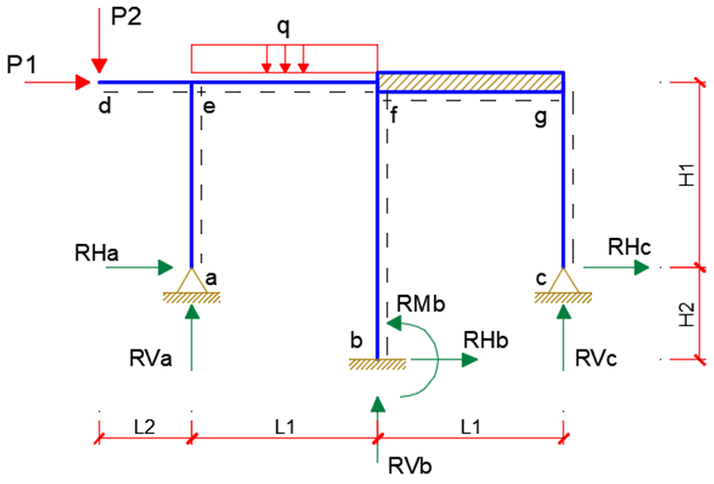
TE2_E07-03

Traçar o diagrama de momentos fletores para o modelo estrutural ao lado.



- Todas as barras são inextensíveis exceto a barra "fg";
- A barra "fg" é infinitamente rígida;
- Considerar que todas as barras possuem o mesmo módulo de rigidez flexural EI;

- Dados:

$P1 := 10\ kN$ $P2 := 20\ kN$ $q := 90\ \frac{kN}{m}$

$L1 := 4\ m$ $L2 := 2\ m$

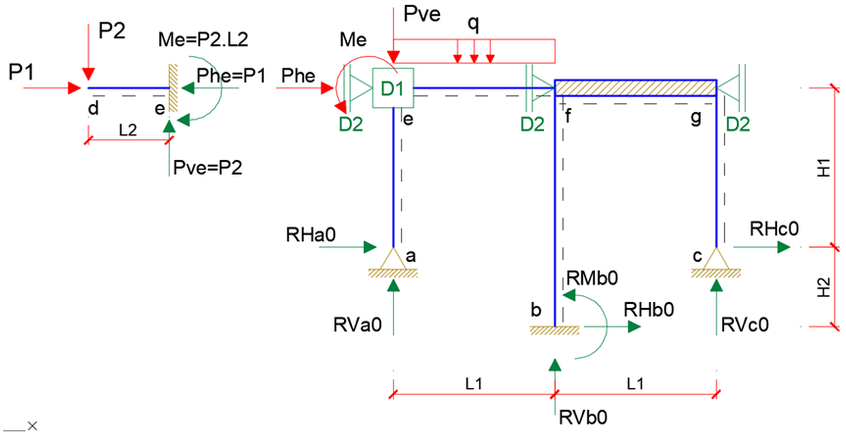
$H1 := 4\ m$ $H2 := 2\ m$

Sistema Hipergeométrico e Vetor de Cargas:

Quais são as deslocabilidades a serem consideradas no problema?

- Os pontos f e g tem conexão com uma barra infinitamente rígida logo não sofrem rotações.
- Os pontos e, f e g , dado que as barras são inextensíveis, não sofrem deslocamentos verticais;
- Pelo processo de eliminação do balanço o ponto "d" não é contabilizado no processo;

D1 - rotação do ponto "e";
D2 - translação horizontal como corpo rígido dos pontos "e", "f" e "g";



$Me := P2 \cdot L2 = 40\ kN\ m$

$PVe := P2 = 20\ kN$

$Phe := P1 = 10\ kN$

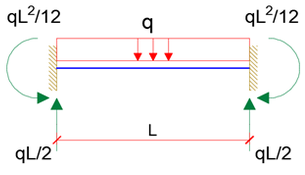
$RMe0_ae := 0$

$RMf0_bf := 0$

$RMg0_cg := 0$

$RMb0 := 0$

Modelo da barra ef:



$RMe0_ef := +\frac{q \cdot L1^{2}}{12} \cdot \frac{1}{kN\ m} = 120$

$RMf0_ef := -\frac{q \cdot L1^{2}}{12} \cdot \frac{1}{kN\ m} = -120$

$Fr10 := RMe0_ef = 120$ $Fn10 := Me = 40\ kN\ m$

$Fr20 := 0$ $Fn20 := Phe = 10\ kN$

Condição de Equilíbrio: [K]*{D}+{Fr}={Fn} ---> {F}={Fn}-{Fr}

$$Fn := \begin{bmatrix} \frac{Fn10}{kN\ m} \\ \frac{Fn20}{kN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \end{bmatrix} \quad Fr := \begin{bmatrix} Fr10 \\ Fr20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F := Fn - Fr = \begin{bmatrix} -80 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Composição da Matriz de Rigidez:

Caso 1: rotação unitária do ponto "e":

$EI := 1\ \text{kN m}^2$

$RMe1_ef := \frac{4 \cdot EI}{L1} \cdot \frac{1}{\text{kN m}} = 1$

$RMe1_ae := \frac{3 \cdot EI}{H1} \cdot \frac{1}{\text{kN m}} = 0,75$

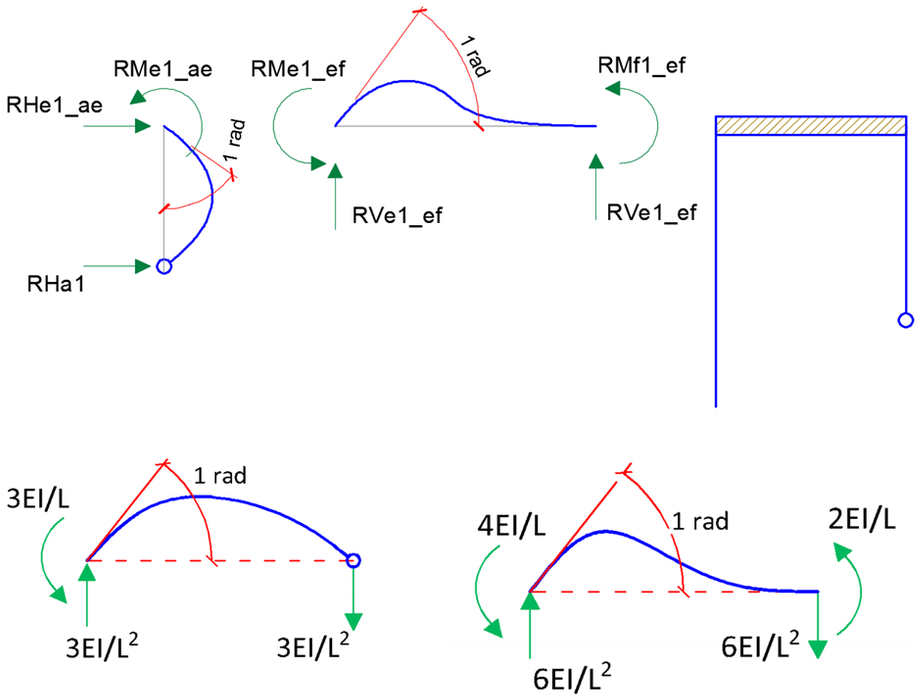
$RHe1_ae := 3 \cdot \frac{EI}{H1^2} \cdot \frac{1}{\text{kN}} = 0,1875$

$RMf1_ef := 2 \cdot \frac{EI}{L1} \cdot \frac{1}{\text{kN m}} = 0,5$

$RMf1_bf := 0$

$RMb1 := 0$

$RMg1_cg := 0$



$k11 := RMe1_ef + RMe1_ae = 1,75$ $\quad k21 := RHe1_ae = 0,1875$

Caso 2: translação horizontal unitária dos pontos "e", "f" e "g":

$RHe2_ae := 3 \cdot \frac{EI}{H1^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{kN}} = 0,046875$

$RHf2_bf := 12 \cdot \frac{EI}{(H1 + H2)^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{kN}} = 0,05556$

$RHg2_cf := 3 \cdot \frac{EI}{H1^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{kN}}$

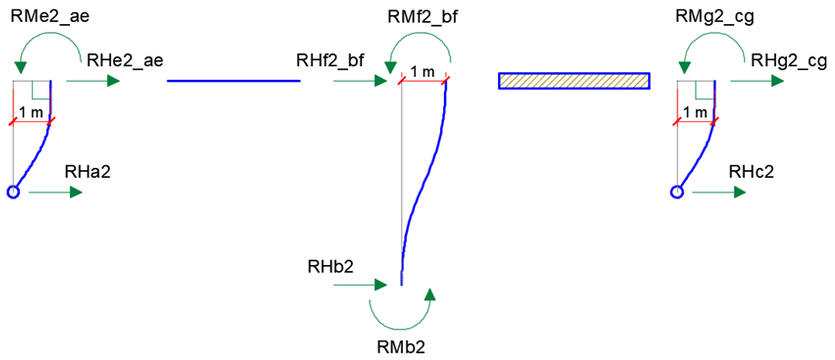
$RMe2_ae := 3 \cdot \frac{EI}{H1^2} \cdot \frac{1}{\text{kN}} = 0,1875$

