Teoria das Estruturas II - Aula 08



Análise Matricial de Treliças via Método da Rigidez

- Fundamentos da Análise Matricial;
- Matriz de Rigidez Elementar de Barra de Treliça;
- Matrizes de Transformação de Deslocamentos e Forças;
- Matriz de Rigidez Elementar em Coordenadas Globais;
- Montagem das Matrizes e Vetores Globais e Determinação dos Deslocamentos e Esforços;

Prof. Juliano J. Scremin

Universidade POSITIVO

Universidade POSITIVO

Aula 08 - Seção 1:
Fundamentos da Análise Matricial

Análise Matricial - Introdução

- A análise matricial pode ser feita empregando os dois métodos já vistos para cálculo de estruturas hiperestáticas, a saber:

Método das Forças

- A definição do sistema principal depende da escolha dos hiperestáticos o que pode incorrer em sistemas lineares inadequados;
- Exige abordagens diferentes para estruturas isostáticas e hiperestáticas;
- Deslocamentos não são obtidos diretamente;

Método dos Deslocamentos

- Sistema principal único definido em função das propriedades geométricas e do material da estrutura;
- Permite analisar estruturas isostáticas e hiperestáticas indistintamente;
- Deslocamentos são obtidos diretamente assim como as forças;

Análise Matricial + Método dos Deslocamentos

- A aplicação da análise matricial associada ao método dos deslocamentos (método da rigidez) requer :

1. **Subdivisão** da estrutura em elementos discretos (barras, vigas, pilares) ;

2. **Identificação** dos pontos extremos destes elementos com “nós”;

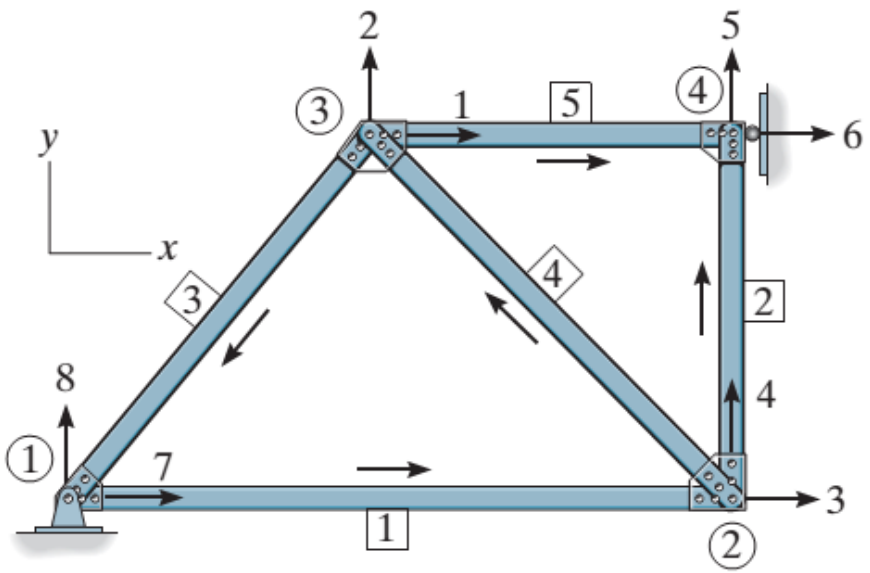
3. Definição de **sistemas locais de coordenadas** para cada elemento estrutural discretizado;

4. Definição de um **sistema de coordenadas global** para toda a estrutural e respectivas correlações com os sistemas locais de cada elemento.

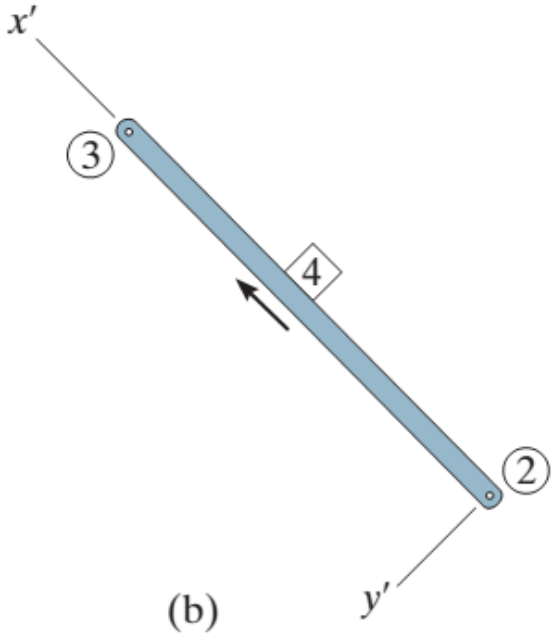
Identificação de Elementos e Nós

- O primeiro passo para aplicação matricial do método da rigidez é identificar os elementos estruturais e seus respectivos nós.

  - **Elementos Estruturais** → **numeração dentro de quadros**
  - **Nós** → **numeração dentro de círculos**



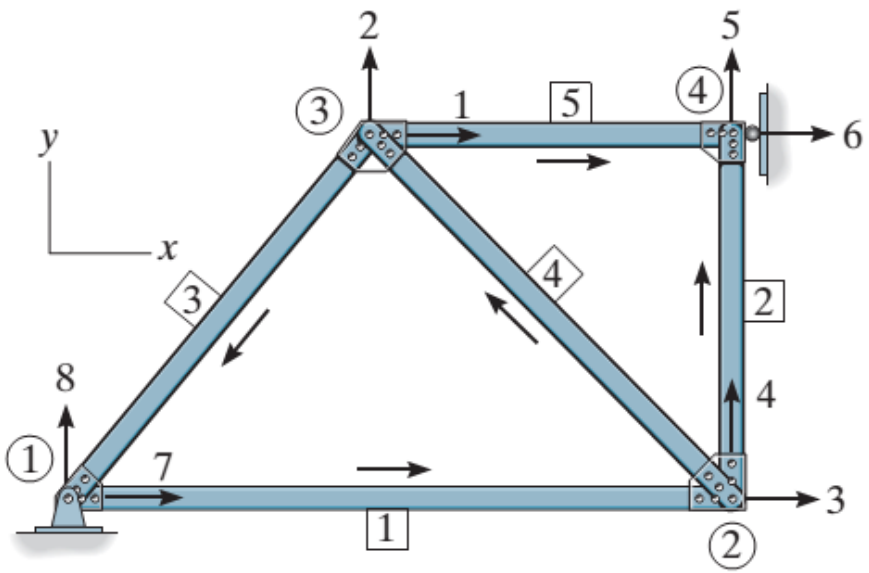
(a)



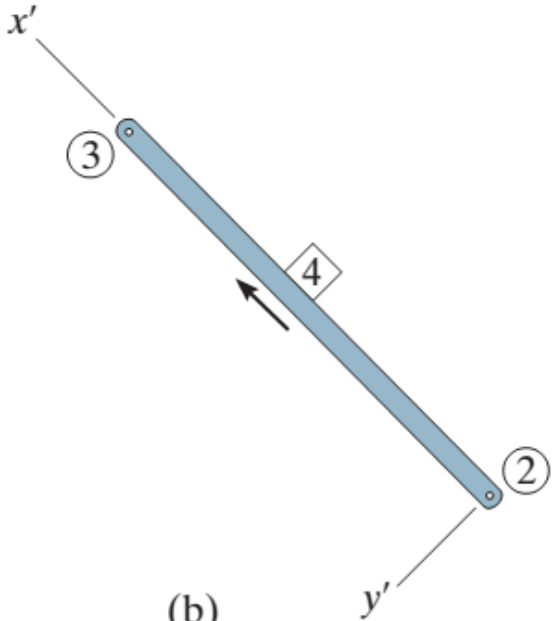
(b)

Sistema Local e Sistema Global de Coordenadas

- Dado que cargas e deslocamentos são quantidades vetoriais é necessário estabelecer sistemas de coordenadas para representação destes.
  - **Coordenadas Locais → x' e y'**
  - **Coordenadas Globais → x e y**



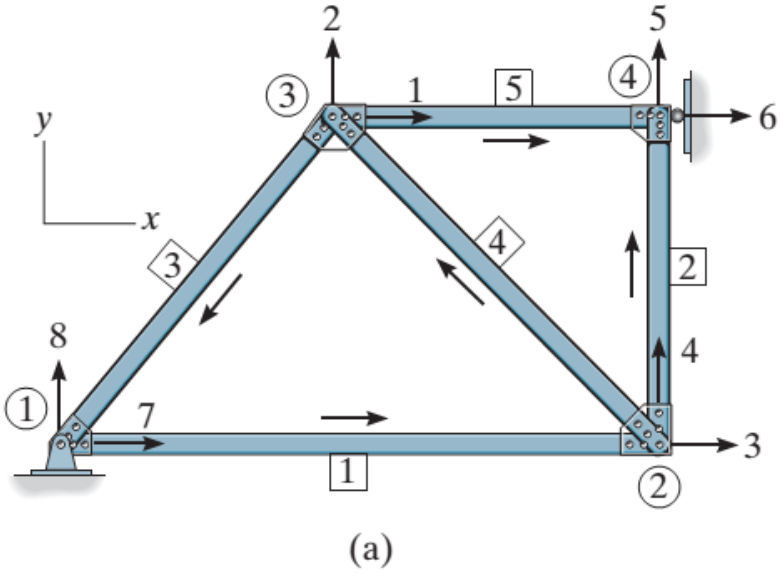
(a)



(b)

Indeterminação Cinemática (1)

- Os graus de liberdade não restringidos são as variáveis primárias do método dos deslocamentos (rigidez).
- Em uma treliça cada nó possui 2 graus de liberdade (translações na vertical e horizontal) sendo estes numerados conforme indicação na figura.
- Na treliça esboçada os seguintes graus de liberdade podem ser identificados:



Graus de liberdade não restringidos:
1 ao 5

Graus de liberdade restringidos:
6 ao 8

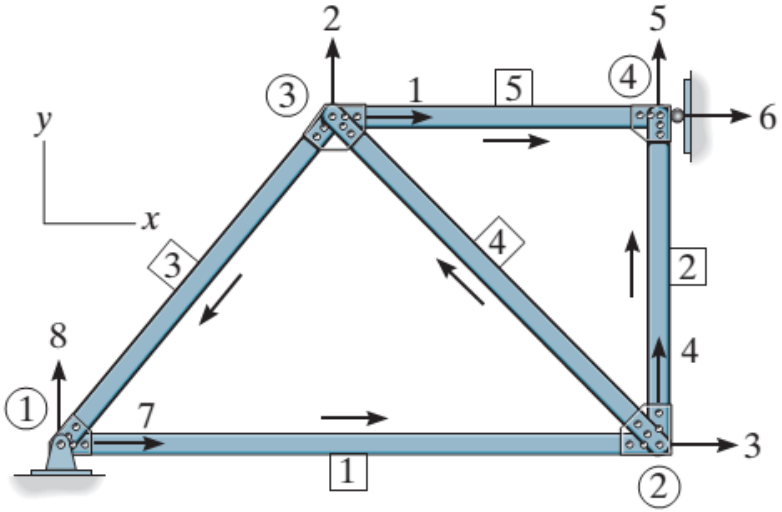
Indeterminação Cinemática (2)

- Por padrão os **graus de liberdade não restringidos** são identificados com os primeiros números (números menores) e os **graus de liberdade restringidos** com os últimos números (maiores números).

- A razão para isso será elucidada mais adiante porém tem relação com a possibilidade de **particionar a matriz de rigidez** da estrutura identificando de forma mais direta onde se encontram os **graus de liberdade restringidos**, os quais se destinam ao **cálculo das reações de apoio**.

Graus de liberdade não restringidos:
1 ao 5

Graus de liberdade restringidos:
6 ao 8

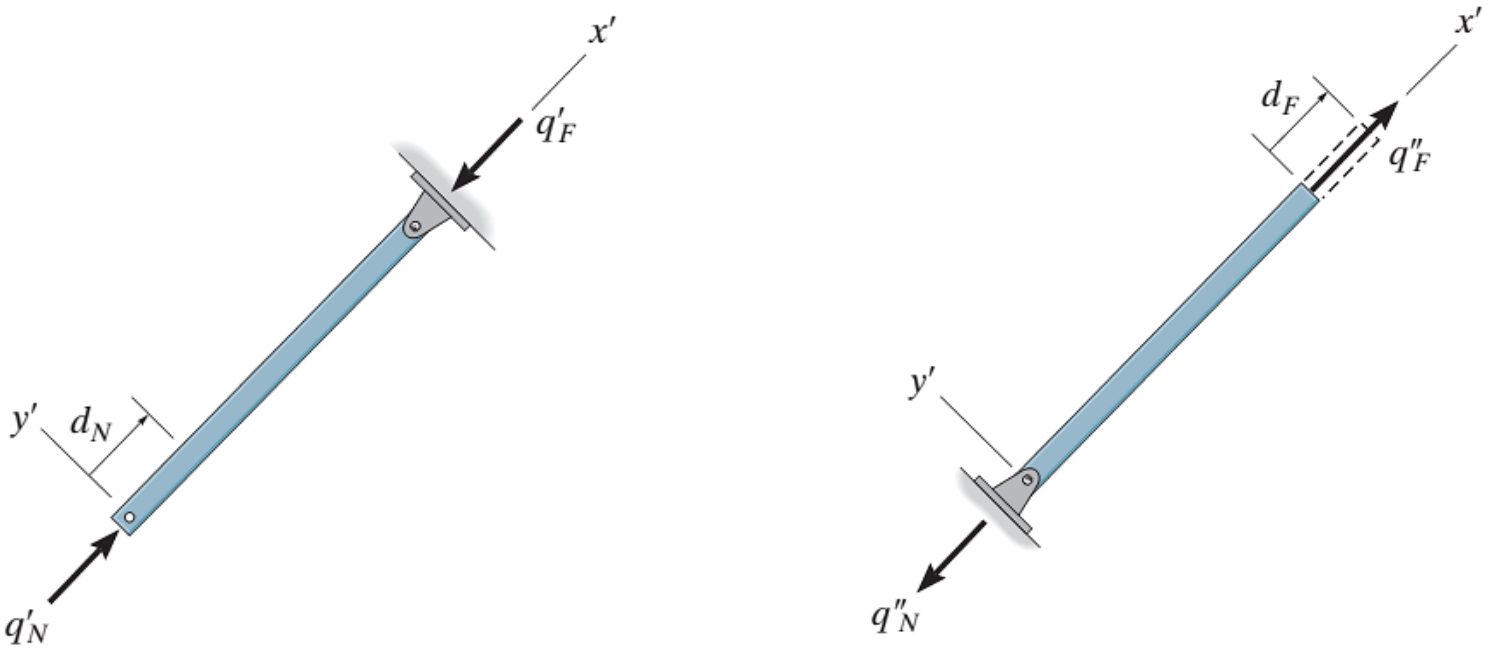


(a)

Universidade POSITIVO

Aula 08 - Seção 2:
Matriz de Rigidez Elementar de uma Barra de Treliça

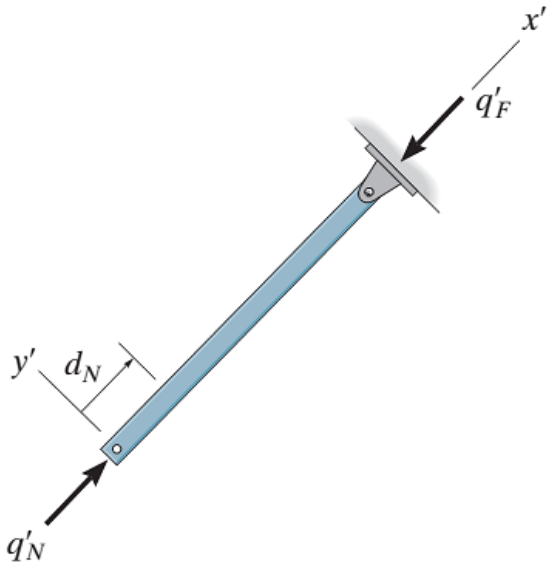
Matriz de Rigidez Elementar(1)



- Um elemento de treliça pode sofrer deslocamentos relativos somente ao longo de seu eixo longitudinal (eixo x').
- Por tanto somente são possíveis dois deslocamentos independentes, a saber, os deslocamentos nos extremos do elemento.

Matriz de Rigidez Elementar (2)

- Quando um deslocamento positivo d_N é imposto na extremidade N do elemento de treliça, são desenvolvidas forças em cada extremidade.
- **Note-se que q'_F é negativo por agir como reação e em sentido contrário ao sentido positivo do eixo local *x'*.**



$$q'_N = \frac{AE}{L} d_N$$

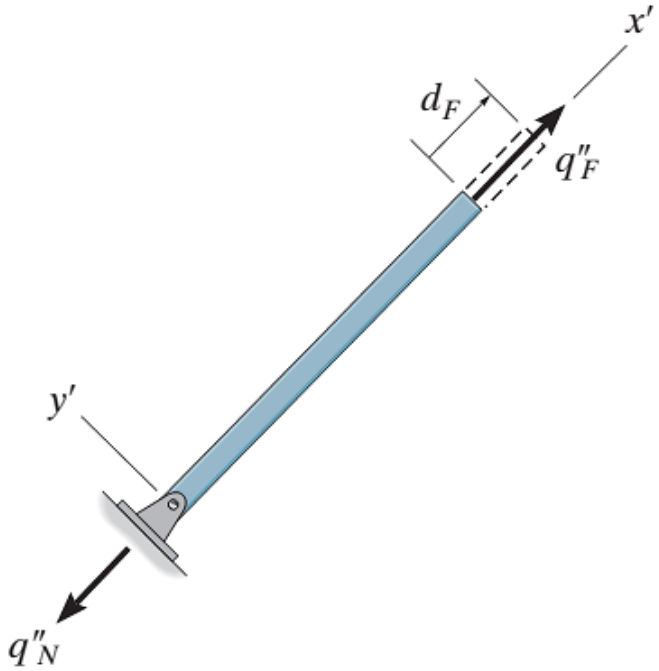
$$q'_F = -\frac{AE}{L} d_N$$

Matriz de Rigidez Elementar (3)

- De igual maneira, quando um deslocamento positivo d_F é imposto na extremidade F do elemento de treliça, também são desenvolvidas forças nas extremidades.
- **Note-se porém, que estas possuem sinais contrários as anteriores.**

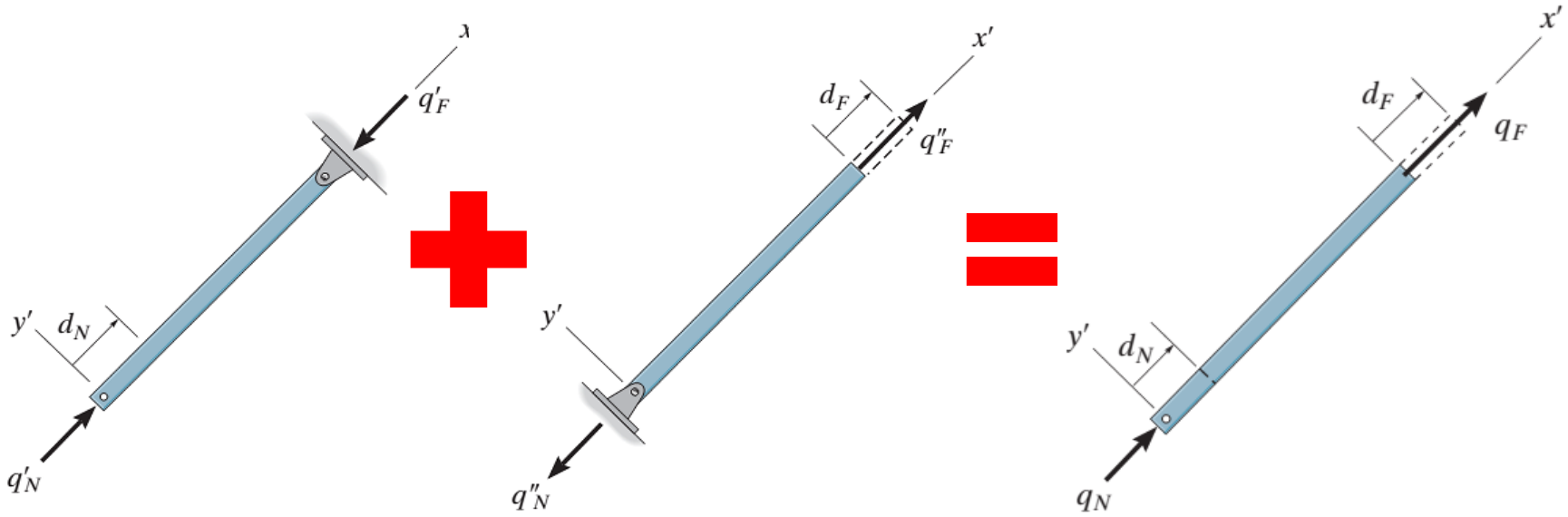
$$q"_N = -\frac{AE}{L} d_F$$

$$q"_F = \frac{AE}{L} d_F$$



Matriz de Rigidez Elementar (4)

- Por superposição de efeitos tem-se:



$$q_N = q'_N + q''_N = \frac{AE}{L} d_N - \frac{AE}{L} d_F$$

$$q_F = q'_F + q''_F = -\frac{AE}{L} d_N + \frac{AE}{L} d_F$$

Matriz de Rigidez Elementar (5)

- Dispondo matricialmente:

$$q_N = \frac{AE}{L} d_N - \frac{AE}{L} d_F$$

$$q_F = -\frac{AE}{L} d_N + \frac{AE}{L} d_F$$

$$\begin{Bmatrix} q_N \\ q_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_N \\ d_F \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_N \\ q_F \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_N \\ d_F \end{Bmatrix}$$

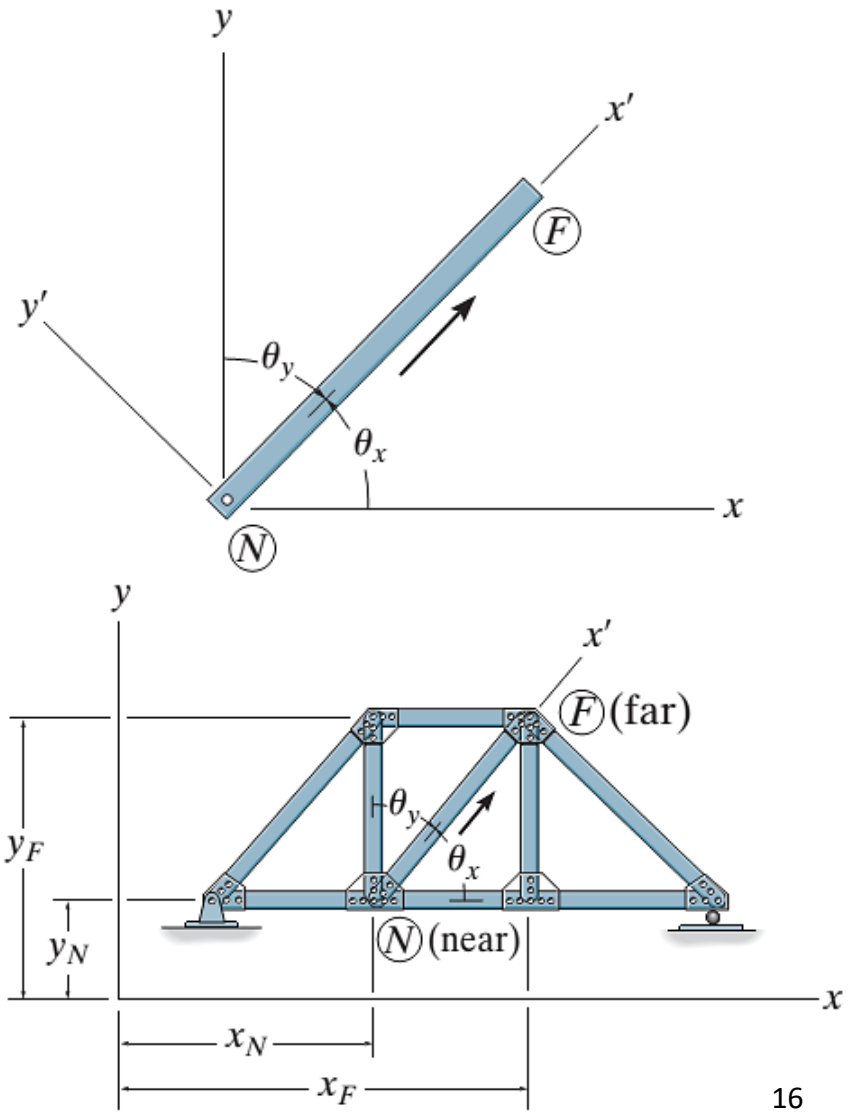
$$\{\boldsymbol{q}\} = [\boldsymbol{k}]'\{\boldsymbol{d}\}$$

Universidade POSITIVO

Aula 08 - Seção 3:
Matrizes de Transformação de Deslocamentos e Forças

Matriz de Transformação (1)

- Uma treliça é composta de muitos elementos (barras de treliça).
- Assim sendo, agora será definido um método para transformar o **vetor de forças** $\{\boldsymbol{q}\}$ e o **vetor de deslocamentos** $\{\boldsymbol{d}\}$, definidos conforme o sistema local de coordenadas (x', y'), em suas respectivas coordenadas no sistema global (x, y)



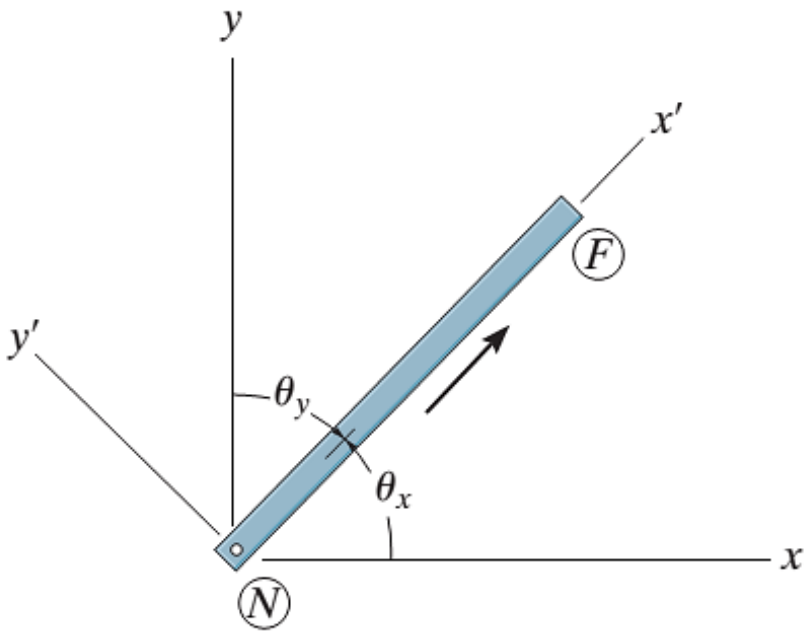
Matriz de Transformação (2)

- Os menores ângulos entre o sentidos positivos do sistema de eixos (x, y) e o eixo positivo x' do sistema local (x', y') serão denominados θ_x e θ_y .

- Os cossenos destes ângulos serão:

$$\boldsymbol{\lambda_x = cos\theta_x}$$

$$\boldsymbol{\lambda_y = cos\theta_y}$$



$$\lambda_x = cos\theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}}$$

$$\lambda_y = cos\theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}}$$

Matriz de Transformação de Deslocamentos (1)

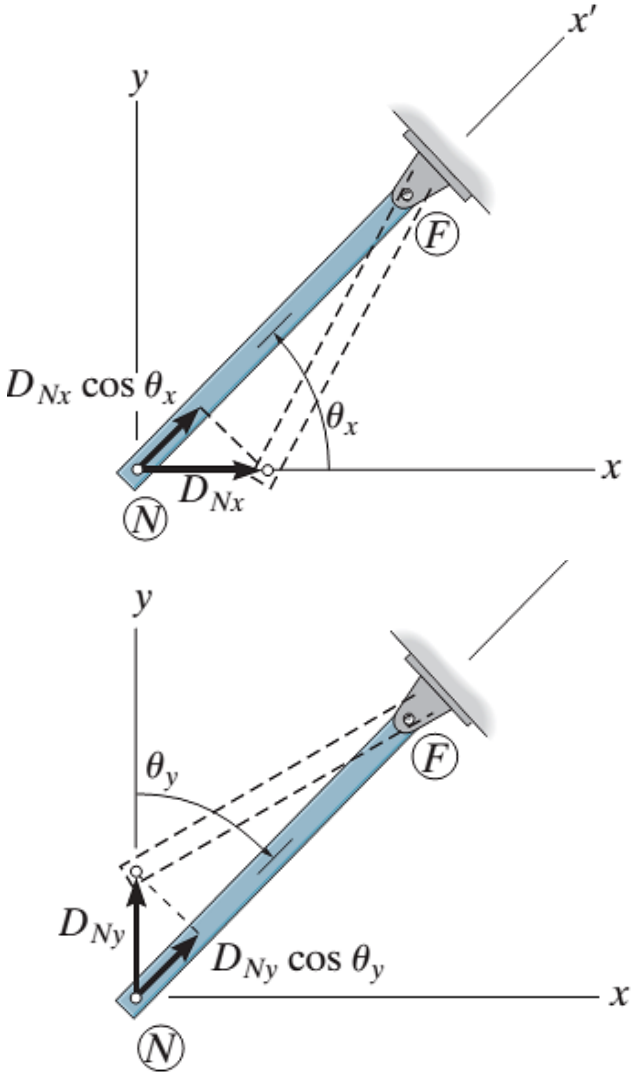
- Em **coordenadas globais** cada elemento estrutural possui 2 graus e liberdade ou seja:

  nó N → $\boldsymbol{D_{Nx}}$ **e** $\boldsymbol{D_{Ny}}$
  nó F → $\boldsymbol{D_{Fx}}$ **e** $\boldsymbol{D_{Fy}}$

- Considerando cada um destes deslocamentos globais separadamente tem-se que:

$$d_N = D_{Nx}cos\theta_x + D_{Ny}cos\theta_y$$

$$d_F = D_{Fx}cos\theta_x + D_{Fy}cos\theta_y$$



Matriz de Transformação de Deslocamentos (2)

- Ressaltando:

Coordenadas Globais:

nó N → D_{Nx} e D_{Ny}

nó F → D_{Fx} e D_{Fy}

Coordenadas Locais:

nó N → d_N

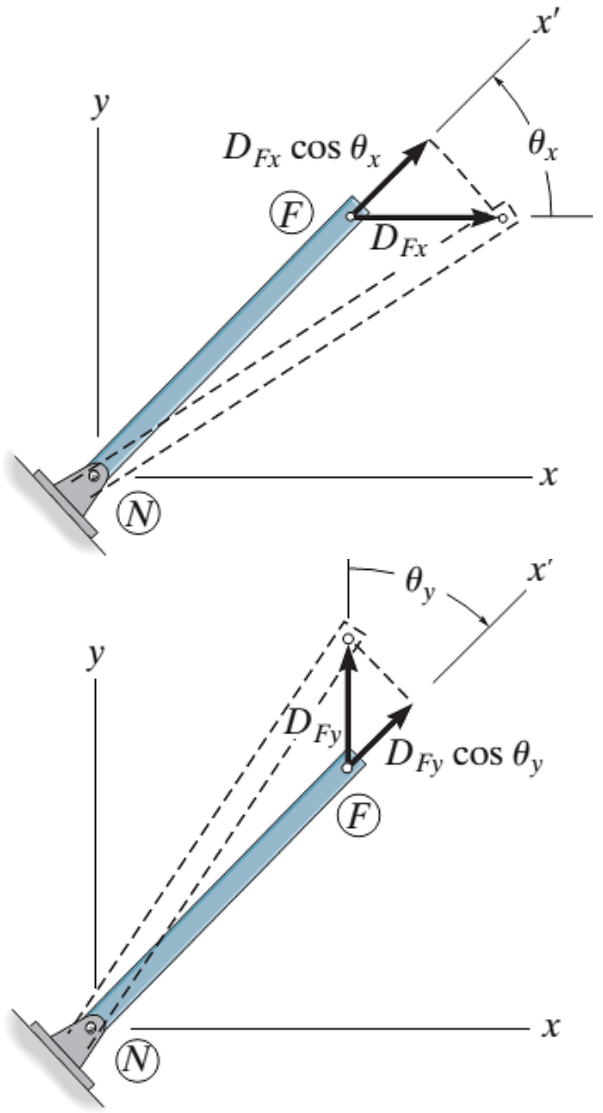
nó F → d_F

Lembrando que:

$$\lambda_x = cos\theta_x \quad ; \quad \lambda_y = cos\theta_y$$

$$d_N = D_{Nx}\lambda_x + D_{Ny}\lambda_y$$

$$d_F = D_{Fx}\lambda_x + D_{Fy}\lambda_y$$



Matriz de Transformação de Deslocamentos (3)

- Escrevendo em forma matricial:

$$d_N = D_{Nx}\lambda_x + D_{Ny}\lambda_y$$

$$d_F = D_{Fx}\lambda_x + D_{Fy}\lambda_y$$

$$\begin{Bmatrix} d_N \\ d_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{d}\} = [\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}\}$$

$\{\boldsymbol{d}\}$: vetor de deslocamentos em coordenadas locais

$\{\boldsymbol{D}\}$: vetor de deslocamentos em coordenadas globais

$[\boldsymbol{T}]$: matriz de transformação de coordenadas globais em coordenadas locais

Matriz de Transformação de Forças (1)

- Considerando a aplicação de uma força q_N no nó N do elemento de barra tem-se:

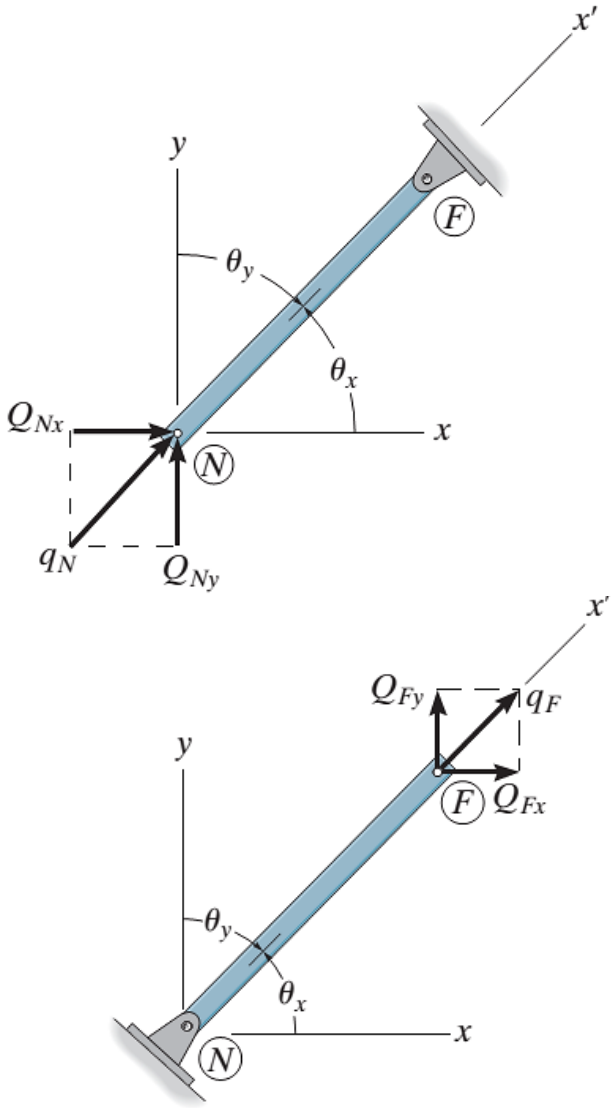
$$Q_{Nx} = q_N cos\theta_x = q_N \lambda_x$$

$$Q_{Ny} = q_N cos\theta_y = q_N \lambda_y$$

- Aplicando uma força q_F no nó F do elemento de barra tem-se:

$$Q_{Fx} = q_F cos\theta_x = q_F \lambda_x$$

$$Q_{Fy} = q_F cos\theta_y = q_F \lambda_y$$



Matriz de Transformação de Forças (2)

- Escrevendo a decomposição das forças no sistema de eixos global partindo do sistema de eixos local:

$$\begin{aligned} Q_{Nx} &= q_N \lambda_x \\ Q_{Ny} &= q_N \lambda_y \\ Q_{Fx} &= q_F \lambda_x \\ Q_{Fy} &= q_F \lambda_y \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_N \\ q_F \end{Bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{Q}\} = [\boldsymbol{T}]^{\boldsymbol{T}} \{\boldsymbol{q}\}$$

$\{\boldsymbol{q}\}$: vetor de cargas em coordenadas locais

$\{\boldsymbol{Q}\}$: vetor de cargas em coordenadas globais

$[\boldsymbol{T}]$: matriz de transformação de coordenadas locais em coordenadas globais

Matriz de Transformação de Forças (3)

- Vale salientar que a matriz de transformação de forças é o transposto da matrizes de transformação de deslocamentos.

Matriz de Transformação de Deslocamentos

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}$$

Matriz de Transformação de Forças

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix}$$

Universidade POSITIVO

Aula 08 - Seção 4:
Matriz de Rigidez Elementar em Coordenadas Globais

Matriz de Rigidez Elementar em Coordenadas Globais (1)

- Vamos agora combinar os resultados das seções anteriores e determinar a matriz de rigidez para um elemento correlacionando os esforços globais $\{Q\}$ e os deslocamentos globais $\{D\}$ partindo dos esforços locais $\{q\}$ e dos deslocamentos locais $\{d\}$;

$$\{\boldsymbol{Q}\} = [\boldsymbol{T}]^{\boldsymbol{T}}\{\boldsymbol{q}\}$$

$$\{\boldsymbol{d}\} = [\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}\}$$

$$\{\boldsymbol{q}\} = [\boldsymbol{k}]'\{\boldsymbol{d}\}$$

$$\{\boldsymbol{q}\} = [\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{Q}\} \qquad \{\boldsymbol{d}\} = [\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}\}$$

$$\{\boldsymbol{q}\} = [\boldsymbol{k}]'\{\boldsymbol{d}\}$$

$$[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{Q}\} = [\boldsymbol{k}]'[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}\}$$

$$\{\boldsymbol{Q}\} = [\boldsymbol{T}]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{k}]'[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}\}$$

Matriz de Rigidez Elementar em Coordenadas Globais (2)

- Seguindo com a manipulação define-se:

$$\{\boldsymbol{Q}\} = [\boldsymbol{T}]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{k}]'[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}\}$$

$[\boldsymbol{k}]'$: matriz de rigidez em coordenadas locais

$[\boldsymbol{k}]$: matriz de rigidez em coordenadas globais

$$[\boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{T}]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{k}]'[\boldsymbol{T}]$$

$$\{\boldsymbol{Q}\} = [\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{D}\}$$

- Ou seja:

$$[\boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{T}]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{k}]'[\boldsymbol{T}] = [k] = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez Elementar em Coordenadas Globais (3)

- Por fim, em termos dos cossenos diretores tem-se que:

$$[k] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \lambda_x^{\,2} & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^{\,2} & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^{\,2} & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^{\,2} \\ -\lambda_x^{\,2} & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^{\,2} & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^{\,2} & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^{\,2} \end{bmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} N_x & N_y & F_x & F_y \end{matrix}$$

Universidade POSITIVO

Aula 08 - Seção 5:
Montagem das Matrizes e Vetores Globais e Determinação dos Deslocamentos e Esforços

Matriz de Rigidez Global (da Estrutura) (1)

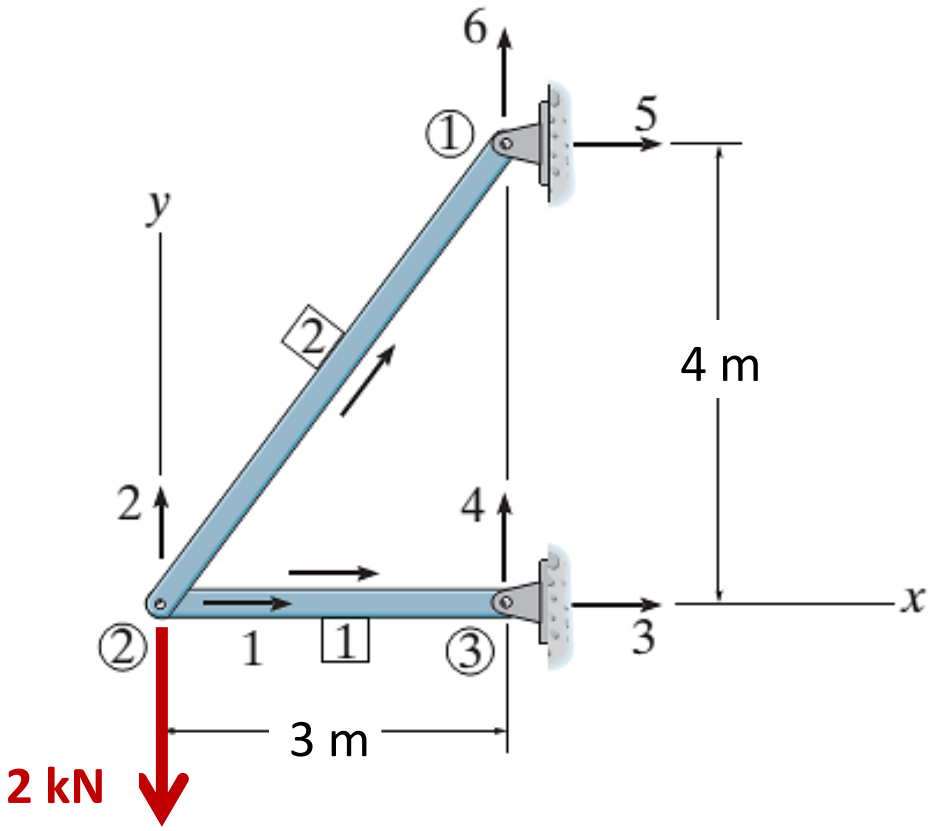
- Dado que todas as matrizes elementares das barras componentes da treliça tenham sido formadas, o passo seguinte é a montagem (ou espalhamento) destas de modo a conformar a matriz de rigidez global de toda a estrutura $[K]$.

- Este processo depende de uma cuidadosa identificação dos elementos em cada matriz elementar por meio dos quatro números que nomeiam os graus de liberdade envolvidos, ou seja, N_x , N_y , F_x e F_y

$$[k] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \lambda_x{}^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x{}^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y{}^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y{}^2 \\ -\lambda_x{}^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x{}^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y{}^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y{}^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{matrix}$$

Matriz de Rigidez Global (da Estrutura) (2)

- Para compreender o processo de montagem tome-se como exemplo a estrutura abaixo onde todas as barras possuem AE constante:

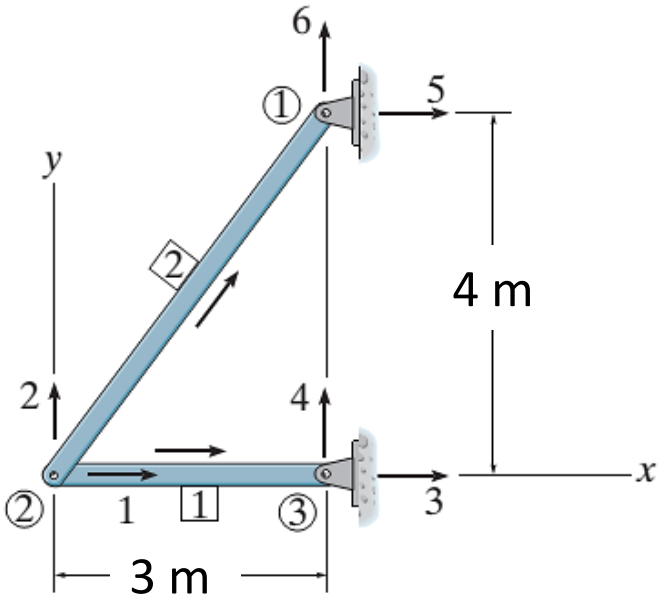


Matriz de Rigidez Global (da Estrutura) (3)

- Para a barra [1] os cossenos são:

$$\lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1$$

$$\lambda_y = \frac{0-0}{3} = 0$$



- Substituindo os cossenos na expressão do slide 42:

$$[k] = AE \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

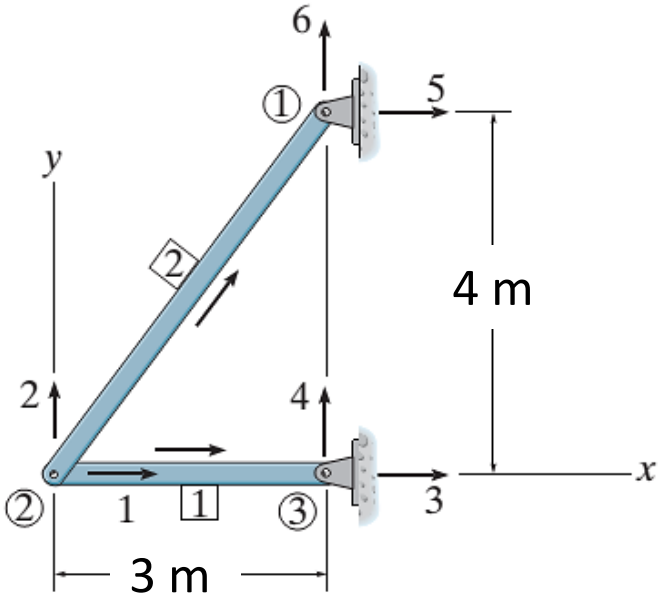
1 2 3 4 (colunas) e ***1 2 3 4*** (linhas)

Matriz de Rigidez Global (da Estrutura) (4)

- Para a barra [2] os cossenos são:

$$\lambda_x = \frac{3-0}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\lambda_y = \frac{4-0}{5} = \frac{4}{5}$$



- Substituindo os cossenos na expressão do slide 42:

$$[k] = AE \begin{bmatrix} 9/125 & 12/125 & -9/125 & -12/125 \\ 12/125 & 16/125 & -12/125 & -16/125 \\ -9/125 & -12/125 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 12/125 & 16/125 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textbf{1} \\ \textbf{2} \\ \textbf{5} \\ \textbf{6} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \textbf{1} & \textbf{2} & \textbf{5} & \textbf{6} \end{matrix}$$

Matriz de Rigidez Global (da Estrutura) (5)

- No processo de montagem da matriz global da estrutura vale salientar que como o nó 2 é comum às duas barras, os graus de liberdade (1) e (2) aparecem em ambas as matrizes elementares.

Matriz Elementar da Barra [1]

$$[k] = AE \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Matriz Elementar da Barra [2]

$$[k] = AE \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 9/125 & 12/125 & -9/125 & -12/125 \\ 12/125 & 16/125 & -12/125 & -16/125 \\ -9/125 & -12/125 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 12/125 & 16/125 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Espalhamento das Matrizes Elementares (1)

Matriz Elementar da Barra [1]

$$AE \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

(1 2 3 4)

Matriz Elementar da Barra [2]

$$AE \begin{bmatrix} 9/125 & 12/125 & -9/125 & -12/125 \\ 12/125 & 16/125 & -12/125 & -16/125 \\ -9/125 & -12/125 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 12/125 & 16/125 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

(1 2 5 6)

Matriz Global da Estrutura

$$AE \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

(1 2 3 4 5 6)

Espalhamento das Matrizes Elementares (2)

Matriz Elementar da Barra [1]

$$AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Matriz Elementar da Barra [2]

$$AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 9/125 & 12/125 & -9/125 & -12/125 \\ 12/125 & 16/125 & -12/125 & -16/125 \\ -9/125 & -12/125 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 12/125 & 16/125 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Matriz Global da Estrutura

$$AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Espalhamento das Matrizes Elementares (3)

Matriz Elementar da Barra [1]

$$AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Matriz Elementar da Barra [2]

$$AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 9/125 & 12/125 & -9/125 & -12/125 \\ 12/125 & 16/125 & -12/125 & -16/125 \\ -9/125 & -12/125 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 12/125 & 16/125 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Sombreamento

Matriz Global da Estrutura

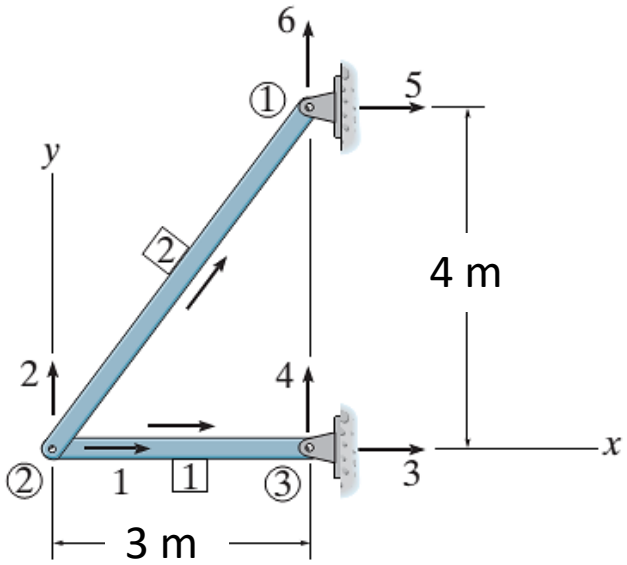
$$AE \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1/3 + 9/125 & 0 + 12/125 & -1/3 & 0 & -9/125 & -12/125 \\ 0 + 12/125 & 0 + 16/125 & 0 & 0 & -12/125 & -16/125 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9/125 & -12/125 & 0 & 0 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 0 & 0 & 12/125 & 16/125 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Matriz de Rigidez Global Final

Graus de Liberdades Restringidos

$$AE\begin{bmatrix} 152/375 & 12/125 & -1/3 & 0 & -9/125 & -12/125 \\ 12/125 & 16/125 & 0 & 0 & -12/125 & -16/125 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9/125 & -12/125 & 0 & 0 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 0 & 0 & 12/125 & 16/125 \end{bmatrix}$$

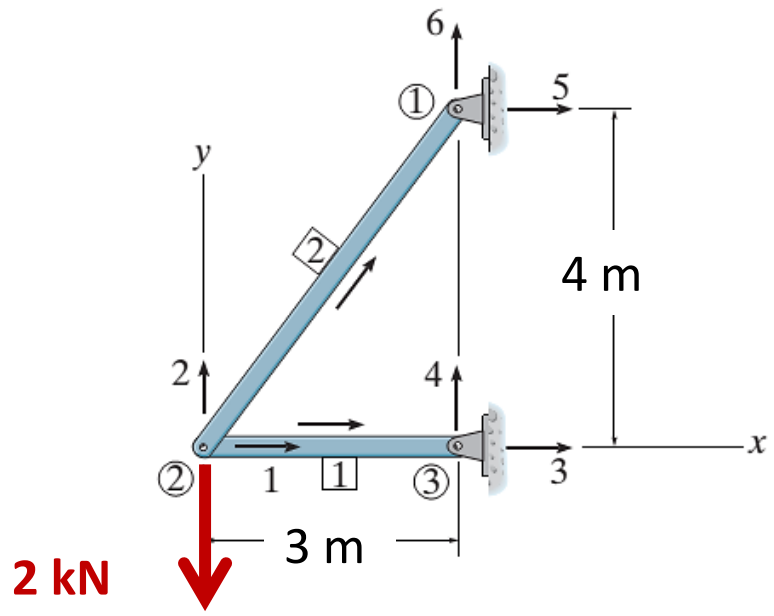
1 *2* *3* *4* *5* *6*



Vetor de Carga Global

- Dado que a matriz de rigidez global está composta resta agora a composição do vetor de cargas global $\{Q\}$.

- No caso de uma treliça, os carregamentos são sempre cargas concentradas aplicadas nos nós o que facilita a criação do vetor de cargas global que resume-se a identificadas de a qual grau de liberdade corresponde cada carga.



$$\{Q_g\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Graus de Liberdades Restringidos

Sistema de Equações da Análise Matricial (1)

- Montando um sistema de equações com o vetor de carga global $\{Q\}$ e a matriz de rigidez global $[K]$ resta como variável o vetor de deslocamentos nodais globais $\{D\}$.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 152/375 & 12/125 & -1/3 & 0 & -9/125 & -12/125 \\ 12/125 & 16/125 & 0 & 0 & -12/125 & -16/125 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9/125 & -12/125 & 0 & 0 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 0 & 0 & 12/125 & 16/125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{Q}_g\} = [\boldsymbol{K}_g]\{\boldsymbol{D}_g\}$$

Sistema de Equações da Análise Matricial (2)

- Entretanto a solução do sistema é impossível da maneira como ele se apresenta pois no vetor de carga apresentam-se como incógnitas as reações de apoio Q_3 , Q_4 , Q_5 e Q_6 correlatas aos graus de liberdade restringidos (cujos deslocamentos são conhecidos e valem 0 “zero”)

- **Portanto, o sistema deve ser resumido aos graus de liberdade não restringidos.**

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ \hline Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = AE \left[\begin{array}{cc|cccc} 152/375 & 12/125 & -1/3 & 0 & -9/125 & -12/125 \\ 12/125 & 16/125 & 0 & 0 & -12/125 & -16/125 \\ \hline -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9/125 & -12/125 & 0 & 0 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 0 & 0 & 12/125 & 16/125 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Graus de Liberdades Restringidos

Graus de Liberdades Não Restringidos

Sistema de Equações da Análise Matricial (3)

- Dada a numeração adequada nomeando os graus de liberdade não restringidos com os números menores e os graus restringidos com os números maiores é possível fazer um recorte no sistema de equações conforme abaixo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ \hline Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = AE \left[\begin{array}{cc:cccc} 152/375 & 12/125 & -1/3 & 0 & -9/125 & -12/125 \\ 12/125 & 16/125 & 0 & 0 & -12/125 & -16/125 \\ \hdashline -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9/125 & -12/125 & 0 & 0 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 0 & 0 & 12/125 & 16/125 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_k \\ \hdashline Q_u \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} K_{11} & K_{12} \\ \hdashline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} D_u \\ \hdashline D_k \end{Bmatrix}$$

Sistema de Equações da Análise Matricial (4)

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 152/375 & 12/125 & -1/3 & 0 & -9/125 & -12/125 \\ 12/125 & 16/125 & 0 & 0 & -12/125 & -16/125 \\ -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9/125 & -12/125 & 0 & 0 & 9/125 & 12/125 \\ -12/125 & -16/125 & 0 & 0 & 12/125 & 16/125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_k \\ Q_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_u \\ D_k \end{Bmatrix}$$

$\{Q_k\}$: cargas externas conhecidas
$\{D_k\}$: deslocamentos conhecidos (no caso em particular nulos)
$\{Q_u\}$: cargas externas (reações de aposio) desconhecidas
$\{D_u\}$: deslocamentos desconhecidos

Cálculo dos Deslocamentos (1)

$$\begin{Bmatrix} Q_k \\ Q_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_u \\ D_k \end{Bmatrix}$$

$\{Q_k\}$: cargas externas conhecidas
$\{D_k\}$: deslocamentos conhecidos (no caso em particular nulos)
$\{Q_u\}$: cargas externas (reações de apoio) desconhecidas
$\{D_u\}$: deslocamentos desconhecidos

$$\{Q_k\} = [K_{11}]\{D_u\} + [K_{12}]\{D_k\}$$

Como $\{D_k\} = \{0\}$

$$\{Q_k\} = [K_{11}]\{D_u\}$$

Cálculo dos Deslocamentos (2)

$$\{Q_k\} = [K_{11}]\{D_u\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 152/375 & 12/125 \\ 12/125 & 16/125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

- Resolvendo o sistema linear tem-se que:

$$D_1 = \frac{4{,}5}{AE}$$

$$D_2 = -\frac{19}{AE}$$

Cálculo das Reações de Apoios (1)

$$\begin{Bmatrix} Q_k \\ Q_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_u \\ D_k \end{Bmatrix}$$

$\{Q_k\}$: cargas externas conhecidas
$\{D_k\}$: deslocamentos conhecidos (no caso em particular nulos)
$\{Q_u\}$: cargas externas (reações de apoio) desconhecidas
$\{D_u\}$: deslocamentos desconhecidos

$$\{Q_u\} = [K_{21}]\{D_u\} + [K_{22}]\{D_k\}$$

Como $\{D_k\} = \{0\}$

$$\{Q_u\} = [K_{21}]\{D_u\}$$

Cálculo das Reações de Apoios (2)

$$\{Q_u\} = [K_{21}]\{D_u\}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -9/125 & -12/125 \\ -12/125 & -16/125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

$$D_1 = \frac{4{,}5}{AE}$$

$$D_2 = -\frac{19}{AE}$$

- Multiplicando as matrizes acima tem-se:

$$\begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{Bmatrix} kN$$

Cálculo dos Esforços Internos nas Barras (1)

- Uma vez conhecidas as reações de apoio resta agora o problema de calcular os esforços internos. Para tanto é necessário relembrar as equações abaixo:

$$\{\boldsymbol{q}\} = [\boldsymbol{k}]'\{\boldsymbol{d}\} \qquad \{\boldsymbol{d}\} = [\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}\}$$

$$\{\boldsymbol{q}\} = [\boldsymbol{k}]'[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}\}$$

$\{q\}$: vetor de cargas nodais elementares (locais de cada barra)
$\{D\}$: vetor de deslocamentos globais
$[T]$: matriz de transformação de coord. globais para coord. locais
$[k]'$: matriz de rigidez elementar

Cálculo dos Esforços Internos nas Barras (2)

- Expandindo a equação abaixo:

$$\{\boldsymbol{q}\} = [\boldsymbol{k}]'[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{D}\}$$

$$\begin{Bmatrix} q_N \\ q_F \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{Bmatrix}$$

- Como $q_N = -q_F$ dada a condição de equilíbrio, somente uma das forças precisa ser calculada, que no caso será q_F:

$$q_F = \frac{AE}{L}[-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y]\begin{Bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{Bmatrix}$$

Cálculo dos Esforços Internos nas Barras (3)

- Aplicando a expressão anterior para as duas barras da estrutura:

$$q_F = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} -\lambda_x & -\lambda_y & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{Bmatrix}$$

Esforço Interno da Barra [1]

$$q_{[1]} = \frac{AE}{3}\overset{\textit{1}\quad\textit{2}\quad\textit{3}\quad\textit{4}}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}\frac{1}{AE}\begin{Bmatrix} 4{,}5 \\ -19 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{matrix}\textit{1}\\\textit{2}\\\textit{3}\\\textit{4}\end{matrix} = -1{,}5\ kN$$

Esforço Interno da Barra [2]

