamente proporcionais às deformações);

  b) São **desprezados os deslocamentos das cargas em função da deformação dos elementos**, sendo utilizada sempre a configuração indeformada para posicionamento destas (*linearidade geométrica*);

  c) Como consequência é possível a aplicação do **Princípio da Superposição dos Efeitos**;

Estado Triplo de Tensões (1)



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)]$$

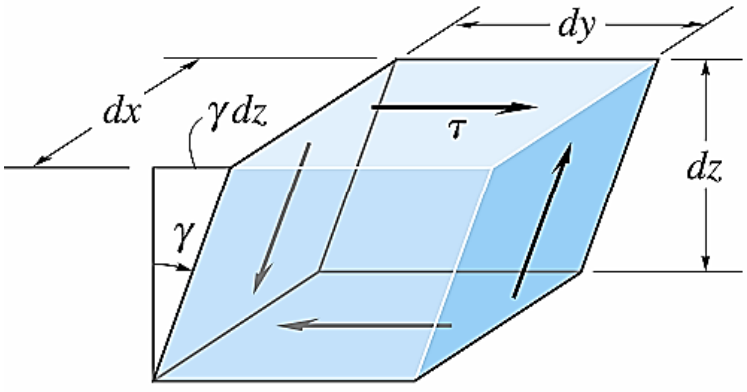
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: deformações normais em relação aos eixos x,y e z respectivamente

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: tensões normais em relação aos eixos x,y e z respectivamente

E : módulo de elasticidade normal

υ : coeficiente de Poisson

Estado Triplo de Tensões (2)



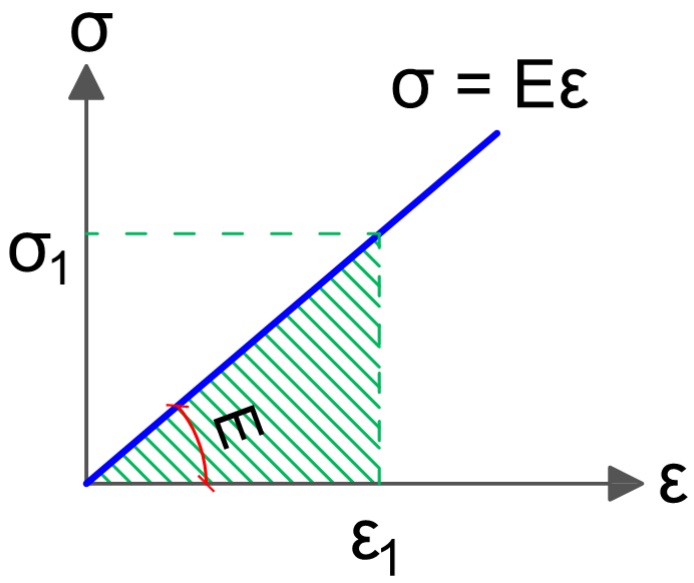
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

γ_{xy} γ_{xz} γ_{yz} : distorções angulares

τ_{xy} τ_{xy} τ_{xy} : tensões tangenciais

G : módulo de elasticidade transversal (módulo de cisalhamento)

Energia Interna de Deformação Específica em Função de Estado Triplo de Tensões (1)



- Diferencial da Energia Interna de Deformação Espefícia correspondente às Tensões Normais:

$$du_\sigma = \left(\frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2}\right) dxdydz$$

- Diferencial da Energia Interna de Deformação correspondente às Tensões Tangenciais:

$$du_\tau = \left(\frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2} + \frac{\tau_{xz} \gamma_{xz}}{2} + \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{2}\right) dxdydz$$

Energia Interna de Deformação Específica em Função de Estado Triplo de Tensões (2)

- O trabalho elementar interno total será:

$$du = du_\sigma + du_\tau$$

$$du = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right)dxdydz$$

- Aplicando a Lei de Hooke Generalizada:

$$du = \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2\right) - \frac{v}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{xz}{}^2 + \tau_{yz}{}^2\right)\right]dxdydz$$

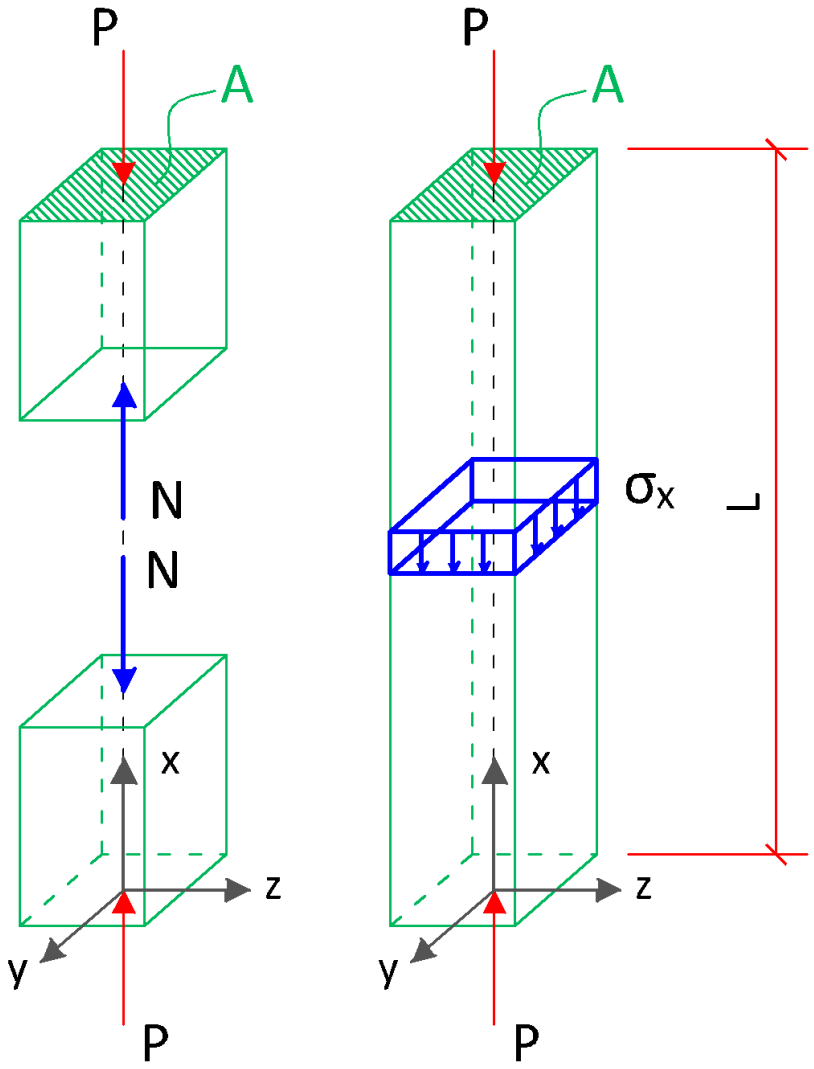
$$U = \int_V du$$

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2\right) - \frac{v}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{xz}{}^2 + \tau_{yz}{}^2\right)\right]dV$$

Universidade POSITIVO

Aula 08 - Seção 2:
Relações entre
Energia de Deformação e Esforços Internos

Energia Interna de Deformação devido a Solicitação Axial – N (1)



- Para peças solicitadas somente por carga axial tem-se:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Energia Interna de Deformação devido a Solicitação Axial – N (2)

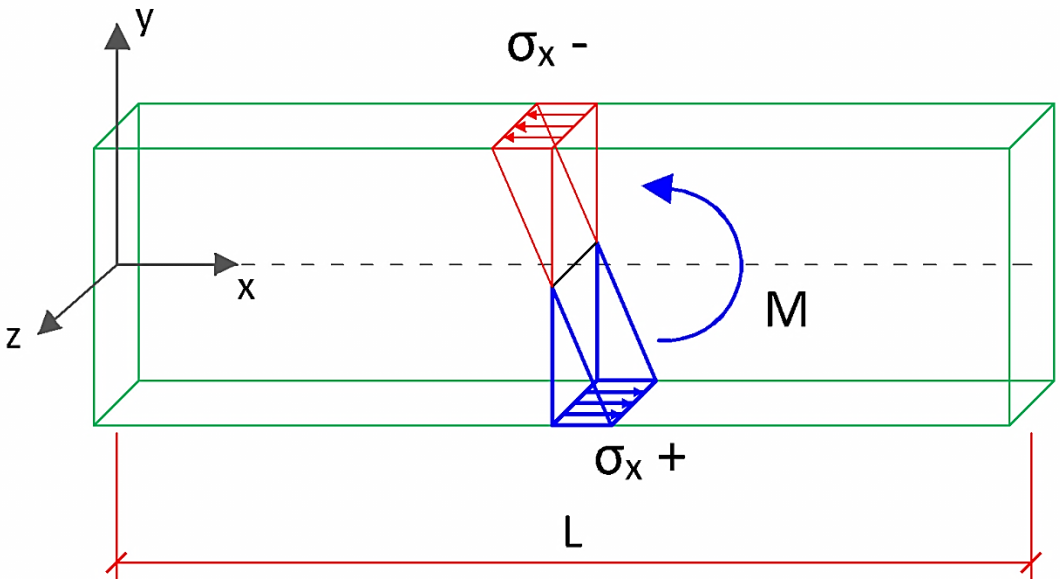
- Dado que: $\sigma_x = \frac{N}{A}$ $\sigma_y = \sigma_z = 0$ $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
- Logo:

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left({\sigma_x}^2 + {\sigma_y}^2 + {\sigma_z}^2\right) - \frac{\upsilon}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z\right) + \frac{1}{2G}\left({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{xz}}^2 + {\tau_{yz}}^2\right) \right] dV$$

$$U_N = \int_V \frac{1}{2E}{\sigma_x}^2\, dV = \int_V \frac{1}{2E}\left(\frac{N}{A}\right)^2 dV = \frac{1}{2}\int_L \frac{N^2}{EA^2}dx \int_A dA$$

$$\boldsymbol{U_N = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2}{EA}dx}$$

Energia Interna de Deformação devido a Momento Fletor – M (1)



- Para peças solicitadas por flexão ao redor do eixo “z”:

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2E} \left({\sigma_x}^2 + {\sigma_y}^2 + {\sigma_z}^2 \right) - \frac{\upsilon}{E} \left(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z \right) + \frac{1}{2G} \left({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{xz}}^2 + {\tau_{yz}}^2 \right) \right] dV$$

$$U_M = \int_V \frac{1}{2E} {\sigma_x}^2 \, dV$$

Energia Interna de Deformação devido a Momento Fletor – M (2)

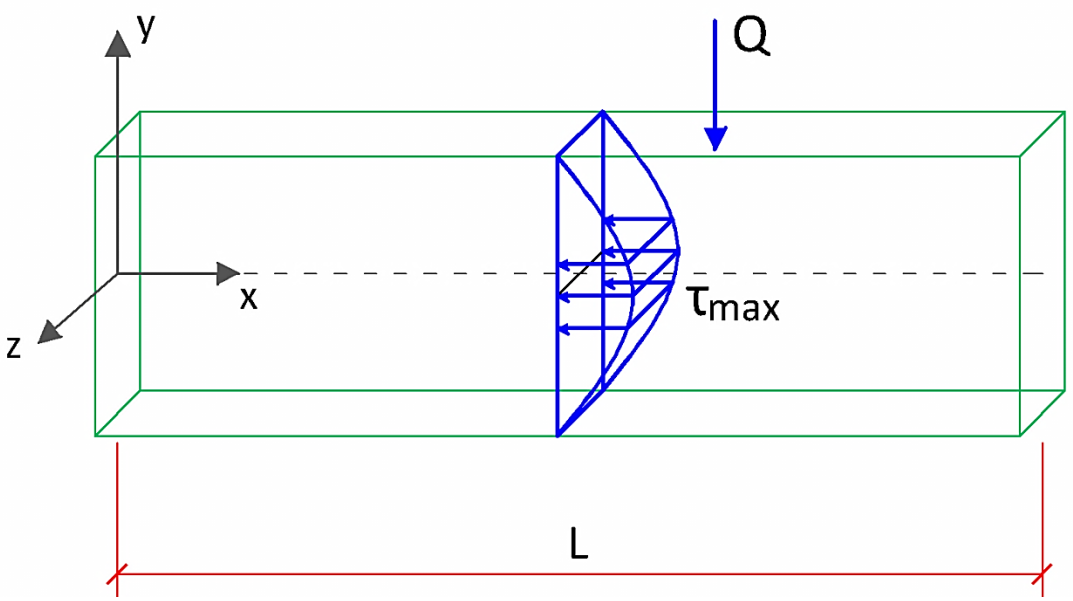
$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \quad \Rightarrow \quad U_M = \int_V \frac{1}{2E} {\sigma_x}^2 \, dV \quad \Rightarrow \quad U_M = \int_V \frac{1}{2E} \left(\frac{M}{I} y \right)^2 dV$$

