Teoria das Estruturas II - Aula 05



Estruturas Hiperestáticas: Método das Forças (2)

- Teoremas de Betti e Maxwell;
- Método das Forças aplicado a problemas com 2 ou mais Graus de Hiperestaticidade;
- Efeito de Carregamentos Térmicos;

Prof. Juliano J. Scremin

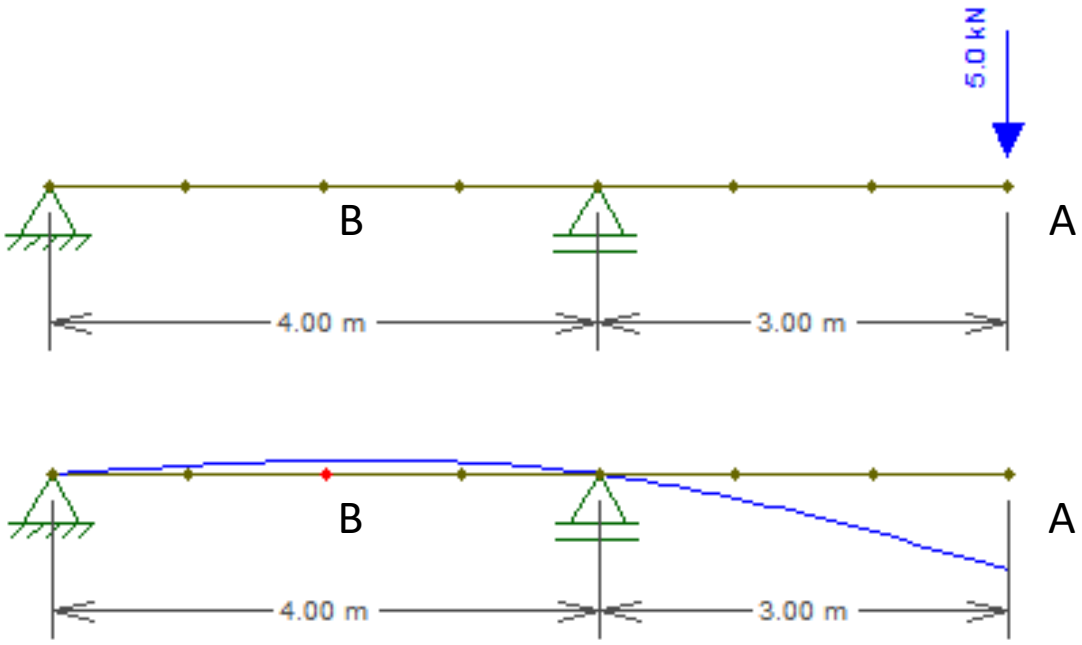
Universidade POSITIVO

Universidade POSITIVO

Aula 05 - Seção 1:
Teoremas de Betti e Maxwell

Teorema de Betti (1)

- Seja a viga biapoiada com balanço indicada na figura ao lado onde inicialmente aplicamos uma carga concentrada **P1 = 5kN** no **ponto A**.
- Por meio do Ftool, obtemos então os deslocamentos, em especial as deflexões “Dy” nos pontos A e B conforme ao lado;



Deslocamentos em B:

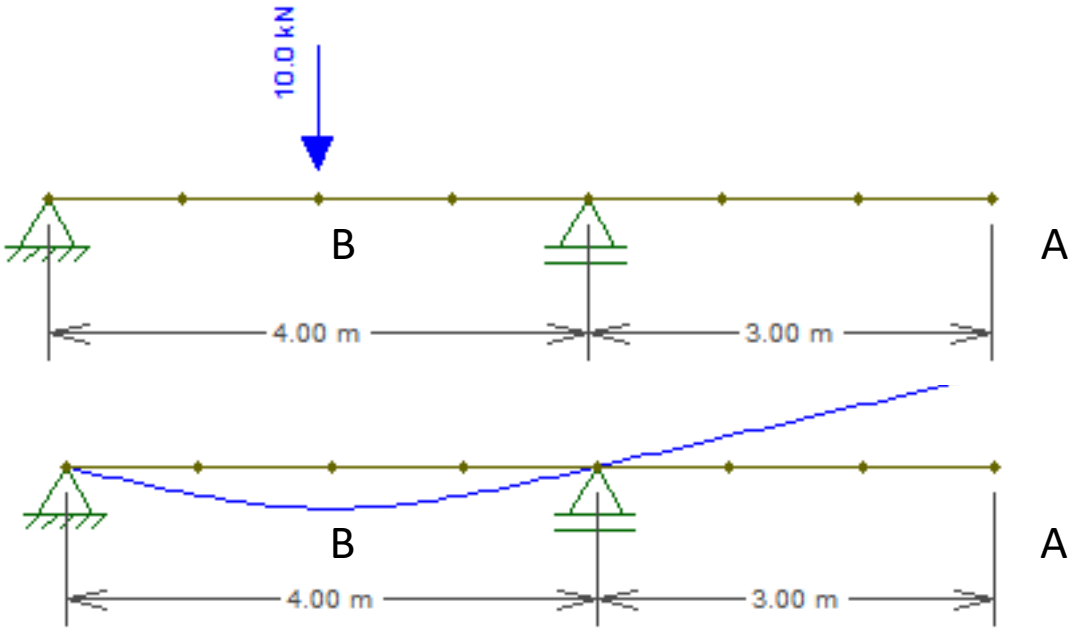
Dx = 0.000e+000 mm
Dy = 5.333e+000 mm
Rz = 8.889e-004 rad

Deslocamentos em A:

Dx = 0.000e+000 mm
Dy = -3.733e+001 mm
Rz = -1.511e-002 rad

Teorema de Betti (2)

- Na mesma viga biapoiada com balanço retiramos então a carga P1 e aplicamos uma carga concentrada **P2 = 10kN** no **ponto B**.
- Mais uma vez, por meio do Ftool, obtemos os deslocamentos, (as deflexões “Dy”) nos pontos A e B porém agora devidos a carga P2;



Deslocamentos em B:

Dx = 0.000e+000 mm
Dy = -4.741e+000 mm
Rz = 3.361e-018 rad

Deslocamentos em A:

Dx = 0.000e+000 mm
Dy = 1.067e+001 mm
Rz = 3.556e-003 rad

Teorema de Betti (3)

- Tabelando os resultados de deslocamentos verticais (deflexões Dy) obtidos em cada um dos pontos A e B para as respectivas forças P1 e P2 temos:

Carga	Dy em A	Dy em B
P1 = 5 kN (em A)	$-37{,}33 \times 10^{-3}$m	$5{,}333 \times 10^{-3}$m
P2 = 10 kN (em B)	$10{,}66 \times 10^{-3}$m	$-4{,}741 \times 10^{-3}$m

- Imaginemos agora a situação em que P1 é inicialmente aplicada no ponto A, e que em seguida é aplicada P2 no ponto B provocando um deslocamento vertical de $10{,}67 \times 10^{-3}$ m no ponto A.

- Como no ponto A havia a carga P1 de 5kN na vertical, o deslocamento de $10{,}66 \times 10^{-3}$m neste mesmo ponto (devido a aplicação de P2) gera um trabalho no ponto onde P1 está aplicada de:

$$W_{1,2} = P1 \,.\, 10,67.10^{-3}m = 5kN \,.\, 10,66.10^{-3}m = 0,0533\ kNm$$

- Por sua vez é possível calcular o trabalho que ocorre no ponto onde P2 está aplicada devido a aplicação de P1 como carregamento posterior:

$$W_{2,1} = P2 \,.\, 5,333.10^{-3}m = 10kN \,.\, 5,333.10^{-3}m = 0,0533\ kNm$$

Teorema de Betti (4)

- Repare-se que o trabalho do deslocamento provocado pela carga P2 sobre ponto onde está a carga P1 ($W_{1,2}$) e o trabalho do deslocamento provocado pela carga P1 no ponto onde está a carga P2 ($W_{2,1}$) são iguais.

$$\boldsymbol{W_{1,2} = W_{2,1}}$$

- Ou seja:

$$\boldsymbol{P_1 \delta_{1,2} = P_2 \delta_{2,1}}$$

- Importante é que este resultado é válido para qualquer par, trio ou ainda conjunto de “n” pontos por “n” forças (ou momentos) aplicáveis em quaisquer pontos dos modelos estruturais, desde que sejam válidas as hipóteses de:
  - **Linearidade Geométrica** (pequenas deformações e pequenos deslocamentos);
  - **Linearidade Física** (relação linear entre tensões e deformações – Lei de Hooke);