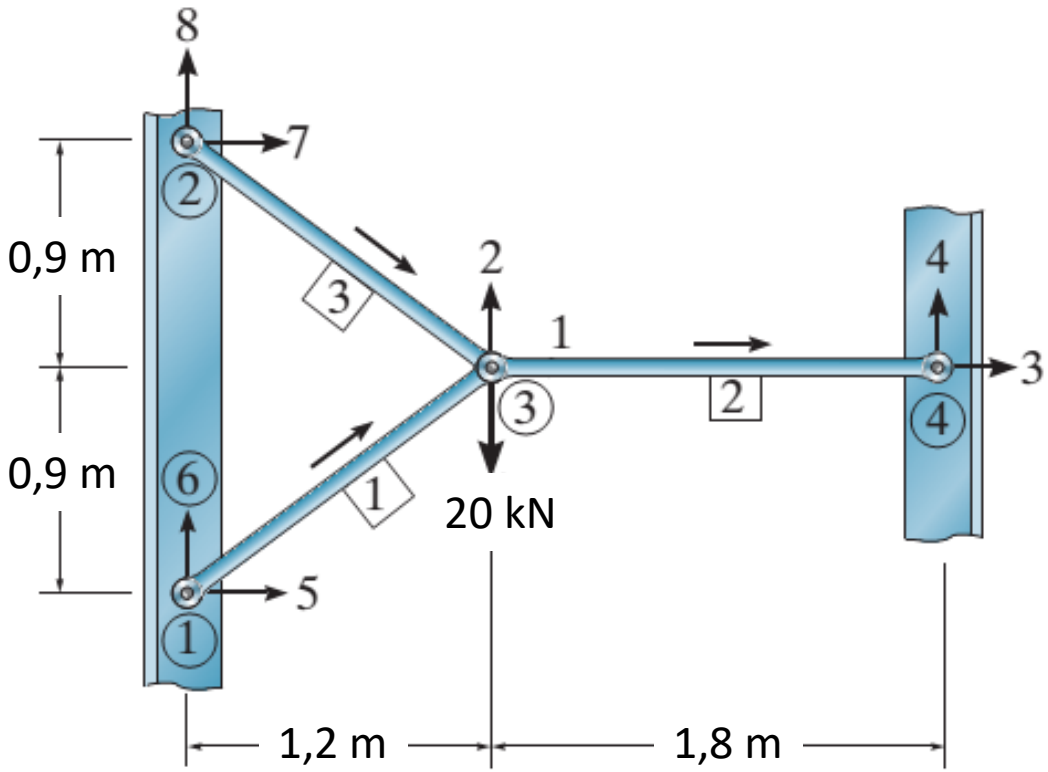
$$q_{[2]} = \frac{AE}{3}\overset{\textit{1}\quad\textit{2}\quad\textit{5}\quad\textit{6}}{\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}}\frac{1}{AE}\begin{Bmatrix} 4{,}5 \\ -19 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\begin{matrix}\textit{1}\\\textit{2}\\\textit{5}\\\textit{6}\end{matrix} = 2{,}5\ kN$$

FIM

Exercício TE2-8.1

- Determinar o esforço axial em cada uma das barras indicadas na montagem abaixo.

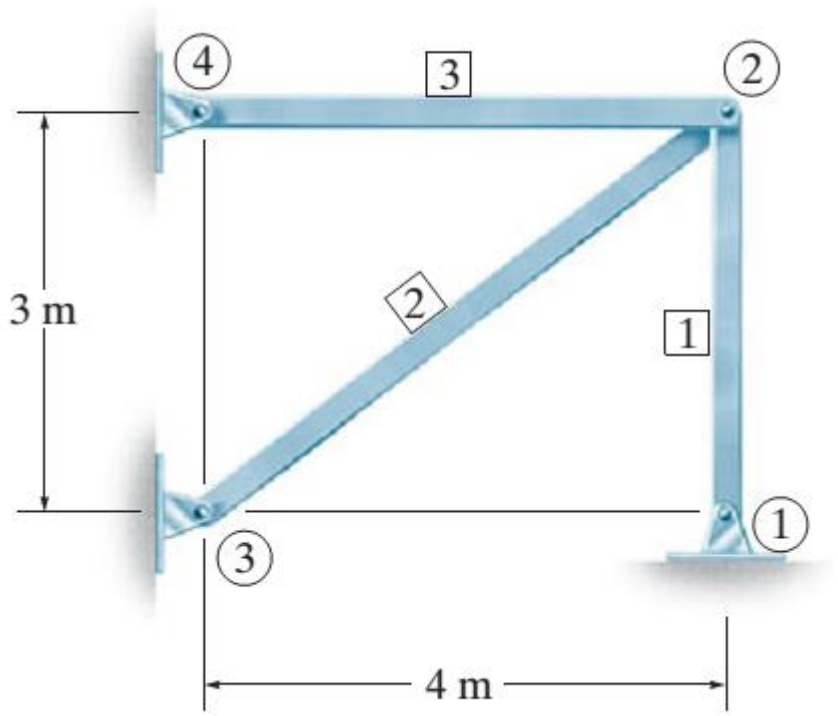
- Para todas as barras: E = 200 GPa
  A = 1000 mm²

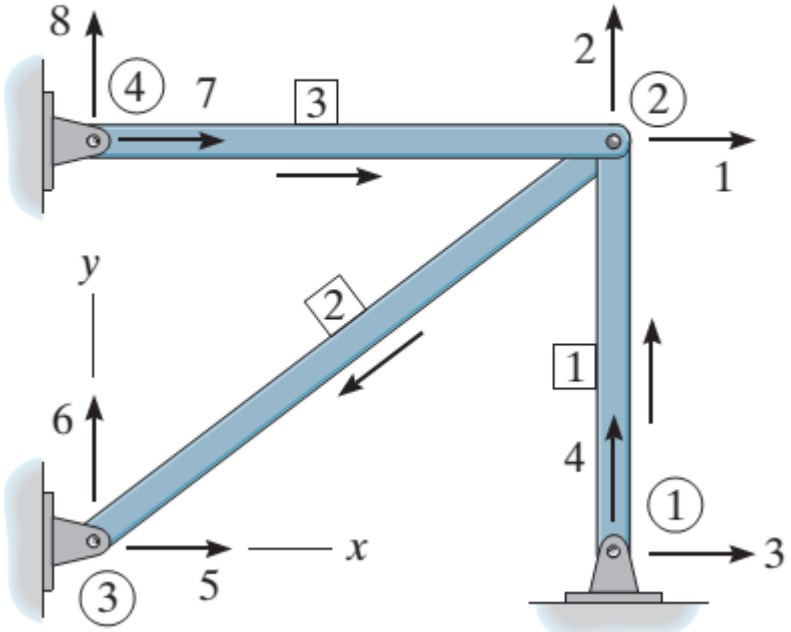


Exercício TE2-8.2

- Determinar o esforço axial na barra [2] da estrutura abaixo quando o nó (1) sofre um deslocamento vertical descendo 25 mm.

- Todas as barras possuem o mesmo EA = 8×10^3 kN.

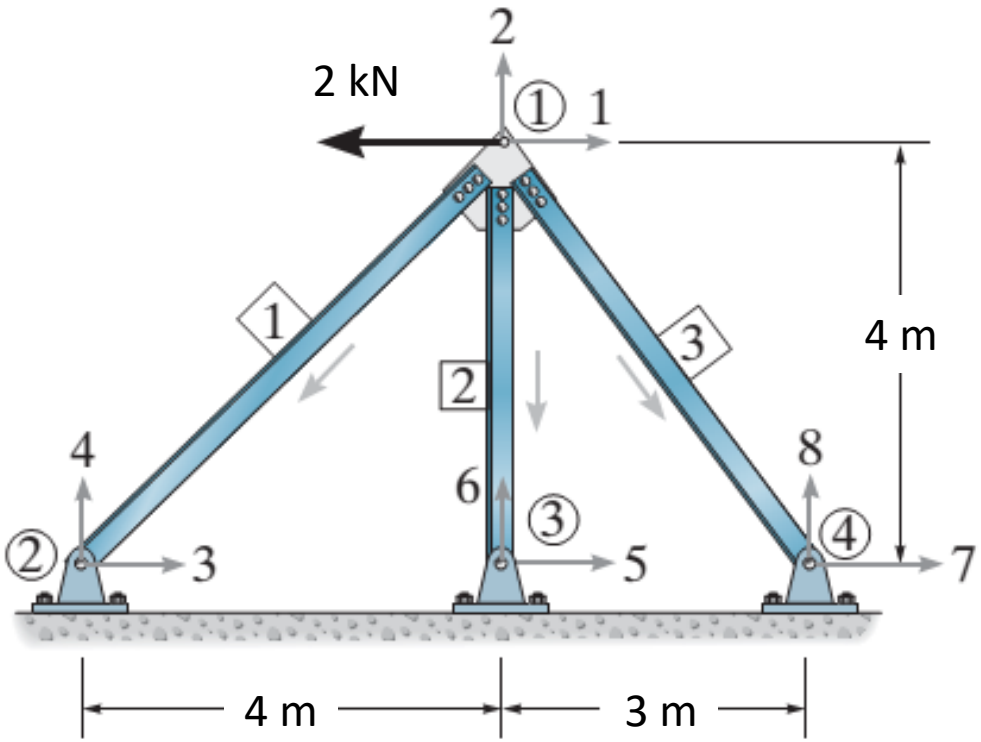




Exercício TE2-8.3

- Determinar o esforço axial na barra [2] se a sua temperatura for aumentada em 55°C.

- Para todas as barras: E = 200 Gpa; A = 1000 mm²; α = 11,7x10^{-6} /ºC;



Exercício TE2-8.4

- Calcular os deslocamentos D1 até D5, as reações de apoio e o esforço interno na barra [2] da treliça indicada abaixo empregando a análise matricial via método dos deslocamentos.

- Todas as barras possuem o mesmo EA.