$$U_M = \int_V \frac{1}{2E} \frac{M^2}{I^2} y^2 \, dV = \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EI^2} dx \int_A y^2 \, dA = \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EI^2} dx \, I$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{U_M = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx}$$

Energia Interna de Deformação devido ao Cortante – V (1)



- Para peças solicitadas por corte no plano "xz":

$$\tau_{xz} = \frac{VS}{bI}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2\right) - \frac{\upsilon}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{xz}{}^2 + \tau_{yz}{}^2\right)\right] dV$$

$$U_V = \int_V \frac{1}{2G}\tau_{xz}{}^2\, dV$$

Energia Interna de Deformação devido ao Cortante – V (2)

$$\tau_{xz} = \frac{VS}{bI} \Rightarrow U_V = \int_V \frac{1}{2G} {\tau_{xz}}^2 \, dV \Rightarrow U_V = \int_V \frac{1}{2G} \left(\frac{VS}{bI}\right)^2 dV$$

$$U_V = \int_V \frac{1}{2G} \frac{V^2 S^2}{b^2 I^2} dV = \frac{1}{2} \int_L \frac{V^2}{GI^2} dx \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$$

Dado que:

$$I = A.\, i^2$$

i : raio de giração

$$U_V = \frac{1}{2} \int_L \frac{V^2}{GA^2 i^4} dx \int_A \frac{S^2}{b^2} dA = \frac{1}{2} \int_L \frac{V^2}{GA} dx \frac{1}{Ai^4} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$$

$$\chi = \frac{1}{Ai^4} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$$

Propriedade Geométrica da Seção Transversal

Energia Interna de Deformação devido ao Cortante – V (3)

- Verifica-se portanto que o fator (χ) é uma constante que depende somente da forma da seção transversal, denominado "**Fator de Cisalhamento**".

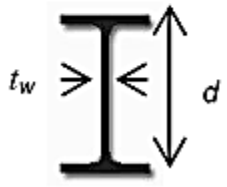
  Portanto é possível escrever:

$$U_V = \frac{1}{2}\int_L \frac{Q^2}{GA}\,dx\,\frac{1}{Ai^4}\int_A \frac{S^2}{b^2}\,dA = \frac{1}{2}\int_L \frac{V^2}{GA}\,dx\,\chi$$

$$\boldsymbol{U_V = \frac{\chi}{2}\int_0^L \frac{V^2}{GA}\,dx}$$

Energia Interna de Deformação devido ao Cortante – V (4)

- Exemplos de alguns Fatores de Cisalhamento já calculados para seções transversais mais comuns:

Forma da seção transversal	f_c
Retangular	6/5=1,2
Circular	10/9=1,1
Perfil "I" 	$\frac{A}{t_w d}$

Princípio da Conservação de Energia Mecânica

- Considerando a igualdade entre o Trabalho das Forças Externas e a Energia Interna de Deformação tem-se que:

$$W = \frac{1}{2} P.\delta$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2}{EA}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}\,dx + \frac{\chi}{2}\int_0^L \frac{V^2}{GA}\,dx$$

- Logo:

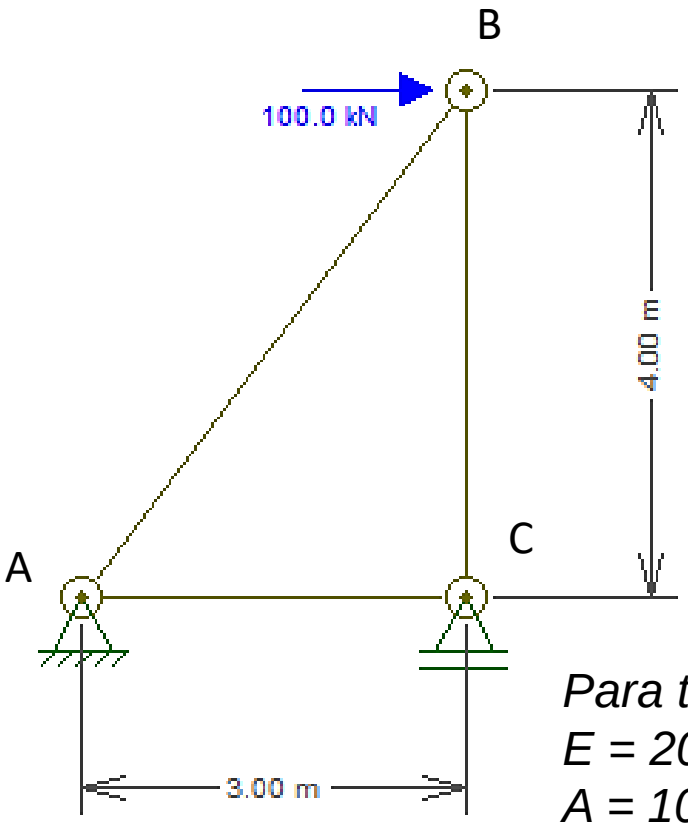
$$\boldsymbol{P.\delta = \int_0^L \frac{N^2}{EA}\,dx + \int_0^L \frac{M^2}{EI}\,dx + \chi\int_0^L \frac{V^2}{GA}\,dx}$$

Universidade POSITIVO

Aula 08 - Seção 3:
Aplicação da Igualdade entre o Trabalho Externo das Cargas e a Energia Interna de Deformação

Aplicação de W = U em Treliças (1)

- Calcular o “deslocamento” do ponto “B” da treliça abaixo:



- Como nas treliças ocorrem somente esforços axiais :→ M = 0 e Q = 0

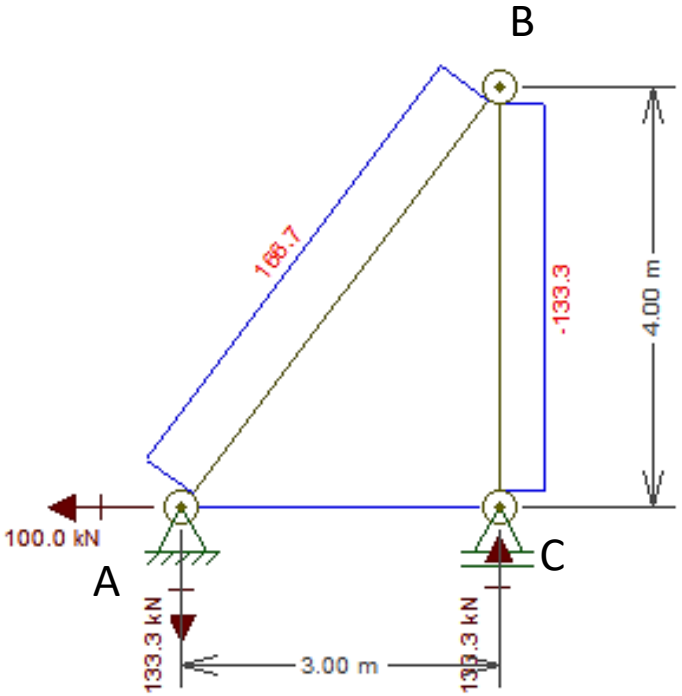
$$P.\delta = \int_0^L \frac{N^2}{EA}\,dx$$

- Como na treliça em questão não ocorre variação da área da seção transversal das barras:

$$P.\delta = \sum_i \frac{N_i^{\,2}}{EA} L_i$$

Para todas as barras:
E = 200GPa
A = 10 x 30 mm

Aplicação de W = U em Treliças (2)



- Da expressão abaixo temos que para calcular o deslocamento do ponto B (onde está aplicada a carga de 100kN) é necessário calcularmos os esforços internos em todas as barras:

$$P.\delta = \sum_i \frac{N_i^2}{EA} L_i$$

- Substituindo os valores dos esforços em cada barra e demais variáveis, tem-se que:

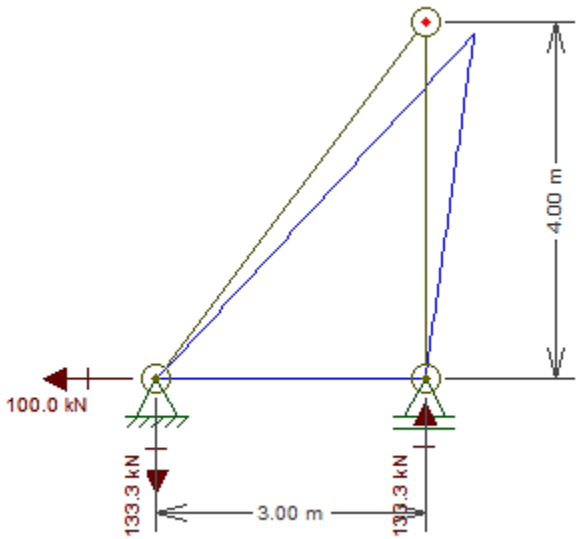
$$100kN.\delta = \frac{[(166{,}7kN)^2.5{,}0m + (133{,}3kN)^2.4{,}0m + (0)^2.3{,}0m]}{200.10^6 \frac{kN}{m^2}.3.10^{-4}m^2}$$

Aplicação de W = U em Treliças (3)

- Isolando o deslocamento na expressão tem-se que:

$$\delta = \frac{\mathbf{210000\ kN^2 m}}{\mathbf{600.10^2\ kN.100 kN}} = \mathbf{0,035 m = 35\ mm}$$

- Consultando as respostas do FTOOL para os deslocamentos na estrutura, obtemos:

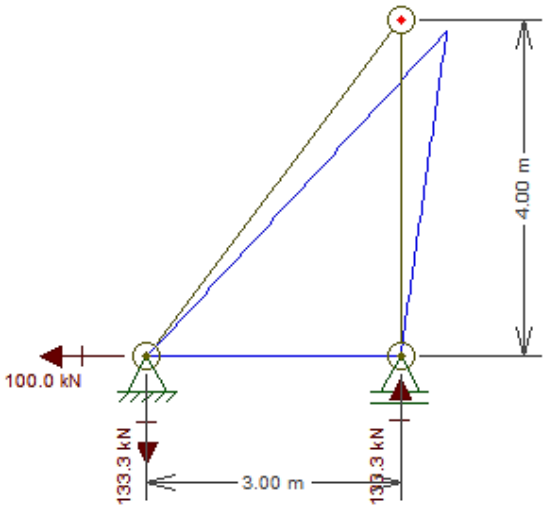


Support
Reactions:
None

Nodal
Displacements:
Dx = 35.000000 mm
Dy = -8.888889 mm
Rz = 0.000000 rad

Aplicação de W = U em Treliças (4)

- Pela comparação com os resultados do FTOOL:



Nodal
Displacements:
Dx = 35.000000 mm
Dy = -8.888889 mm
Rz = 0.000000 rad

- Note-se que o software dá como resposta um deslocamento de 35 mm na direção “X” (Dx)
- Entretanto além do deslocamento em “X” o ponto B desloca-se 8,888 mm para baixo em “Y” (Dy)
- **Conseguimos calcular os 35 mm de deslocamento porque este deslocamento é colinear à força de 100kN considerada.**

Limitações da Aplicação de W = U:

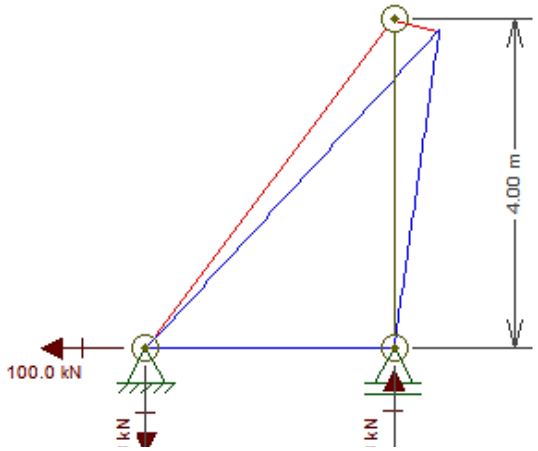
- Do que vimos até então, o PCEM apresenta as seguintes limitações quanto ao cálculo de deslocamentos:

a) Somente é possível o **cálculo de deslocamentos colineares** (ou correlatos) à forças aplicadas na estrutura;

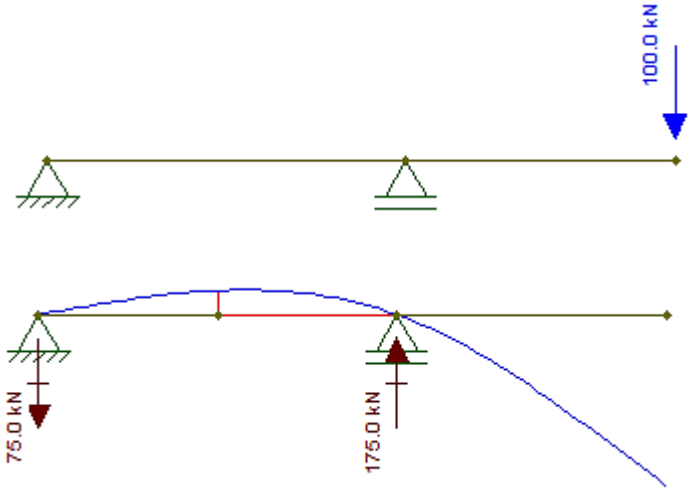
b) Somente é possível calcular os deslocamentos correlatos de **pontos onde existam cargas aplicadas**;

Questionamentos :

1. Como calcular o deslocamento vertical (Dy) da treliça que acabamos de estudar dado que a carga aplicada no ponto era somente na vertical?



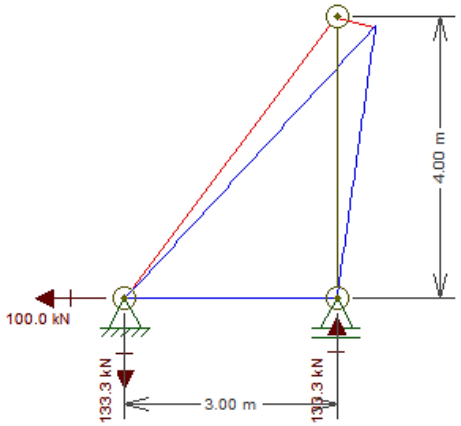
2. Como calcular o deslocamento de um ponto de uma estrutura em que não há uma carga aplicada, como por exemplo no meio do vão ao lado?

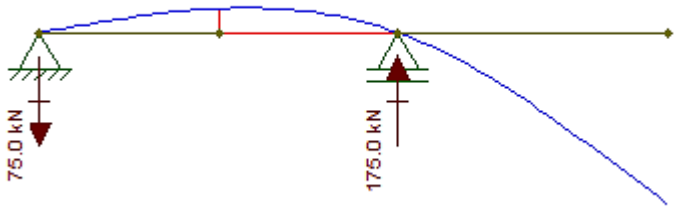


Resposta aos Questionamentos:

- Para ambas as situações anteriormente expostas, a resposta é uma só:

*Imaginamos **cargas virtuais unitárias** na direção dos deslocamentos que queremos calcular e acoplamos os efeitos destas no segundo termo da expressão da igualdade W = U em conjunto com os efeitos das cargas reais.*





FIM