Teoria das Estruturas II - Aula 04



Estruturas Hiperestáticas: Método das Forças (1)

- Método das Forças aplicado a problemas com apenas 1 Grau de Hiperestaticidade;

Prof. Juliano J. Scremin

Universidade POSITIVO

Universidade POSITIVO

Aula 04 - Seção 1:
Método das Forças aplicado a problemas com apenas 1 Grau de Hiperestaticidade

Apresentação do Problema

- Seja o nosso objetivo **traçar o diagrama de momentos fletores** para a estrutura modelada na Figura 1;
- Notório é o fato de que a estrutura possui “4 apoios”, ou seja, 1 a mais do que o número de equações da estática no plano, e portanto, constitui uma **“estrutura hiperestática de grau 1”**;
- Por uma questão de organização podemos **numerar as reações** de apoio do modelo de 1 a 4 conforme a Figura 2.

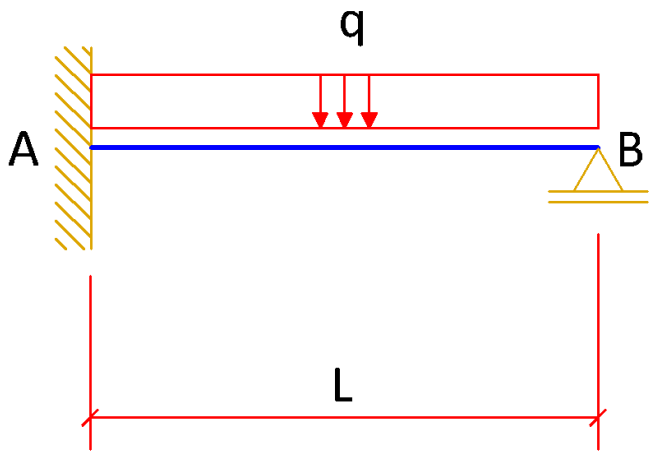


Figura 1

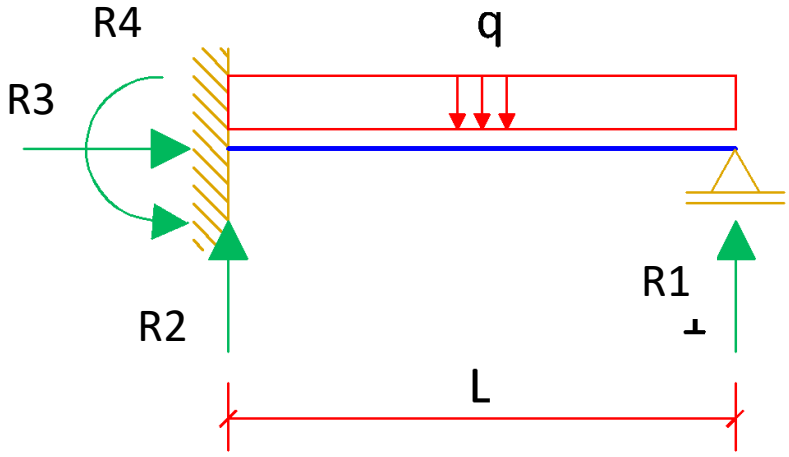


Figura 2

Ideia Básica do Método (1)

- Até agora na disciplina somente aprimoramos métodos de determinação de esforços para estruturas hiperestáticas;
- Assim sendo, o ponto de partida do **Método das Forças** é **simplificar** nossa estrutura **hiperestática transformando-a em duas estruturas isostáticas associadas;**

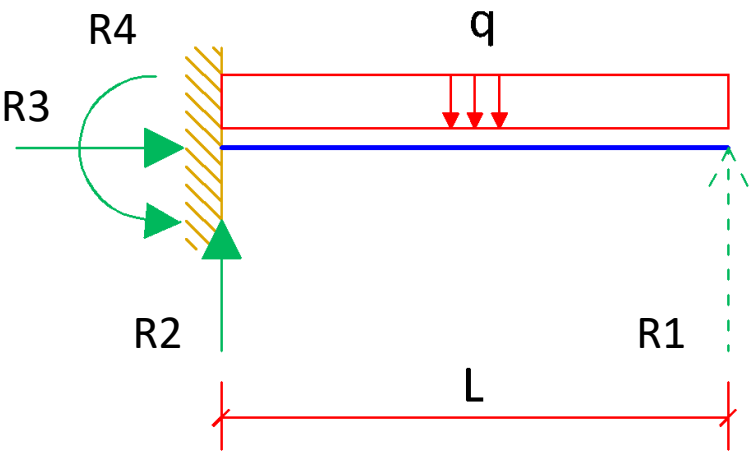


Figura 3

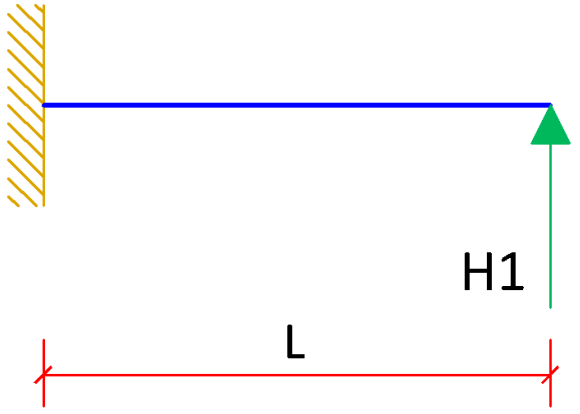


Figura 4

Ideia Básica do Método (2)

- Na primeira (figura 3), escolhemos uma reação de apoio superabundante (por exemplo R1) e a retiramos de modo a compor uma estrutura isostática onde permanece o carregamento real (no caso q);
- Na segunda (figura 4), tomamos apenas a geometria do modelo estrutural (sem o carregamento real) e aplicamos sobre esta a reação de apoio retirada (R1 rebatizada como H1) como sendo um **carregamento unitário**. **(qualquer semelhança com a aplicação do PTV para cálculo de deslocamentos não é uma mera coincidência)**

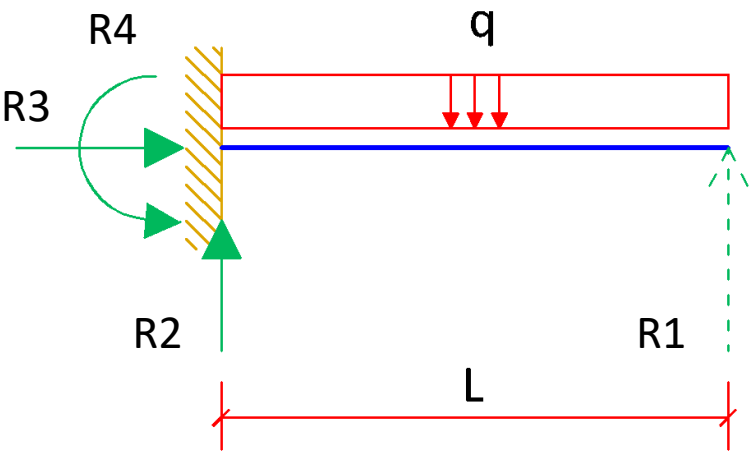


Figura 3

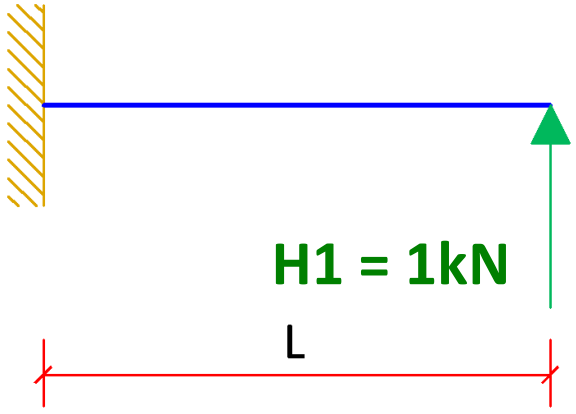
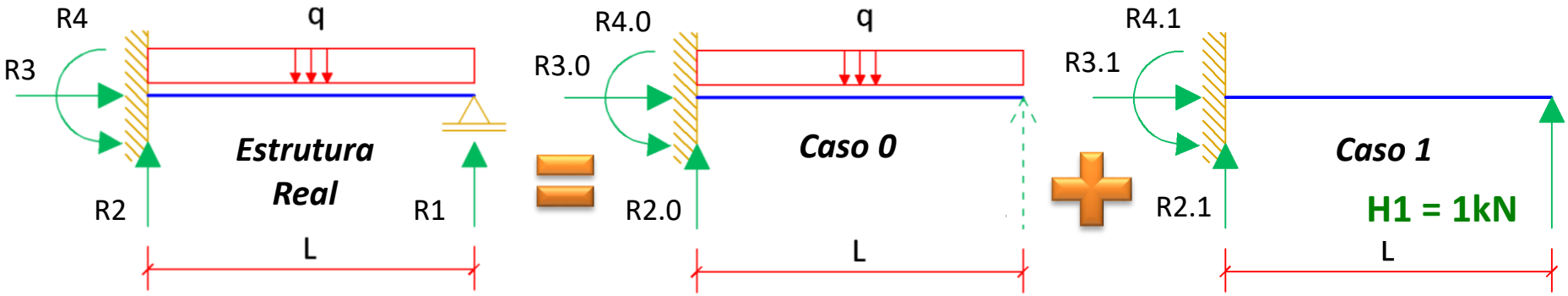


Figura 4

Ideia Básica do Método (3)

- Dessa forma, acabamos configurando dois carregamentos distintos sobre uma mesma geometria simplificada e isostática:
  - o carregamento real, chamado de **Caso 0**;
  - o carregamento da reação superabundante “1” chamado de **Caso 1**;



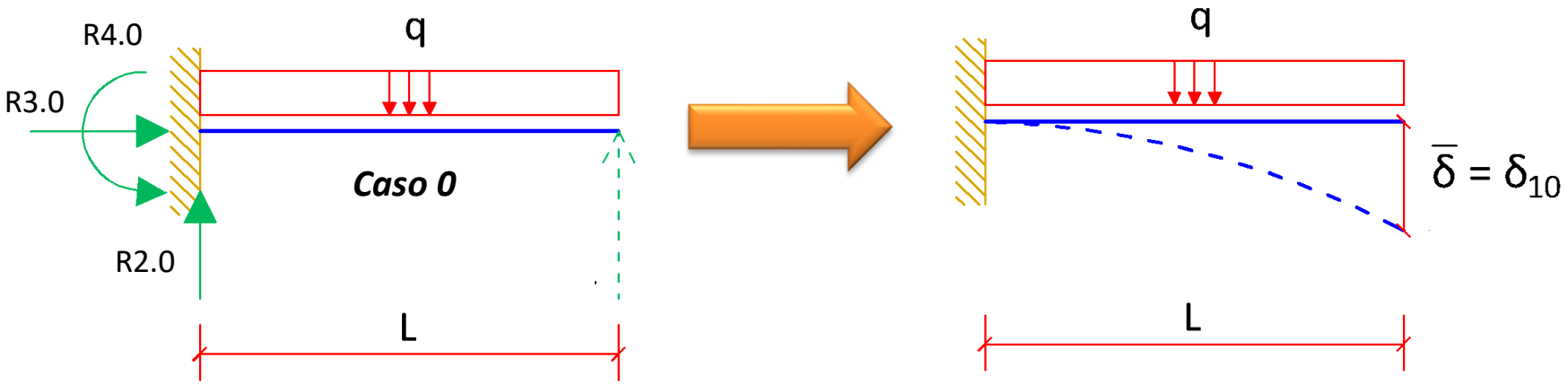
- Consequentemente:

R4 = R4.0 + R4.1 * H1
R3 = R3.0 + R3.1 * H1
R2 = R2.0 + R2.1 * H1

R1 – reação de apoio superabundante (redundante hiperestática H1) a ser determinada

Compatibilização de Deslocamentos (1)

- **Como inter-relacionar estes dois carregamentos?**

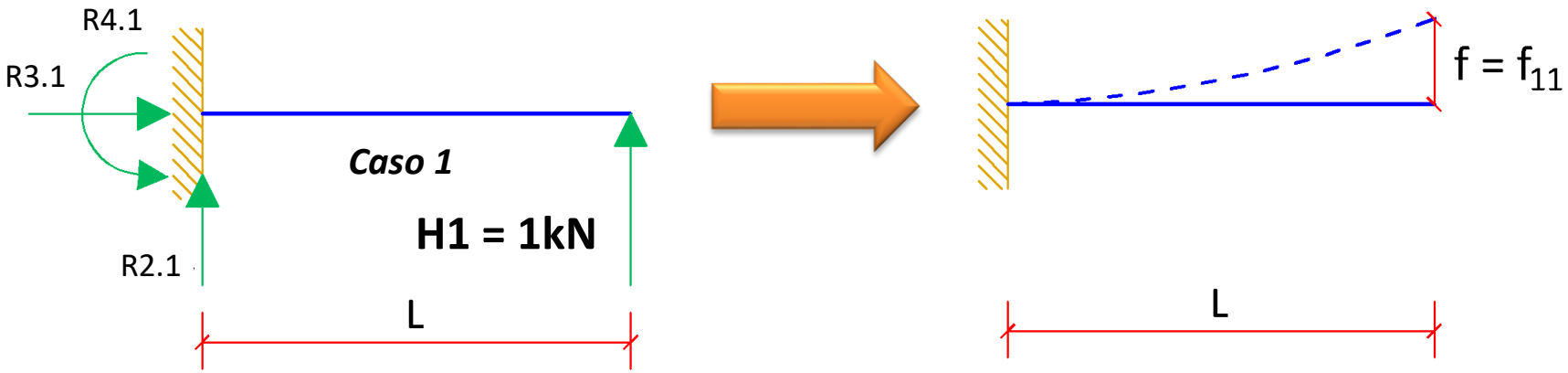


- No **Caso 0**, a ponta do balanço, onde antes existia a reação superabundante R1, sofrerá um deslocamento devido ao carregamento real.

- Este deslocamento é didaticamente denominado **δ_{10}**, sendo **"1"** uma referência a **reação retirada (H1)** e **"0"** uma referência ao **carregamento que provoca este deslocamento (Caso 0)** na direção da reação retirada;

Compatibilização de Deslocamentos (2)

- **Como inter-relacionar estes dois carregamentos?**

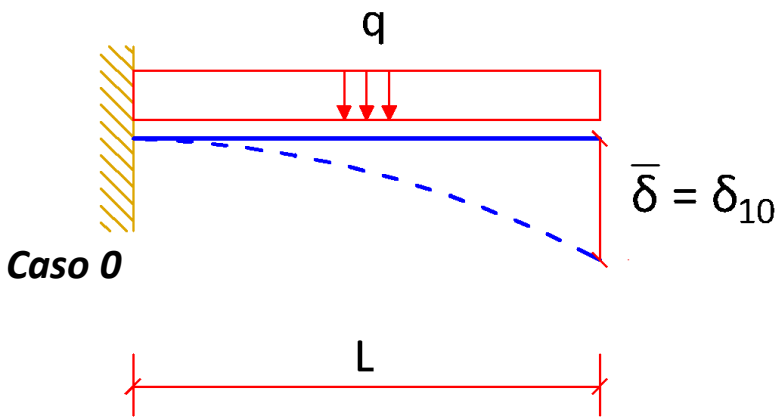


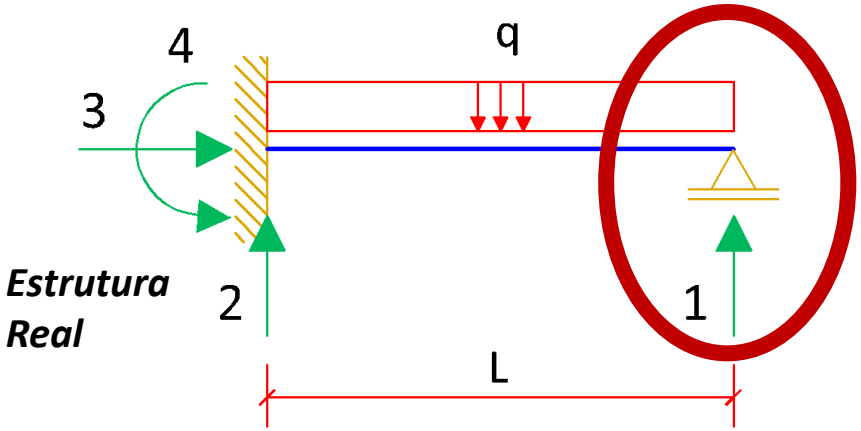
- No **Caso 1**, a ponta do balanço sofre uma deslocamento devido a aplicação da reação superabundante H1;
- Este deslocamento é didaticamente denominado **f_{11}**, sendo **"1"** uma referência a **reação retirada (H1)** e **"1"** uma referência ao **carregamento que provoca este deslocamento (Caso 1)** na direção da reação aplicada;

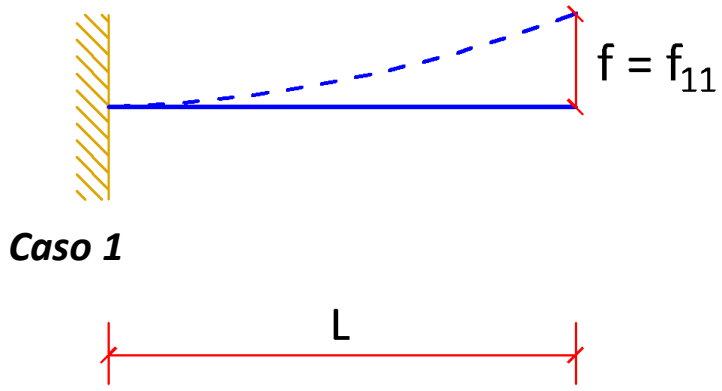
Compatibilização de Deslocamentos (3)

- **Como inter-relacionar estes dois carregamentos?**

- Fato é que **na estrutural real**, **a ponta do balanço não sofre nenhum deslocamento vertical** pois existe um apoio (e consequentemente uma reação vertical) que impede a ocorrência deste deslocamento;



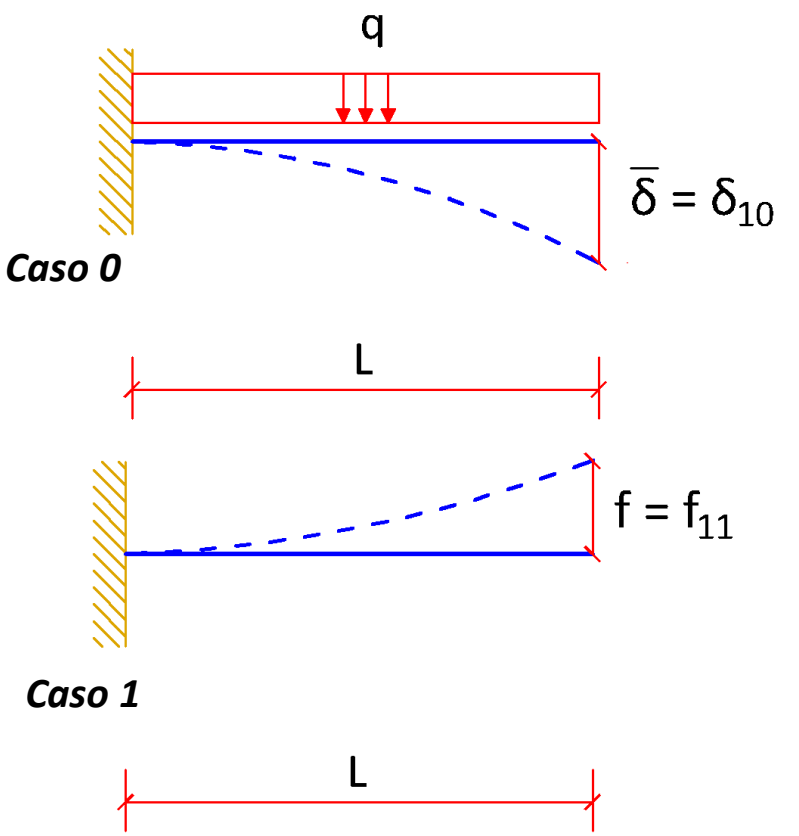




Compatibilização de Deslocamentos (3)

- **Como inter-relacionar estes dois carregamentos?**

- Como não conhecíamos o valor da reação de apoio “1” arbitramos o valor unitário para H1 (1kN) e assim sendo, **o deslocamento “f11” que calculamos** é de fato um **“deslocamento unitário”**, ou seja, ***é o deslocamento que ocorre na direção da reação considerada para cada 1kN de força aplicado***;



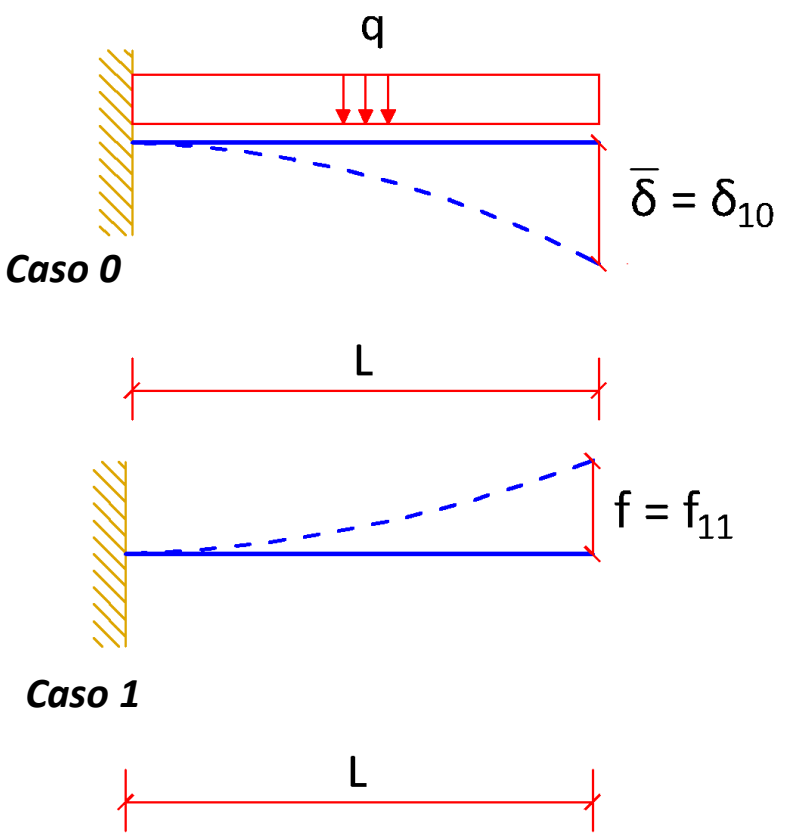
Compatibilização de Deslocamentos (4)

- **Como inter-relacionar estes dois carregamentos?**

- Considerando que o deslocamento da ponta do balanço na vertical é nulo, podemos fazer a seguinte afirmação:

$$H_1 \cdot f_{11} + \delta_{10} = 0$$

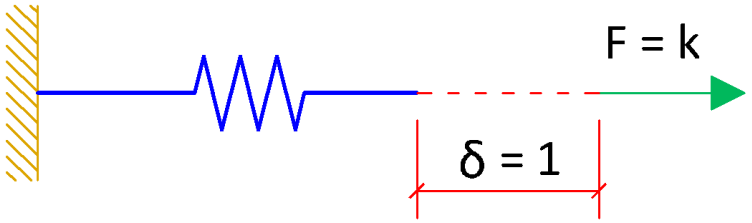
- **f11** de fato é o que chamamos de **coeficiente de flexibilidade**, relacionando qual o deslocamento vertical que ocorre no ponto analisado (ponta do balanço) devido a aplicação de uma força nesta mesma direção;



Método das Forças – Analogia de Mola

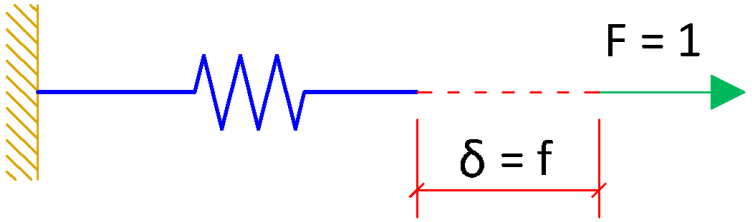
- **k - coeficiente de rigidez:**
  força (ou momento fletor) resultante de um deslocamento unitário relativo de translação (ou rotação) .

- **f - coeficiente de flexibilidade:**
  deslocamento relativo de translação (ou rotação) causado por uma força (ou momento fletor) unitária(o).



$F = k \cdot \delta$

Desloc. relativos como incógnitas



$\delta = f \cdot F$

Forças (mom.) como incógnitas

Método das Forças – Resumo

1. Escolha do **sistema principal** (Caso 0);
2. Cálculo do **deslocamento no ponto onde a força redundante foi removida** no sistema principal;
3. Aplicação da **redundante hiperestática H1, como carga isolada**, em uma geometria idêntica a do sistema principal e cálculo do **deslocamento no ponto de aplicação desta** (Caso 1);
4. Aplicação da **condição de compatibilidade $H.f + \delta = 0$**;

Generalização da Condição de Compatibilidade (1)

- Caso a estrutura tenha um deslocamento inicial associado à redundante hiperestática escolhida ($\boldsymbol{\delta_H}$) :

$$\mathbf{H_1 \, . \, f_{11} + \delta_{10} = \delta_{H1}}$$

- $\mathbf{H_1}$: redundante hiperestática
- $\mathbf{f_{11}}$: coeficiente de flexibilidade
- $\boldsymbol{\delta_{10}}$: deslocamento do Caso 0 correlato à redundante hiperestática H1
- $\boldsymbol{\delta_H}$: deslocamento prescrito (inicial) correlato à redundante hiperestática H1

Generalização da Condição de Compatibilidade (2)

- No caso de treliça hiperestática internamente (barra excedente):

$$\mathbf{N_H \cdot f_{11} + \delta_{10} = -\frac{N_H L_H}{E A_H}}$$

- $\mathbf{N_H}$: redundante hiperestática (esforço interno na barra excedente)
- $\mathbf{f_{11}}$: coeficiente de flexibilidade
- $\boldsymbol{\delta_{10}}$: deslocamento do Caso 0 correlato à redundante hiperestática NH
- $\frac{N_H L_H}{E A_H}$: deslocamento axial da barra excedente

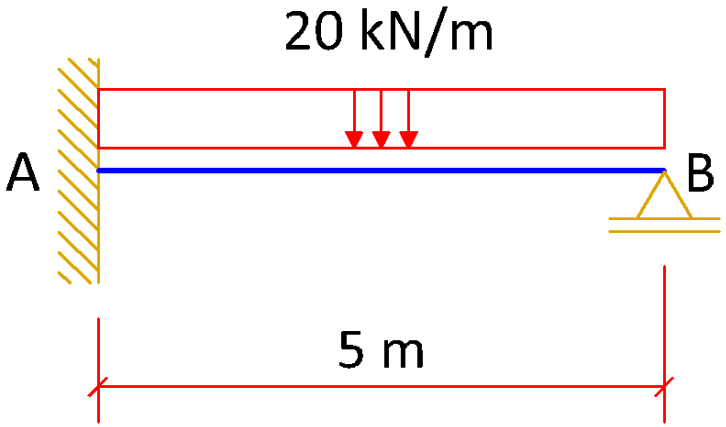
FIM

Exercício TE2-4.1

- Traçar o diagrama de momentos fletores para a estrutura com um grau de hiperestaticidade abaixo:

  Dados:

  E = 20000 MPa
  b = 20 cm
  h = 50 cm

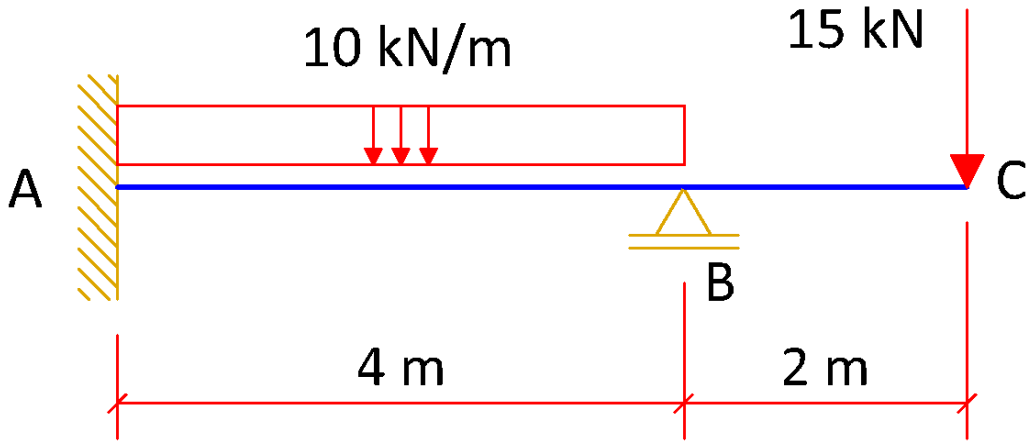


Exercício TE2-4.2

- Determinar as reações de apoio da estrutura hiperestática abaixo:

  Dados:

  E = 25000 MPa
  b = 15 cm
  h = 40 cm

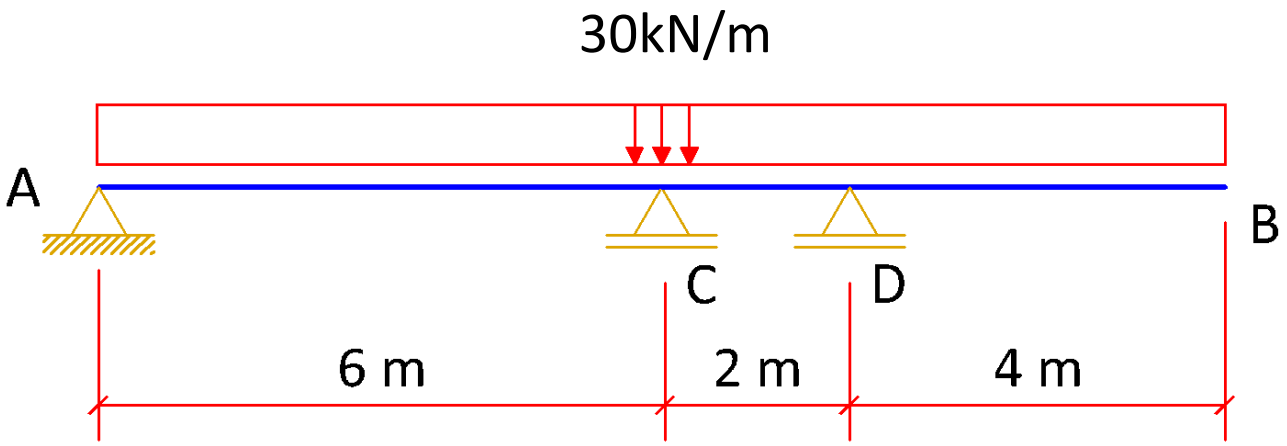


Exercício TE2-4.3

- Determinar as reações de apoio da estrutura hiperestática abaixo:

  Dados:

  E = 30000 MPa
  b = 25 cm
  h = 60 cm



Exercício TE2-4.4

- Determinar os esforços nas barras da treliça hiperestática abaixo:

  Dados:

  E = 200 GPa

  A = 4 cm²