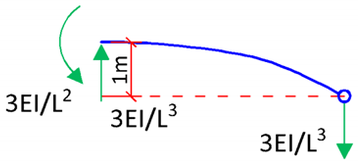
$RMf2_bf := 6 \cdot \frac{EI}{(H1 + H2)^2} \cdot \frac{1}{\text{kN}} = 0,1667$

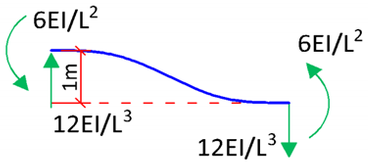
$RMg2_cg := 3 \cdot \frac{EI}{H1^2} \cdot \frac{1}{\text{kN}} = 0,1875$

$RMb2 := 6 \cdot \frac{EI}{(H1 + H2)^2} \cdot \frac{1}{\text{kN}} = 0,16667$

$RMe2_ef := 0$ $\quad RMf2_ef := 0$







$k22 := (RHe2_ae + RHf2_bf + RHg2_cf) = 0,14931$ $\quad k12 := RMe2_ae = 0,1875$

Composição do Sistema de Equações de Equilíbrio:

$$K := \begin{bmatrix} k11 & k12 \\ k21 & k22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 & 0,1875 \\ 0,1875 & 0,14931 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} -80 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$D := K^{-1} \cdot F = \begin{bmatrix} -61,113 \\ 143,72 \end{bmatrix}$$

*Deslocamentos calculados considerando o módulo de rigidez flexural EI = 1;

$$D1 := D_1 = -61,113 \qquad D2 := D_2 = 143,7236$$

Cálculo dos momentos Fletores nas Extremidades das Barras:

$$Mi_jk := Mi0_jk + Mi1_jk \cdot D1 + Mi2_jk \cdot D2$$

$$Me_ae := RMe0_ae + RMe1_ae \cdot D1 + RMe2_ae \cdot D2 = -18,887$$
$$Me_ef := RMe0_ef + RMe1_ef \cdot D1 + RMe2_ef \cdot D2 = 58,8868$$
$$Mf_ef := RMf0_ef + RMf1_ef \cdot D1 + RMf2_ef \cdot D2 = -150,5566$$
$$Mf_bf := RMf0_bf + RMf1_bf \cdot D1 + RMf2_bf \cdot D2 = 23,954$$
$$Mb := RMb0 + RMb1 \cdot D1 + RMb2 \cdot D2 = 23,954$$
$$Mg_cg := RMg0_cg + RMg1_cg \cdot D1 + RMg2_cg \cdot D2 = 26,9482$$

* Todos os resultados estão com sinal conforme a convenção de Green

Sinais dos momentos fletores:
Em preto: convenção de Green;
Em laranja: convenção de diagramas de esforços internos;

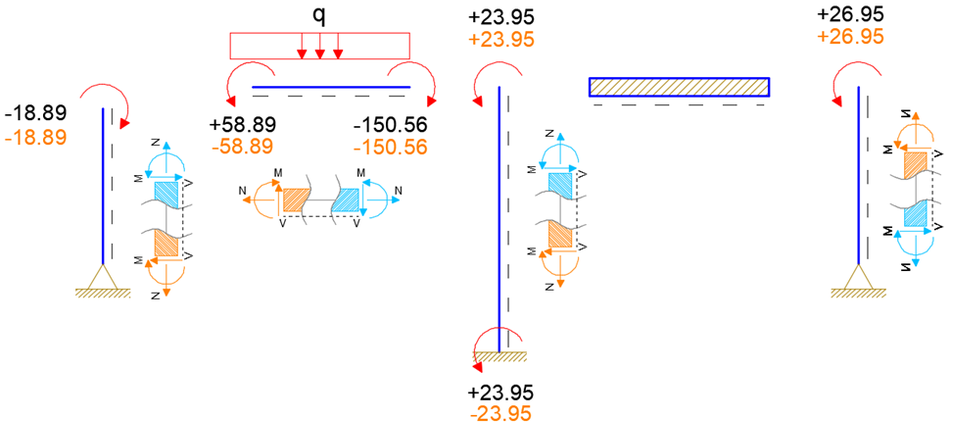


Diagrama de Momentos Fletores:

