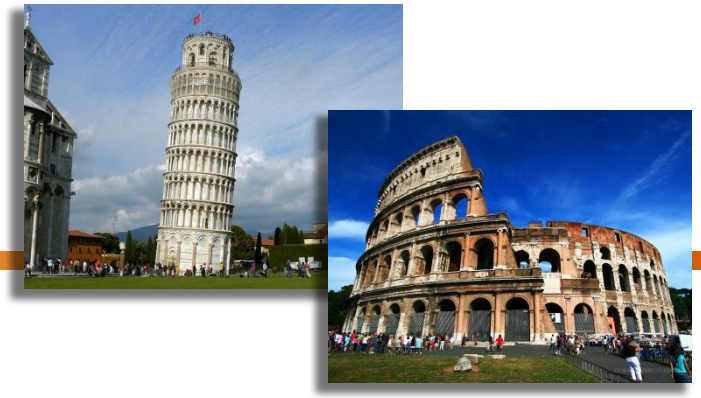
Teoria das Estruturas I - Aula 09



Cálculo de Deslocamentos em Estruturas Isostáticas (2)

- Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicado a Treliças;
- Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicado a Vigas e Pórticos;

Prof. Juliano J. Scremin

Universidade POSITIVO

Universidade POSITIVO

Aula 09 - Seção 1:
Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicado à Treliças

Trabalho Virtual

- Um deslocamento virtual ou uma força virtual são, respectivamente, um deslocamento imaginário ou uma força imaginária, arbitrariamente impostos sobre um sistema estrutural.
- O trabalho virtual pode ser considerado como o trabalho produzido por:
  - **Forças reais** durante um **deslocamento virtual**;
  - **Forças virtuais** durante um **deslocamento real**.
- **Deslocamento virtual** é um deslocamento provocado por alguma outra ação que não o sistema de carregamento em questão atuante na estrutura.
- **Força virtual** pode ser considerada uma outra força qualquer que não seja a que está provocando o deslocamento real.

PTV em Treliças (1)

- Para aplicar o PTV (Princípio dos Trabalhos Virtuais) em treliças relembremos a expressão do PCEM para estas:

$$P.\delta = \sum_i \frac{N_i^2}{EA} L_i \quad \Rightarrow \quad P.\delta = \sum_i N_i \boxed{\frac{N_i L_i}{EA}}$$

Deslocamento axial relativo de uma barra de comprimento "L", área de seção transversal constante "A" solicitada por uma carga axial "N"

$$\delta = \frac{NL}{EA}$$

PTV em Treliças (2)

- O PTV é então aplicado pela suposição de uma **"carga virtual unitária" ($\overline{P}$)** que figurará no primeiro termo da expressão, causando **"esforços internos virtuais" ($\overline{N_i}$)** contemplados no segundo membro da equação:

Deslocamento real correlato a $\overline{P}$

Parcelas de deslocamento real em função dos Esforços Internos Reais (N)

$$\overline{P} \cdot \delta = \sum_i \overline{N_i} \frac{N_i L_i}{EA}$$

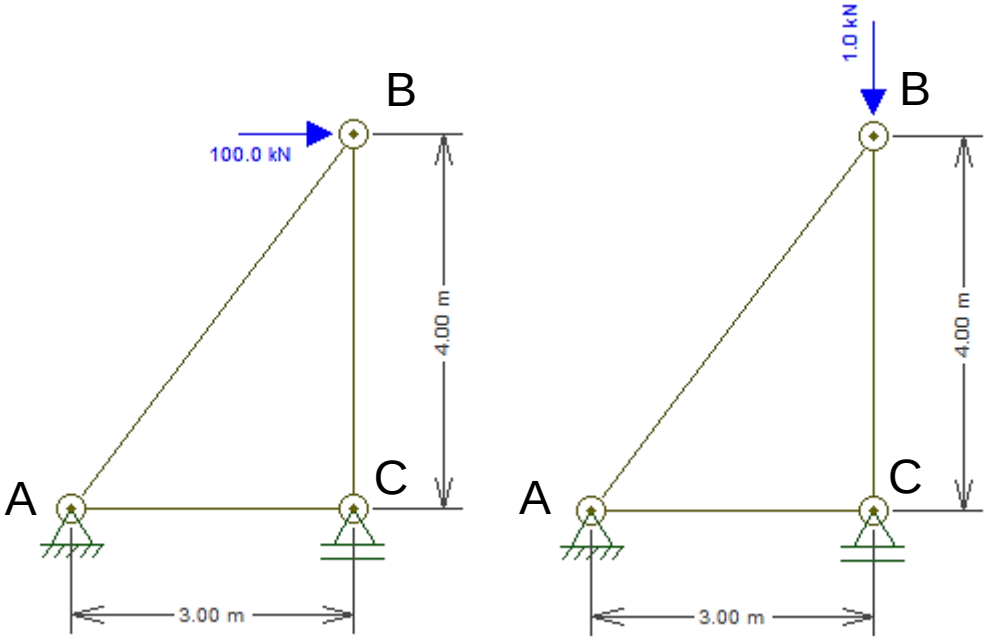
Carga Virtual Unitária na direção que se deseja calcular o deslocamento

Esforços Internos Virtuais ($\overline{N}$) devidos a Carga Virtual Unitária

Continuidade do Exercício de Treliça “15.3” (1)

- Calcular o **“deslocamento Dy”** do ponto “B” da treliça abaixo:

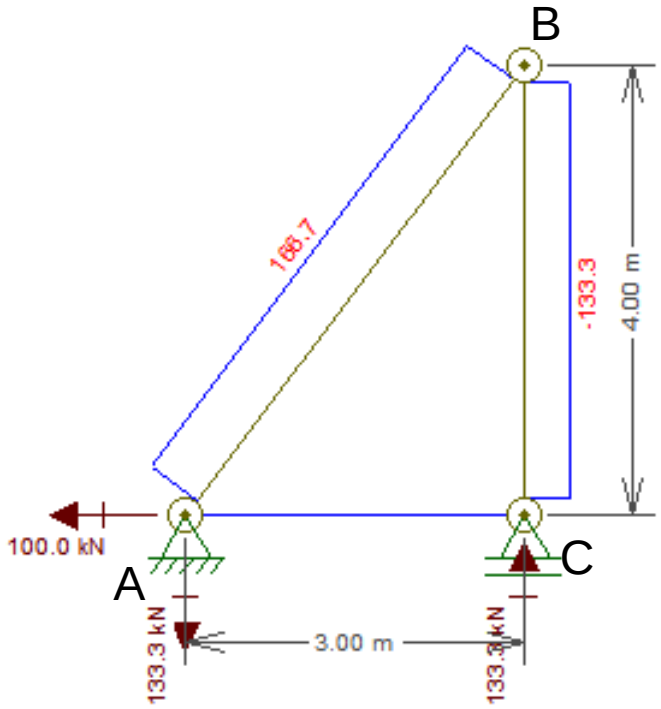
*Para o caso agora, além de calcular os esforços internos devido ao carregamento real (**100kN**) faz-se necessário o cálculo dos esforços internos oriundos de uma carga virtual unitária (**$\overline{P}$ =1kN**) a ser aplicada na vertical sobre o **ponto B**.*



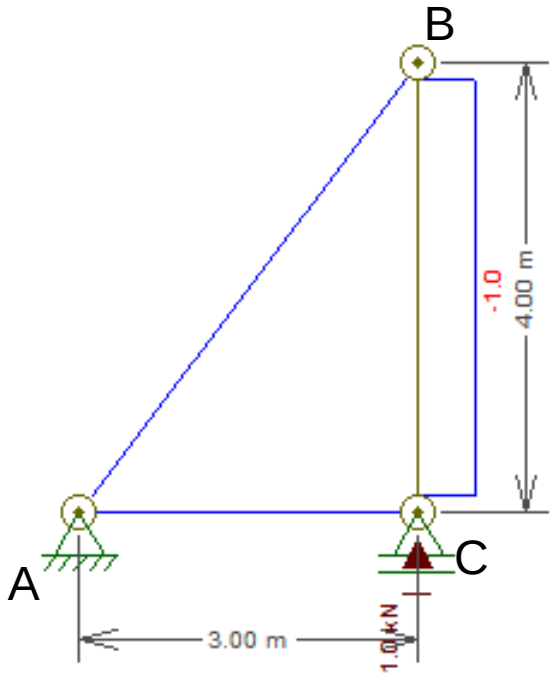
$$\overline{P} \cdot \delta = \sum_i \overline{N_i} \frac{N_i L_i}{EA}$$

Para todas as barras:
E = 200GPa
A = 10 x 30 mm

Continuidade do Exercício de Treliça “15.3” (2)



Esforços Axiais devidos ao carregamento REAL



Esforços Axiais devidos ao carregamento VIRTUAL

Aplicação do PCEM a Treliças (3)

- Substituindo os de esforços internos **reais** e **virtuais**, e demais propriedades na expressão abaixo:

$$\overline{P} \,.\, \delta_{By} = \sum_{i} \overline{N_i} \, \frac{N_i L_i}{EA}$$

$$1kN.\, \delta_{By} = \frac{[0kN.166{,}7.kN.5{,}0m + 1kN.133{,}3kN.4{,}0m + 0kN.0kN.3{,}0m]}{200.10^6 \, \frac{kN}{m^2} \,.\, 3.10^{-4} m^2}$$

$$\delta = \frac{533{,}3\ kNm}{600.10^2\ kN.1kN} = 0{,}008888\ m = 8{,}888\ mm$$

- *Vale salientar que como a força virtual* $\overline{P}$ ***=1kN*** *foi aplicada para baixo no ponto B da treliça, o resultado de 8,888 mm de deslocamento apresenta-se com sinal positivo por ocorrer na direção e sentido de aplicação da força virtual adotada.*

Universidade POSITIVO

Aula 09 - Seção 2:
Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicado à Vigas e Pórticos

PTV em Vigas (1)

- Para aplicar o PTV (Princípio dos Trabalhos Virtuais) em vigas temos que adaptar a expressão do PCEM para uso em vigas.

- Em uma viga sujeita a flexão simples são encontrados somente esforços de **Momento Fletor (M)** e **Cortante (V)**;

- Desta forma a expressão dos PCEM para estes elementos estruturais resume-se a:

$$P.\delta = \int_0^L \frac{N^2}{EA}\,dx + \int_0^L \frac{M^2}{EI}\,dx + \chi \int_0^L \frac{V^2}{GA}\,dx$$

PTV em Vigas (2)

- Diferentemente da treliça, onde o esforço axial (N) é constante ao longo do comprimento de cada barra, em uma viga o momento fletor e o esforço cortante são variáveis ao longo do comprimento longitudinal.

- Assim sendo, não há como escaparmos do uso das integrais. Entretanto, as mesmas ideias de combinação de esforços reais e virtuais continuam valendo:

$$\overline{P}.\delta_y = \int_0^L \overline{M}\frac{M}{EI}dx + \chi\int_0^L \overline{V}\frac{V}{GA}dx$$

PTV em Vigas (3)

- Vale a pena salientar as seguintes relações:

$$\bar{P}.\delta_y = \int_0^L \bar{M}\frac{M}{EI}dx + \chi\int_0^L \bar{V}\frac{V}{GA}dx$$

Carregamento Virtual

Esforços Internos VIRTUAIS

Rotação diferencial REAL no ponto "X"

$$d\varphi(x) = \frac{M}{EI}dx$$

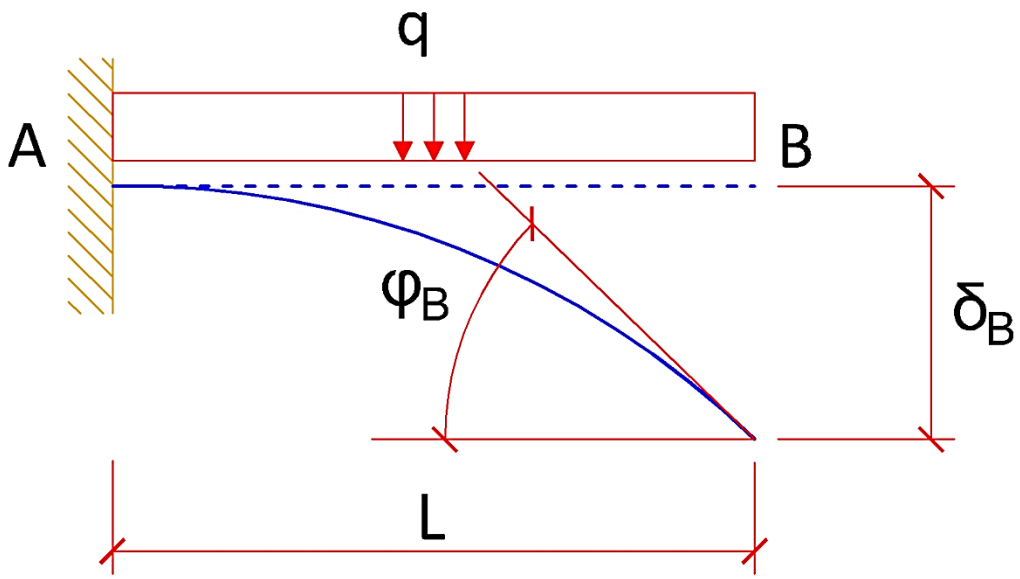
Distorção Angular diferencial REAL no ponto "X"

$$d\lambda(x) = \chi\frac{V}{GA}dx$$

Exemplo de Aplicação do PTV em Vigas (1)

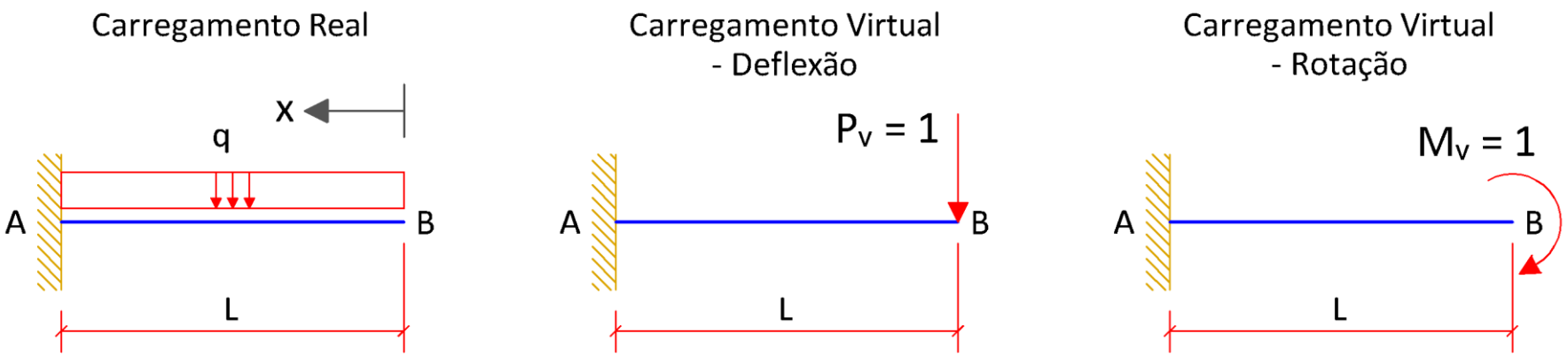
- Seja a viga engastada abaixo, com comprimento longitudinal “L” e sujeita à uma carga distribuída uniforme “q”. Seja o ponto “A” o engaste e o ponto “B” a ponta livre, pede-se:

  a) Determinar a deflexão (deslocamento vertical - δ_B) do ponto B;
  b) Determinar a rotação (φ_B) do ponto B;



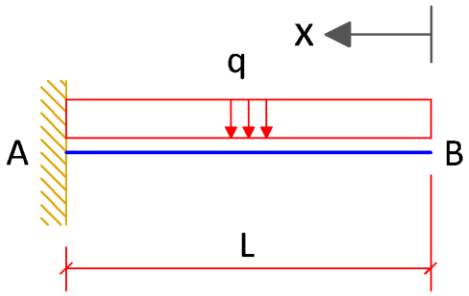
Exemplo de Aplicação do PTV em Vigas (2)

- Como visto anteriormente, para a determinação de um deslocamento em um determinado ponto de uma estrutura via igualdade W = U é necessária a aplicação de uma força correlata a este “deslocamento desejado”.
  - No caso de **deslocamentos de translação** (deflexão) são aplicadas **“forças concentradas unitárias e virtuais”**
  - No caso de **deslocamentos de rotação** devem ser aplicados **“momentos fletores unitários e virtuais”**

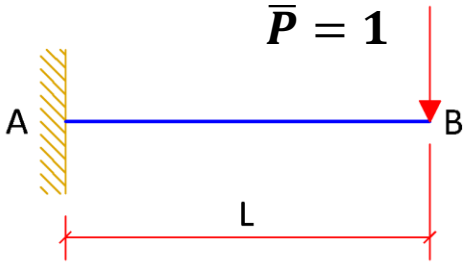


Exemplo de Aplicação do PTV em Vigas (3)

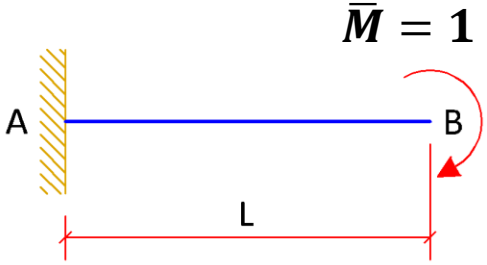
Carregamento Real



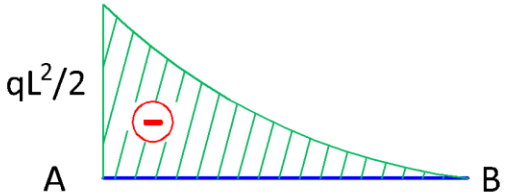
Carregamento Virtual - Deflexão



Carregamento Virtual - Rotação

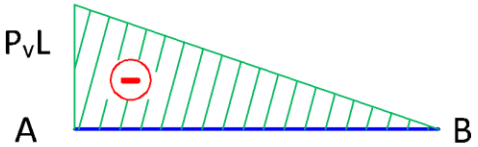


Momento Fletor - REAL



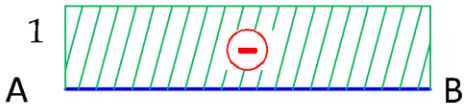
$$M(x) = -qx^2/2$$

Momento Fletor - VIRTUAL δ



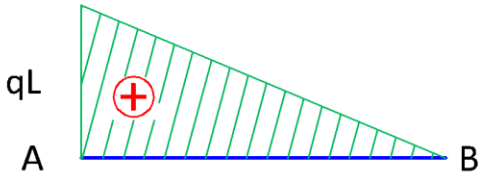
$$\bar{M}_{\delta(x)} = -\bar{P}.x$$

Momento Fletor - VIRTUAL φ



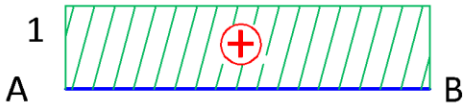
$$\bar{M}_{\varphi(x)} = -1$$

Cortante - REAL



$$V(x) = qx$$

Cortante - VIRTUAL δ



$$\bar{V}_{\delta}(x) = 1$$

Cortante - VIRTUAL φ



$$\bar{V}_{\varphi(x)} = 0$$

Exemplo de Aplicação do PTV em Vigas (4)

- Aplicando a expressão do PTV para vigas, têm-se que:
  - Para a **deflexão do ponto B**:

$$\bar{P}.\delta_B = \int_0^L \bar{M}\frac{M}{EI}dx + \chi\int_0^L \bar{V}\frac{V}{GA}dx$$

$$\bar{P}.\delta_B = \int_0^L (-\bar{P}x)\frac{(-qx^2)}{2EI}dx + \chi\int_0^L 1\frac{(qx)}{GA}dx$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} + \chi\frac{qL^2}{2GA}$$

Parcela da deflexão devido ao momento fletor

Parcela da deflexão devido ao cortante

A parcela do esforço cortante na deflexão "geralmente" é muito pequena quando comparada com a do momento fletor, assim sendo, em estruturas comuns, esta é "normalmente" negligenciada

Exemplo de Aplicação do PTV em Vigas (5)

- Aplicando a expressão do PTV para vigas, têm-se que:
  - Para a **rotação do ponto B**:

$$\bar{M}.\varphi_B = \int_0^L \bar{M}\frac{M}{EI}dx + \chi\int_0^L \bar{V}\frac{V}{GA}dx$$

$$\bar{M}.\varphi_B = \int_0^L (-\bar{1})\frac{(-qx^2)}{2EI}dx + \chi\int_0^L 0\,\frac{(qx)}{GA}dx$$

$$\varphi_B = \frac{qL^3}{6EI} + 0$$

Parcela da deflexão devido ao momento fletor

Parcela da deflexão devido ao cortante

PTV em Pórticos

- Em tese, na aplicação do PTV aos pórticos planos isostáticos, devem ser considerados os efeitos de todos os três esforços internos (M, Q e N):

$$P.\delta = \int_0^L \bar{N}\frac{N}{EA}dx + \int_0^L \bar{M}\frac{M}{EI}dx + \chi\int_0^L \bar{V}\frac{V}{GA}dx$$

- Entretanto, tal como nas vigas, o efeito do momento fletor, “geralmente” acaba sobressaindo-se aos demais, de modo que, a influência do esforço cortante e do esforço normal acabam sendo negligenciadas:

$$P.\delta = \int_0^L \bar{M}\frac{M}{EI}dx$$

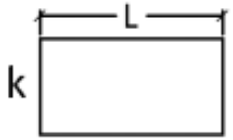
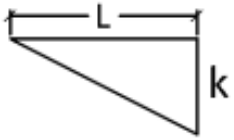
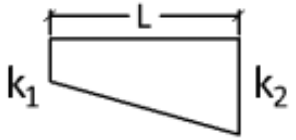
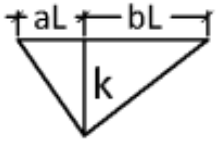
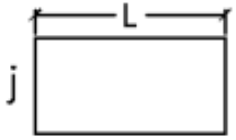
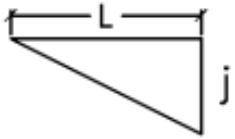
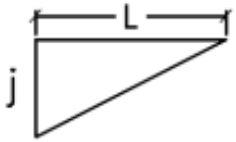
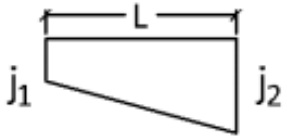
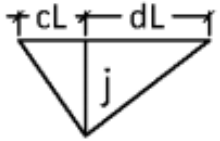
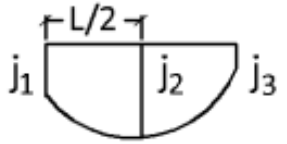
Integração Via Tabelas

- Para facilitar o processo de integração é possível se fazer o uso de tabelas de integrais baseadas na geometria dos diagramas de esforços internos.

- Para tanto, faz-se necessário que o traçado dos diagramas (para cargas reais e virtuais) seja correto e definido em cada barra componente do pórtico.

- Em cada barra devem ser definidos os valores dos esforços internos nos extremos e no ponto médio.

Tabela de Integrais Geométricas

				
	Ljk	1/2 Ljk	1/2 Lj(k_1+k_2)	1/2 Ljk
	1/2 Ljk	1/3 Ljk	1/6 Lj(k_1+2k_2)	1/6 Ljk(1+a)
	1/2 Ljk	1/6 Ljk	1/6 Lj(2k_1+k_2)	1/6 Ljk(1+b)
	1/2 Lk(j_1+j_2)	1/6 Lk(j_1+2j_2)	1/6 L[j_1(2k_1+k_2) + j_2(k_1+2k_2)]	1/6 Lk[j_1(1+b)+ j_2(1+a)]
	1/2 Ljk	1/6 Ljk(1+c)	1/6 Lj[k_1(1+d)+ k_2(1+c)]	Ljk(2c-c^2-a^2)/(6bc)
	1/6 Lk(j_1+4j_2+j_3)	1/6 Lk(2j_2+j_3)	1/6 L[j_1k_1+ 2j_2(k_1+k_2)+j_3k_2]	1/6 Lk[j_1b+2j_2+j_3a -ab(j_1-2j_2+j_3)]

FIM

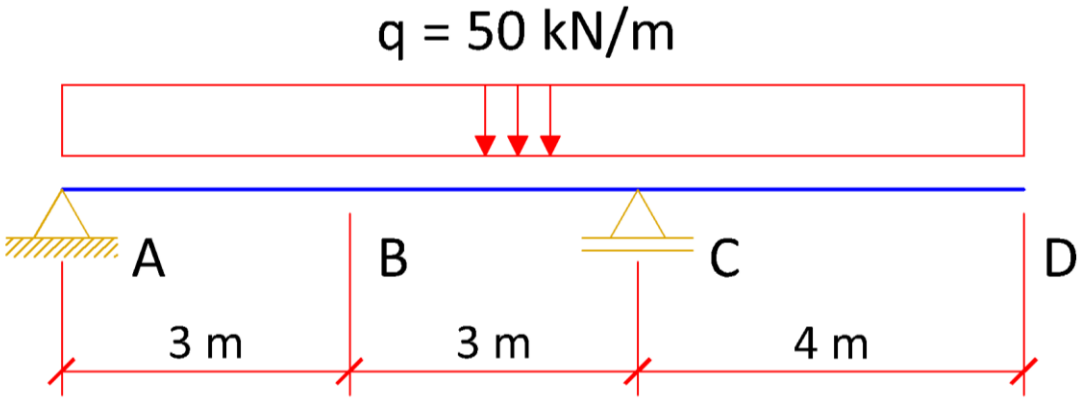
Exercício TE1-9.1

- Calcular, considerando somente os efeitos de momento fletor:
  a) A deflexão do ponto B;
  b) A rotação do ponto D;
  c) A deflexão do ponto D;

  Dados:

  E = 24000 MPa;

  Seção Transversal Retangular : b = 15cm; h = 40cm;



Exercício TE1-9.2

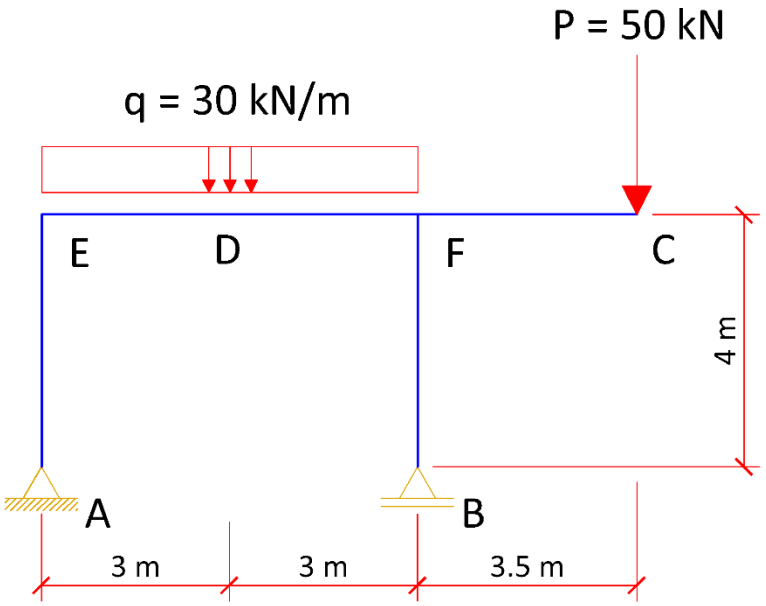
- Calcular a deflexão dos pontos C e D e a rotação do ponto C do pórtico abaixo considerando somente os efeitos de momento fletor.

  Dados:

  E = 20000 MPa;

  Vigas: - Seção Transversal Retangular : b = 15 cm; h = 60 cm;

  Pilares: - Seção Transversal Retangular : b = 15 cm; h = 30 cm;



Exercício TE1-9.3

- Calcular os deslocamentos vertical e horizontal do ponto C do pórtico abaixo:

  Dados:

  E = 25000 MPa;

  Vigas: - Seção Transversal Retangular : b = 20 cm; h = 40 cm;

  Pilares: - Seção Transversal Retangular : b = 20 cm; h = 50 cm;