Teorema de Maxwell

- Dada a **validade do teorema de Betti para qualquer conjunto de cargas P1 e P2**, **Maxwell** supõe então a aplicação destas **cargas com valores unitários** (tal como procedemos na aplicação do PTV para cálculo de deslocamentos em estruturas), e assim sendo, fica fácil concluir que se:

$$P_1 = P_2 = 1kN$$

- Logo:

$$1kN \,.\, \delta_{1,2} = 1kN \,.\, \delta_{2,1}$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1}$$

Resumo dos Teoremas

- Teorema de Betti:

$$\sum P_i \, \delta_{ik} = \sum P_k \, \delta_{ki}$$

- Teorema de Maxwell:

$$\textbf{Se: } P_i = P_k$$

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

Universidade POSITIVO

Aula 14 - Seção 2:
Método das Forças aplicado a problemas com 2 ou mais Graus de Hiperestaticidade

Ideia Básica do Método (1)

- Tal como visto na Aula 18 o procedimento para cálculo de estruturas hiperestáticas pelo Método das Forças inicia-se pela escolha do **Sistema Principal** também chamado de **Caso 0 de carregamento**;
- Por exemplo, para a estrutura com 2 graus de hiperestaticidade exemplificada na Figura 1, teremos que compor o Caso 0 pela retirada de não apenas 1 mas sim 2 reações de apoio que adotaremos como sendo redundantes hiperestáticas (abundantes ao número de equações de equilíbrio no plano, ou seja 3)

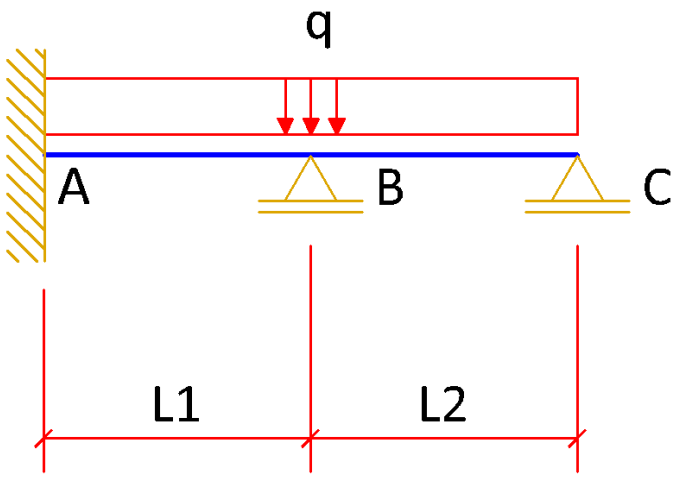


Figura 1

Ideia Básica do Método (2)

- No intento de retirar 2 das 5 reações de apoio da viga nos deparamos com algumas opções, como por exemplo, as mostradas na Figura 3

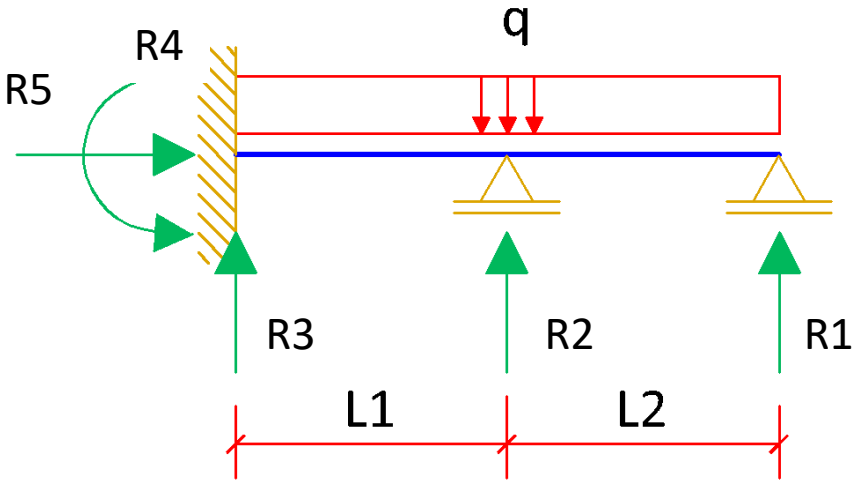


Figura 2 – Enumeração das Reações

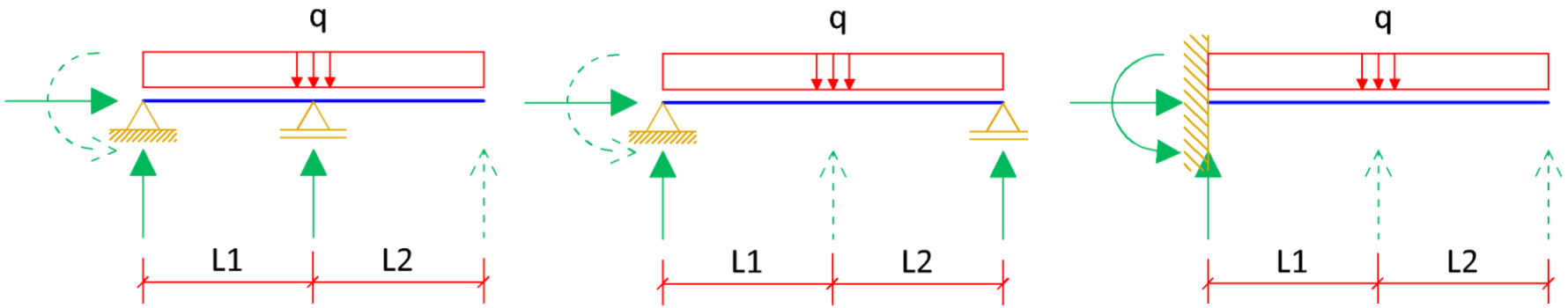


Figura 3 – Algumas opções de Sistema Principal

Ideia Básica do Método (3)

- Adotando por exemplo a retirada dos apoios tipo 1 para compor como Sistema Principal uma viga engastada em balanço, temos os deslocamentos indicados na Figura 4 que deverão conformar a condição de compatibilidade.
- Note-se que dado que são 2 os graus de hiperestaticidade além do Sistema Principal de carregamento (Caso 0) são necessários outros 2 casos de carregamento (Caso 1 e Caso 2) – cada caso extra relativo a um carregamento unitário correlato às redundantes hiperestáticas

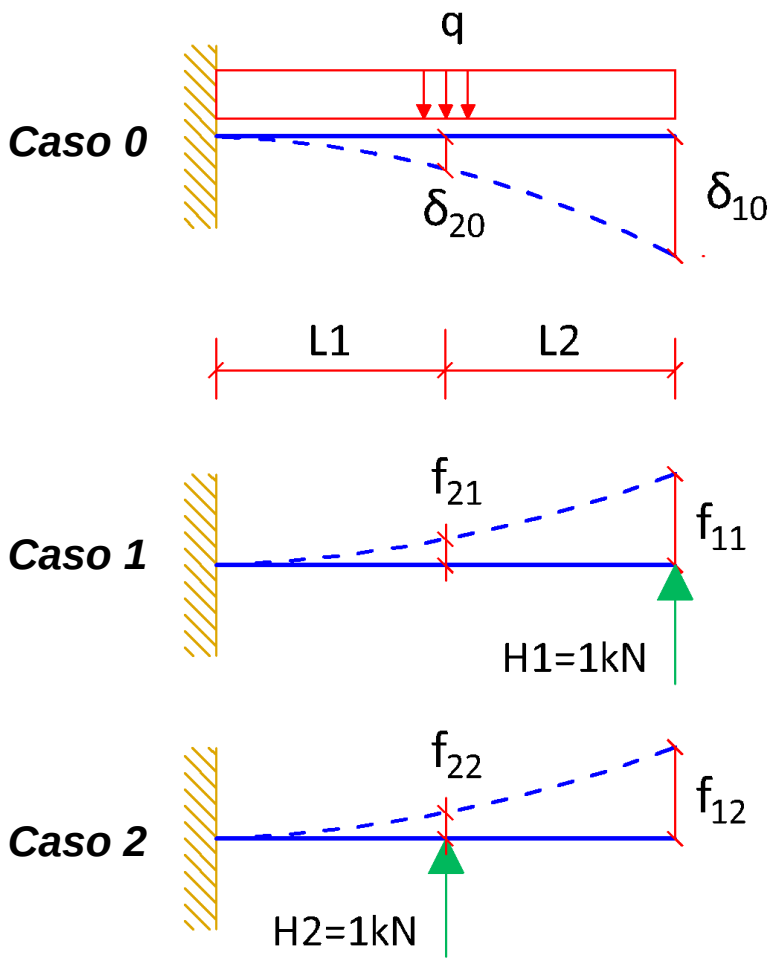


Figura 4

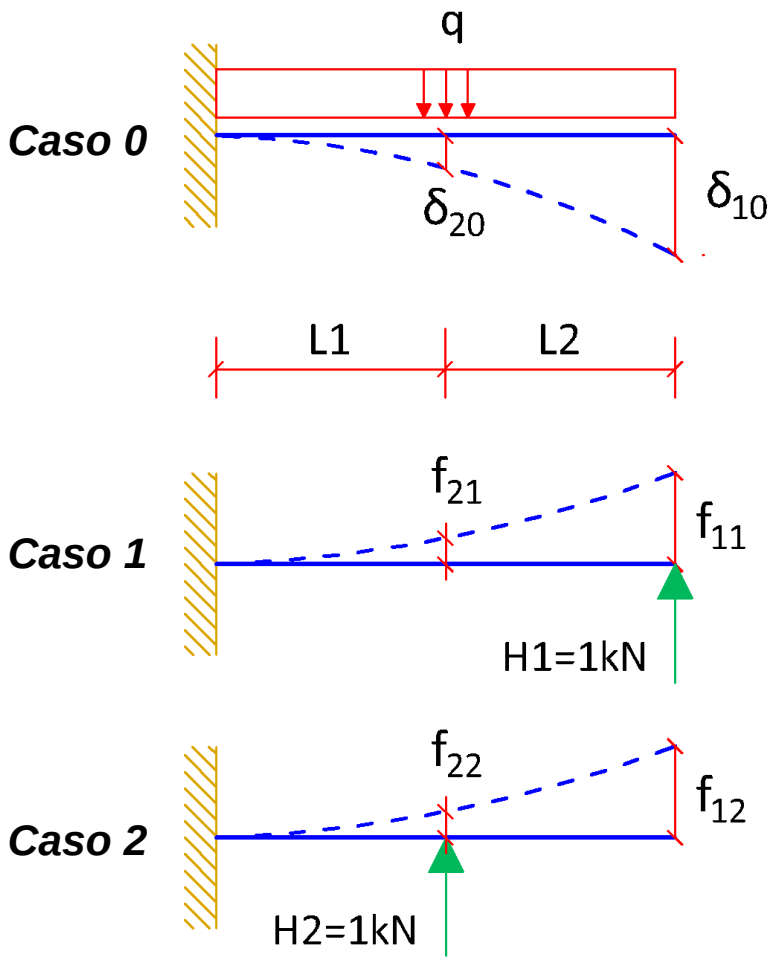
Condição de Compatibilidade

$$\begin{Bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}R_1\\ R_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

A . x = b

$$\underbrace{\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}} \cdot \begin{Bmatrix}R_1\\ R_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-\delta_{10}\\ -\delta_{20}\end{Bmatrix}$$

Matriz de Flexibilidade



Generalização da Condição de Compatibilidade

$$[f]\{H\} + \{\delta_0\} = \{\delta_{RH}\} + \{\delta_{RN}\} - \{\delta_T\} - \{\delta_{EI}\}$$

$[f]$: Matriz de Flexibilidade

$\{H\}$: Vetor das Redundantes Hiperestáticas Escolhidas (Incógnitas)

$\{\delta_0\}$: Vetor dos Deslocamentos do Caso 0

$\{\delta_{RH}\}$: Vetor dos Deslocamentos Prescritos em Vínculos Externos adotados como Hiperestáticos

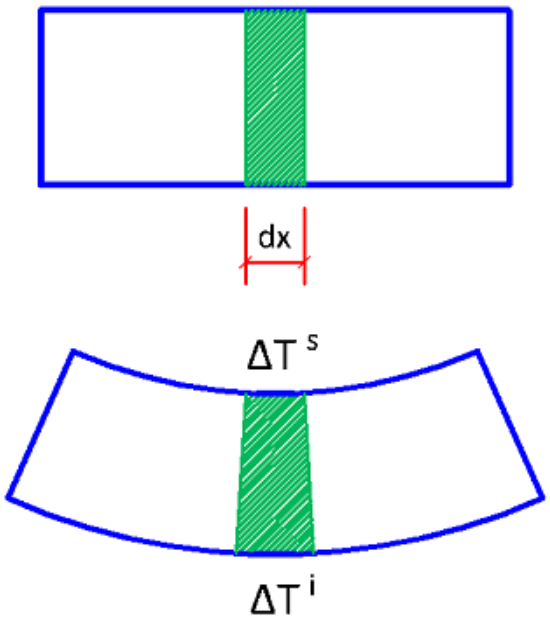
$\{\delta_{RN}\}$: Vetor dos Deslocamentos Prescritos em Vínculos Externos não adotados como Hiperestáticos

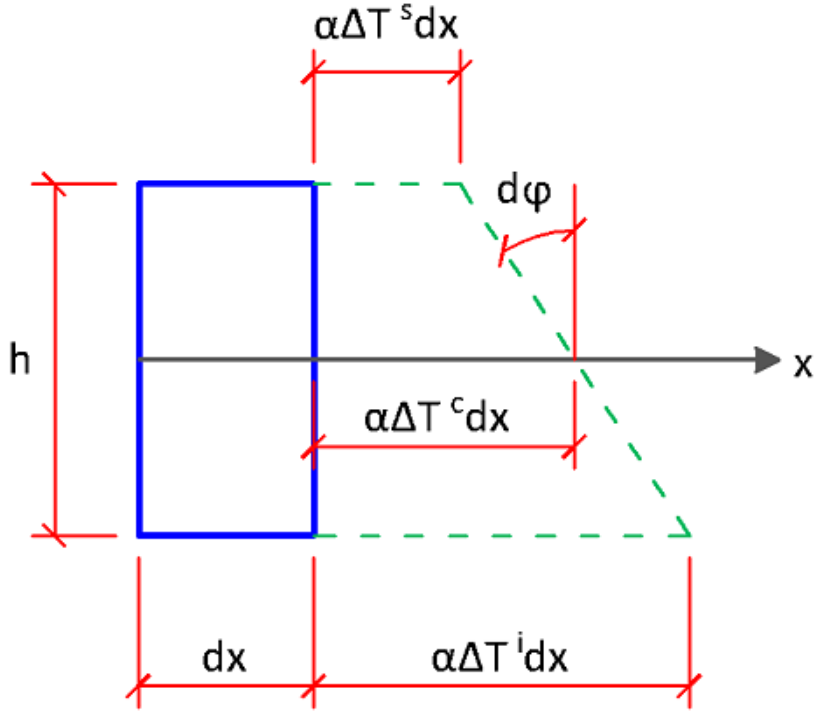
$\{\delta_T\}$: Vetor dos Deslocamentos devido Efeito Térmico

$\{\delta_{EI}\}$: Vetor dos Deslocamentos em Vínculos Internos Deformáveis (barras de treliça ou tirantes)

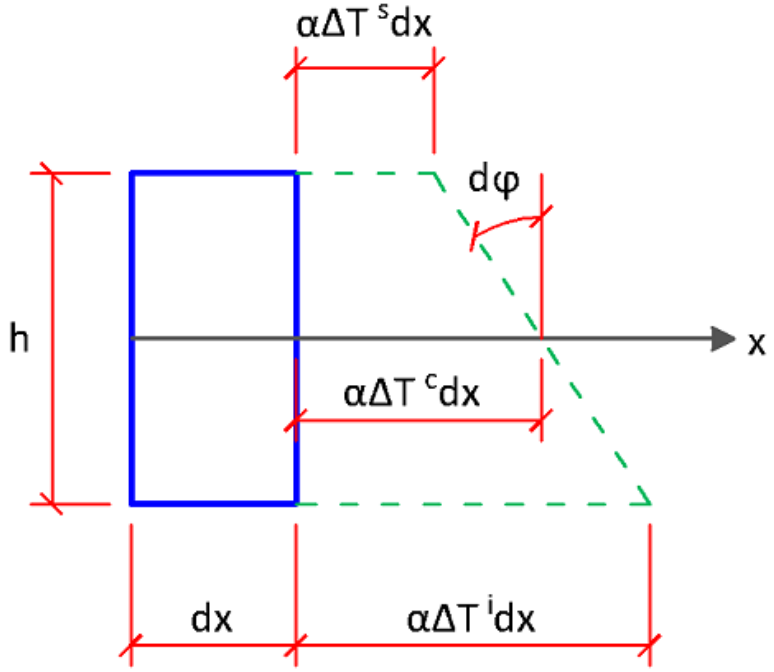
Deslocamentos devido Cargas Térmicas (1)

- Seja uma viga (ou barra) de altura “h” onde é imposta uma variação de temperatura ΔT^s na face superior, e outra variação de temperatura ΔT^i na face inferior:





Deslocamentos devido Cargas Térmicas (2)



$$\Delta T^{c} = \frac{(\Delta T^{i} + \Delta T^{s})}{2}$$

$$\mathbf{grad}(T) = \frac{(\Delta T^{i} - \Delta T^{s})}{h}$$

$$\delta_T = \int_x \bar{N}.\alpha.\Delta T^{c}\, dx + \int_x \bar{M}.\alpha.\mathbf{grad}(T)\, dx$$

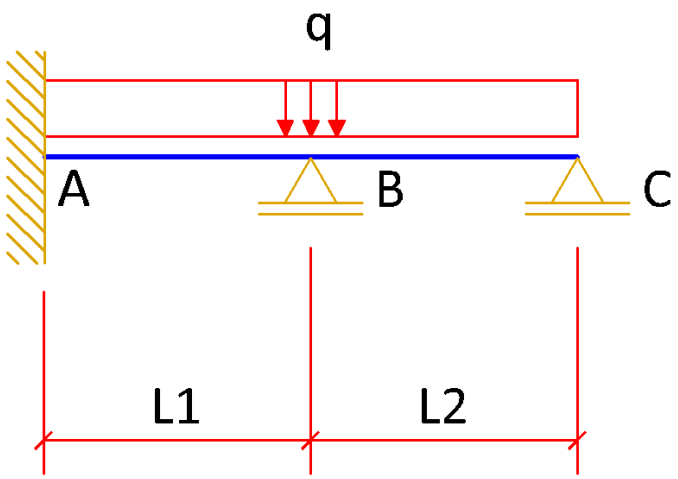
FIM

Exercício TE2-5.1

- Determinar as reações de apoio da estrutura hiperestática abaixo:

  Dados:

  E = 20000 MPa L1 = 4,0 m
  b = 20 cm L2 = 4,0 m
  h = 60 cm q = 10,0 kN/m

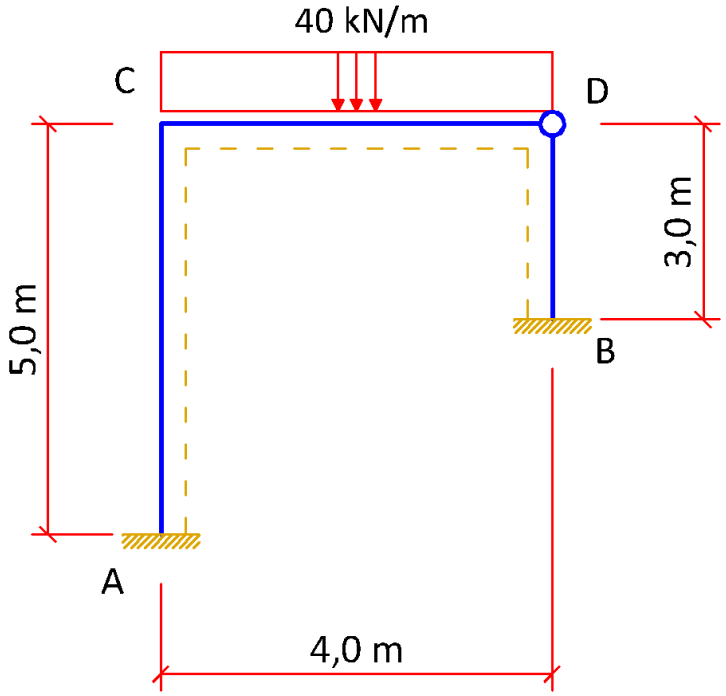


Exercício TE2-5.2

- Determine as reações de apoio da estrutura hiperestática abaixo:

  Dados:

  Pilares E = 30000 MPa b = 20 cm h = 20 cm
  Vigas E = 30000 MPa b = 20 cm h = 40 cm

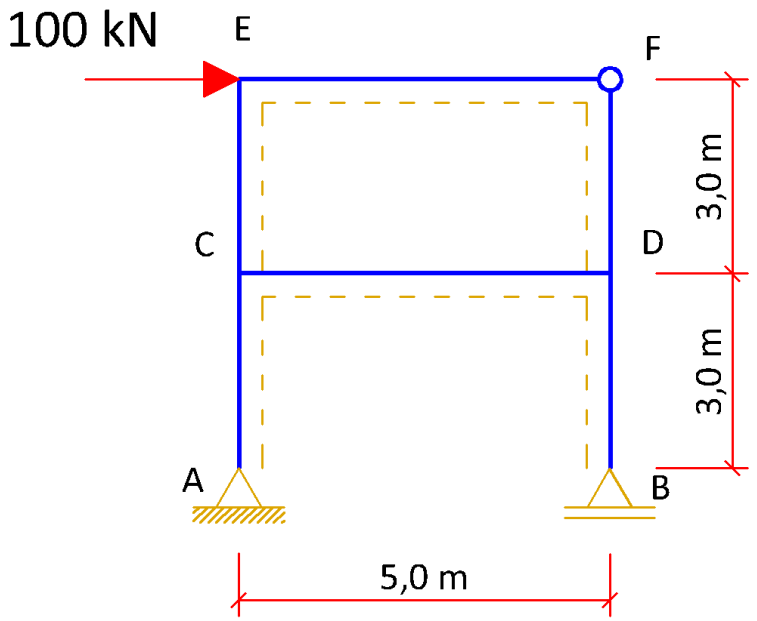


Exercício TE2-5.3

- Trace o diagrama de momentos fletores da estrutura abaixo:

  Dados:

  E = 30000 MPa
  b = 25 cm
  h = 40 cm



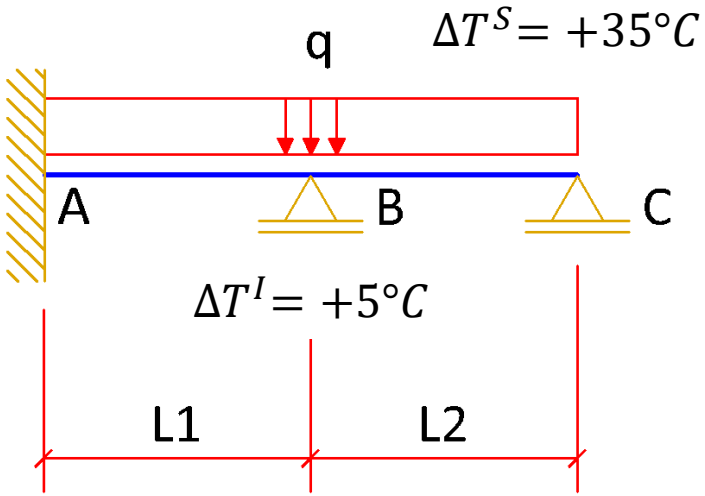
Exercício TE2-5.4

- Determinar as reações de apoio da estrutura hiperestática do Exercício 14.1 porém considerando a aplicação da carga térmica indicada:

- OBS: considerar somente efeitos de flexão

Dados:

E = 20000 MPa	L1 = 3,0 m	α = 1e-5 /°C
b = 20 cm	L2 = 3,0 m	
h = 60 cm	q = 10,0 kN/m	



Exercício TE2-5.5

- Determinar as reações de apoio da estrutura hiperestática do Exercício 14.1 porém considerando que o apoio B tem um deslocamento prescrito (inicial) de 2 mm para baixo.

- OBS: considerar somente efeitos de flexão

Dados:

E = 20000 MPa	L1 = 3,0 m
b = 20 cm	L2 = 4,0 m
h = 60 cm	q = 10,0 kN/m

