UNIVERSIDADE POSITIVO

MARCELO AUGUSTO PIRES BLANCO

ESTUDO DE MODELOS DE TORRES METÁLICAS EM CANTONEIRAS, TUBOS E TUBOS PREENCHIDOS COM CONCRETO QUANTO ÀS FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO

CURITIBA

2015

MARCELO AUGUSTO PIRES BLANCO

ESTUDO DE MODELOS DE TORRES METÁLICAS EM CANTONEIRAS, TUBOS E TUBOS PREENCHIDOS COM CONCRETO QUANTO ÀS FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Civil da Universidade Positivo, como requisito parcial à graduação.

Orientador: Prof. Juliano J. Scremin

CURITIBA

2015

RESUMO

Neste trabalho foi feito um estudo comparando seis modelos diferentes para uma mesma geometria de torre de transmissão, onde foram alterados os elementos de suas pernas principais (montantes): dois foram feitos utilizando perfis cantoneira, dois utilizando perfis de tubo metálico vazado e outros dois utilizando tubo metálico preenchido com concreto. Houve um acréscimo nas dimensões dos elementos constituintes das torres a fim de analisar qual o impacto da variação da massa e incremento na inércia da seção dos elementos dos modelos em termos de frequências naturais e modos de vibração.

Os modelos e simulações computacionais destas torres de transmissão autoportantes submetidas aos carregamentos de vento foram desenvolvidos no pacote comercial de elementos finitos ANSYS®.

Inicialmente foi feito um pré-dimensionamento para o modelo composto somente em cantoneira por meio de uma análise estática de modo a definir os perfis necessários para cada grupo de peças componentes. A partir deste pré-dimensionamento foram feitas análises modais para obtenção das frequências naturais e modos de vibração. Todos os seis modelos apresentaram frequências maiores do que 1 Hz, não sendo necessário realizar análises dinâmicas conforme as orientações da NBR 6123 :1988.

Dentre os modelos analisados, os modelos confeccionados com perfis cantoneira se apresentaram como a melhor escolha para a obtenção de frequências naturais maiores e menores deslocamentos. Em contrapartida, os modelos com as montantes confeccionadas utilizando tubos preenchidos com concreto apresentaram frequências naturais muito próximas de 1 Hz, sugerindo a realização de uma análise dinâmica.

Palavras-chave: Torre de transmissão. Análise Modal. Modelagem computacional. ANSYS®.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – TORRE TIPO ESTAIADA PARA TELECOMUNICAÇÕES. 11

FIGURA 2 – TORRE TIPO AUTOPORTANTE. 12

FIGURA 3 – TORRE TIPO POSTE. 13

FIGURA 4 – TORRE TIPO MISTA. 13

FIGURA 5 – TORRE TIPO AUTOPORTANTE TRELIÇADA. 14

FIGURA 6 – COMPARATIVO ENTRE VIBRAÇÕES AMORTECIDAS E NÃO AMORTECIDAS. FONTE: Piccoli (2010). 15

FIGURA 7 – COMPARATIVO ENTRE COMPORTAMENTO LINEAR E NÃO LINEAR. 16

FIGURA 8 – PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS. 16

FIGURA 9 – SISTEMAS COM UM, DOIS E TRÊS GRAUS DE LIBERDADE. 17

FIGURA 10 – SISTEMA MASSA-MOLA EM SUPERFÍCIE SEM ATRITO. 19

FIGURA 11 – VIBRAÇÃO LIVRE DE SISTEMAS NÃO AMORTECIDOS. 22

FIGURA 12 - REPRESENTAÇÃO DA BASE DE RITZ NO ESPAÇO. 30

FIGURA 13 - MATRIZ DE ROTAÇÃO DO MÉTODO DE JACOBI. 32

FIGURA 14 – EXEMPLOS DE FORMAS DE ELEMENTOS FINITOS. 37

FIGURA 15 - DISCRETIZAÇÃO DE UMA CHAPA TRACIONADA. 38

FIGURA 24 – MODELO GENÉRICO DE TORRE COM CARREGAMENTO DEVIDO AO VENTO INCIDINDO COM 0 GRAU DE INCLINAÇÃO. 52

FIGURA 25 – MODELO GENÉRICO DE TORRE COM CARREGAMENTO DEVIDO AO VENTO INCIDINDO COM 45 GRAUS DE INCLINAÇÃO. 52

FIGURA 31 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA (SIMÉTRICO). 70

FIGURA 32 - PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA (SWAY). FONTE: O autor. 70

FIGURA 33 - SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA (SIMÉTRICO). FONTE: O autor. 71

FIGURA 34 – CARGAS DE VENTO INCIDINDO COM 0 GRAU DE INCLINAÇÃO. 77

FIGURA 35 – CARGAS DE VENTO INCIDINDO COM 45 GRAUS DE INCLINAÇÃO. 77

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – NOMENCLATURA DOS ELEMENTOS UTILIZADOS NA ELABORAÇÃO DOS MODELOS ANALISADOS. OBS: DIMENSÕES DAS CANTONEIRAS EM ANEXO A ESTE TRABALHO. 47

TABELA 2 – CARREGAMENTO DEVIDO AO VENTO PARA CADA MÓDULO. 49

TABELA 3 – TABELA DE VERIFICAÇÃO PARA O PRÉ-DIMENSIONAMENTO DOS ELEMENTOS DA TORRE. 53

TABELA 4 – TABELA RESUMO DA MASSA DE CADA MODELO DE TORRE CONFECCIONADA COM TUBOS VAZADOS NAS MONTANTES E PERFIS CANTONEIRA NOS DEMAIS ELEMENTOS. FONTE: O autor (2015). 54

TABELA 5 – TABELA DE DESLOCAMENTOS MÁXIMOS NAS DIREÇÕES X, Y E Z. 55

TABELA 6 – COMPARAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS E PERÍODOS DOS MODELOS ANALISADOS. 56

TABELA 7 – CÁLCULO DO CARREGAMENTO DE VENTO NA TORRE DE 40 METROS. 76

TABELA 8 – TABELA DE CANTONEIRAS. 105

TABELA 9 – TABELA DE TUBOS VAZADOS (PARTE 1). 106

TABELA 10 – TABELA DE TUBOS VAZADOS (PARTE 2). 107

LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
NBR	Denominação de Norma da Associação Brasileira de Normas Técnicas
GDL	Grau de Liberdade

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO _____ 9

1.1 JUSTIFICATIVA _____ 9

1.2 OBJETIVO _____ 10

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA_____ 11

2.1 MORFOLOGIA DE TORRES DE TELECOMUNICAÇÕES_____ 11

2.1.1 TIPOS DE TORRES AUTOPORTANTES DE TELECOMUNICAÇÕES .. 12

2.2 VIBRAÇOES MECÂNICAS _____ 15

2.3 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO _____ 18

2.4 VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS _____ 21

2.5 FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO _____ 22

2.6 AUTOVALORES E AUTOVETORES _____ 25

2.6.1 PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DE UM PROBLEMA DE AUTOVALOR NA ANÁLISE MODAL 25

2.6.2 PREMISSAS PARA A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALORES PELO *MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇO* 29

2.6.3 MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇO 34

2.6.4 VETORES DE RITZ E MÉTODO DA GERAÇÃO DOS VETORES DE LANCZOS 34

2.7 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ELEMENTOS EM BARRAS DE TRELIÇA_____ 36

2.8 CRITÉRIOS NORMATIVOS PARA O CARREGAMENTO DE VENTO 39

2.8.1 FORÇA DE ARRASTO NA DIREÇÃO DO VENTO (Fa)..... 40

2.8.2 VELOCIDADE CARACTERÍSTICA DO VENTO (Vk)..... 40

2.8.3 COEFICIENTE DE ARRASTO (Ca) 42

2.9 FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL DO CARREGAMENTO DE VENTO 42

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA _____ 43

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E RESULTADOS OBTIDOS _ 46
4.1 GEOMETRIA_____ 46
4.2 DETERMINAÇÃO DOS CARREGAMENTOS DE VENTO _____ 49
4.4 MODELAGEM NO ANSYS® _____ 50
4.5 PRÉ-DIMENSIONAMENTO DAS CANTONEIRAS E TUBOS _____ 52
4.6 ANÁLISE ESTÁTICA_____ 54
4.6.1 MASSA DOS MODELOS.....54
4.6.2 DESLOCAMENTOS MÁXIMOS.....55
4.7 ANÁLISE MODAL_____ 56
5 CONCLUSÕES_____ 59
6 REFERÊNCIAS_____ 61

1 INTRODUÇÃO

As torres de transmissão são estruturas cruciais para a distribuição de energia elétrica e pontos de telecomunicações. São estruturas, leves e esbeltas, treliçadas feitas em aço e algumas vezes mistas, utilizando aço e concreto, dimensionados para resistir a esforços específicos. Apesar de, em grande maioria, serem encontradas feitas exclusivamente utilizando cantoneiras, elas podem também ser confeccionadas utilizando tubos metálicos com ou sem preenchimento de concreto.

Segundo Gabrielli e Neves (2008, p. 1), “As torres de transmissão de energia são estruturas treliçadas metálicas, geralmente constituídas com perfis-cantoneira tanto para as pernas principais (montantes) quanto para os membros de contraventamento”. Contudo, as pernas principais podem ser tubos metálicos preenchidos, ou não, com concreto. Já as ligações são realizadas parafusando diretamente uma cantoneira na outra ou através de chapas de ligação (*gusset plates*).

O uso de torres em perfis-cantoneira exige um grande número de contraventamentos secundários para reduzir os comprimentos destravados dos elementos, o que acaba aumentando a possibilidade da estrutura não ficar completamente estável, já que as cantoneiras são conectadas por apenas uma das abas, tornando a conexão quase sempre excêntrica (Gabrielli e Neves, 2008).

Em contrapartida, como lembra Gabrielli (2004), o uso das torres feitas com tubos oferece uma redução na quantidade de contraventamentos secundários, apresenta vantagens geométricas em relação aos perfis cantoneira e, ainda, pode tornar a estrutura mais leve e estável quanto às frequências naturais.

1.1 JUSTIFICATIVA

A confecção de torres de transmissão utilizando perfis cantoneira é muito mais utilizada do que a confecção com tubos. Isto fica evidente ao se ver as torres construídas nas cidades e até mesmo nos campos, assim como nas literaturas consultadas para a realização deste trabalho. A confecção de torres de transmissão

utilizando perfis tubulares, preenchidos ou não com concreto, pode resultar em uma boa alternativa construtiva, representando melhorias em termos de parâmetros dinâmicos. Assim sendo, o presente trabalho justifica-se pela proposta de averiguar se a utilização de perfis tubulares podem representar melhorias em termos de frequências naturais e modos de vibração para estruturas de torres treliçadas.

1.2 OBJETIVO

Determinar qual tipo de seção transversal representa melhorias quanto a frequências e modos naturais de vibração na composição de torres metálicas treliçadas tomando por alternativas os perfis: cantoneira, tubo vazado e tubo preenchido com concreto.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 MORFOLOGIA DE TORRES DE TELECOMUNICAÇÕES

As torres metálicas são divididas em estaiadas, mistas e autoportantes. Nas torres estaiadas, os esforços horizontais são absorvidos pelos tirantes, e consequentemente as componentes das resultantes horizontais são transmitidas ao solo. Essas torres são compostas por um mastro dividido em módulos de aproximadamente três metros, contidos lateralmente por estais em vários níveis. Elas necessitam de uma grande área para a sua instalação devido à faixa de servidão dos tirantes, assim como um terreno com topografia regular (Pinto, Bespalhok e Baptista , 2004).



FIGURA 1 – TORRE TIPO ESTAIADA PARA TELECOMUNICAÇÕES.
FONTE: Gabrielli, T. N. (2004).

As torres autoportantes são formadas apenas por um mastro, de treliça ou tubular, que resiste a todos os carregamentos. Essas torres não necessitam de uma grande área como as estaiadas, possuem custos menores com manutenção e geralmente são construídas em alturas até 120 metros como lembra Pinto, Bespalhok e Baptista (2004).



FIGURA 2 – TORRE TIPO AUTOPORTANTE.
FONTE: O autor (2015).

As torres mistas são estruturas compostas por segmentos estaiados e segmentos autoportantes, contudo essa categoria é pouco utilizada.

Este trabalho de conclusão de curso tem a intenção de focar somente as análises realizadas em torres autoportantes. Por esse motivo, serão apresentadas apenas as principais tipologias dessa estrutura.

2.1.1 TIPOS DE TORRES AUTOPORTANTES DE TELECOMUNICAÇÕES

As principais formas de concepção estrutural das torres autoportantes são: postes, autoportantes mistas e treliçadas. A forma estrutural mais utilizada é a treliçada (Pinto, Bespalhok e Baptista, 2004).

a) Postes – As torres autoportantes tipo postes são formadas por elementos na vertical, feita por tubo circular ou por placas facetadas de aço. São utilizadas para alturas entre 20 e 60 metros e possuem a vantagem de serem ágeis em sua instalação (Pinto, Bespalhok e Baptista , 2004).



FIGURA 3 – TORRE TIPO POSTE.
FONTE: O autor (2015).

b) Torres autoportantes mistas – As torres autoportantes mistas são compostas por um trecho circular cilíndrico de concreto e por um trecho treliçado de aço. São utilizadas para alturas acima de 80 metros (Pinto, Bespalhok e Baptista , 2004)..



FIGURA 4 – TORRE TIPO MISTA.
FONTE: Pinto, E. F.; Bespalhok, I. C.; Batista, R. C., (2013).

c) Torres Treliçadas – As torres autoportantes treliçadas apresentam baixa resistência aerodinâmica e economia no uso de materiais. São geralmente formadas por uma parte em tronco-piramidal, junto ao solo, e outra parte reta, na qual são fixadas as antenas. Sua seção transversal é geralmente triangular ou quadrada (Pinto, Bespalhok e Baptista , 2004).

Essas torres são as mais utilizadas, pois apresentam maior economia na execução das ligações e são menos susceptíveis aos efeitos de corrosão.

Segundo Pinto, Bespalhok e Baptista (2013), nesses modelos, o perfil cantoneira é o mais utilizado na confecção, entretanto elementos formados por tubos também podem ser empregados.



FIGURA 5 – TORRE TIPO AUTOPORTANTE TRELIÇADA.
FONTE: O autor (2015).

As torres autoportantes em treliça geralmente apresentam seção variável ao longo da estrutura.

> “Essa medida gera uma redução aproximada de 20% na área de exposição ao vento ao longo da altura o que resulta em uma redução em torno de 14% no momento na base da torre.” (HARITOS e STEVENS, 1983).

2.2 VIBRAÇOES MECÂNICAS

Segundo Rao (2009), vibração é um movimento que apresenta repetição em torno de uma posição de equilíbrio, regular ou não, dentro de um intervalo de tempo.

Já para Soeiro (2008), as vibrações podem ser classificadas quanto à existência ou não de excitação:

a) **Vibrações livres**: são causadas por condições iniciais de movimento.
b) **Vibrações forçadas**: são causadas por excitações externas.

Elas também são classificadas quanto à existência ou não de amortecimento:

c) **Vibrações não amortecidas**: são as vibrações que não perdem energia conforme vibram. Dessa forma, o sistema irá vibrar indefinidamente, sem a diminuição da amplitude do movimento oscilatório, sem variação em sua frequência e consequentemente sem a variação no período.

d) **Vibrações amortecidas**: quando há perda de energia. Um sistema em vibração livre irá vibrar tendendo voltar a sua posição de equilíbrio. Em um sistema de vibração forçada pode haver ou não o aumento da amplitude do movimento oscilatório.

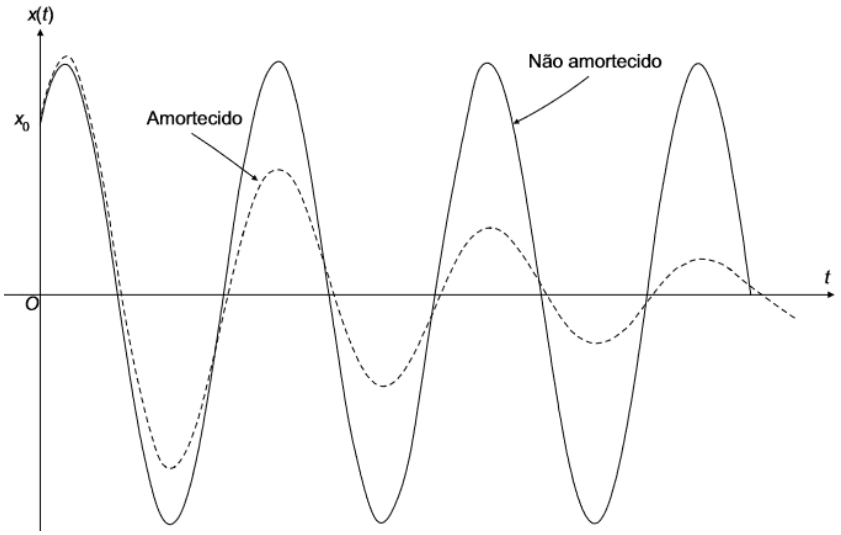


FIGURA 6 – COMPARATIVO ENTRE VIBRAÇÕES AMORTECIDAS E NÃO AMORTECIDAS. FONTE: Piccoli (2010).

Em alguns casos, as vibrações podem não seguir uma linearidade. Vibrações lineares obedecem ao Princípio da Superposição dos Efeitos, ou seja, a resposta da estrutura é proporcional a sua excitação (Correia, 2007).

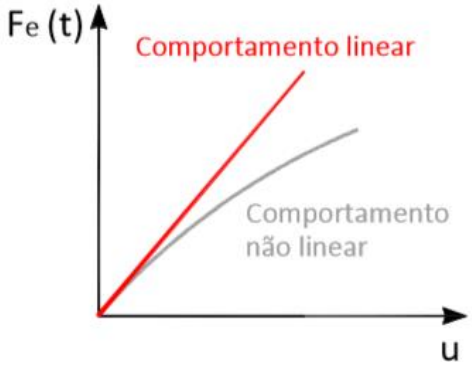


FIGURA 7 – COMPARATIVO ENTRE COMPORTAMENTO LINEAR E NÃO LINEAR.
FONTE: Mendes (2012).

O modelo matemático desse tipo de problema é composto por um sistema de EDOLs (equações diferenciais ordinárias lineares) e é de fácil solução analítica, como lembra Correia (2007).

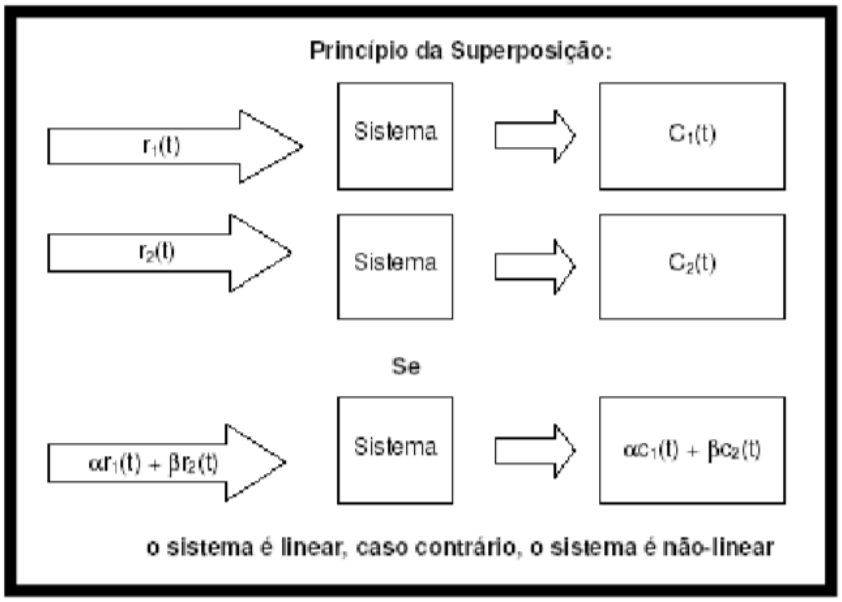


FIGURA 8 – PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS.
FONTE: Soeiro (2008).

Para Rao (2009), quando as componentes do sistema analisado não apresentarem comportamento linear, o problema é difícil ou, até mesmo, impossível

de ser solucionado. Quando solucionado, geralmente é por meio de métodos numéricos.

Outra afirmação de Rao (2009), é que os sistemas vibratórios podem ser discretos ou contínuos:

a) **Sistemas discretos**: podem ser divididos em partes com números determinados de graus de liberdade a partir do número de graus de liberdade do sistema global. Também são conhecidos como sistemas com parâmetros concentrados.
b) **Sistemas contínuos**: não podem ser divididos, pois possuem um número infinito de graus de liberdade (GDL). Também são conhecidos como sistemas com parâmetros distribuídos.

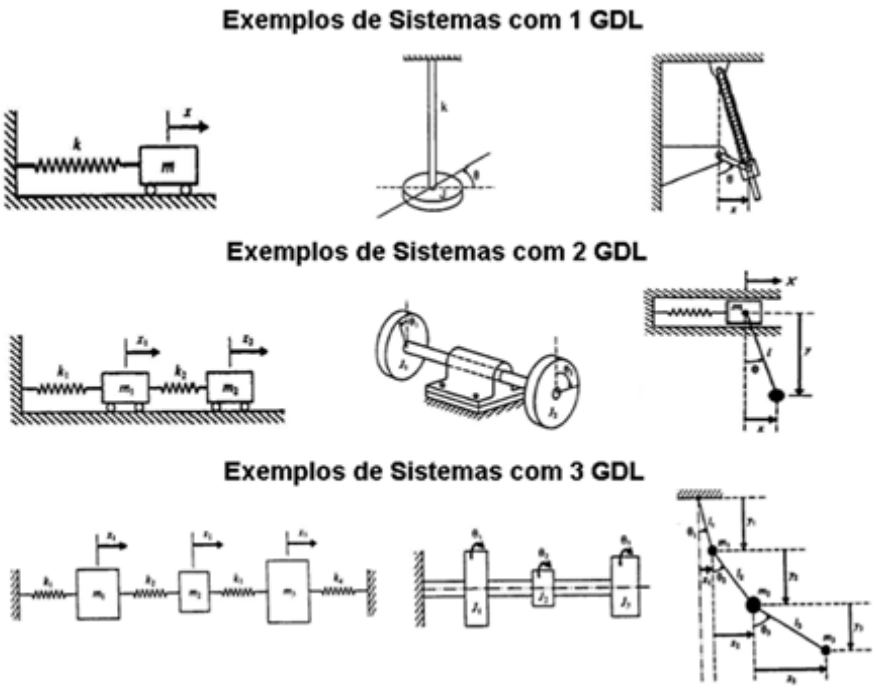


FIGURA 9 – SISTEMAS COM UM, DOIS E TRÊS GRAUS DE LIBERDADE.
FONTE: Soeiro (2008).

Para uma análise de vibração em uma estrutura, as propriedades mais importantes são a elasticidade, a inércia e o amortecimento. Essas propriedades possuem grande importância, pois a vibração é um processo de troca de energia mecânica em forma de energia cinética (relacionada à velocidade) e energia potencial (relacionada à deformação e à gravidade) (Soeiro, 2008).

a) A elasticidade está relacionada à capacidade do sistema guardar energia potencial elástica.

b) A inércia está relacionada à capacidade do sistema guardar energia cinética e energia potencial gravitacional.
c) O amortecimento está relacionado à capacidade do sistema transformar parte da energia em calor ou em som por meio do atrito. Em outras palavras, o amortecimento pode ser chamado de atrito interno.

Soeiro (2008) menciona que a conversão de energia cinética para energia potencial e vice-versa é um processo que ocorre num sistema em vibração. Quando um sistema vibratório é amortecido, uma parcela da energia total é dissipada a cada ciclo de período.

2.3 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

a) **Sistema com 1 grau de liberdade –** De acordo com Soriano (2009), a forma mais simples de se demonstrar o funcionamento de um sistema com um grau de liberdade se dá a partir do método direto e utilizando um oscilador linear, onde só é possível o movimento em uma direção.

Nesse sistema, conforme os estudos de Clough e Penzien (1975), a força externa variável no tempo $\boldsymbol{f}(\mathbf{t})$ deve ser igual às forças atuantes no corpo de massa $\boldsymbol{m}$, ou seja, a força de inércia $\boldsymbol{f_I}(\mathbf{t})$, a força de amortecimento $\boldsymbol{f_D}(\mathbf{t})$ e a força elástica $\boldsymbol{f_S}(\boldsymbol{t})$.

A força elástica $\boldsymbol{f_S}(\mathbf{t})$ depende da rigidez do corpo de massa $\boldsymbol{m}$ e do deslocamento ($\boldsymbol{v}$) gerado a partir da força externa.

A força de amortecimento $\boldsymbol{f_D}(\mathbf{t})$ depende de um escalar chamada de *coeficiente de amortecimento viscoso* e da velocidade ($\dot{\boldsymbol{v}}$) em que a força externa age sobre o corpo de massa $\boldsymbol{m}$.

A força de inércia $\boldsymbol{f_I}(\mathbf{t})$ depende da massa do corpo e da aceleração ($\ddot{\boldsymbol{v}}$), em que a força externa age sobre o corpo de massa $\boldsymbol{m}$.

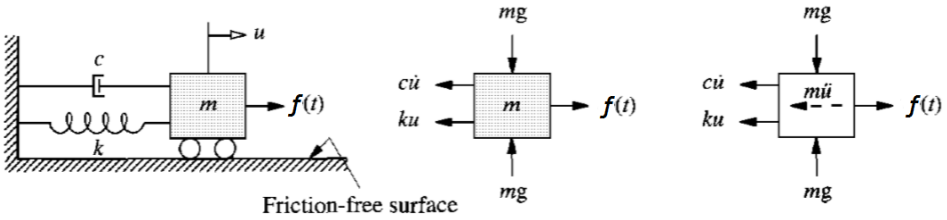


FIGURA 10 – SISTEMA MASSA-MOLA EM SUPERFÍCIE SEM ATRITO.
FONTE: Chopra (1995).

A equação que descreve o equilíbrio dinâmico de um sistema de 1 grau de liberdade é uma equação diferencial de segunda ordem. Ela está demonstrada a seguir, com base nas considerações mencionadas anteriormente, e seus coeficientes estão detalhados ao longo do tópico 2.3.

$$\boldsymbol{m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = f(t)} \quad (1)$$

b) **Sistema com n graus de liberdade –** O movimento de uma estrutura é definido a partir de um conjunto de pontos discretos ao longo dela. Esses pontos devem estar relacionados à prudência do analista e dispostos de uma maneira que descreva bem o comportamento da estrutura. Geralmente 3 ou 4 pontos são suficientes, contudo, em algumas situações, quanto mais pontos estiverem sendo analisados, melhor será o resultado.

> Para um sistema de múltiplos graus de liberdade, as variáveis continuam sendo as mesmas existentes em um sistema de 1 grau de liberdade, mas dessa vez a equação acaba ficando maior por conta das N direções em que a estrutura pode se movimentar. Assim, fica mais conveniente representar cada força através de um conjunto apropriado de coeficientes de influência. (NASCIMENTO, 2002)

Segundo estudos de Clough e Penzien (1975), nas expressões descritas a seguir, para um sistema com múltiplos graus de liberdade, é assumido que a estrutura apresenta comportamento linear, pois assim o Princípio da Superposição pode ser aplicado.

Para a força elástica, temos:

$$\boldsymbol{f_{Si} = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + k_{i3}v_3 + \cdots + k_{iN}v_N} \quad (2)$$

Onde:

$\boldsymbol{k_{ij}}$ são os *coeficientes de influência de rigidez*, e correspondem à força na coordenada $\boldsymbol{i}$ e deslocamento unitário na coordenada $\boldsymbol{j}$;

$\boldsymbol{v}$ é o vetor de deslocamento responsável por representar a forma deslocada da estrutura.

A equação completa que descreve a força elástica pode ser descrita na forma simbólica abaixo, onde $\boldsymbol{k}$ é a matriz de rigidez e $\boldsymbol{v}$ é o vetor de deslocamento.

$$\boldsymbol{f_S = kv} \tag{3}$$

Na forma matricial, a força elástica pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ . \\ f_{Si} \\ . \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2N} \\ & & & \cdots & & & \\ k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{iN} \\ & & & \cdots & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ v_i \\ . \end{Bmatrix} \tag{4}$$

Para a força de amortecimento, temos:

$$\boldsymbol{f_{Di} = c_{i1}\dot{v}_1 + c_{i2}\dot{v}_2 + c_{i3}\dot{v}_3 + \cdots + c_{iN}\dot{v}_N} \tag{5}$$

Onde:

$\boldsymbol{c_{ij}}$ são os *coeficientes de influência de amortecimento*, e correspondem à força na coordenada $\boldsymbol{i}$ gerados pela velocidade unitária na coordenada $\boldsymbol{j}$;

$\boldsymbol{\dot{v}}$ é um vetor e representa a velocidade na coordenada de deslocamento $\boldsymbol{i}$.

A equação completa que descreve a força de amortecimento pode ser descrita na forma simbólica abaixo, onde $\boldsymbol{c}$ representa a matriz de amortecimento e $\boldsymbol{\dot{v}}$ é o vetor velocidade:

$$\boldsymbol{f_D = c\dot{v}} \tag{6}$$

Na forma matricial, a força de amortecimento pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ . \\ f_{Di} \\ . \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2N} \\ & & & \cdots & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{iN} \\ & & & \cdots & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ . \\ \dot{v}_i \\ . \end{Bmatrix} \tag{7}$$

Para a força de inércia, temos:

$$\boldsymbol{f_{Ii} = m_{i1}\ddot{v}_1 + m_{i2}\ddot{v}_2 + m_{i3}\ddot{v}_3 + \cdots + m_{iN}\ddot{v}_N} \tag{8}$$

Onde:

$\boldsymbol{m_{ij}}$ são os *coeficientes de massa*, e representam uma relação entre as acelerações nos correspondentes graus de liberdade e as forças de inércia geradas por estas acelerações;

$\ddot{\boldsymbol{v}}$ é um vetor e representa a aceleração na coordenada de deslocamento $\boldsymbol{i}$.

A equação completa que descreve a força de inércia pode ser descrita na forma simbólica, conforme abaixo, onde $\boldsymbol{m}$ representa a matriz de massa da estrutura e $\ddot{\boldsymbol{v}}$ é o vetor de aceleração.

$$\boldsymbol{f_I = m\ddot{v}} \tag{9}$$

Na forma matricial, a força de inércia pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ . \\ f_{Ii} \\ . \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1i} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2i} & \cdots & m_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{i1} & m_{i2} & m_{i3} & \cdots & m_{ii} & \cdots & m_{iN} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ . \\ \ddot{v}_i \\ . \end{Bmatrix} \tag{10}$$

2.4 VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS

Ao se desprezar o amortecimento, considerando-se um vetor de carregamentos nulo e imaginando que o sistema é colocado em movimento apenas por condições iniciais de deslocamento e/ou velocidades não nulas, recai-se na expressão de movimento homogênea:

$$\boldsymbol{m\ddot{v} + kv = 0} \tag{11}$$

Os sistemas não amortecidos são sistemas irreais. Podem ser analisados como um caso particular dos sistemas subamortecidos para os quais o coeficiente de amortecimento é admitido nulo.

Segundo Soeiro (2008), a partir da solução do problema de vibração livre não amortecido, calcula-se a frequência natural (relação entre a rigidez do elemento com a sua respectiva massa), e com essa frequência natural, pode-se calcular o período natural (tempo em que a estrutura sai e volta para a sua posição de equilíbrio) do movimento da estrutura.

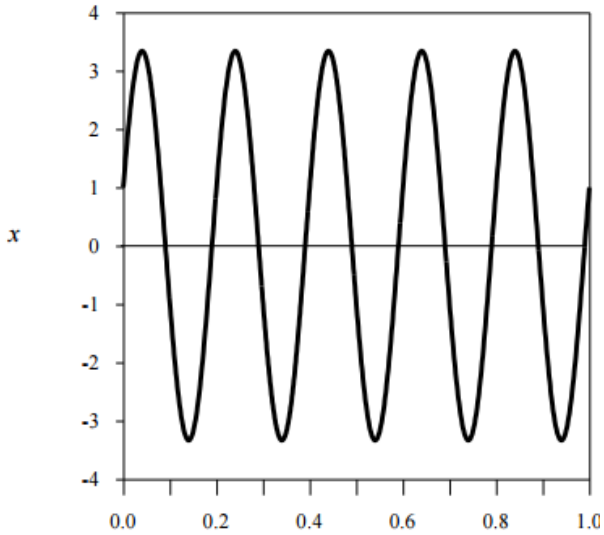


FIGURA 11 – VIBRAÇÃO LIVRE DE SISTEMAS NÃO AMORTECIDOS.
FONTE: Soeiro (2008).

2.5 FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO

As soluções da expressão (11) são formas $\hat{v}$ chamadas **modos de vibração livre não amortecidos** em que todas as coordenadas do sistema estão variando harmonicamente no tempo, numa mesma frequência. Essas frequências são chamadas de frequências de vibração livre não amortecidas, e estão todas numa mesma fase, ou seja:

$$\boldsymbol{v = \hat{v} cos(\omega t - \theta)} \qquad (12)$$

Onde $\hat{v}$ representa o modo de vibração do sistema (que não varia com o tempo; somente a amplitude varia) e $\boldsymbol{\theta}$ que é o ângulo fase.

De acordo com Reyolando & Silva (2013), ao derivar a expressão (12) duas vezes no tempo, substituindo a expressão resultante na equação de movimento e cancelando-se a função harmônica, recai-se no seguinte sistema de equações algébricas homogêneas:

$$\boldsymbol{[k - \omega^2 m]\hat{v} = 0} \qquad (13)$$

Segundo Clough e Penzien (1975), a equação (13) é uma forma de expressar o que é chamado de problema de autovalor ou valor característico do problema. As raízes das variáveis $\boldsymbol{\omega^2}$ (os autovalores) representam as frequências do sistema em

vibração livre, enquanto o deslocamento correspondente (os valores dos elementos do vetor $\widehat{\boldsymbol{v}}$) são os modos de vibração (os autovetores).

$$\|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{m}\| = \mathbf{0} \tag{14}$$

> O determinante da expressão (14) resulta em uma equação polinomial de grau *N* na variável $\boldsymbol{\omega}^2$. As *N* soluções de $\boldsymbol{\omega}$, nesse caso, são reais e positivas e são as frequências naturais do sistema em vibração. Usualmente, denota-se por $\boldsymbol{\omega_1}$ a menor delas e, pela ordem, até a maior, $\boldsymbol{\omega_N}$. Após a determinação do $\boldsymbol{\omega_i}$ desejado, substitui-se ele na expressão (13). Após essa substituição, o sistema será indeterminado e torna-se necessário arbitrar uma das componentes. Uma das formas de realizar essa arbitragem é fazer com que a primeira coordenada de cada modo seja unitária. Assim, podem-se determinar os *N* modos de vibração e coleciona-los numa matriz modal ***n* x *n***, cujas colunas são os *N* modos de vibração livre, não amortecidos e normalizados. (REYOLANDO e SILVA, 2013)

A equação (14) é chamada de *equação de frequência do sistema*. Clough & Penzien (1975) afirmam que ao se expandir o determinante da equação (14), obtêm-se uma equação algébrica de grau *N* que representa as N frequências de um sistema com *N* graus de liberdade. As *N* raízes desta equação ($\boldsymbol{\omega_1^2}$, $\boldsymbol{\omega_2^2}$, $\boldsymbol{\omega_{3,}^2} \cdots$, $\boldsymbol{\omega_N^2}$) representam as frequências dos *N* modos de vibração possíveis desse sistema. O modo que possui a menor frequência é chamado de primeiro modo, o próximo, com frequência maior, é chamado de segundo e assim por diante. O vetor feito das *N* frequências é chamado de ***vetor frequência*** $\boldsymbol{\omega}$.

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\omega_1} \\ \boldsymbol{\omega_2} \\ \boldsymbol{\omega_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega_N} \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Quando as frequências de vibração forem determinadas pela equação (14), a equação (13) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{(\boldsymbol{n})}\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0} \tag{16}$$

Sendo:

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}}^2\boldsymbol{m} \tag{17}$$

$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{(\boldsymbol{n})}$ representa a matriz obtida pela subtração de $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}}^2\boldsymbol{m}$ da matriz de rigidez; desde que isso dependa apenas das frequências, elas serão diferentes para cada modo. A forma do sistema de vibrar pode ser determinada através de uma resolução em função dos demais deslocamentos em termos de qualquer uma das coordenadas.

Assim, aqui será assumido que o primeiro elemento do vetor tem amplitude unitária, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \widehat{\boldsymbol{v}}_{1n} \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{2n} \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{3n} \\ \vdots \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{Nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{2n} \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{3n} \\ \vdots \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{Nn} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

A forma expandida da equação (16) é expressa simbolicamente, sendo:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{11}^{(n)} & \widetilde{\boldsymbol{E}}_{10}^{(n)} \\ \widetilde{\boldsymbol{E}}_{01}^{(n)} & \widetilde{\boldsymbol{E}}_{00}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{0n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{19}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{01}^{(n)} + \widetilde{\boldsymbol{E}}_{00}^{(n)} \widehat{\boldsymbol{v}}_{0n} = \mathbf{0} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{e}_{11}^{(n)} + \widetilde{\boldsymbol{E}}_{10}^{(n)} \widehat{\boldsymbol{v}}_{0n} = \mathbf{0} \tag{21}$$

A equação (21) pode ser resolvida simultaneamente para os deslocamentos das amplitudes, a partir da seguinte expressão:

$$\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{0n}} = -(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{00}}^{(\mathbf{n})})^{-\mathbf{1}} \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{n})} \tag{22}$$

O deslocamento obtido pela equação (23) junto à amplitude unitária do primeiro componente constitui o vetor deslocamento associado ao enésimo modo de vibração. Usualmente o vetor dos *N* modos de vibração é expresso da seguinte maneira:

$$\emptyset_{\boldsymbol{n}} = \begin{Bmatrix} \emptyset_{1n} \\ \emptyset_{2n} \\ \emptyset_{3n} \\ \vdots \\ \emptyset_{Nn} \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\widehat{\boldsymbol{v}}_{kn}} \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{2n} \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{3n} \\ \vdots \\ \widehat{\boldsymbol{v}}_{Nn} \end{Bmatrix} \tag{23}$$

Onde:

$\widehat{\boldsymbol{v}}_{kn}$ é o componente de referência.

O modo de cada um dos *N* modos de vibração pode ser encontrado pelo mesmo processo; a matriz quadrada feita pelos *N* modos serão representados por ∅.

$$\emptyset = [\emptyset_1 \; \emptyset_2 \; \emptyset_3 \; \cdots \; \emptyset_N] = \begin{bmatrix} \emptyset_{11} & \emptyset_{12} & \cdots & \emptyset_{1N} \\ \emptyset_{21} & \emptyset_{22} & \cdots & \emptyset_{2N} \\ \emptyset_{31} & \emptyset_{32} & \cdots & \emptyset_{3N} \\ \emptyset_{41} & \emptyset_{42} & \cdots & \emptyset_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \emptyset_{N1} & \emptyset_{N2} & \cdots & \emptyset_{NN} \end{bmatrix} \tag{(24}$$

Como notado acima, a análise de vibração de um sistema estrutural tem a forma de valor característico ou autovalor.

2.6 AUTOVALORES E AUTOVETORES

As frequências naturais e modos de vibração são obtidos por meio da resolução de um problema de autovalor.

A resolução de um problema desse tipo recai em uma equação polinomial. Portanto, os métodos de resolução do problema de autovalor são iterativos e são obtidos através de aproximações sucessivas.

Na análise de um modelo com um número elevado de graus de liberdade, geralmente são utilizados apenas os primeiros pares de autovalores e autovetores. O melhor método para a obtenção desses pares é o *método de iteração por subespaço.*

Segundo Soriano (2014), esse método possui a vantagem de ser estável e muito eficiente em caso de um modelo com elevado grau de liberdade, além de aproveitar as características de esparsidade das matrizes de rigidez e de massa. Contudo, algumas vezes, é melhor utilizar os chamados *vetores de Ritz* ou os *vetores de Lanczos*.

O ANSYS® permite a escolha do método utilizado para calcular as frequências naturais e modos de vibração. Essas opções são: *Block Lanczos, Subspace* (*método de iteração por subespaço*), *Powerdynamics, Reduced* etc. No entanto, este trabalho contemplará somente o *método de iteração por subespaço*, assim como a geração dos *vetores de Ritz*.

2.6.1 PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DE UM PROBLEMA DE AUTOVALOR NA ANÁLISE MODAL

Um problema de autovalor de um modelo com *N* graus de liberdade tem a forma generalizada simétrica dada a seguir:

$$\boldsymbol{K\Phi = M\Phi\Omega} \tag{25}$$

Onde:

$\boldsymbol{K}$ é a matriz de rigidez restringida;

$\boldsymbol{\Phi}$ é a matriz modal normalizada em relação à matriz de massa;

$\boldsymbol{M}$ é a matriz de massa;

$\boldsymbol{\Omega}$ são os autovetores, modos de vibração, quadrados das frequências naturais de vibração.

Como dito anteriormente, usualmente basta determinar os *p* primeiros autopares, sendo que *p* < *N* (número total de autopares). Então, passa-se a ter uma resolução parcial do problema de autovalor, o qual tem a seguinte forma:

$$\boldsymbol{K\Phi_p = M\Phi_p\Omega_p} \tag{26}$$

Para melhor entendimento do problema acima, deve-se saber o que é a forma padrão de um problema de autovalor, alerta Soriano (2014).

2.6.1.1 FORMA PADRÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALOR

Segundo Steinbruch & Winterle (1987), a forma padrão de um problema de autovalor é:

$$\boldsymbol{A\hat{x} = \lambda\hat{x} \leftrightarrow (A - \lambda I)\hat{x} = 0} \tag{27}$$

Onde:

$\boldsymbol{A}$ é uma matriz de ordem ***n* x *n***, simétrica e de coeficientes reais;

$\boldsymbol{I}$ é uma matriz identidade;

$\hat{\boldsymbol{x}}$ é um autovetor;

$\boldsymbol{\lambda}$ é o autovalor associado ao respectivo autovetor ($\hat{\boldsymbol{x}}$)**.**

A equação (28), quando expandida, possui a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \boldsymbol{\lambda} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} - \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{28}$$

O sistema descrito na expressão (29) é um sistema de equações algébricas lineares homogêneas. Portanto, só há uma solução não trivial em caso de matriz dos

coeficientes singular, o que implica na equação característica de um problema padrão de autovalor.

$$\boldsymbol{det(A-\lambda I)=\ b_n\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots b_i\lambda^i+\cdots b_0=0} \quad (29)$$

Onde:

$\boldsymbol{b_i}$ são escalares dependentes dos coeficientes da matriz $\boldsymbol{A}$.

As $\boldsymbol{n}$ raízes do polinômio característico são os autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$, considerados em ordem crescente, $\boldsymbol{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots \leq \lambda_n}$.

Para cada autovalor $\boldsymbol{\lambda_j}$, tem-se o sistema de equações algébricas:

$$\boldsymbol{(A-\lambda_j I)\hat{x}_j=0} \quad (30)$$

Cada autovalor $\boldsymbol{\lambda_j}$ está associado a um autovetor $\boldsymbol{\hat{x}_j}$. Assim, o par autovalor--autovetor é denominado **autopar** e é denotado por $(\boldsymbol{\lambda_j, \hat{x}_j})$.

2.6.1.2 NORMALIZAÇÃO DE UM AUTOVETOR

Segundo Soriano (2014), como qualquer múltiplo escalar de $\boldsymbol{\hat{x}_j}$ é também solução do sistema anterior, qualquer múltiplo escalar de um autovetor tem o mesmo significado matemático e define a mesma direção no espaço n-dimensional. Logo, para ter uma única solução, normaliza-se o autovetor.

Um dos procedimentos para se executar a normalização de um autovetor é a *Norma Euclidiana*, também conhecida por *comprimento Euclidiano* (raiz quadrada da soma dos quadrados dos seus coeficientes). Esse método é expresso simbolicamente da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\hat{x}_j=\frac{\hat{x}_j}{\left(\hat{x}_j^T\hat{x}_j\right)^{1/2}} \rightarrow \hat{x}_j=\frac{\hat{x}_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{i,j}^2}}} \quad (31)$$

Onde:

$\boldsymbol{\hat{x}_{i,j}^2}$ é o i-ésimo coeficiente do autovetor não normalizado $\boldsymbol{\hat{x}_j}$.

> Para se proceder com a resolução do sistema de equações algébricas representado na expressão (30) em caso de a matriz dos coeficientes $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_j I})$ ter posto (*n*-*m*), sendo *m* um número inteiro maior do que *n*, é necessário arbitrar *m* coeficientes do vetor $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}}$, e se diz que o autovalor $\boldsymbol{\lambda_j}$ tem grau de multiplicidade *m*. Dessa maneira, os correspondentes autovetores não são determinados de forma única com um procedimento de normalização, e qualquer combinação linear desses vetores é também um autovetor associado a $\boldsymbol{\lambda_j}$. Entretanto, como os coeficientes podem ser escolhidos de maneira a se ter *m* autovetores linearmente independentes, esses autovetores definem de forma única um subespaço m-dimensional em que qualquer vetor é também autovetor da matriz $\boldsymbol{A}$. (SORIANO, 2014).

Após esse procedimento, os autovetores, depois de normalizados, são agrupados e passam a ser chamados de *matriz modal normalizada* (X), com a seguinte forma:

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x_1}\ \boldsymbol{x_2}\ \cdots\ \boldsymbol{x_n}] \tag{32}$$

Assim, os autovalores passam a ser chamados de ***matriz espectral***. Simbolicamente, possuem a seguinte forma:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{\lambda_n} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Então, o problema padrão de autovalores e autovetores se apresenta como:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{X\Lambda} \tag{34}$$

A determinação das frequências naturais e modos de vibração de estruturas das torres de transmissão, tratadas neste trabalho, é relativamente difícil, pois possui um elevado número de graus de liberdade, o que implica em uma matriz quadrada muito grande. Assim, o polinômio resultante desse problema de autovalor é de difícil solução.

2.6.2 PREMISSAS PARA A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALORES PELO *MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇO*

2.6.2.1 QUOCIENTE DE RAYLEIGH

O *Quociente de Rayleigh* fornece uma estimativa da frequência fundamental de um modelo de sistema mecânico, sem que seja necessário resolver o problema de autovalor. “Além de que possui crucial importância por construir a base para a formulação da *análise de Rayleigh-Ritz*, que, por sua vez, é fundamental ao *método de iteração por subespaço.”* (SORIANO, 2014).

Em resumo, a *análise de Rayleigh-Ritz* consta nas seguintes etapas:

a) Estabelecimento de uma base de Ritz ($\boldsymbol{X}$) composta de *q* vetores linearmente independentes entre si e não ortogonais aos *p* autovetores cujas aproximações se deseja obter;
b) Projeção das matrizes $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{M}$ no subespaço definido pelos *vetores de Ritz*, obtendo-se $\boldsymbol{K}^*$ e $\boldsymbol{M}^*$ através das equações:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} \end{Bmatrix} \tag{35}$$

c) Resolução do problema de autovalor $(\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{\alpha_j} = \boldsymbol{\varrho_j}\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{\alpha_j})$, obtendo-se os autopares $(\boldsymbol{\varrho_j}, \boldsymbol{\alpha_j})$, com $(\boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \cdots, \boldsymbol{q})$.

Onde:

$\boldsymbol{\varrho_j}$ são as escalares determinadas;

$\boldsymbol{\alpha_j}$ são as escalares determinadas;

d) Cálculo dos vetores $(\boldsymbol{\varphi_j^*} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\alpha_j})$, com $(\boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \cdots, \boldsymbol{q})$

Onde:

$\boldsymbol{\varphi_j^*}$ é o conjunto de vetores que mais se aproximam de *p* autovetores do problema da equação (26).

Os primeiros *p* autopares (ϱ_j, φ_j^*) são aproximações dos *p* autopares do problema $(K\Phi = M\Phi\Omega)$, sendo os vetores φ_j^* normalizados em relação à matriz de massa e ϱ_j próximos por valores superiores aos autovalores desse problema. Em outras palavras, seja um subespaço E_2 do espaço E_3 definido pelos autovetores φ_1, φ_2 e φ_3, como mostra a figura (12). Na figura abaixo, estão representados os vetores x_1 e x_2 da *base de Ritz* e que definem o plano *P* indicado, como também estão ilustradas as soluções φ_1^* e φ_2^*, respectivamente. Dessa maneira, conforme lembra Soriano (2014), a *análise de Rayleigh-Ritz* fornecerá esses autovetores em caso de se arbitrarem *vetores de Ritz* que sejam combinações lineares desses autovetores

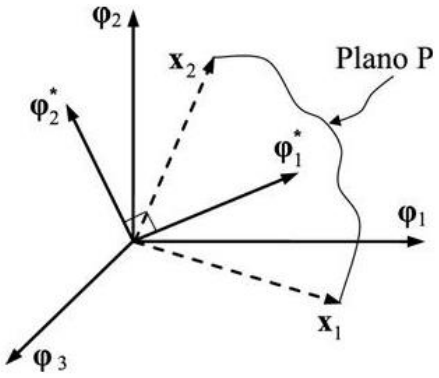


FIGURA 12 - REPRESENTAÇÃO DA BASE DE *RITZ* NO ESPAÇO.
FONTE: Soriano (2014).

O *método de Rayleigh* é muito utilizado na obtenção de estimativa para a frequência fundamental de um modelo com *N* graus de liberdade. Nele, arbitra-se uma aproximação ao primeiro modo de vibração para se estimar a correspondente frequência. Entretanto, essa aproximação ao primeiro modo de vibração acarreta em um enrijecimento do sistema estrutural, o que implica em uma aproximação à frequência fundamental de valor respectivamente superior (FRANCO, 2007). Esse método é simbolicamente expresso da seguinte forma:

$$\sqrt{\omega_j^2} = \lambda_j = \frac{\varphi_j^T K \varphi_j}{\varphi_j^T M \varphi_j} \qquad (36)$$

2.6.2.2 O MÉTODO JACOBI E O MÉTODO DA ITERAÇÃO INVERSA

O *método de Jacobi* é um dos mais antigos de resolução completa do problema de autovalor na forma reduzida com matriz real e simétrica. Esse método tem grande estabilidade numérica e converge com reduzido número de varreduras, principalmente quando há coeficientes não diagonais de valores reduzidos, com o fornecimento simultâneo de todos os autopares. Segundo Soriano (2014), por possuir tais particularidades, é indicado para integrar o *método de iteração por subespaço* em que se tem a resolução de uma sucessão de problemas de autovalores de reduzida ordem, cujos coeficientes não diagonais ficam com valores cada vez mais reduzidos com o procedimento de iteração dos vetores.

Esse método é utilizado para determinar autovalores e autovetores de matrizes simétricas. Conforme Franco (2007), matrizes simétricas de ordem *n* têm a propriedade de possuir *n* autovalores reais e *n* autovalores linearmente independentes.

O *método de Jacobi* serve para aplicar uma série de transformações similares em uma dada matriz simétrica $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A_{k+1} = U_k^{-1} A_k U_k} \tag{37}$$

Sendo $\boldsymbol{k = 1, 2, \ldots}$ com $\boldsymbol{A_1 = A}$

As matrizes $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots}$ convergem a uma matriz diagonal.

Após $\boldsymbol{m}$ passos do *Método de Jacobi*, obtém-se:

$$\boldsymbol{A_{m+1} = U_m^{-1} \ldots U_2^{-1} U_1^{-1} A U_1 U_2 \ldots U_m} \tag{38}$$

Se $\boldsymbol{A_{m+1} \approx D}$, sendo $\boldsymbol{D}$ uma matriz diagonal, os elementos da diagonal de $\boldsymbol{A_{m+1}}$ são aproximações para os autovalores de $\boldsymbol{A}$, e as colunas de $\boldsymbol{V = U_1 U_2 \ldots U_m}$ são aproximações para os autovetores de $\boldsymbol{A}$.

Uma matriz $\boldsymbol{U \in R^{n\,x\,n}}$, com elementos definidos por:

$$\begin{cases} u_{pp} = u_{qq} = \cos(\varphi), \\ u_{pq} = -u_{qp} = \text{sen}(\varphi), \\ u_{ii} = 1, i \neq p, i \neq q, \\ u_{ij} = 0, \text{caso contrário}, \end{cases}$$

Para *p* e *q* entre 1 e *n*, é chamada de matriz de rotação.

Segundo Franco (2007), essa nomenclatura vem do fato de que, ao calcular o produto $y = Ux$, para um vetor $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^{n\,x\,n}}$, o vetor resultante y é o vetor x rotacionado de um ângulo φ no plano dos eixos p e q.

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \cos(\varphi) & 0 & \dots & 0 & \text{sen}(\varphi) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\text{sen}(\varphi) & 0 & \dots & 0 & \cos(\varphi) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURA 13 - MATRIZ DE ROTAÇÃO DO MÉTODO DE JACOBI.
FONTE: Franco (2007).

Uma rotação (p, q) de *Jacobi* é a operação $\boldsymbol{U^T AU}$, com $\boldsymbol{U}$ matriz de rotação.

De modo geral, para uma matriz $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R^{n\,x\,n}}$ e $\boldsymbol{U}$ matriz de rotação com ângulo φ no plano dos eixos p e q, o produto $\boldsymbol{U^T A}$ gera uma matriz $\boldsymbol{A'}$ definida por:

$$\begin{cases} a'_{pj} = a_{pj}\cos(\varphi) - a_{qj}\text{sen}(\varphi), & 1 \le j \le n, \\ a'_{qj} = a_{pj}\text{sen}(\varphi) + a_{qj}\cos(\varphi), & 1 \le j \le n, \\ a'_{ij} = a_{ij}, \qquad i \ne p, i \ne q, & 1 \le j \le n. \end{cases}$$

E o produto $\boldsymbol{A'U}$ gera uma matriz $\boldsymbol{A''}$ definida por:

$$\begin{cases} a''_{ip} = a'_{ip}\cos(\varphi) - a'_{iq}\text{sen}(\varphi), & 1 \le i \le n, \\ a''_{iq} = a'_{ip}\text{sen}(\varphi) + a'_{iq}\cos(\varphi), & 1 \le i \le n, \\ a''_{ij} = a'_{ij}, \qquad j \ne p, j \ne q, & 1 \le i \le n. \end{cases}$$

Assim, comparando as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A''}$, apenas os elementos das linhas e colunas p e q são modificados. Logo, $\boldsymbol{A''}$ continua sendo simétrica, conforme menciona Toledo & Andreatta (2012).

A aproximação do primeiro autovalor se dá pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{\lambda_1} \cong \frac{\boldsymbol{y_{j(i)}}}{\boldsymbol{y_{j+1(i)}}} \tag{39}$$

Quanto maior o afastamento relativo entre $|\boldsymbol{\lambda_1}|$ e $|\boldsymbol{\lambda_2}|$, melhor é a convergência ao primeiro autopar. Com os autovalores múltiplos $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_m}$, a razão de

convergência é $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}}\right)$, e a convergência ocorre para um vetor no subespaço definido pelos autovetores $\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_m}$. Além disso, segundo Soriano (2014), é simples identificar que, com $|\boldsymbol{\lambda_2}| < |\boldsymbol{\lambda_3}|$ e um vetor $\boldsymbol{y_1}$ ortogonal ao primeiro autovetor, a convergência se dá para o segundo autopar.

Na resolução de um problema de autovalor e autovetor pelo *Método de Jacobi*, são feitas rotações na matriz $\boldsymbol{K}$ com o intuito de zerar os termos fora da diagonal principal. Entretanto, conforme o número de rotações se torna cada vez maior, essas rotações começam a resultar em coeficientes muito pequenos, iniciando uma tendência à divisão por zero, o que faz com que os elementos dessa matriz comecem a tender ao infinito.

> Sendo assim, o método consiste em deslocar um pouco a origem do sistema, com o intuito de fazer com que as frequências naturais fiquem mais afastadas umas das outras, reduzindo este efeito em que as rotações gerem números que tendem ao infinito. (FRANCO, 2007).

O *método de iteração por subespaço* é basicamente uma divisão da matriz do sistema mecânico estudado, que, no caso deste trabalho, é uma matriz enorme, em matrizes menores, que são resolvidas pelo *método de Jacobi*.

Por fim, são analisadas quais as possíveis interferências dos valores obtidos pela resolução dessas matrizes menores na matriz maior, no processo de cálculo. Por exemplo, os valores obtidos pela matriz $\boldsymbol{K_2^S}$ (segunda matriz pequena ou segundo subespaço) necessariamente vão interferir na matriz $\boldsymbol{K_3^S}$ (terceira matriz pequena ou terceiro subespaço), pois são os resultados já obtidos. Contudo, esses valores podem ou não interferir nos valores obtidos anteriormente, conforme lembra Soriano (2014).

Em suma, como resume Franco (2007), o *método de iteração por subespaço* divide uma grande matriz em matrizes menores e mostra como ocorre a interferência da solução de pequenos problemas de autovalores e autovetores (das pequenas matrizes ou pequenos subespaços) pelo *método de Jacobi*.

2.6.3 MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇO

O *método de iteração por subespaço* é o mais eficaz método de determinação dos $\boldsymbol{p}$ primeiros autopares do problema ($\boldsymbol{K\Phi = M\Phi\Omega}$) de matriz $\boldsymbol{K}$ positiva-definida no espaço n-dimensional. Tem as vantagens de ser estável e muito eficiente em caso de um modelo com elevado número de graus de liberdade, além de permitir o aproveitamento das características de esparsidade (matrizes com muitos elementos nulos) das matrizes de rigidez e de massa.

O método é uma combinação de iterações inversas simultâneas de vários vetores com a *análise de Rayleigh-Ritz*. Nessas iterações são utilizados *q* vetores, sendo *q* > *p*, para a obtenção de melhores aproximações aos *p* primeiros autovetores. Em cada ciclo de iteração, obtém-se um problema de autovalor generalizado no subespaço $\boldsymbol{E_q}$ definido pelos vetores de iteração, cujos autovetores são convertidos ao espaço inicial para, então, se efetuar uma nova iteração simultânea com os novos *q* vetores. Dessa maneira, de acordo com Soriano (2014), com a condição de que os vetores de partida definam um subespaço não ortogonal a nenhum dos *p* primeiros autovetores, o subespaço $\boldsymbol{E_q}$ se aproxima gradativamente em conter o subespaço desses autovetores, $\boldsymbol{E_p}$. Em outras palavras, obtém-se convergência para os *p* primeiros autopares m-ortonormalizados. E se os vetores de partida forem combinações lineares desses autovetores, a solução é obtida em uma única iteração.

2.6.4 VETORES DE RITZ E MÉTODO DA GERAÇÃO DOS VETORES DE LANCZOS

O *método da superposição modal* é um caso particular do *método de Ritz* de superposição de respostas individuais, em que os modos de vibração são os *vetores de Ritz*.

> Outros *vetores de Ritz* podem ser utilizados para a resolução das equações de movimento, embora só haja interesse em transformações de coordenadas que requeiram menos processamento do que com as transformações utilizando os modos de vibração. Entretanto, há uma relativa dificuldade na escolha dos *vetores de Ritz* de um problema de análise modal, pois esses

> vetores arbitrados podem não definir um subespaço em que esteja contida, com acurácia adequada, a resposta dinâmica. (SORIANO, 2014).

Por outro lado, existe um procedimento mais efetivo: o da geração de *vetores de Lanczos*.

> O *método de Lanczos*, utilizado para se obter os vetores de *Lanczos* é um método iterativo, através do qual reduzimos matrizes simétricas reais à forma tridiagonal. Esse método aplica-se a operadores diferenciais e integrais, mostrando uma grande eficiência para calcular alguns autovalores e autovetores de espectro através da diagonalização de pequenas matrizes que são obtidas a cada passo do *método de iteração por subespaço*. Ele tradicionalmente é utilizado como dispositivo para diagonalizar matrizes de grande porte, apresentando grande confiabilidade e estabilidade no cálculo numérico (DOMINGOS, 1993).

De maneira resumida, o método funciona a partir de uma matriz simétrica real $\boldsymbol{A}$ de ordem *n* x *n* e um vetor inicial $\{\boldsymbol{v_1}\}$.

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{v_1}\} &= \boldsymbol{\alpha_1}\{\boldsymbol{v_1}\} + \boldsymbol{\beta_1}\{\boldsymbol{v_2}\} \\
[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{v_2}\} &= \boldsymbol{\beta_1}\{\boldsymbol{v_1}\} + \boldsymbol{\alpha_2}\{\boldsymbol{v_2}\} + \boldsymbol{\beta_2}\{\boldsymbol{v_3}\} \\
[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{v_3}\} &= \boldsymbol{\beta_2}\{\boldsymbol{v_2}\} + \boldsymbol{\alpha_3}\{\boldsymbol{v_3}\} + \boldsymbol{\beta_3}\{\boldsymbol{v_4}\} \\
&\ldots \\
[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{v_n}\} &= \boldsymbol{\beta_{n-1}}\{\boldsymbol{v_{n-1}}\} + \boldsymbol{\alpha_n}\{\boldsymbol{v_n}\} + \boldsymbol{\beta_n}\{\boldsymbol{v_{n+1}}\} \qquad (40)
\end{aligned}
$$

Cada vetor $\{\boldsymbol{v_{n-1}}\}$ é obtido ortogonalizando-se $[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{v_n}\}$ com respeito à $\{\boldsymbol{v_n}\}$ e $\{\boldsymbol{v_{n-1}}\}$. Na base dos $\{\boldsymbol{v_n}\}'$s, então vê-se que:

$$
\boldsymbol{A} \rightarrow \begin{bmatrix}
\boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \ldots \\
\boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\beta_2} & \boldsymbol{0} & \ldots \\
\boldsymbol{0} & \boldsymbol{\beta_2} & \boldsymbol{\alpha_3} & \boldsymbol{\beta_3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

Já é escrita diretamente numa forma tridiagonal.

Na geração dos *vetores de Lanczos*, o procedimento é parecido com o *método de iteração inversa*, contudo, quando comparados, a característica mais marcante desse processo de minimizações sucessivas é que a melhor combinação linear nunca inclui mais do que três termos. Ou seja, todo novo passo do processo de minimização requer somente dois termos de correção, conforme lembra Domingos (1993).

Sumarizando o *método de Lanczos*, escrevendo-o em hierarquia da melhor combinação linear, começando por $\{\boldsymbol{v_1}\}$**,** temos:

$$\{\boldsymbol{v_{n+1}}\} = [\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{v_n}\} - \boldsymbol{\alpha_n}\{\boldsymbol{v_n}\} - \boldsymbol{\beta_{n-1}}\{\boldsymbol{v_{n-1}}\} \qquad \text{para } \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1};\ \{\boldsymbol{v_0}\} = \mathbf{0} \text{ e;}$$

$$\alpha_n = \frac{\{v_n\}\bullet[A]}{\|v_n\|}, com\ \boldsymbol{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots$$

$$\beta_n = \frac{\{v_n\}\bullet[A]\bullet\{v_{n+1}\}}{\|v_n\|} = \frac{\{v_{n+1}\}\bullet\{v_{n+1}\}}{\|v_n\|}, com\ \boldsymbol{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots$$

Segundo Domingos (1993), se o conjunto de vetores ortogonais $\{|\boldsymbol{v_1}\rangle, |\boldsymbol{v_2}\rangle, \ldots\}$ é então normalizado e usado como base para a matriz $\boldsymbol{A}$, obtém-se sua forma tridigagonal com os elementos diagonais $\{\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots\}$ e os elementos fora da diagonal $\{\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \ldots\}$.

O processo terminará automaticamente quando o conjunto de vetores $\{|\boldsymbol{v_1}\rangle, |\boldsymbol{v_2}\rangle, \ldots\}$ expandirem o espaço inteiro de $\boldsymbol{A}$. O término do processo de *Lanczos* significa que o menor subespaço invariante contendo o vetor inicial é dimensionalmente finito e expandido pelos vetores obtidos no processo. Vale ainda frisar que cada um desses vetores tem a dimensão da matriz $\boldsymbol{A}$.

2.7 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ELEMENTOS EM BARRAS DE TRELIÇA

Os problemas de Engenharia são analisados desenvolvendo-se modelos conceituais da realidade. Por exemplo, se um edifício for observado, pode-se dividi-lo em modelos estruturais simplificados como vigas, pilares, placas etc.

No *Método dos Elementos Finitos*, o domínio do problema é dividido em subdomínios (barras, triângulos, quadriláteros, tetraedros etc.) de dimensões pequenas, mas finitas, chamados elementos, unidos em pontos denominados *nós*. E assim, todos os deslocamentos que ocorrerem nesses elementos são aproximados pela superposição de *funções de forma*. Desse modo, partindo dos conceitos da Mecânica dos Sólidos, desenvolve-se um modelo matemático, no qual figuram as incógnitas do problema, função das variáveis independentes $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *e* $\boldsymbol{z}$ (coordenadas espaciais) e, na Dinâmica, do tempo $\boldsymbol{t}$, conforme lembra Reyoland e Silva (2013).

No caso especial da Mecânica dos Sólidos, essas incógnitas são escolhidas no chamado Processo dos Deslocamentos, sendo os deslocamentos dos infinitos pontos do contínuo que é o sólido:

$$\{\boldsymbol{v}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{w}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) \end{Bmatrix} \tag{41}$$

O modelo matemático é constituído por uma ou mais equações diferenciais, na forma geral:

$$[\boldsymbol{L}]\{\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t})\} \tag{42}$$

Onde $[\boldsymbol{L}]$ é um operador diferencial. Acrescenta-se então a estas equações as condições de contorno. “Essa é a chamada ‘**formulação forte**’ do problema”, Reyoland e Silva (2013).

No entanto, em problemas reais de Engenharia, onde a situação é bem mais complexa, soluções fechadas geralmente são impossíveis de serem obtidas. Por essa razão, procura-se substituir o contínuo por uma discretização em um número finito de incógnitas chamadas usualmente de graus de liberdade em número *N*.

Os elementos finitos podem ser uni, bi e tridimensionais, de variadas formas e padrões e com números distintos de pontos nodais em seus lados e faces, como mostra a figura abaixo:

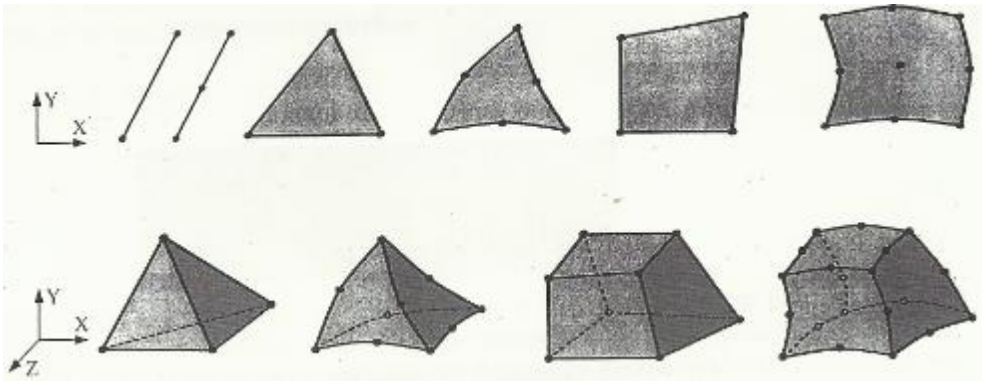


FIGURA 14 – EXEMPLOS DE FORMAS DE ELEMENTOS FINITOS.
FONTE: Soriano (2009).

As formas dos elementos são escolhidas de acordo com o domínio a ser discretizado. A figura a seguir descreve bem esse entendimento.

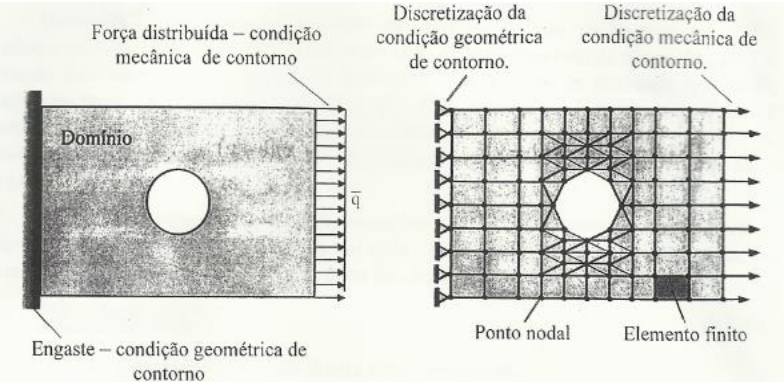


FIGURA 15 - DISCRETIZAÇÃO DE UMA CHAPA TRACIONADA.
FONTE: Soriano (2009).

A técnica usual é aproximar o vetor de incógnitas (os deslocamentos) por uma superposição de funções mais simples chamadas *funções de forma*, ou ainda, *funções de interpolação*, cada uma delas com o propósito de se obter a **melhor aproximação**, como menciona Reyolando e Silva (2013).

$$\{\tilde{\boldsymbol{v}}\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t})\} \tag{43}$$

$$[\boldsymbol{N}] = [\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})] \tag{44}$$

Onde:

$\{\tilde{\boldsymbol{v}}\}$ é a função aproximadora;

$[\boldsymbol{N}]$ é uma matriz que contém as *funções de forma*, que só dependem das variáveis independentes $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$;

$\{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t})\}$ é o vetor de coeficientes incógnitos das funções, em número igual ao dos graus de liberdade.

As *funções de forma* da matriz $[\boldsymbol{N}]$ são especialmente escolhidas de forma a assumirem valor unitário em um dado nó de um elemento, variando de zero nos demais nós de cada elemento. Assim, cada uma dessas funções só é diferente de zero no interior de um só elemento do conjunto. Com essa definição para as funções, o vetor $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t})$ tem a interpretação física de conter os deslocamentos, ainda incógnitos, dos nós de cada elemento. Essa forma de escolha das *funções de forma* é a essência do *Método dos Elementos Finitos*. Todo o restante é a aplicação de princípios físicos ou matemáticos para ajuste do valor dos deslocamentos.

A **melhor aproximação** é obtida impondo-se um princípio físico como o *Princípio dos Deslocamentos Virtuais*. Outra técnica, também usual, puramente matemática, é a *minimização do resíduo ponderado* resultante da discretização por

funções de forma. E quando se aplica qualquer uma dessas técnicas de aproximação, que resultam em formulações integrais, são as chamadas **formas fracas** dos problemas, como menciona Reyolando e Silva (2013).

Ao se adotar a aproximação dos deslocamentos, dentro de cada elemento, utilizando o *Método dos Elementos Finitos*, tem-se a seguinte expressão:

$$\{\tilde{v}\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{q}\} \tag{45}$$

É preciso lembrar que no *Método dos Elementos Finitos* a matriz $[\boldsymbol{N}]$, função das coordenadas, tem dimensões 2 x 4, no caso de treliça plana, e que ao se integrar as *funções de forma*, a solução gerada é exata às geradas pelo método dos deslocamentos.

Por fim, a definição do modelo discreto é completada com a especificação das condições essenciais e não essenciais de contorno, das propriedades dos materiais e de dados pertinentes aos elementos finitos utilizados, como espessura e ações externas. Portanto, segundo Soriano (2009) quando a análise for feita em um programa que utiliza o *Método dos Elementos Finitos,* haverá condições de calcular o sistema de equações algébricas descritivas do comportamento de cada um dos elementos.

Logo, em um modelo discreto, na forma matricial, é usual a seguinte representação do método:

$$\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{U}^{(e)} = \boldsymbol{F}^{(e)} \tag{46}$$

Onde:

$\boldsymbol{K}^{(e)}$ é a matriz de rigidez do sistema global;

$\boldsymbol{U}^{(e)}$ é o conjunto de parâmetros nodais;

$\boldsymbol{F}^{(e)}$ é o vetor de forças nodais equivalente às ações aplicadas ao elemento.

2.8 CRITÉRIOS NORMATIVOS PARA O CARREGAMENTO DE VENTO

Nas torres de telecomunicações, o vento que atua sobre a estrutura é o principal carregamento. Assim, a segurança e capacidade dessas estruturas funcionarem

eficientemente dependem, diretamente, da determinação correta dos efeitos causados pelo carregamento de vento.

A determinação das forças, devido ao vento, nas estruturas analisadas neste trabalho seguem os procedimentos descritos na norma NBR 6123 – Forças devidas ao vento em edificações.

2.8.1 FORÇA DE ARRASTO NA DIREÇÃO DO VENTO (F_a)

A força de arrasto em direção do vento ($\boldsymbol{F_a}$) é uma força estática, definida pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{F_a = C_a q A_e} \quad (47)$$

Onde:

$\boldsymbol{C_a}$ é o coeficiente de arrasto;

$\boldsymbol{q}$ é a pressão dinâmica de vento, em $\mathbf{N/m^2}$, obtida pela seguinte expressão:

$$\boldsymbol{q = 0,613\, V_k^2} \quad (48)$$

$\boldsymbol{A_e}$ é a área frontal efetiva. Ela corresponde à área de projeção ortogonal da estrutura em relação a um plano perpendicular em direção do vento, isto é, a "área de sombra" que a estrutura faz em relação ao plano perpendicular;

$\boldsymbol{V_k}$ é a velocidade característica do vento, em $\mathbf{m/s}$.

2.8.2 VELOCIDADE CARACTERÍSTICA DO VENTO ($\mathbf{V_k}$)

A velocidade característica do vento é a velocidade do vento que atua sobre certa parte da estrutura. Esta depende da altura em relação ao solo, da rugosidade do terreno, das variações do relevo, das dimensões e do grau de segurança da estrutura. É definida pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{V_k = V_0 S_1 S_2 S_3} \quad (49)$$

Onde:

$\boldsymbol{V_0}$ é a velocidade básica do vento e possui as seguintes características: é uma velocidade média de uma rajada de 3 segundos; excede em média uma vez a cada 50 anos; atua a 10 metros acima de um terreno em campo aberto e plano; e, por fim, admite-se que ela pode atuar em qualquer direção, desde que seja na horizontal. A sua determinação pode ser feita pelo mapa das isopletas de vento dado a seguir:

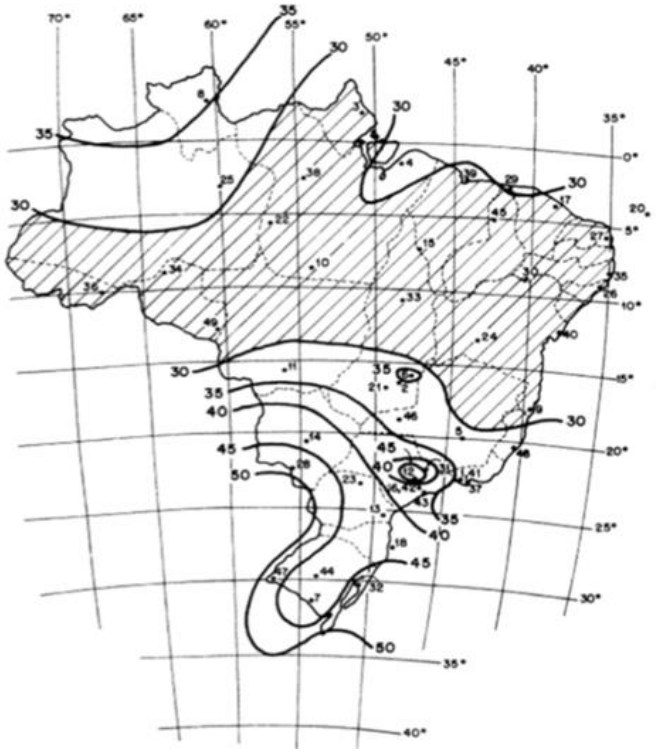


FIGURA 16 – MAPA DAS ISOPLETAS DE VENTO.
FONTE: NBR 6123 (1988).

$\boldsymbol{S_1}$ é um fator que depende da topografia da região de instalação da torre (utilizar a norma NBR 6123/88, item 5.2);

$\boldsymbol{S_2}$ é um fator que depende da rugosidade do terreno, dimensões da estrutura e altura dela sobre o terreno (utilizar a norma NBR 6123/88, item 5.3). Pode ser obtido diretamente pela tabela 2 (NBR 6123 – 1988, p. 10) ou utilizando os parâmetros da tabela 1 (NBR 6123 – 1988, pág. 9) na seguinte expressão:

$$\boldsymbol{S_2 = b * F_r * (z/10)^p} \qquad (50)$$

Onde:

$\boldsymbol{b}$ é o menor lado ou menor dimensão horizontal de uma edificação;

$\boldsymbol{F_r}$ é o fator de rajada;

$\boldsymbol{z}$ é a cota acima do terreno, em metros;

$\boldsymbol{p}$ é o expoente da lei potencial de variação.

$\boldsymbol{S_3}$ é um fator estatístico (utilizar a norma NBR 6123/88, item 5.4 – tabela 3).

2.8.3 COEFICIENTE DE ARRASTO (C_a)

Os coeficientes de arrasto para equipamentos e antenas geralmente são fornecidos nos catálogos dos produtos, obtidos através de ensaios em túnel de vento.

Para as torres reticuladas construídas por barras prismáticas de faces planas, com cantos vivos ou levemente arredondados, os valores de coeficiente de arrasto para o vento, incidindo perpendicularmente a uma das faces, são obtidos por meio dos gráficos a seguir em função do índice de área exposta **Ø**. O índice de área exposta **Ø** é igual à área frontal efetiva do reticulado, dividida pela área frontal da superfície limitada pelo contorno reticulado.

Para torres reticuladas constituídas por barras prismáticas de seção circular, os valores do coeficiente de arrasto são obtidos em função do número de Reynolds e do índice de área exposta **Ø**, conforme o item 7.7.2.2 da NBR 6123 de 1998.

2.9 FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL DO CARREGAMENTO DE VENTO

A NBR 6123/1988 menciona em seu tópico 9.1 a seguinte consideração:

“Em edificações com período fundamental T1, igual ou inferior a 1 s, a influência da resposta flutuante do vento é pequena, sendo seus efeitos já considerados na determinação do intervalo de tempo adotado para o fator S2.”

Sendo assim, para períodos fundamentais inferiores à 1 s, a análise dinâmica pode ser descartada.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Gabrielli e Neves (2008) descrevem as torres de transmissão como estruturas de baixo peso próprio e com baixa carga vertical de utilização. Dessa forma, frisam que as ações horizontais decorrentes do vento tornam-se determinantes na concepção, na análise e no dimensionamento. Em seu trabalho, eles estudaram uma torre do tipo autoportante em perfis tubulares, cuja estabilidade lateral é garantida por painéis verticais ou quase verticais de contraventamento. Realizaram várias análises (comparação de peso em aço, dos esforços internos dos elementos da torre e dos deslocamentos resultantes para os perfis cantoneira e perfis tubulares) através de uma abordagem numérica via método dos elementos finitos, visando ao entendimento do comportamento estrutural da torre. Chegaram à conclusão que as torres em perfis tubulares sofrem deslocamentos menores, recebem carga de vento reduzida por conta da variação no coeficiente de arrasto, precisam de um número menor de contraventamentos secundários e que se dimensionadas em perfis cantoneira são mais leves.

Nascimento (2002) apresenta em seu trabalho uma análise comparativa das ações estáticas e dinâmicas que agem predominantemente em torres metálicas treliçadas autoportantes para telecomunicações. O carregamento de vento para as suas análises foi obtido por meio da metodologia proposta pela NBR 6123/88, utilizando o modelo discreto e o modelo contínuo simplificado. Os resultados foram obtidos após a análise entre os carregamentos e determinantes para o dimensionamento das torres, sendo que o carregamento do modelo contínuo simplificado, por ser maior, foi o utilizado para o dimensionamento.

Mendoça *et al* (2010) modelaram uma torre de transmissão de energia elétrica submetida ao carregamento devido ao vento no ANSYS®. Então foi realizada uma análise estática dos carregamentos provocados pelo vento e com base nos resultados obtidos, foi feita uma análise modal para se ter uma ideia do comportamento dinâmico da torre. Considerando-se que as frequências mais prováveis de causar ressonância em estruturas encontram-se abaixo de 1 Hz e que foram obtidos em seus resultados frequências em torno de 1,5 Hz dos primeiros modos, concluiu-se que as torres operam dentro do limite.

Pinto, Bespalhok e Batista (2013) modelaram uma torre de telecomunicações a fim de dimensioná-la com base nos carregamentos devido ao vento e peso de antenas. A modelagem foi realizada por meio de uma análise estática utilizando o método dos elementos finitos e o dimensionamento, com base no esforço máximo obtido a partir do carregamento de vento. Após a modelagem e dimensionamento, também desenvolveram uma análise modal, onde as frequências naturais geradas da estrutura ficaram acima de 1 Hz, e optaram por não fazer uma análise dinâmica conforme orientações da NBR 6123/88.

Fleck (2014) propôs uma rotina numérica para avaliar deslocamentos, velocidades e acelerações dos pontos que compõem uma típica torre de transmissão treliçada sob excitação aleatória do vento – tormentas extratropicais (EPS), comuns nas regiões de latitude média da América do Sul e posteriormente uma comparação com os resultados provenientes de uma análise estática. A rotina numérica foi feita no *software* MATLAB, baseado no método de Newmark de integração numérica implícita e na geração das forças de excitação a partir do conhecido espectro de Davenport (para tormentas EPS), e aplicação nodal conforme a NBR 6123/88. Seus resultados mostraram que os deslocamentos obtidos pela análise dinâmica foram até três vezes maiores em comparação aos obtidos pela análise estática, e que estes resultados, possivelmente catastróficos para este tipo de estrutura, dependem fortemente das parcelas oscilatórias de baixa frequência da força aplicada à torre, que são, possivelmente, coincidentes com as baixas frequências naturais dos primeiros modos de vibração da estrutura. Em seu estudo, ele comprovou a importância de avaliar os efeitos dinâmicos, uma vez que se queira projetar estruturas esbeltas com boa qualidade estrutural, levando em conta critérios de estabilidade e deslocamentos.

Netto *et al* (2008) dimensionaram uma torre de telecomunicação, confeccionada utilizando perfis tubulares e perfis cantoneira, a fim de comparar os resultados da mesma para o carregamento de vento obtido da análise dinâmica e estática, conforme a metodologia proposta na NBR 6123/88. Seus resultados mostraram que na análise estática, que é uma simplificação da análise dinâmica, leva a resultados contrários à segurança, sugerindo-se, portanto, a utilização do método dinâmico por ser mais rigoroso e preciso. Observaram que no dimensionamento, o peso final da torre confeccionada em perfil tubular é inferior ao peso das torres em cantoneira. A torre confeccionada com perfis cantoneira apresentou frequências naturais maiores do que a torre utilizando perfis tubulares.

Guimarães (2007) apresentou em seu trabalho uma avaliação das condições de contorno na análise modal de torres de aço estaiadas, visando a comparação com os resultados das frequências naturais obtidas pela NBR 6123/88. Ele partiu determinando-se por meio da análise modal as frequências e modos naturais de vibração da estrutura, utilizando o método de elementos finitos. Posteriormente comparou os resultados obtidos por meio de uma simulação no ANSYS. Foi observado que para as estruturas analisadas, a equação da norma fornece um valor que difere dos encontrados através do programa ANSYS. A diferença foi de 48,76%, o que sugere que a equação apresentada pela NBR 6123/88 não é robusta o suficiente para atender a uma gama tão grande de estruturas, sendo então necessária a utilização de métodos numéricos para a determinação de tais frequências. Constatou ainda, que para este tipo de estrutura, a alteração das condições de contorno afeta os modos naturais de vibração da estrutura e consequentemente o valor das solicitações advindas do vento, utilizadas no dimensionamento dos elementos da torre.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo, são apresentados os dados que caracterizam a torre analisada, assim como a sua utilização para o desenvolvimento da análise estática e análise modal. Na sequência dos tópicos, apresentam-se os resultados obtidos com os dados informados.

4.1 GEOMETRIA

A estrutura referente à geometria é uma torre autoportante treliçada com 40 m de altura, dividida em 20 módulos, com seção transversal quadrada de 4,24 m de abertura de base e 1,28 m de abertura de topo.

Desse modo, os modelos utilizados neste trabalho seguem o seguinte parâmetro:

a) Modelo 1 – Torre composta inteiramente por perfis cantoneira;
b) Modelo 2 – Torre composta por perfis tubulares vazados nas montantes e perfis cantoneira nos demais elementos;
c) Modelo 3 – Torre composta por perfis tubulares preenchidos com concreto nas montantes e perfis cantoneira nos demais elementos.

GRUPO	MODELO 1 - A	MODELO 1 - B
MONTANTES	4 X 3/8	5 X 5/8
DIAGONAIS PRINCIPAIS E ANEIS SUPERIORES	2.1/2 X 3/8	4 X 3/8
DIAGONAIS SECUNDÁRIAS E ANÉIS MÉDIOS	2.1/2 X 5/16	2.1/2 X 3/8
GRUPO	**MODELO 2 - A**	**MODELO 2 - B**
MONTANTES	TUBO 1	TUBO 2
DIAGONAIS PRINCIPAIS E ANEIS SUPERIORES	2.1/2 X 3/8	4 X 3/8
DIAGONAIS SECUNDÁRIAS E ANÉIS MÉDIOS	2.1/2 X 5/16	2.1/2 X 3/8
GRUPO	**MODELO 3 - A**	**MODELO 3 - B**
MONTANTES	TUBO 1 + CONCRETO	TUBO 2 + CONCRETO
DIAGONAIS PRINCIPAIS E ANEIS SUPERIORES	2.1/2 X 3/8	4 X 3/8
DIAGONAIS SECUNDÁRIAS E ANÉIS MÉDIOS	2.1/2 X 5/16	2.1/2 X 3/8
Tubo 1: Diâmetro externo = 88,9 mm e diâmetro interno = 81,8 mm.		
Tubo 2: Diâmetro externo = 141,3 mm e diâmetro interno = 132,6 mm.		

TABELA 1 – NOMENCLATURA DOS ELEMENTOS UTILIZADOS NA ELABORAÇÃO DOS MODELOS ANALISADOS. OBS: DIMENSÕES DAS CANTONEIRAS EM ANEXO A ESTE TRABALHO.
FONTE: O autor (2015).

A diferença entre os modelos A e B é a robustez dos perfis componentes, ou seja, os elementos dos modelos B possuem uma área de aço maior, uma inércia maior, um peso maior e etc, em relação aos perfis componentes dos modelos A.

A figura a seguir tem como finalidade definir quais são os elementos descritos na coluna **GRUPO** da tabela 1:

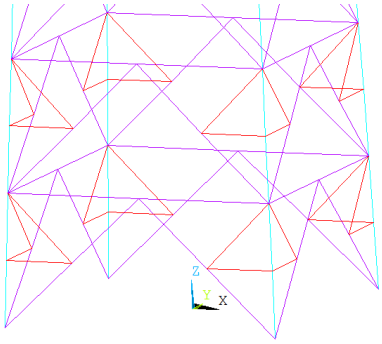


FIGURA 17 – DISCRETIZAÇÃO DO GRUPO DE ELEMENTOS QUE CONSTITUEM OS MODELOS DA TORRE ANALISADA.
FONTE: O autor (2015).

Em azul: as montantes;

Em roxo: as diagonais primárias e os anéis superiores;

Em vermelho: as diagonais secundárias e anéis médios.

As figuras a seguir tem como finalidade representar o modelo da torre estudada, em duas e três dimensões:

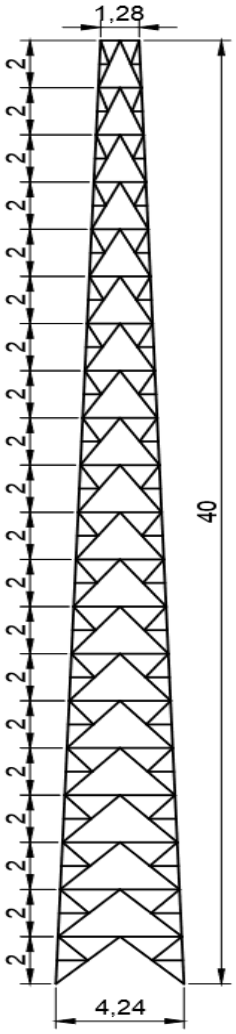


FIGURA 18 – REPRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA EM 2D (COTAS EM METROS).

FONTE: O autor (2015).

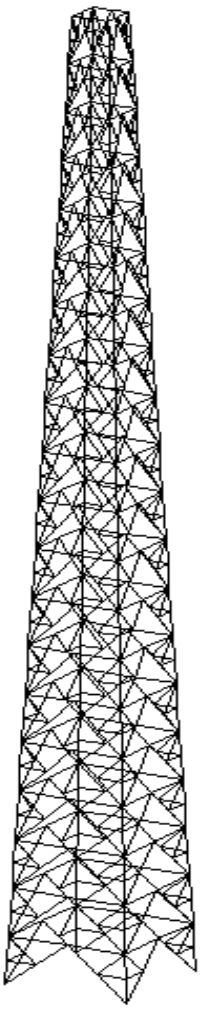


FIGURA 19 – REPRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA EM 3D.

FONTE: O autor (2015).

4.2 DETERMINAÇÃO DOS CARREGAMENTOS DE VENTO

As cargas determinadas, devido à ação do vento, são determinadas utilizando os parâmetros da NBR 6123/98, descritas no capítulo 2.9.

A partir do mapa das isopletas de vento, determinou-se a velocidade básica de 42 m/s para a região estudada (Curitiba–PR). O cálculo da velocidade característica engloba os parâmetros $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$ e $\mathbf{S_3}$ e foi calculada para cada módulo da estrutura. Adotou-se o valor de 1,0 para o fator topográfico ($\mathbf{S_1}$); o parâmetro $\mathbf{S_2}$ foi classificado como ***categoria III*** e ***classe C***, e como depende da variação da velocidade do vento com a altura e das dimensões da estrutura, seus valores também variam para cada módulo; o fator estatístico ($\mathbf{S_3}$) foi classificado como ***grupo 1***, com valor de 1,10.

Determinado $\boldsymbol{V_k}$ referente a cada módulo, foram calculados os valores dos carregamentos. O valor do coeficiente de arrasto é estabelecido em função do índice de área exposta. Por fim, calculou-se o valor da força de arrasto incidente em cada módulo da estrutura analisada.

Resumidamente, as cargas devido ao vento para cada módulo são:

MÓDULO	CARGA (N)		MÓDULO	CARGA (N)	
	0°	45°		0°	45°
1	2741,382	3180,003	11	2535,326	2940,978
2	2643,992	3067,031	12	2395,628	2778,929
3	2914,338	3380,632	13	2255,93	2616,879
4	2802,886	3251,347	14	2116,233	2454,83
5	2691,433	3122,062	15	1976,535	2292,78
6	2809,203	3258,676	16	1945,395	2256,659
7	2687,848	3117,904	17	1797,441	2085,032
8	2729,406	3166,11	18	1649,487	1913,405
9	2600,347	3016,403	19	1501,533	1741,779
10	2471,289	2866,695	20	1353,579	1570,152

TABELA 2 – CARREGAMENTO DEVIDO AO VENTO PARA CADA MÓDULO.
FONTE: O autor (2015).

Os valores de carregamento devido ao vento partem da hipótese de vento incidindo na perpendicular para seções quadradas equiláteras, conforme define a NBR 6123/98 na figura 9 da página 29.

Para cada modelo analisado, verificou-se os deslocamentos obtidos com o vento incidindo a 0 grau e 45 graus de inclinação.

4.4 MODELAGEM NO ANSYS®

No trabalho de Vijay e Chitawadagi (2014), é afirmado que na escolha do elemento finito e tamanho da malha é diretamente proporcional ao tempo computacional da análise. O elemento *BEAM188* foi o elemento finito escolhido nas análises de seu trabalho pela quantidade de graus de liberdade em cada nó e pela facilidade na representação da seção transversal do elemento.

O elemento BEAM188 é a princípio um elemento destinado à modelagem de vigas, porém, considerando que as barras da torre recebem carregamentos apenas em seus nós e que estas são esbeltas, este elemento acaba sendo solicitado somente axialmente, tal como em uma barra de treliça.

O elemento Beam188 é apropriado para se analisar desde estruturas esbeltas até estruturas robustas. Esse elemento é baseado na teoria de barras de Timoshenko. Ele possui 6 graus de liberdade em cada nó e referem-se aos deslocamentos nos eixos X, Y e Z e rotações em relação aos eixos X, Y e Z.

Os modelos de torre para estudo foram implementados no ANSYS® versão 10 por meio da linguagem computacional que o programa utiliza, conhecida como APDL (*ANSYS Parametric Design Language*).

No modelo numérico desenvolvido no ANSYS®, a torre conta com 960 elementos. Os elementos de cantoneira, assim como os elementos de tubo vazado e os tubos preenchidos com concreto, foram modelados utilizado o elemento ***Beam188***, com base no estudo realizado no trabalho de Vijay e Chitawadagi (2014).

As propriedades do tubo preenchido com concreto, densidade e módulo de elasticidade, foram obtidas a partir de médias ponderadas dos elementos: tubo metálico e concreto.

Para a modelagem da torre com tubos preenchidos com concreto, foi utilizado um concreto de $f_{ck} = 25\ MPa$, sendo utilizado o módulo de elasticidade na secante, com $E = 23{,}2\ GPa$.

Já o coeficiente de poison, foi estimado a partir de iterações, partindo de 0,21 até 0,29, utilizando incrementos de 0,01. Verificou-se que a cada iteração no coeficiente de poison, a frequência natural do primeiro modo teve variação de aproximadamente 0,35%. Os resultados aqui informados, foram calculados com base num coeficiente de poison com valor igual a 0,24.

A figura a seguir, obtida na biblioteca do ANSYS, representa o elemento finito referente ao BEAM188:

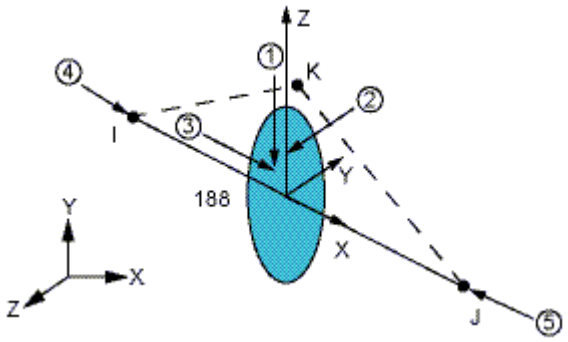


FIGURA 20 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO ELEMENTO *BEAM188*. FONTE: Manual do Ansys®.

Neste trabalho, para os elementos de cantoneira, o elemento *Beam188* foi modelado utilizando a seção L, a qual necessita de entrada dos dados nas variáveis W1 = W2 (neste caso, pois as cantoneiras são de abas iguais) que são as alturas e nas variáveis t1 = t2, as espessuras. Para os elementos de tubo vazado, o elemento *Beam188* foi modelado utilizando a seção ***CTUBE***, que necessita a entrada de dados na variável Ro, que é o raio externo, e Ri, que é o raio interno. E por fim, para o elemento de tubo preenchido com concreto, o elemento *Beam188* foi modelado utilizando a seção ***CSOLID***, que necessita a entrada de dados na variável R, que é o raio externo.

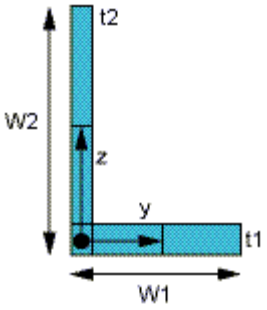


FIGURA 21 – SEÇÃO *L* DO ELEMENTO *BEAM188*. FONTE: Manual do Ansys®.

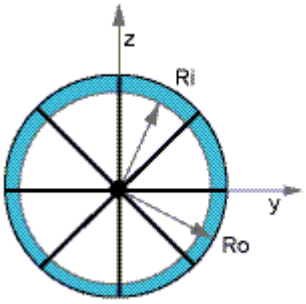


FIGURA 22 – SEÇÃO *CTUBE* DO ELEMENTO *BEAM188*. FONTE: Manual do Ansys®.

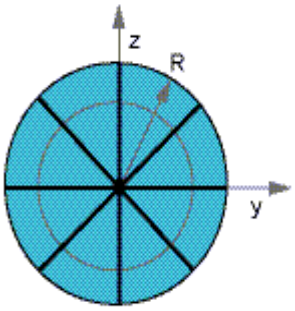


FIGURA 23 - SEÇÃO *CTUBE* DO ELEMENTO *BEAM188*. FONTE: Manual do Ansys®.

4.5 PRÉ-DIMENSIONAMENTO DAS CANTONEIRAS E TUBOS

Foram utilizadas cantoneiras de seção mínima para a verificação de tração e compressão.

O perfil tubo vazado de seção mínima foi escolhido com base nos valores dos perfis cantoneira também de seção mínima. Em outras palavras, o tubo vazado utilizado nos modelos 2 e 3 foi escolhido com base nos valores do perfil cantoneira utilizado nas montantes do modelo 1 – A.

As figuras a seguir representam o esquema de carregamento imposto na modelagem computacional das torres:

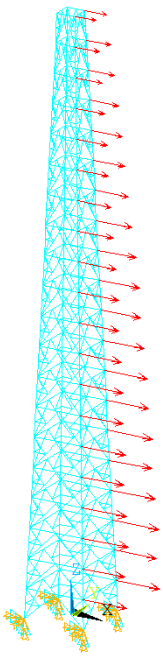


FIGURA 164 – MODELO GENÉRICO DE TORRE COM CARREGAMENTO DEVIDO AO VENTO INCIDINDO COM 0 GRAU DE INCLINAÇÃO.
FONTE: O autor (2015).

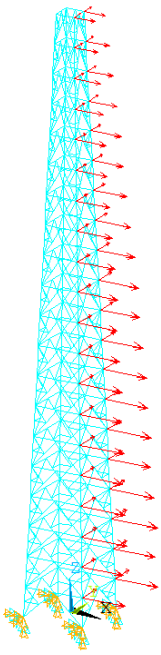


FIGURA 175 – MODELO GENÉRICO DE TORRE COM CARREGAMENTO DEVIDO AO VENTO INCIDINDO COM 45 GRAUS DE INCLINAÇÃO.
FONTE: O autor (2015).

Os esforços normais utilizados nessa verificação são referentes ao carregamento devido ao vento incidindo com inclinação de 45 graus, pois estes resultaram em esforços solicitantes maiores quando comparados ao carregamento incidindo a 0 grau. Foi utilizado o valor máximo da solicitação, supondo que este poderá atuar como esforço de compressão ou de tração.

Na tabela a seguir, os valores de resistência (**NTRD** e **NCRD**) estão em seus mínimos e o valor de solicitação (**SOLICITAÇÃO**) em seu máximo (valores de solicitação obtidos pela análise estática no ANSYS®). Procedeu-se dessa maneira a fim de facilitar o processo de pré-dimensionamento, assim como seguir um conceito conservador.

GRUPO	CANTONEIRA	NSD (KN)	VERIFICAÇÃO		
			TRAÇÃO	COMPRESSÃO	SITUAÇÃO
			NTRD (KN)	NCRD (KN)	
MONT.	4 X 3/8	163,098	247,66	265,44	OK
DIAGONAIS PRINCIPAIS E ANEIS SUPERIORES	3 X 3/8	36,27	193,93	157,47	OK
DIAGONAIS SECUNDÁRIAS E ANÉIS MÉDIOS	2.1/2 X 5/16	30,81	161,74	133,64	OK

TABELA 3 – TABELA DE VERIFICAÇÃO PARA O PRÉ-DIMENSIONAMENTO DOS ELEMENTOS DA TORRE.
FONTE: O autor (2015).

4.6 ANÁLISE ESTÁTICA

4.6.1 MASSA DOS MODELOS

Como foram utilizadas diferentes cantoneiras para cada modelo, assim como diferentes tubos, a massa dos modelos variou. A tabela a seguir representa os valores obtidos referentes ao comprimento total dos elementos, separados por grupos.

GRUPO	MODELO 1 - A			MODELO 1 - B		
	COMP. (m)	MASSA (KG/m)	MASSA (KG)	COMP. (m)	MASSA (KG/m)	MASSA (KG)
MONTANTES	216,62	14,57	3156,15	216,62	29,80	6455,28
DIAGONAIS PRINCIPAIS E ANEIS SUPERIORES	561,66	8,78	4931,41	561,66	14,57	8183,44
DIAGONAIS SECUNDÁRIAS E ANÉIS MÉDIOS	296,80	7,44	2208,17	296,80	8,78	2605,88
TOTAL	-		**10295,73**	-		**17244,60**
GRUPO	MODELO 2 - A			MODELO 2 - B		
	COMP. (m)	MASSA (KG/m)	MASSA (KG)	COMP. (m)	MASSA (KG/m)	MASSA (KG)
MONTANTES	216,62	14,40	3119,33	216,62	28,60	6195,33
DIAGONAIS PRINCIPAIS E ANEIS SUPERIORES	561,66	8,78	4931,41	561,66	14,57	8183,44
DIAGONAIS SECUNDÁRIAS E ANÉIS MÉDIOS	296,80	7,44	2208,17	296,80	8,78	2605,88
TOTAL	-		**10258,91**	-		**16984,65**
GRUPO	MODELO 3 - A			MODELO 3 - B		
	COMP. (m)	MASSA (KG/m)	MASSA (KG)	COMP. (m)	MASSA (KG/m)	MASSA (KG)
MONTANTES	216,62	14,40	3119,33	216,62	28,60	6195,33
DIAGONAIS PRINCIPAIS E ANEIS SUPERIORES	561,66	8,78	4931,41	561,66	14,57	8183,44
DIAGONAIS SECUNDÁRIAS E ANÉIS MÉDIOS	296,80	7,44	2208,17	296,80	8,78	2605,88
CONCRETO	ÁREA (m^2)	MASSA (KG/m^3)	MASSA (KG)	ÁREA (m^2)	MASSA (KG/m^3)	MASSA (KG)
	1,138403	2400	2732,167	2,991414	2400	7179,393
TOTAL	-		**12991,07**	-		**24164,05**

TABELA 4 – TABELA RESUMO DA MASSA DE CADA MODELO DE TORRE CONFECCIONADA COM TUBOS VAZADOS NAS MONTANTES E PERFIS CANTONEIRA NOS DEMAIS ELEMENTOS. FONTE: O autor (2015).

4.6.2 DESLOCAMENTOS MÁXIMOS

Para cada modelo de torre se obteve um deslocamento máximo. Isto se deve ao fato de que a mudança dos elementos enrijece a torre, deixando-a com deslocamentos diferentes de modelo para modelo.

Foram obtidos deslocamentos para o carregamento devido ao vento incidindo a 0 grau e 45 graus de inclinação.

Os deslocamentos dos módulos, nas direções X, Y e Z, para os dois casos de carregamentos incidentes na torre, estão no APÊNDICE D deste trabalho. Entretanto, as tabelas a seguir servem como resumo dos deslocamentos máximos obtidos, nas três direções (X, Y e Z), para todos os modelos analisados.

DIREÇÃO	DESLOCAMENTO MÁXIMO (m)			
	MODELO 1-A		MODELO 1-B	
	0 GRAU	45 GRAUS	0 GRAU	45 GRAUS
X	0,0614	0,0533	0,0289	0,0251
Y	-0,0003	0,0391	-0,0002	0,0145
Z	-0,0037	-0,0046	-0,0025	-0,0029
DIREÇÃO	MODELO 2-A		MODELO 2-B	
	0 GRAU	45 GRAUS	0 GRAU	45 GRAUS
X	0,1183	0,1028	0,0553	0,0480
Y	-0,0005	0,0595	-0,0002	0,0278
Z	-0,0059	-0,0077	-0,0034	-0,0042
DIREÇÃO	MODELO 3-A		MODELO 3-B	
	0 GRAU	45 GRAUS	0 GRAU	45 GRAUS
X	0,0725	0,0630	0,0296	0,0257
Y	0,0004	0,0365	-0,0002	0,0149
Z	-0,0051	-0,0061	-0,0033	-0,0037

TABELA 5 – TABELA DE DESLOCAMENTOS MÁXIMOS NAS DIREÇÕES X, Y E Z.
FONTE: O autor (2015).

4.7 ANÁLISE MODAL

A análise modal pode ser considerada o passo inicial para o estudo da resposta dinâmica em estruturas. Tem como objetivo a determinação das frequências naturais e dos seus modos de vibração. Conforme a NBR 6123/88 sugere que a análise de um único modo de vibração, o seu primeiro modo, é usualmente o suficiente para garantir uma precisão adequada dos resultados para esse tipo de estrutura.

Neste trabalho, a análise modal realizada para a obtenção das frequências fundamentais e respectivos modos de vibração serviu apenas para efeitos de comparação entre os modelos estudados, portanto, estes dados não foram utilizados durante o pré-dimensionamento.

Em projetos complexos, onde o dimensionamento dos sistemas estruturais são solicitados constantemente por carregamentos oscilatórios, como por exemplo um chassi de carro, plataformas que sustentam rotores e etc, há a necessidade de mais dados referentes a partir da análise modal, como várias frequências naturas e respectivos deslocamentos máximos de cada modo.

Na tabela 6, dada a seguir, estão representados os resultados obtidos a partir da simulação executada no ANSYS®.

MODO	MODELO 1-A		MODELO 1-B		DIFERENÇA	
	PESO (KG)	10295,73	PESO (KG)	17244,60	40,30%	
	FREQ. (Hz)	PERIODO (s)	FREQ. (Hz)	PERIODO (s)	FREQ.	PERIODO
1	1,4059	0,711	1,4310	0,699	1,75%	-1,79%
2	1,4059	0,711	1,4310	0,699	1,75%	-1,79%
3	6,3043	0,159	6,4478	0,155	2,23%	-2,28%
MODO	MODELO 2-A		MODELO 2-B		DIFERENÇA	
	PESO (KG)	10258,91	PESO (KG)	16984,65	39,60%	
	FREQ. (Hz)	PERIODO (s)	FREQ. (Hz)	PERIODO (s)	FREQ.	PERIODO
1	1,410	0,709	1,470	0,680	4,11%	-4,28%
2	1,410	0,709	1,470	0,680	4,11%	-4,28%
3	6,338	0,158	6,666	0,150	4,92%	-5,18%
MODO	MODELO 3-A		MODELO 3-B		DIFERENÇA	
	PESO (KG)	12991,07	PESO (KG)	24164,05	46,24%	
	FREQ. (Hz)	PERIODO (s)	FREQ. (Hz)	PERIODO (s)	FREQ.	PERIODO
1	1,0999	0,909	1,114	0,898	1,25%	-1,26%
2	1,0999	0,909	1,114	0,898	1,25%	-1,26%
3	4,9363	0,203	5,045	0,198	2,16%	-2,21%

TABELA 6 – COMPARAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS E PERÍODOS DOS MODELOS ANALISADOS.
FONTE: O autor (2015).

A seguir estão as figuras dos primeiros 3 modos de vibração do modelo 1 – A:

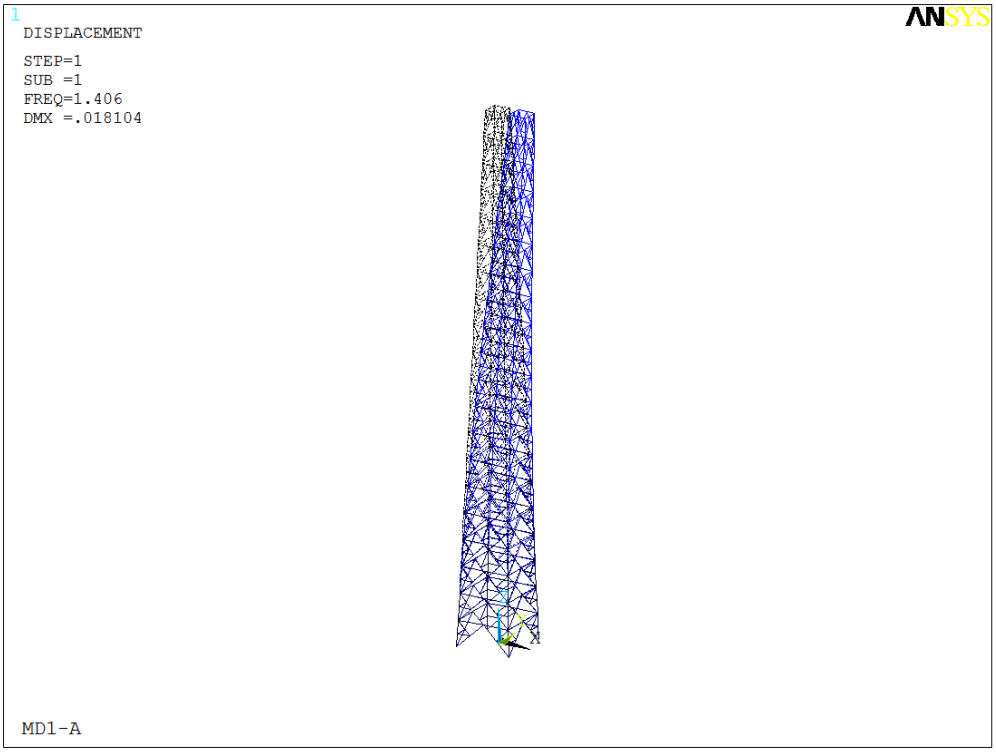


FIGURA 26 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO REFERENTE AO MODELO 1 - A. OS VALORES DE FREQUÊNCIA CONTIDOS NA FIGURA ESTÃO EM HERTZ. FONTE: O autor (2015).

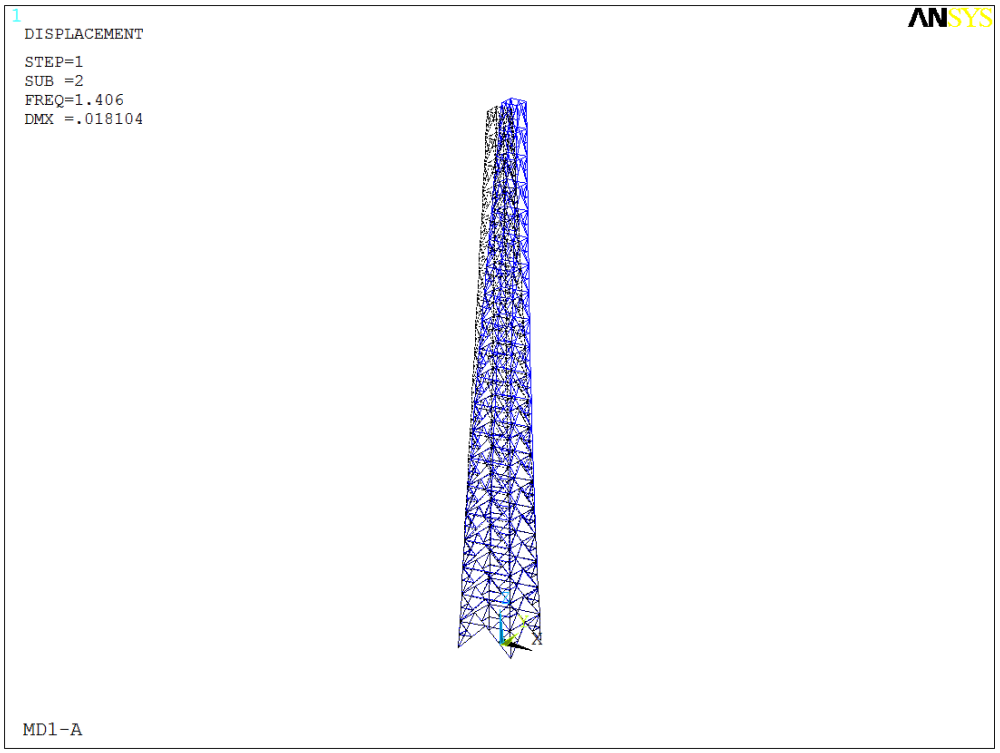


FIGURA 27 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO REFERENTE AO MODELO 1 - A. OS VALORES DE FREQUÊNCIA CONTIDOS NA FIGURA ESTÃO EM HERTS. FONTE: O autor (2015).

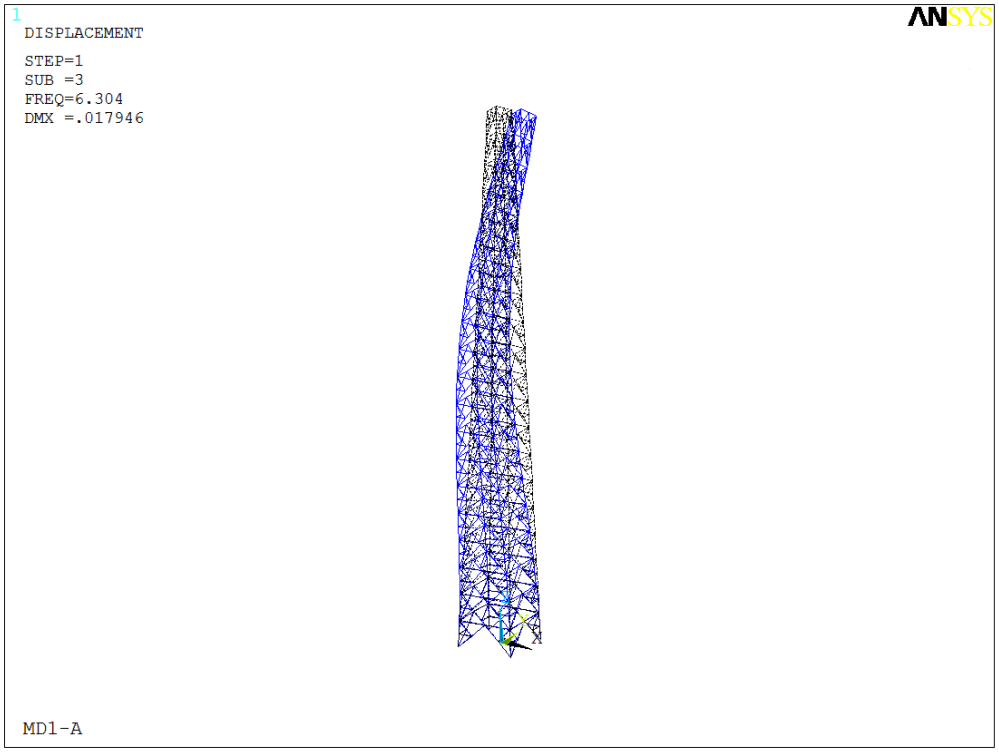


FIGURA 28 – TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO REFERENTE AO MODELO 1 - A. OS VALORES DE FREQUÊNCIA CONTIDOS NA FIGURA ESTÃO EM HERTZ. FONTE: O autor (2015).

5 CONCLUSÕES

Foi observado que conforme os modelos se tornaram mais robustos, ou seja, com peças mais pesadas e de características geométricas cada vez maiores, os deslocamentos resultantes do carregamento devido ao vento e ao peso próprio da estrutura diminuíram.

Verificou-se que, mesmo com o acréscimo das características geométricas dos elementos, os modelos confeccionados com tubos vazados sem preenchimento de concreto são mais leves em relação aos mesmos confeccionados utilizando-se apenas perfis cantoneira.

De modo geral, o acréscimo da robustez dos elementos dos modelos promoveu tanto um aumento na inércia dos elementos quanto na massa dos modelos, mas este aumento não foi proporcional. Isto ficou evidente nos modelos confeccionados com tubos preenchidos com concreto, onde a massa aumentou bruscamente e a inércia não aumentou a mesma proporção. O aumento da inércia em maior proporção que o aumento da massa promove um aumento na rigidez do sistema estrutural, o que por consequência resulta em uma frequência natural maior. Se o aumento da inércia for maior do que o aumento da massa, resultará em uma frequência natural maior; Se o aumento da inércia for menor do que o aumento da massa, resultará em uma frequência natural menor.

A resolução dos problemas simulados no software ANSYS® levaram muito pouco tempo de processamento, tanto para a análise estática quanto para a análise modal. Isto se deve-se a complexidade da malha escolhida para as análises ser relativamente simples, além da eficiência do software na resolução de problemas de determinação de frequências naturais, modos de vibração e determinação de tensões e deslocamentos nodais.

Observou-se que as frequências naturais dos primeiros modos de todos os modelos resultaram em valores maiores do que 1 Hz. Assim, essas torres não necessitam passar por uma análise dinâmica conforme informa a NBR 6123/88. Contudo, os modelos de torre confeccionadas com tubos preenchidos com concreto apresentaram-se com frequências muito próximas de 1 Hz, o que pode ser um indício da necessidade de uma análise dinâmica.

Quanto aos modelos comparados neste trabalho, ficou claro que a confecção de torres utilizando perfis cantoneira é a melhor escolha quanto a uma análise modal simples.

Os modelos confeccionados utilizando perfis cantoneira apresentaram-se como a melhor opção na construção de torres de transmissão, pois neles foram obtidos os menores deslocamentos, assim como uma pequena diferença nas frequências naturais com relação aos modelos confeccionados utilizando tubos sem o preenchimento de concreto. Em contrapartida, os modelos confeccionados utilizando tubos preenchidos com concreto apresentaram as frequências naturais mais baixas, e por isso podem apresentar um risco maior de ressonância para com o carregamento de vento.

6 REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6123**: forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro,1988.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto e execução de estruturas de aço em edifícios, 2008.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995

CORREIA, A. A. **Dinâmica – vibrações de sistemas com 1 grau de liberdade**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Toledo, 2007.

CLOUGH, R. W; e PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: Graw Hill, 1975.

DOMINGOS, A. **O método de Lanczos e sua comparação com a Teoria de Perturbações em mecânica quântica**. Dissertação (Mestrado em Física), Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, 1993.

FRANCO, N. M. B. **Cálculo Numérico**. Prentice Hall Brasil, 2006.

FLECK, E. J. **Geração do campo estocástico de velocidades do vento e aplicação a uma torre de transmissão**. Monografia de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.

GABRIELLI, T. V. **Análise do comportamento estrutural de torres de transmissão tubulares via simulação computacional**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal de Outro Preto (UFOP), Ouro Preto, 2004.

GABRIELLI, T. V. e NEVES, F. A. **Simulação numérica do comportamento estrutural de torres de linhas de transmissão em perfis tubulares**. Universidade Federal de Outro Preto (UFOP), Ouro Preto, 2008.

GUIMARÃES, E. H. **Influência das condições de contorno na análise modal de torres estaiadas pelo método de elementos finitos**. 17º Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

HARITOS, N.; STEVENS, L. K. The assessment of response of tall free-standing towers to along-wind loading. **Journal of Wind Engineering and Industry Aerodynamics**.1983.

MENDES, P. **Dinâmica das estruturas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa, 2012.

MENDOÇA, A. C. et al. **Análise estrutural de uma torre de transmissão de energia elétrica submetida a carregamento eólico**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2010.

NASCIMENTO, F. O. F. A. **Análise de Estruturas Metálicas de Torres Treliçadas Autoportantes para Telecomunicações**. Dissertação (Mestrado em Telecomunicações), Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, 2002.

NETTO *et* al. **Análise comparativa de torres de telecomunicação em aço utilizando perfis tubulares em cantoneira**. XXXIII JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, 2008.

PICCOLI, H. C. **Mecânica das Vibrações**. Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande, 2010.

PINTO, E. F.; BESPALHOK, L. C.; BATISTA, R. C. **Análise, modelagem e dimensionamento de torres autoportantes de telecomunicações**. Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, 2013.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 4ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

REYOLANDO M. L. R. F. B. e SILVA M. A. **Introdução à dinâmica das estruturas para a engenharia civil**. Edgard Blücher, 2013.

SOEIRO, N. S. **Curso de fundamentos de vibrações e balanceamento de rotores**. Castanhal: Universidade Federal do Pará (UFPA), 2008.

SORIANO, H. L. **Elementos finitos – formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

SORIANO, H. L. **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. Elsevier, 2014.

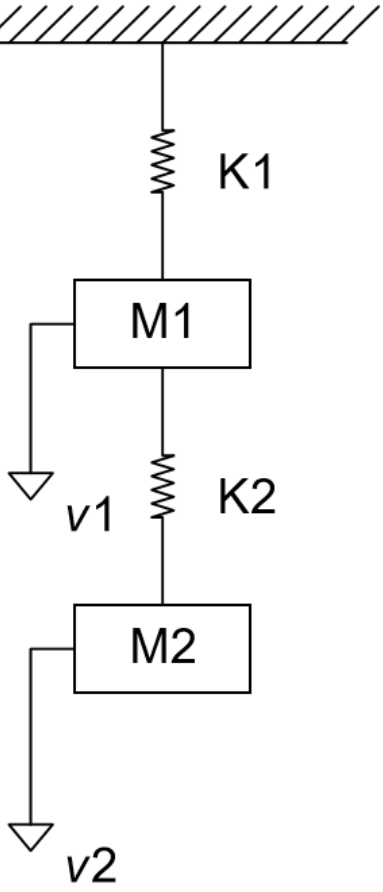
STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P. **Álgebra linear.** 2 ed., São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1987.

TOLEDO, F. e ANDRETTA, M. **Determinação numérica de autovalores e autovetores: Método de Jacobi**. Universidade de São Carlos (USP), 2012.

VIJAY L. B. V e CHITAWADAGI, M. K. **Finite Element Analysis of Concrete Filled Steel Tube (CFT`s) Subjected to Flexure**. Karnataka State, India, 2014.

APÊNDICE A – EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ANÁLISE MODAL E DE UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE JACOBI

1 Exemplo de um sistema massa-mola com dois graus de liberdade:



Determine:

a. As frequências naturais (os autovalores);
b. Os modos de vibração (os autovetores);

Solução:

Equações de movimento:

$$\boldsymbol{m_1\ddot{v}_1 + (k_1k_2)v_1 - k_2v_2 = 0}$$

$$\boldsymbol{m_2\ddot{v}_2 - k_2v_1 + k_2v_2 = 0}$$

Que na forma matricial são:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{m_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{m_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{k_1 + k_1} & \boldsymbol{-k_2} \\ \boldsymbol{-k_2} & \boldsymbol{k_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \; ou \; \boldsymbol{M\ddot{V} + KV = 0}$$

Considerando que as massa dos elementos são iguais, assim como a rigidez, têm-se:

$$\boldsymbol{m_1 = m_2 = m} \text{ e } \boldsymbol{k_1 = k_2 = k}$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{m} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{v}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{v}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{2k} & \boldsymbol{-k} \\ \boldsymbol{-k} & \boldsymbol{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Movimento harmônico:

Assumindo que as massas irão oscilar com a mesma frequência, $\boldsymbol{\omega}$ se em apresentará diferentes amplitudes: $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{a_2}$.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\cos(\omega t - \theta)}$$

Diferenciando:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{v}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{v}}_2 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{-\omega^2} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\cos(\omega t - \theta)}$$

E com isso:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{-m\omega^2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-m\omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\cos(\omega t - \theta)} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{2k} & \boldsymbol{-k} \\ \boldsymbol{-k} & \boldsymbol{k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\cos(\omega t - \theta)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix}$$

E dividindo por $\boldsymbol{\cos(\omega t - \theta)}$, temos:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{-m\omega^2 + 2k} & \boldsymbol{-k} \\ \boldsymbol{-k} & \boldsymbol{-m\omega^2 + k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{Bmatrix}$$

E resolvendo para $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{a_2}$, temos:

$$\boldsymbol{det} \begin{bmatrix} \boldsymbol{-m\omega^2 + k} & \boldsymbol{-k} \\ \boldsymbol{-k} & \boldsymbol{-m\omega^2 + k} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{m^{2\omega^4} - 3km\omega^2 + k^2 = 0}$$

E esta é a chamada equação característica do sistema.

Frequências naturais:

As raízes da equação característica são as frequências naturais deste sistema, que são também os autovalores deste problema.

Aplicando a fórmula quadrática à equação característica, chega-se em:

$$\boldsymbol{\omega^2 = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\frac{k}{m}} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\omega_1^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\frac{k}{m} \rightarrow \omega_1 = 0,618\sqrt{\frac{k}{m}}} \text{ e } \boldsymbol{\omega_2^2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\frac{k}{m} \rightarrow \omega_1 = 1,618\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

E tendo dois graus de liberdade, tem-se então duas frequências naturais.

Modos de vibração:

Com o primeiro modo:

$$\boldsymbol{(-m\omega^2 + 2k)a_1 = ka_2}$$

Pode-se obter a amplitude:

$$\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{-m\omega^2 + 2k}}$$

E resolvendo com os valores de $\boldsymbol{\omega_1}$ e $\boldsymbol{\omega_2}$ chega-se nos modos naturais:

$$\boldsymbol{\omega_1 = 0,618\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = 0,618}$$

$$\boldsymbol{\omega_2 = 1,618\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = 1,618}$$

Cada modo de vibração está associado com a sua respectiva frequência natural. Isto descreve uma situação onde o sistema todo está oscilando em uma frequência. Os modos de vibração podem ser vistos como condições iniciais que se desacoplam em subsistemas independes.

2 Exemplo de análise modal utilizando o método dos elementos finitos e comparação de resultados com o mesmo problema simulado no ansys:

Para a treliça plana da figura (31), determinar as frequências e os modos de vibração livre não amortecida. Na figura (31) é mostrada a treliça, sendo p_1 e p_2 os graus de liberdade, enquanto a numeração das barras é indicada com os números circunscritos.

Dados:

- Para todas as barras, seção quadrada 50 x 50 mm;

- Módulo de elasticidade E = 3 GPa;
- Massa específica ρ = 3000 kg/m³ (um material hipotético)

As matrizes de rigidez e de massa são simétricas e singulares, para os elementos de barra de treliça plana no sistema global de referência.

$$[k] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} cc & cs & -cc & -cs \\ 0 & ss & -sc & -ss \\ 0 & 0 & cc & cs \\ 0 & 0 & 0 & ss \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [m] = \frac{\rho Al}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

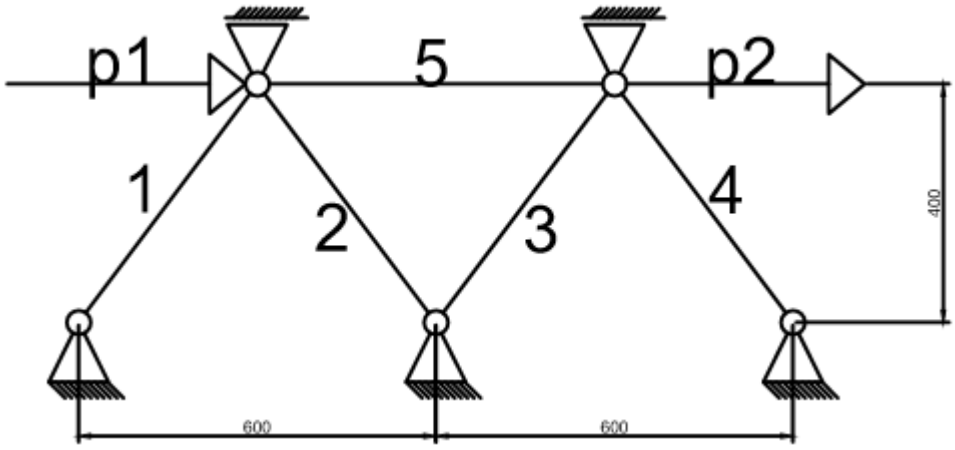


FIGURA 29 – TRELIÇA PLANA COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE.
FONTE: Reyolando e Silva (2013).

Onde:

a) c e s são, respectivamente, o cosseno e o seno do ângulo que a barra forma com o sistema global de referência utilizado;
b) A é a área da seção transversal;
c) L é o comprimento da barra.

a) Matrizes de rigidez e de massa das barras

i. Barras 1 e 3: A = 0,0025 m², L = 5 m, c = 3/5 e s = 4/5

$$[k] = 60000\begin{bmatrix} 9 & 12 & -9 & -12 \\ 0 & 16 & -12 & -16 \\ 0 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \text{N/m} \quad \text{e} \quad [m] = 6{,}25\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{kg}$$

ii. Barras 2 e 4: A = 0,0025 m², L = 5 m, c = -3/5, s = 4/5

$$[k] = 60000\begin{bmatrix} 9 & -12 & -9 & 12 \\ 0 & 16 & 12 & -16 \\ 0 & 0 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \text{N/m} \qquad \text{e} \qquad [m] = 6{,}25\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{kg}$$

iii. Barra 5: A = 0,0025 m², L = 6 m, c = 1, s = 0

$$[k] = 1250000\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{N/m} \quad \text{e} \qquad [m] = 7{,}5\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{kg}$$

b) Matrizes de rigidez e de massa da estrutura

i. Tabela de correspondência entre graus de liberdade das barras e da estrutura

A estrutura deste exemplo tem somente dois graus de liberdade, os dois deslocamentos horizontais nos dois nós superiores, logo:

BARRA	$\boldsymbol{q_1}$	$\boldsymbol{q_2}$	$\boldsymbol{q_3}$	$\boldsymbol{q_4}$
1	0	0	p_1	0
2	0	0	p_2	0
3	0	0	p_3	0
4	0	0	p_4	0
5	p_1	0	p_5	0

ii. Matriz de rigidez da estrutura, 2 x 2, simétrica, não singular:

$$[K] = \begin{bmatrix} 2330000 & -1250000 \\ 0 & 2330000 \end{bmatrix} \text{N/m}$$

iii. Matriz de massa da estrutura, 2 x 2, simétrica, não singular:

$$[M] = \begin{bmatrix} 40 & 7{,}5 \\ 0 & 40 \end{bmatrix} \text{kg}$$

c) Determinação das frequências de vibração:

$$\det\left[[K] - \omega^2[M]\right] = 0$$

Sendo ω cada uma das duas frequências procuradas. Fazendo $\lambda = \frac{\omega^2}{10000}$:

$$\det\left[10000 - \begin{bmatrix} 2330 - 40\lambda & -1250 - 7{,}5\lambda \\ 0 & 2330 - 40\lambda \end{bmatrix}\right] = 0$$

Isto irá gerar uma equação do segundo grau em λ:

$$1543{,}75\lambda^2 - 20515\lambda + 38664 = 0$$

Cujas raízes são:

$\lambda^2 = 2{,}2727 \rightarrow \omega_1 = 150{,}788\, rad/s$ e $\lambda^2 = 11{,}0154 \rightarrow \omega_2 = 331{,}89\, rad/s$

d) Determinação dos modos de vibração

Os dois modos de vibração são obtidos substituindo cada um dos dois valores de λ na equação:

$$\begin{bmatrix} 2330 - 40\,\lambda_n & -1250 - 7{,}5\,\lambda_n \\ 0 & 2330 - 40\,\lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \emptyset_{1n} \\ \emptyset_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ com n = 1, 2,}$$

Como se fez o determinante da matriz de coeficientes dessa equação nulo, não é possível determinar os modos de maneira unívoca.

A solução é impor um valor qualquer para uma das componentes e obter outra em função dessa. Impõe-se um valor unitário para a primeira componente de cada modo, obtendo:

$1°\ modo\ \{\emptyset_1\} = \begin{Bmatrix} \emptyset_{12} \\ \emptyset_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$, o modo de *sway* - figura (32);

$2°\ modo\ \{\emptyset_2\} = \begin{Bmatrix} \emptyset_{12} \\ \emptyset_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$, o modo simétrico - figura (33).

Nas figuras a seguir, a treliça original e seus modos de vibração estão desenhados:

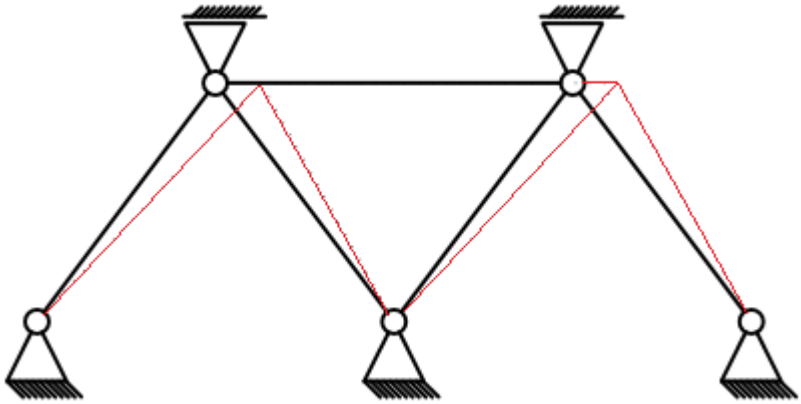


FIGURA 30 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA (*SWAY*).
FONTE: Reyolando e Silva (2013).

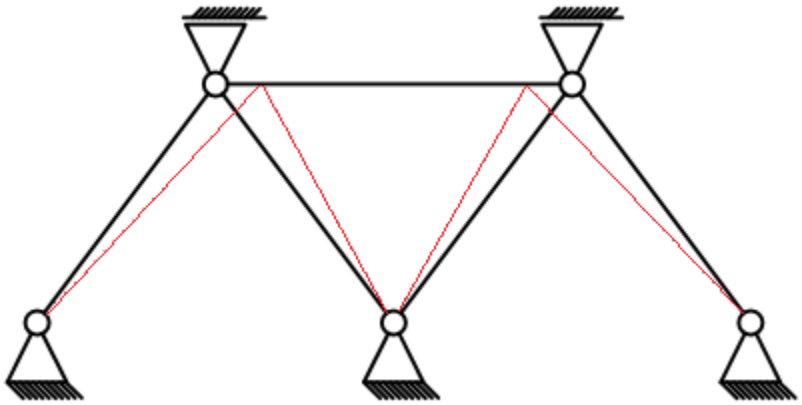


FIGURA 181 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA (SIMÉTRICO).
FONTE: Reyolando e Silva (2013).

Este exemplo foi modelado no ANSYS®, e os resultados são dados a seguir:

MODO	TEORIA (Hz)	ANSYS® (Hz)	VARIAÇÃO
1	23,9986	23,9990	0,000166%
2	52,8219	52,8230	0,000208%

As figuras a seguir representam os modos de vibração do sistema mecânico descrito neste exemplo:

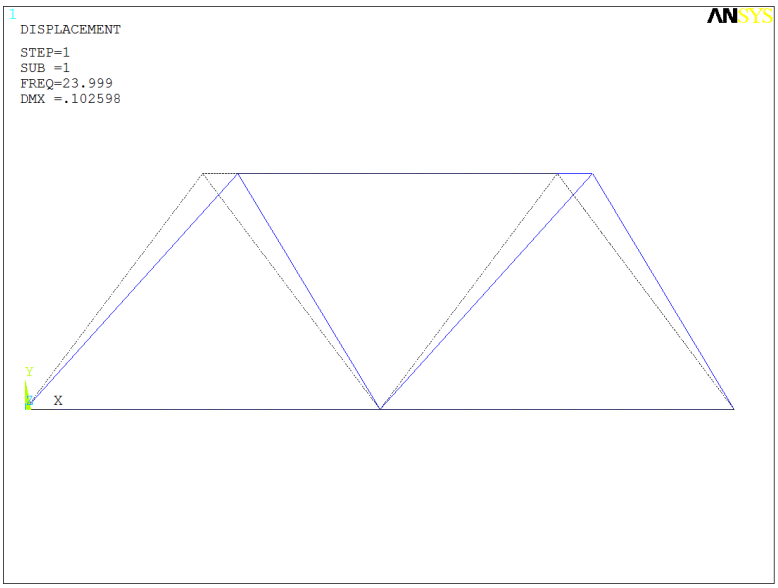


FIGURA 192 - PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA (SWAY). FONTE: O autor.

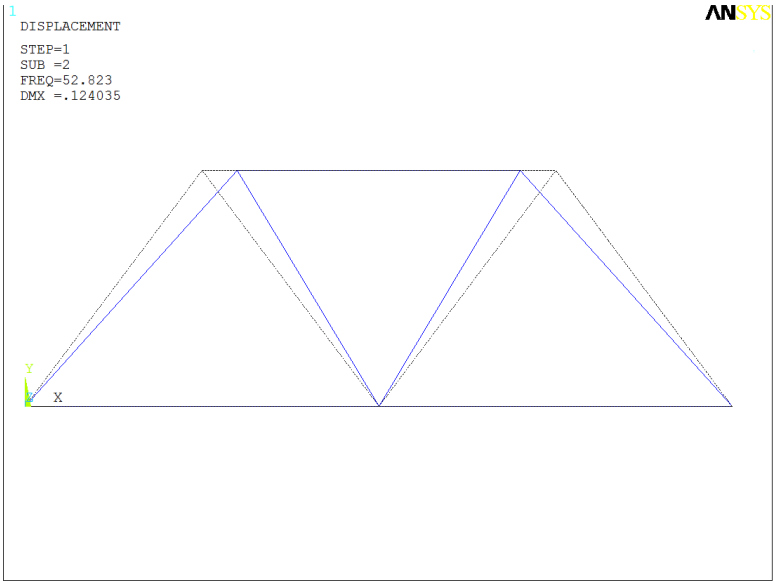


FIGURA 203 - SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO DA TRELIÇA (SIMÉTRICO). FONTE: O autor.

3 EXEMPLO DA OBTENÇÃO DOS AUTOVETORES UTILIZANDO O *MÉTODO DE JACOBI*

- **EXEMPLO NUMÉRICO PARA O CÁLCULO DA ROTAÇÃO DE JACOBI:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos fazer uma rotação de $\varphi = \pi/2$ em torno do elemento (*p,q*) = (1,3).

Temos que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Usando a fórmula a seguir, temos:

$$a''_{pp} = a_{pp}cos^2(\varphi) - 2a_{pq}sen(\varphi)\cos(\varphi) + a_{qq}sen^2(\varphi)$$

$$a''_{11} = a_{11}cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2a_{13}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + a_{33}sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$2 \text{ x } 0 - 2 \text{ x } 3 \text{ x } 1 \text{ x } 0 + 3 \text{ x } 1 = 3$$

Com a fórmula a seguir, temos:

$$a''_{qq} = a_{pp}sen^2(\varphi) - 2a_{pq}sen(\varphi)\cos(\varphi) + a_{qq}cos^2(\varphi)$$

$$a''_{qq} = a_{pp}sen^{2\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 2a_{pq}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + a_{qq}cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$2 \text{ x } 1 + 2 \text{ x } 3 \text{ x } 1 \text{ x } 0 + 3 \text{ x } 0 = 2$$

Com a fórmula a seguir, temos:

$$a''_{pq} = a''_{qp} = \left(a_{pp} - a_{qq}\right)sen(\varphi)\cos(\varphi) + a_{pq}(cos^2(\varphi) - sen^2(\varphi))$$

$$a''_{13} = a''_{31} = (a_{11} - a_{33})sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + a_{13}\left(cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$(2 - 3) \text{ x } 1 \text{ x } 0 + 3 \text{ x } (0 - 1) = -3$$

Usando as fórmulas a seguir, temos:

$$a''_{12} = a''_{12} = a'_{12} = a_{12}\cos(\varphi) - a_{32}sen(\varphi) = 1 \text{ x } 0 - (-1) \text{ x } 1 = 1$$

$$a''_{14} = a''_{14} = a'_{14} = a_{14}\cos(\varphi) - a_{34}sen(\varphi) = 1 \text{ x } 0 - 0 \text{ x } 1 = 0$$

$$a''_{32} = a''_{12} = a'_{32} = a_{12}\,\text{sen}(\varphi) - a_{32}cos(\varphi) = 1 \text{ x } 1 + (-1) \text{ x } 0 = 1$$

$$a''_{34} = a''_{34} = a'_{34} = a_{14}\,\text{sen}(\varphi) - a_{34}cos(\varphi) = 1 \text{ x } 1 + 0 \text{ x } 0 = 1$$

Assim, a matriz resultante A'' é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **EXEMPLO NUMÉRICO PARA A DETERMINAÇÃO DOS AUTOVALORES DA MATRIZ:**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

O maior elemento em módulo, fora da diagonal de $A_1 = A$, é $a_{23} = a_{32} = 3$.

Assim:

$$Ø = \frac{a_{33} - a_{22}}{2a_{23}} = \frac{6-5}{6} = 0{,}1667.$$

Usando o valor de Ø, calculamos $t = tg(\varphi) = 0{,}8471$, $c = \cos(\varphi) = 0{,}7630$ e $s = sen(\varphi) = 0{,}6464$.

Com isso, definimos:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.7630 & 0.6464 \\ 0.0000 & -0.6464 & 0.7630 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_2 = U_1^T A_1 U_1 = \begin{pmatrix} 4.0000 & 1.5260 & 1.2928 \\ 1.5260 & 2.4586 & 0.0000 \\ 1.2928 & 0.0000 & 8.5414 \end{pmatrix}$$

O maior elemento em módulo, fora da diagonal de A_2, é $a_{12} = a_{21} = 1{,}5260$.

Usando o valor de $Ø = -0{,}5050$, calculamos $t = tg(\varphi) = -0{,}6153$, $c = \cos(\varphi) = 0{,}8517$ e $s = sen(\varphi) = -0{,}5240$.

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.8517 & -0.5240 & 0.0000 \\ 0.5240 & 0.8517 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_3 = U_2^T A_2 U_2 = \begin{pmatrix} 4.9387 & 0.0000 & 1.1011 \\ 0.0000 & 1.5197 & -0.6774 \\ 1.1011 & -0.6774 & 8.5414 \end{pmatrix}$$

O maior elemento em módulo, fora da diagonal de A_3, é $a_{13} = a_{31} = 1{,}1011$.

Usando o valor de $Ø = 1{,}6360$, calculamos $t = tg(\varphi) = 0{,}2814$, $c = \cos(\varphi) = 0{,}9626$ e $s = sen(\varphi) = 0{,}2709$.

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0.9626 & 0.0000 & 0.2709 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.2709 & 0.0000 & 0.9626 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_4 = U_3^T A_3 U_3 = \begin{pmatrix} 4.6611 & 0.1239 & 0.0000 \\ 0.1239 & 1.5197 & -0.6520 \\ 0.0000 & -0.6520 & 8.8536 \end{pmatrix}$$

O maior elemento em módulo, fora da diagonal de A_4, é $a_{23} = a_{32} = -0{,}6520$.

Usando o valor de $\emptyset = -5{,}6266$, calculamos $t = tg(\varphi) = -0{,}0882$, $c = \cos(\varphi) = 0{,}9961$ e $s = sen(\varphi) = -0{,}0879$.

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9961 & -0.0879 \\ 0.0000 & 0.0879 & 0.9961 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_5 = U_4^T A_4 U_4 = \begin{pmatrix} 4.6228 & 0.1827 & -0.0161 \\ 0.1827 & 1.4621 & 0.0000 \\ -0.0161 & 0.0000 & 8.9081 \end{pmatrix}$$

Observe que, à medida que *k* aumenta, os elementos fora da diagonal A_k tendem a zero.

Assim, os elementos da diagonal de A_k convergem para os autovalores de *A*, que são 1,45163, 4,63951 e 8,90885.

Se estivermos interessados em calcular os autovetores de A, basta calcular o produto $V = U_1 U_2 \ldots U_K$.

APÊNDICE B - DETERMINAÇÃO DO CARREGAMENTO DEVIDO AO VENTO

MOD.	H (m)	Ae (m²)	Ac (m²)	V0 (m/s)	S1	S2	S3	Vk (m/s)	q (KN/m²)	Ø	Ca	Vento 1 (N)	Vento 2 (N)
1	2,0	0,833	8,332	42,0	1,0	0,86	1,1	39,732	967,701	0,100	3,4	2741,38	3180,00
2	4,0	0,804	8,036	42,0	1,0	0,86	1,1	39,732	967,701	0,100	3,4	2643,99	3067,03
3	6,0	0,774	7,740	42,0	1,0	0,92	1,1	42,504	1107,440	0,100	3,4	2914,34	3380,63
4	8,0	0,744	7,444	42,0	1,0	0,92	1,1	42,504	1107,440	0,100	3,4	2802,89	3251,35
5	10,0	0,715	7,148	42,0	1,0	0,92	1,1	42,504	1107,440	0,100	3,4	2691,43	3122,06
6	12,0	0,685	6,852	42,0	1,0	0,96	1,1	44,352	1205,832	0,100	3,4	2809,20	3258,68
7	14,0	0,656	6,556	42,0	1,0	0,96	1,1	44,352	1205,832	0,100	3,4	2687,85	3117,90
8	16,0	0,626	6,260	42,0	1,0	0,99	1,1	45,738	1282,374	0,100	3,4	2729,41	3166,11
9	18,0	0,596	5,964	42,0	1,0	0,99	1,1	45,738	1282,374	0,100	3,4	2600,35	3016,40
10	20,0	0,567	5,668	42,0	1,0	0,99	1,1	45,738	1282,374	0,100	3,4	2471,29	2866,70
11	22,0	0,537	5,372	42,0	1,0	1,03	1,1	47,586	1388,094	0,100	3,4	2535,33	2940,98
12	24,0	0,508	5,076	42,0	1,0	1,03	1,1	47,586	1388,094	0,100	3,4	2395,63	2778,93
13	26,0	0,478	4,780	42,0	1,0	1,03	1,1	47,586	1388,094	0,100	3,4	2255,93	2616,88
14	28,0	0,448	4,484	42,0	1,0	1,03	1,1	47,586	1388,094	0,100	3,4	2116,23	2454,83
15	30,0	0,419	4,188	42,0	1,0	1,03	1,1	47,586	1388,094	0,100	3,4	1976,53	2292,78
16	32,0	0,389	3,892	42,0	1,0	1,06	1,1	48,972	1470,131	0,100	3,4	1945,40	2256,66
17	34,0	0,360	3,596	42,0	1,0	1,06	1,1	48,972	1470,131	0,100	3,4	1797,44	2085,03
18	36,0	0,330	3,300	42,0	1,0	1,06	1,1	48,972	1470,131	0,100	3,4	1649,49	1913,41
19	38,0	0,300	3,004	42,0	1,0	1,06	1,1	48,972	1470,131	0,100	3,4	1501,53	1741,78
20	40,0	0,271	2,708	42,0	1,0	1,06	1,1	48,972	1470,131	0,100	3,4	1353,58	1570,15

TABELA 7 – CÁLCULO DO CARREGAMENTO DE VENTO NA TORRE DE 40 METROS.
FONTE: O AUTOR.

Observações:

I. Os valores de área total do módulo (**Ac**) foram obtidos pelo AutoCad;

II. Os valores de **S2** foram utilizados como os máximos. Em outras palavras, não foi feito uma interpolação para se chegar em valores exatos. Ex.: Em 30 metros de altura (**módulo 15**) o valor de **S2** é exato e tem o valor de 1,03. Em 40 metros de altura (**módulo 20**) o valor de **S2** é exato e tem o valor de 1,06. Sendo assim, qualquer valor entre eles deveria ser interpolado, caso se desejasse um valor exato. O motivo de ter se usado os valores máximos é que assim as cargas de vento serão majoradas (critério de segurança);

III. Os valores de área efetiva (**Ae**) foram majorados para que se tornem 10% dos valores da área total do módulo (**Ac**);

IV. Os valores do coeficiente de arrasto (**Ca**) estão sendo utilizados como quase máximos (o valor máximo é 3,6). O motivo de ter se usado os valores quase máximos é que assim as cargas de vento serão majoradas (critério de segurança);

V. Os valores de carregamento, dados em Newton, estão incidindo nos módulos. A aplicação das cargas no modelo simulado no ANSYS® foi simplesmente

dividir o valor total (do carregamento incidente no módulo) por dois, assim, este valor resultante foi colocado nos dois nós mais altos do módulo. Exemplo dos valores do primeiro módulo no modelo simulado:

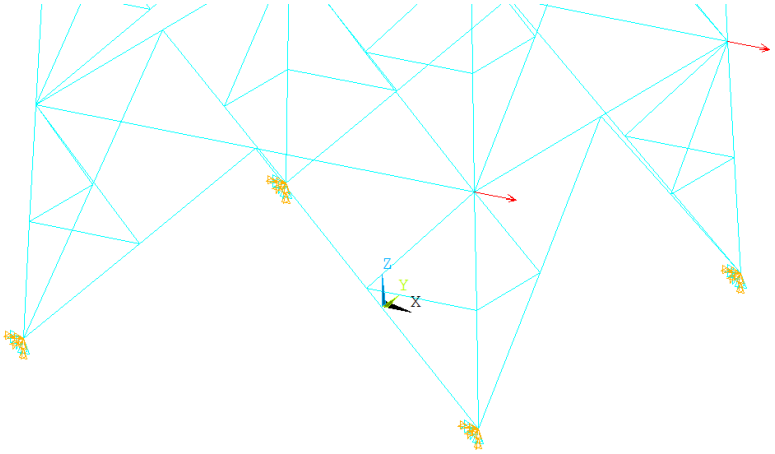


FIGURA 214 – CARGAS DE VENTO INCIDINDO COM 0 GRAU DE INCLINAÇÃO.
FONTE: O autor (2015).

Para as cargas de vento com inclinação de 45 graus, foi feito o mesmo processo:

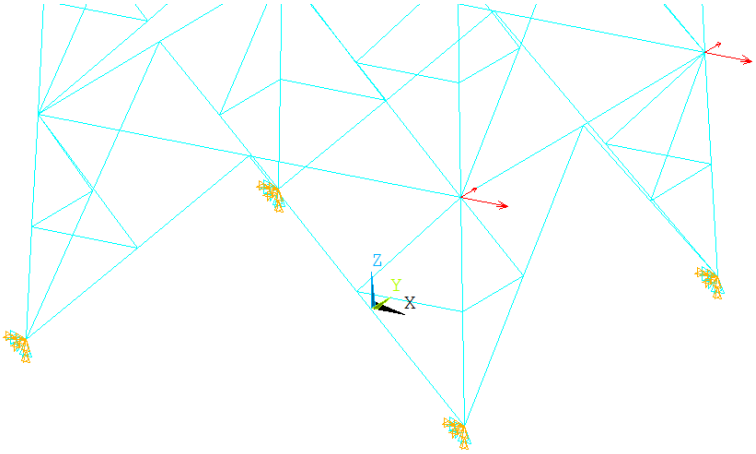


FIGURA 225 – CARGAS DE VENTO INCIDINDO COM 45 GRAUS DE INCLINAÇÃO.
FONTE: O autor (2015).

APÊNDICE C - CRITÉRIOS DE DIMENSIONAMENTO DE PEÇAS PRISMÁTICAS METÁLICAS

- **PEÇAS TRACIONADAS**

Peças tracionadas são elementos estruturais sujeitos a uma força axial perpendicular ao plano da seção. Quando a força axial é aplicada no centro de gravidade da seção, denomina-se tração simples.

> A distribuição de tensões em regime elástico depende do tipo de ligação entre as peças. Salienta-se que o estado limite último é atingido quando ocorre o escoamento ao longo de toda a seção transversal, e, que o colapso ocorrerá na região que apresentar a menor resistência. (NBR 8880 – 2008).

Um breve comparativo entre ligações soldadas e parafusadas será dado a seguir:

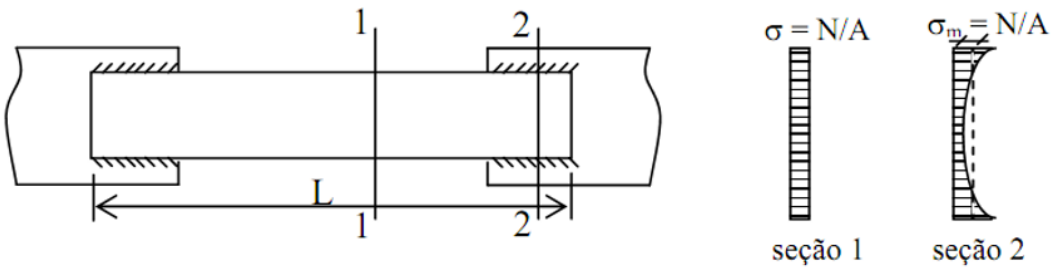


FIGURA 36 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM UMA PEÇA SOLDADA SUBMETIDA AO ESFORÇO DE TRAÇÃO.
FONTE: NBR 8800 (2008).

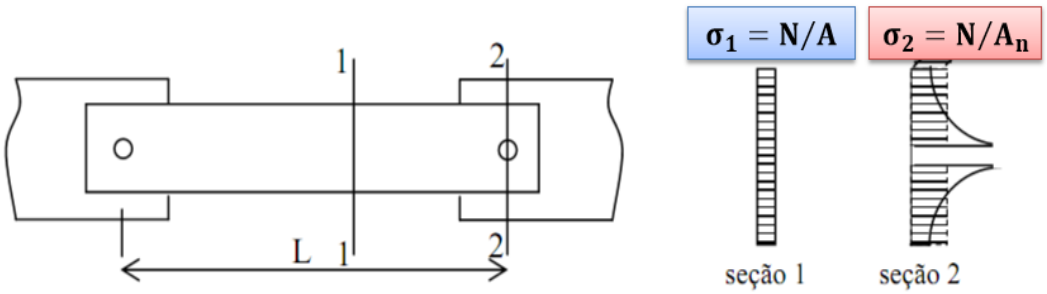


FIGURA 37 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM UMA PEÇA PARAFUSADA SUBMETIDA AO ESFORÇO DE TRAÇÃO.
FONTE: NBR 8800 (2008)

Nas peças com furos, a resistência de projeto é dada pelo menor dos seguintes valores:

a) Escoamento da seção bruta (ESB) $\mathbf{R_{dt} = \frac{A_g F_y}{\gamma_{a1}}}$

b) Ruptura da seção líquida efetiva (RSL) $\mathbf{R_{dt} = \frac{A_e F_u}{\gamma_{a2}}}$

Onde:

$\mathbf{A_g}$ é a área bruta da seção transversal da peça;

$\mathbf{A_e}$ é a área líquida efetiva da seção transversal;

$\mathbf{F_y}$ é a tensão de escoamento do aço;

$\mathbf{F_u}$ é a tensão de ruptura do aço;

$\boldsymbol{\gamma_{a1}}$ é igual a 1,10 para combinação normal (vide tabelas de coeficientes);

$\boldsymbol{\gamma_{a2}}$ é igual a 1,35 para combinação normal (vide tabelas de coeficientes);

Se o esforço solicitante for superior ao esforço resistente, então a peça deve ser redimensionada para que atenda os parâmetros normativos.

a) Para barras rosqueadas sendo solicitadas por tração

$$\mathbf{R_{dt} = \frac{0,75 * A_g F_u}{\gamma_{a2}} \leq \frac{A_g F_y}{\gamma_{a1}}} \qquad ((51)$$

b) Índice de esbeltez

Denomina-se índice de esbeltez de uma haste, a relação entre seu comprimento $\mathbf{L}$, entre pontos de apoio lateral e o raio de giração mínimo ($\mathbf{r_{min}}$) da seção transversal da barra:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{r_{min}}} \qquad ((52)$$

As peças metálicas tracionadas, exceto tirantes de barras redondas pré-tracionadas, devem atender ao seguinte limite no índice de esbeltez:

$$\boldsymbol{\lambda \leq 200} \qquad (53)$$

c) Cisalhamento de bloco

Além da ruptura da seção líquida, pode ocorrer o colapso por rasgamento ao longo da linha de conectores. Este colapso é definido na norma NBR 8800:2008 inciso 6.5.6 – Colapso por Rasgamento.

A verificação deve ser feita utilizando-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{R_{dt}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\gamma_{a2}}}(\mathbf{0,6 f_u A_{nv}} + \mathbf{C_{ts} f_u A_{nt}}) \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\gamma_{a2}}}(\mathbf{0,6 f_y A_{gv}} + \mathbf{C_{ts} f_u A_{nt}}) \qquad ((54)$$

Onde:

$\mathbf{0,6 f_u}$ é a tensão de ruptura a cisalhamento do aço;

$\mathbf{0,6 f_y}$ é a tensão de escoamento a cisalhamento do aço;

$\mathbf{A_{nv}}$ é a área líquida cisalhada;

$\mathbf{A_{gv}}$ é a área bruta cisalhada;

$\mathbf{A_{nt}}$ é a área líquida tracionada;

$\mathbf{C_{ts}}$ é igual a 1,0 quando a tensão de tração na área $\mathbf{A_{nt}}$ é uniforme e 0,5 quando a tensão não for uniforme. A figura a seguir descreve melhor este conceito:

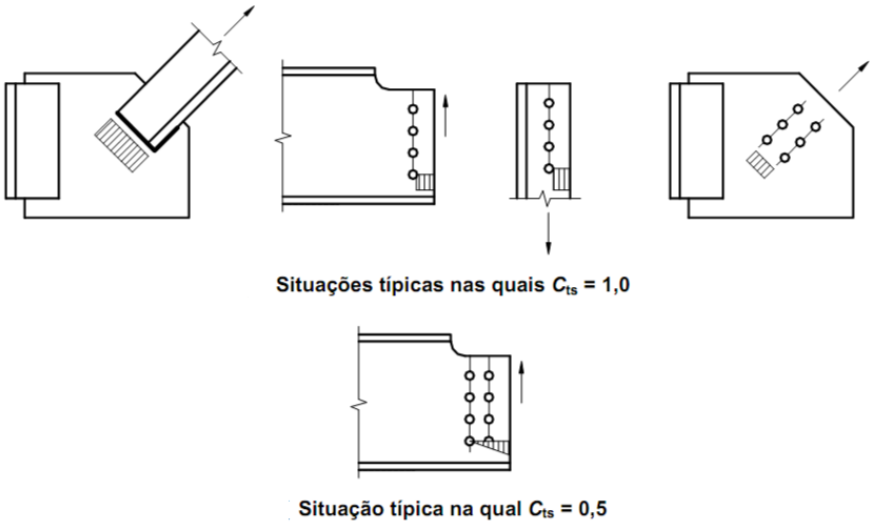


FIGURA 38 – VALORES DE $\mathbf{C_{ts}}$
FONTE: NBR 8800 (2008).

- **PEÇAS DE AÇO COMPRIMIDAS**

Segundo a NBR 8800 (2008), para o dimensionamento de colunas, considerando a flambagem local, deve-se obedecer aos seguintes parâmetros (para compressão centrada):

$$\mathbf{N_{c,Sd} \leq N_{c,Rd} \therefore \ N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}}} \qquad ((55)$$

Onde:

$\mathbf{N_{c,Sd}}$ é a força axial de compressão solicitante de cálculo;

$\mathbf{N_{c,Rd}}$ é a força axial de compressão resistente de cálculo;

$\boldsymbol{\chi}$ é o fator de redução de resistência devido à flambagem global;

O índice de esbeltez da peça ($\boldsymbol{\lambda}$) não pode ser maior que 200.

Onde:

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{KL}{r_{min}}} \qquad ((56)$$

Sendo:

$\mathbf{K}$ o coeficiente de flambagem por flexão;

$\mathbf{L}$ o comprimento longitudinal da peça.

A figura a seguir representa os possíveis valores para $\mathbf{K}$:

A linha tracejada indica a linha elástica de flambagem	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Valores teóricos de K_x ou K_y	0,5	0,7	1,0	1,0	2,0	2,0
Valores recomendados	0,65	0,80	1,2	1,0	2,1	2,0
Código para condição de apoio	Rotação e translação impedidas Rotação livre, translação impedida Rotação impedida, translação livre Rotação e translação livres					

FIGURA 39 – VALORES DE $\mathbf{K}$ PARA A DETERMINAÇÃO DO ÍNDICE DE ESBELTEZ.
FONTE: NBR 8880 (2008).

Seguindo no procedimento, depois de calculado o comprimento equivalente da peça, é calculado o $\mathbf{N_{ex}}$, para cantoneiras de abas iguais ligadas por uma única aba:

$$\mathbf{N_{ex} = \frac{\pi^2 E I_{x1}}{(K_{x1} L_{x1})^2}} \quad ((57)$$

Onde:

$\boldsymbol{I_{x1}}$ é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo que passa pelo centro geométrico e é paralelo à aba conectada;

$\boldsymbol{K_{x1} L_{x1}}$ é o comprimento de flambagem equivalente.

Na sequência é calculado o fator de redução $\boldsymbol{Q}$ (para a flambagem local da peça, $\boldsymbol{Q = Q_a Q_s}$). O Cálculo de $\boldsymbol{Q_a}$ depende do grupo de elementos comprimidos que o elemento calculado se encaixar.

As variáveis descritas acima são:

$\boldsymbol{Q}$ é o fator de redução total associado à flambagem local.

$\boldsymbol{Q_a}$ e $\boldsymbol{Q_s}$ são fatores de redução que levam em conta a flambagem local de elementos AA e AL, respectivamente.

Obs: Nos cálculos realizados neste trabalho, foi utilizado $\boldsymbol{Q = Qs = 1,0}$, pois os valores calculados de (b/t) foram menores do que os valores (b/t)limite obtidos por meio da equação dada na tabela F.1 – grupo AL – grupo 3 da NBR 8800/08.

Por fim é calculado o fator global de flambagem da peça ($\boldsymbol{\chi}$).

$$\boldsymbol{\chi = 0,658^{\lambda_0^2}} \text{ se } \boldsymbol{\lambda_0 \leq 1,5} \quad ((58)$$

$$\boldsymbol{\chi = \frac{0,877}{\lambda_0^2}} \text{ se } \boldsymbol{\lambda_0 > 1,5} \quad ((59)$$

Tal que o índice de esbeltez reduzido ($\boldsymbol{\lambda_0}$) é dado por:

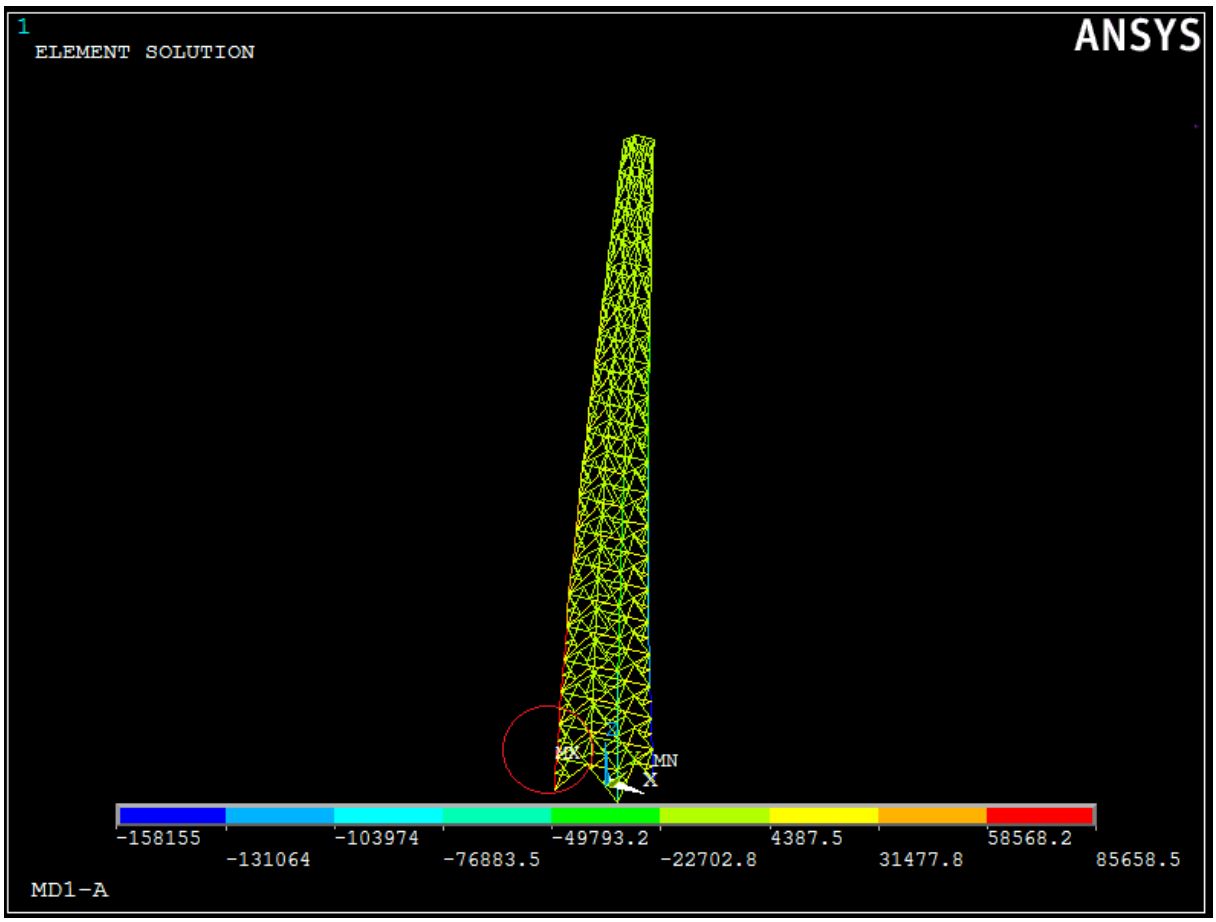
$$\boldsymbol{\lambda_0 = \sqrt{\frac{Q A_g f_y}{N_e}}} \quad ((60)$$

E por fim, calcula-se a resistência da peça à compressão, utilizando a equação (55).

APÊNDICE D – DIMENSIONAMENTO DAS CANTONEIRAS DO MODELO 1-A

O dimensionamento a seguir refere-se ao grupo dos elementos da montante (pernas principais) da torre de transmissão estudada neste trabalho.

1) **Dimensionamento do elemento mais solicitado do grupo 1 (montantes):**



Dados:

Valor da solicitação = 163,08 KN

Aço da cantoneira = ASTM-A36

- $f_y = 250\ MPa = 25,0\ KN/cm^2$

- $f_u = 400\ MPa = 40,0\ KN/cm^2$

- **Escoamento da seção bruta:**

$$ESB = \frac{Ag * f_y}{1,1} = \frac{18,45 * 25}{1,1} = 419,32\ KN$$

- **Ruptura da seção líquida:**

- $A_n = Ag - \left(t * \emptyset_{furo+furo\ padrão}\right) = 18,45 - (0,952 * 1,6) = 16,9268\ cm^2$

- $Ct = 1 - \left(\frac{e_c}{(número\ de\ conectores - 1) * distância\ de\ furo\ a\ furo}\right) = 1 - \frac{2,9}{(2-1)*10} = 0,71\ cm$

- $A_e = Ct * A_n = 12,018\ cm^2$

$$RSL = \frac{A_e * F_u}{1,35} = 356,09\ KN$$

- **Cisalhamento de bloco:**

- $A_{gv} = Dist.de\ furo * espessura\ da\ chapa = 12 * 0,952 = 11,424\ cm^2$

- $A_{nv} = A_{gv} - dist.FB * \left(\emptyset_{furo+furo\ padrão}\right) * espessura = 11,424 - 2 * 1,6 * 0,952 = 8,3776\ cm^2$

- $A_{nt} = \left[Dist.FY - 0,5 * \left(\emptyset_{furo+furo\ padrão}\right)\right] * espessura\ da\ chapa = 0,952 * (5,08 - 0,5 * 1,6) = 4,07456\ cm^2$

$$Rdt1 = \left(\frac{1}{1,35}\right) * (0,6 * F_u * A_{nv} + 1 * F_u * A_{nt}) = 269,66\ KN$$

$$Rdt2 = \left(\frac{1}{1,35}\right) * \left(0,6 * F_y * A_{gv} + 1 * F_u * A_{nt}\right) = 247,66\ KN$$

$$Rdt = 247,66\ KN$$

- **Flambagem:**

- Esbeltez da barra:

$$\lambda_{máx} = \frac{1 * comprimento\ da\ peça}{Inércia\ da\ peça} < 200 \therefore \frac{100,1}{183} < 200 \therefore ok!$$

$$\frac{comprimento\ da\ peça}{r_{mín}} = \frac{100,1}{2} < 80 \therefore comprimento\ equivalente = 72 * r_x + 0,75 * L = 299,715\ cm$$

- Força de flambagem elástica:

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 * EI_x}{(K_x L_x)^2} = \frac{\pi^2 * 21000 * 183}{(1,0 * 299,715)^2} = 422,23\ KN$$

$$(b/t)_{lim} = 0,45 * \sqrt{\frac{21000}{25}} = 13,04$$

$$(b/t) = \frac{10,16}{0,952} = 10,67$$

Como $(b/t)_{lim} > (b/t)$, então $Q_s = 1,0 \therefore Q = Q_s = 1,0$

$$\lambda_0 = \frac{K * L}{rmín}\sqrt{\frac{Q * f_y}{\pi^2 * E}} = 1,045 < 1,5 \therefore \chi = 0,658^{\lambda_0{}^2} = 0,63304$$

$$Ncrd = \frac{\chi * Q * Ag * f_y}{\gamma_{a1}} = 265,44\ KN$$

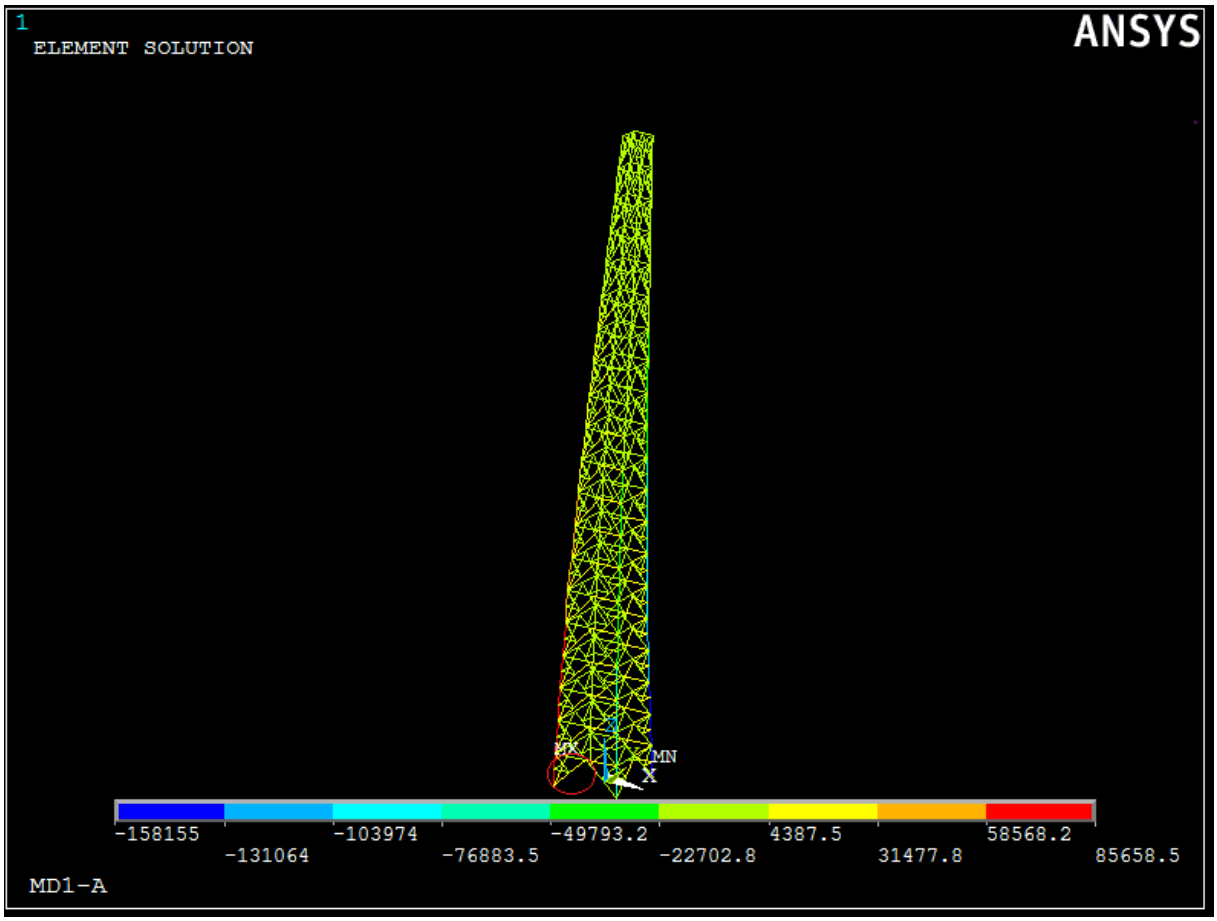
A peça resiste à solicitação de tração?

Sim! Pois $Nsd = 163,08 < 247,66$.

A peça resiste à solicitação de compressão?

Sim! Pois $Nsd = 163,08 < 265,44$.

2) **Dimensionamento do elemento mais solicitado do grupo 2 (diagonais principais e anéis superiores):**



Dados:

Valor da solicitação = 36,27 KN

Aço da cantoneira = ASTM-A36

- $f_y = 250\ MPa = 25,0\ KN/cm^2$

- $f_u = 400\ MPa = 40,0\ KN/cm^2$

- **Escoamento da seção bruta:**

$$ESB = \frac{Ag * f_y}{1,1} = \frac{11,16 * 25}{1,1} = 253,64\ KN$$

- **Ruptura da seção líquida:**

- $A_n = Ag - \left(t * \emptyset_{furo+furo\ padrão}\right) = 11,16 - (0,952 * 1,6) = 9,6368\ cm^2$

- $Ct = 1 - \left(\frac{e_c}{(número\ de\ conectores - 1) * distância\ de\ furo\ a\ furo}\right) = 1 - \frac{1,93}{(2-1)*10} = 0,807\ cm$

- $A_e = Ct * A_n = 7,7769\ cm^2$

$$RSL = \frac{A_e * F_u}{1,35} = 230,43\ KN$$

- **Cisalhamento de bloco:**

- $A_{gv} = Dist.de\ furo * espessura\ da\ chapa = 12 * 0,952 = 11,424\ cm^2$

- $A_{nv} = A_{gv} - dist.FB * (\emptyset_{furo+furo\ padrão}) * espessura = 11,424 - 2 * 1,6 * 0,952 = 8,3776\ cm^2$

- $A_{nt} = [Dist.FY - 0,5 * (\emptyset_{furo+furo\ padrão})] * espessura\ da\ chapa = 0,952 * (3,175 - 0,5 * 1,6) = 2,261\ cm^2$

$$Rdt1 = \left(\frac{1}{1,35}\right) * (0,6 * F_u * A_{nv} + 1 * F_u * A_{nt}) = 215,93\ KN$$

$$Rdt2 = \left(\frac{1}{1,35}\right) * (0,6 * F_y * A_{gv} + 1 * F_u * A_{nt}) = 193,93\ KN$$

$$Rdt = 193,93\ KN$$

- **Flambagem:**

- Esbeltez da barra:

$$\lambda_{máx} = \frac{1 * comprimento\ da\ peça}{Inércia\ da\ peça} < 200 \therefore ok!$$

$$\frac{comprimento\ da\ peça}{r_{mín}} > 80 \therefore comprimento\ equivalente = 32 * r_x + 1,25 * L = 186,245\ cm$$

- Força de flambagem elástica:

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 * EI_x}{(K_x L_x)^2} = \frac{\pi^2 * 21000 * 41}{(1,0 * 186,245)^2} = 244,98\ KN$$

$$(b/t)_{lim} = 0,45 * \sqrt{\frac{21000}{25}} = 13,04$$

$$(b/t) = \frac{6,35}{0,952} = 6,67$$

Como $(b/t)_{lim} > (b/t)$**, então** $Q_s = 1,0 \therefore Q = Q_s = 1,0$

$$\lambda_0 = \frac{K * L}{rmín}\sqrt{\frac{Q * f_y}{\pi^2 * E}} = 1,0671 < 1,5 \therefore \chi = 0,658^{\lambda_0{}^2} = 0,620847$$

$$Ncrd = \frac{\chi * Q * Ag * f_y}{\gamma_{a1}} = 157,47\ KN$$

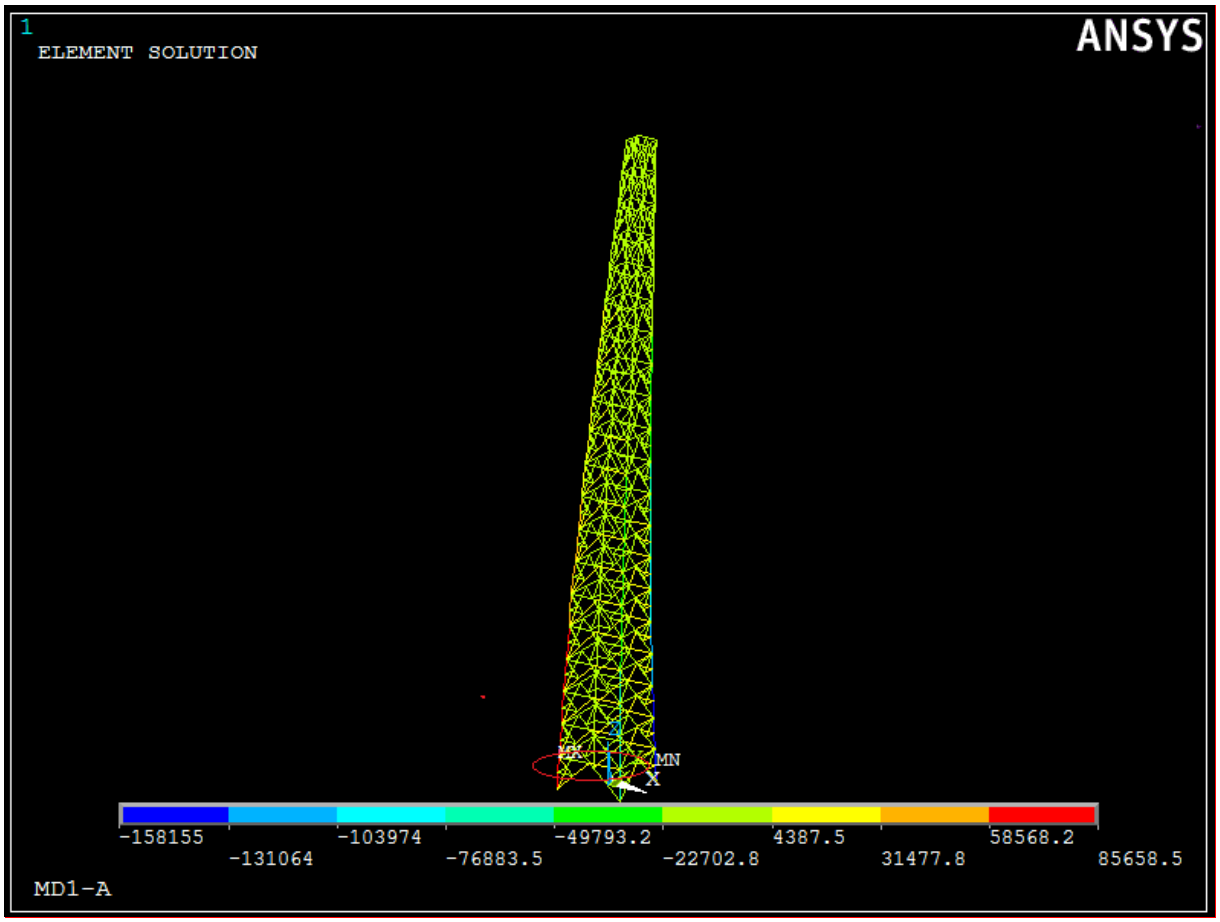
A peça resiste à solicitação de tração?

Sim! Pois $Nsd = 36,27 < 193,93$.

A peça resiste à solicitação de compressão?

Sim! Pois $Nsd = 36,27 < 157,47$.

3) **Dimensionamento do elemento mais solicitado do grupo 2 (diagonais secundárias e anéis médios):**



Dados:

Valor da solicitação = 30,81 KN

Aço da cantoneira = ASTM-A36

- $f_y = 250\ MPa = 25,0\ KN/cm^2$

- $f_u = 400\ MPa = 40,0\ KN/cm^2$

- **Escoamento da seção bruta:**

$$ESB = \frac{Ag * f_y}{1,1} = \frac{9,48 * 25}{1,1} = 215,45\ KN$$

- **Ruptura da seção líquida:**

- $A_n = Ag - \left(t * \emptyset_{furo+furo\ padrão}\right) = 11,16 - (0,952 * 1,6) = 8,2096\ cm^2$

- $Ct = 1 - \left(\frac{e_c}{(número\ de\ conectores - 1) * distância\ de\ furo\ a\ furo}\right) = 1 - \frac{1,88}{(2-1)*10} = 0,812\ cm$

- $A_e = Ct * A_n = 6,6662\ cm^2$

$$RSL = \frac{A_e * F_u}{1,35} = 197,52\ KN$$

- **Cisalhamento de bloco:**

- $A_{gv} = Dist.de\ furo * espessura\ da\ chapa = 12 * 0,794 = 9,528\ cm^2$

- $A_{nv} = A_{gv} - dist.FB * (\emptyset_{furo+furo\ padrão}) * espessura = 9,528 - 2 * 1,6 * 0,794 = 6,9872\ cm^2$

- $A_{nt} = [Dist.FY - 0,5 * (\emptyset_{furo+furo\ padrão})] * espessura\ da\ chapa = 0,794 * (3,175 - 0,5 * 1,6) = 1,8858\ cm^2$

$$Rdt1 = \left(\frac{1}{1,35}\right) * (0,6 * F_u * A_{nv} + 1 * F_u * A_{nt}) = 180,09\ KN$$

$$Rdt2 = \left(\frac{1}{1,35}\right) * (0,6 * F_y * A_{gv} + 1 * F_u * A_{nt}) = 161,74\ KN$$

$$Rdt = 161,74\ KN$$

- **Flambagem:**

- Esbeltez da barra:

$$\lambda_{máx} = \frac{1 * comprimento\ da\ peça}{Inércia\ da\ peça} < 200 \therefore ok!$$

$$\frac{comprimento\ da\ peça}{r_{mín}} > 80 \therefore comprimento\ equivalente = 32 * r_x + 1,25 * L = 186,885\ cm$$

- Força de flambagem elástica:

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 * EI_x}{(K_x L_x)^2} = \frac{\pi^2 * 21000 * 35}{(1,0 * 186,885)^2} = 207,70\ KN$$

$$(b/t)_{lim} = 0,45 * \sqrt{\frac{21000}{25}} = 13,04$$

$$(b/t) = \frac{6,35}{0,794} = 8,00$$

Como $(b/t)_{lim} > (b/t)$**, então** $Q_s = 1,0 \therefore Q = Q_s = 1,0$

$$\lambda_0 = \frac{K * L}{rmín}\sqrt{\frac{Q * f_y}{\pi^2 * E}} = 1,06821 < 1,5 \therefore \chi = 0,658^{\lambda_0{}^2} = 0,620274$$

$$Ncrd = \frac{\chi * Q * Ag * f_y}{\gamma_{a1}} = 133,64\ KN$$

A peça resiste à solicitação de tração?

Sim! Pois $Nsd = 30,81 < 161,74$.

A peça resiste à solicitação de compressão?

Sim! Pois $Nsd = 30,81 < 133,64$.

APÊNDICE E – PONDERAÇÃO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE E DA DENSIDADE DOS MODELOS 3-A E 3-B

Dados do aço:	Dados do concreto:
$E = 200\ GPa$	$E = 23{,}2\ GPa$
$v\ (coeficiente\ de\ poisson) = 0{,}3$	$v\ (coeficiente\ de\ poisson) = 0{,}2$
$Densidade = 7850\ kg/m^3$	$Densidade = 2400\ kg/m^3$

- **Ponderação do tubo preenchido do modelo 3-A:**

a) Densidade:

$$\boldsymbol{Ac}\ (\acute{a}rea\ de\ concreto) = \frac{\pi * 0{,}0819^2}{4} = \mathbf{5{,}26815 * 10^{-3} m^2}$$

$$\boldsymbol{As}\ (\acute{a}rea\ de\ aço) = \frac{\pi * 0{,}0819^2}{4} - Ac = \mathbf{9{,}3902 * 10^{-4} m^2}$$

$$\boldsymbol{Densidade\ equivalente} = \frac{(As * Densidade\ do\ aço + Ac * Densidade\ do\ concreto)}{(Ac + As)}$$

$$= \frac{9{,}3902 * 10^{-4} * 7850 + 5{,}26815 * 10^{-3} * 2400}{(5{,}26815 * 10^{-3} + 9{,}3902 * 10^{-4})} = \mathbf{3224{,}475\ kg/m^3}$$

b) Módulo de Elasticidade:

$$\boldsymbol{Mod.Elasticidade\ equivalente} = \left(\frac{As}{As + Ac}\right) * 200\ GPa + \left(\frac{Ac}{As + Ac}\right) * 23{,}2\ GPa$$

$$= 30{,}255978 + 19{,}69031 = \mathbf{49{,}9463\ GPa}$$

- **Ponderação do tubo preenchido do modelo 3-B:**

$$\boldsymbol{Ac}\ (\acute{a}rea\ de\ concreto) = \frac{\pi * 0{,}1326^2}{4} = \mathbf{0{,}013809\ m^2}$$

$$\boldsymbol{As}\ (\acute{a}rea\ de\ aço) = \frac{\pi * 0{,}1413^2}{4} - Ac = \mathbf{0{,}00187155\ m^2}$$

$$\boldsymbol{Densidade\ equivalente} = \frac{(As * Densidade\ do\ aço + Ac * Densidade\ do\ concreto)}{(Ac + As)}$$

$$= \frac{0{,}00187155 * 7850 + 0{,}013809 * 2400}{(0{,}001875155 + 0{,}013809)} = \mathbf{3050{,}4642\ kg/m^3}$$

a) Módulo de Elasticidade:

$$\boldsymbol{Mod.Elasticidade\ equivalente}$$

$$= \left(\frac{0{,}00187155}{0{,}00187155 + 0{,}013809}\right) * 200\ GPa + \left(\frac{0{,}013809}{0{,}00187155 + 0{,}013809}\right) * 23{,}2\ GPa = 23{,}87097 + 20{,}43097 = \mathbf{44{,}30194\ GPa}$$

APÊNDICE E – CÓDIGOS EM APDL

O códigos aqui escrito teve uma enorme contribuição do professor, e orientador deste trabalho, Juliano Jorge Scremin.

Neste apêndice está contido apenas o código do modelo 1 – A. Os demais códigos dos módulos, assim como os códigos para inserir os carregamentos nos nós, estão contidos no dropbox:

https://www.dropbox.com/sh/o5jbt36cgixjp8t/AACi5tkNFPwnjVKZ-TGHkT_Fa?dl=0

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE, MD1A
/PREP7
! Entrada de Dados Parametrizados
rb          = 3     ! Raio da base; [m]
alfa        = 3.0   ! Ângulo de inclinação das montantes; [graus]
hmod        = 2     ! Altura de cada módulo; [m]
nmodtot     = 20    ! Número total de módulos; [int]
! Medidas angulares e derivadas
pi = ACOS(-1)
tf = TAN(alfa*pi/180)
cs = COS(45*pi/180)
! Laço que percorre os módulos da torre
*DO , nmod , 0 , nmodtot-1
        ! Calcula os raios da base e do topo do módulo
        hk = (nmod+1)*hmod                          ! Altura do anel superior
        hj = (nmod+1)*hmod - 0.5*hmod               ! Altura do anel médio
        ri = cs*rb                                  ! Coordenadas da base
        rk = cs*(rb-(nmod+1)*hmod*tf)               ! Coordenadas do anel superior
        rj = cs*(rb-((nmod+1)*hmod -0.5*hmod)*tf)   ! Coordenadas do anel médio
```

```
*IF , nmod , EQ , 0, THEN
    ! ------------------------------------------------------------------------------------------
    ! Key points da base do módulo
    K , 1 , -ri , -ri , 0
    K , 2 , +ri , -ri , 0
    K , 3 , +ri , +ri , 0
    K , 4 , -ri , +ri , 0
    ! Key points do anel médio (extremos)
    K , 5 , -rj , -rj , hj
    K , 8 , +rj , -rj , hj
    K , 11 , +rj , +rj , hj
    K , 14 , -rj , +rj , hj
    ! Key points do anel médio (intermediários)
    K , 6 , -0.5*ri ,  -rj , hj
    K , 7 , +0.5*ri ,  -rj , hj
    K , 9 ,  +rj , -0.5*ri , hj
    K , 10 ,  +rj , +0.5*ri , hj
    K , 12 , +0.5*ri ,  +rj , hj
    K , 13 , -0.5*ri ,  +rj , hj
    K , 15 ,  -rj , +0.5*ri , hj
    K , 16 ,  -rj , -0.5*ri , hj
                ! Key points do anel superior (extremos)
    K , 17 , -rk , -rk , hk
    K , 19 , +rk , -rk , hk
    K , 21 , +rk , +rk , hk
    K , 23 , -rk , +rk , hk
    ! Key points do anel superior (Intermediários)
```

K , 18 , 0 , -rk , hk

K , 20 , +rk , 0 , hk

K , 22 , 0 , +rk , hk

K , 24 , -rk , 0 , hk

! ----------

! Linhas das montantes

L , 1 , 5 , 1

L , 2 , 8 , 1

L , 3 , 11 , 1

L , 4 , 14 , 1

L , 5 , 17 , 1

L , 8 , 19 , 1

L , 11 , 21 , 1

L , 14 , 23 , 1

! Linhas das inclinadas

L , 1 , 6 , 1

L , 2 , 7 , 1

L , 2 , 9 , 1

L , 3 , 10 , 1

L , 3 , 12 , 1

L , 4 , 13 , 1

L , 4 , 15 , 1

L , 1 , 16 , 1

L , 6 , 18 , 1

L , 7 , 18 , 1

L , 9 , 20 , 1

L , 10 , 20 , 1

L , 12 , 22 , 1

L , 13 , 22 , 1

L , 15 , 24 , 1

L , 16 , 24 , 1

! Linhas das inclinadas

L , 6 , 17 , 1

L , 7 , 19 , 1

L , 9 , 19 , 1

L , 10 , 21 , 1

L , 12 , 21 , 1

L , 13 , 23 , 1

L , 15 , 23 , 1

L , 16 , 17 , 1

! Horizontais do anel médio

L , 5 , 6 , 1

L , 7 , 8 , 1

L , 8 , 9 , 1

L , 10 , 11 , 1

L , 11 , 12 , 1

L , 13 , 14 , 1

L , 14 , 15 , 1

L , 16 , 5 , 1

! Horizontais do anel superior

L , 17 , 18 , 1

L , 18 , 19 , 1

L , 19 , 20 , 1

L , 20 , 21 , 1

L , 21 , 22 , 1

L , 22 , 23 , 1

```
        L , 23 , 24 , 1
        L , 24 , 17 , 1
    *ELSE
        ! Key points do anel médio (extremos)
        K , 5+20*nmod , -rj , -rj , hj
        K , 8+20*nmod , +rj , -rj , hj
        K , 11+20*nmod , +rj , +rj , hj
        K , 14+20*nmod , -rj , +rj , hj
        ! Key points do anel médio (intermediários)
        K , 6+20*nmod , -0.5*rj ,  -rj , hj
        K , 7+20*nmod , +0.5*rj ,  -rj , hj
        K , 9+20*nmod ,  +rj , -0.5*rj , hj
        K , 10+20*nmod ,  +rj , +0.5*rj , hj
        K , 12+20*nmod , +0.5*rj ,  +rj , hj
        K , 13+20*nmod , -0.5*rj ,  +rj , hj
        K , 15+20*nmod ,  -rj , +0.5*rj , hj
        K , 16+20*nmod ,  -rj , -0.5*rj , hj
        ! Key points do anel superior (extremos)
        K , 17+20*nmod , -rk , -rk , hk
        K , 19+20*nmod , +rk , -rk , hk
        K , 21+20*nmod , +rk , +rk , hk
        K , 23+20*nmod , -rk , +rk , hk
        ! Key points do anel superior (Intermediários)
        K , 18+20*nmod , 0 , -rk , hk
        K , 20+20*nmod , +rk , 0 , hk
        K , 22+20*nmod , 0 , +rk , hk
        K , 24+20*nmod , -rk , 0 , hk
        ! ------------------------------------------------------------------------------------------
```

```
! Linhas das montantes
L , 20*nmod-3 , 5+20*nmod , 1
L , 20*nmod-1 , 8+20*nmod , 1
L , 20*nmod+1 , 11+20*nmod , 1
L , 20*nmod+3 , 14+20*nmod , 1
L , 5+20*nmod , 17+20*nmod , 1
L , 8+20*nmod , 19+20*nmod , 1
L , 11+20*nmod , 21+20*nmod , 1
L , 14+20*nmod , 23+20*nmod , 1
! Linhas das inclinadas
L , 20*nmod-3 , 6+20*nmod , 1
L , 20*nmod-1 , 7+20*nmod , 1
L , 20*nmod-1 , 9+20*nmod , 1
L , 20*nmod+1 , 10+20*nmod , 1
L , 20*nmod+1 , 12+20*nmod , 1
L , 20*nmod+3 , 13+20*nmod , 1
L , 20*nmod+3 , 15+20*nmod , 1
L , 20*nmod-3 , 16+20*nmod , 1
L , 6+20*nmod , 18+20*nmod , 1
L , 7+20*nmod , 18+20*nmod , 1
L , 9+20*nmod , 20+20*nmod , 1
L , 10+20*nmod , 20+20*nmod , 1
L , 12+20*nmod , 22+20*nmod , 1
L , 13+20*nmod , 22+20*nmod , 1
L , 15+20*nmod , 24+20*nmod , 1
L , 16+20*nmod , 24+20*nmod , 1
! Linhas das inclinadas curtas
L , 6+20*nmod , 17+20*nmod , 1
```

```
            L , 7+20*nmod , 19+20*nmod , 1
            L , 9+20*nmod , 19+20*nmod , 1
            L , 10+20*nmod , 21+20*nmod , 1
            L , 12+20*nmod , 21+20*nmod , 1
            L , 13+20*nmod , 23+20*nmod , 1
            L , 15+20*nmod , 23+20*nmod , 1
            L , 16+20*nmod , 17+20*nmod , 1
            ! Horizontais do anel médio
            L , 5+20*nmod , 6+20*nmod , 1
            L , 7+20*nmod , 8+20*nmod , 1
            L , 8+20*nmod , 9+20*nmod , 1
            L , 10+20*nmod , 11+20*nmod , 1
            L , 11+20*nmod , 12+20*nmod , 1
            L , 13+20*nmod , 14+20*nmod , 1
            L , 14+20*nmod , 15+20*nmod , 1
            L , 16+20*nmod , 5+20*nmod , 1
            ! ! Horizontais do anel superior
            L , 17+20*nmod , 18+20*nmod , 1
            L , 18+20*nmod , 19+20*nmod , 1
            L , 19+20*nmod , 20+20*nmod , 1
            L , 20+20*nmod , 21+20*nmod , 1
            L , 21+20*nmod , 22+20*nmod , 1
            L , 22+20*nmod , 23+20*nmod , 1
            L , 23+20*nmod , 24+20*nmod , 1
            L , 24+20*nmod , 17+20*nmod , 1
        *ENDIF
*ENDDO
! Seleciona os anéis superiores
```

```
LSEL, S, LOC , Z , hmod, , ,0
*DO , nmod , 1 , nmodtot
        LSEL, A, LOC , Z , hmod*nmod, , ,0
*ENDDO
CM, ANELS, LINE
! Seleciona os anéis médios
LSEL, S, LOC , Z , 0.5*hmod, , ,0
*DO , nmod , 1 , nmodtot-1
        LSEL, A, LOC , Z , 0.5*hmod+hmod*nmod, , ,0
*ENDDO
CM, ANELM, LINe
! Seleciona as montantes
LSEL, S, LINE , , 1, 8, ,0
*DO , nmod , 1 , nmodtot-1
        LSEL, A, LINE , , 1+nmod*48 , 8+nmod*48, ,0
*ENDDO
CM, MONT, LINe
! Seleciona as diagonais principais
LSEL, S, LINE , , 9, 24, ,0
*DO , nmod , 1 , nmodtot-1
        LSEL, A, LINE , , 9+nmod*48 , 24+nmod*48, ,0
*ENDDO
CM, DIAGP, LINE
! Seleciona as diagonais secundárias
LSEL, S, LINE , , 25, 32, ,0
*DO , nmod , 1 , nmodtot-1
        LSEL, A, LINE , , 25+nmod*48 , 32+nmod*48, ,0
*ENDDO
```

```
CM, DIAGS, LINE

ET, 1, BEAM188                                          ! Elemento de viga
MP, EX, 1, 200e9                                        ! material properties for flexible beam
MP, NUXY, 1, 0.3                                        ! Poisson para x e y
MP, DENSITY, 1, 7850                                    ! Densidade
SECTYPE, 1, BEAM, L                                     ! Seção Transversal tipo cantoneira
SECDATA, 0.0635, 0.0635, 0.00952, 0.00952               ! Dimensões da seção transversal das
cantoneiras
ET, 2, BEAM188                                          ! Elemeno de viga
MP, EX, 2, 200e9                                        ! material properties for flexible beam
MP, NUXY, 2, 0.3                                        ! Poisson para x e y
MP, DENSITY, 2, 7850                                    ! Densidade
SECTYPE, 2, BEAM, L                                     ! Seção Transversal tipo cantoneira
SECDATA, 0.0635, 0.0635, 0.00635, 0.00635               ! Dimensões da seção transversal das
cantoneiras
ET, 3, BEAM188                                          ! Elemeno de viga
MP, EX, 3, 200e9                                        ! material properties for flexible beam
MP, NUXY, 3, 0.3                                        ! Poisson para x e y
MP, DENSITY, 3, 7850                                    ! Densidade
SECTYPE, 3, BEAM, L                                     ! Seção Transversal tipo cantoneira
SECDATA, 0.04445, 0.04445, 0.00635, 0.00635             ! Dimensões da seção transversal das
cantoneiras
CMSEL, S, MONT
TYPE, 1
LESIZE, ALL,,,1                                         ! Element size
LMESH, ALL                                              ! Mesh line
```

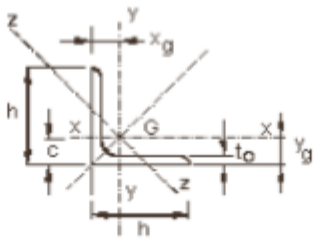
```
CMSEL, S, DIAGP
TYPE, 2
CMSEL, A, ANELS
TYPE, 2
LESIZE, ALL,,,1                    ! Element size
LMESH, ALL                         ! Mesh line
CMSEL, S, ANELM
TYPE, 3
CMSEL, A, DIAGS
TYPE, 3
LESIZE, ALL,,,1                    ! Element size
LMESH, ALL                         ! Mesh line
FINISH
/SOLU
ANTYPE, MODAL                      ! Modal analysis
MODOPT, LANB, 15                   ! Subspace, 15 modes
EQSLV, ANSYS                       ! Frontal solver
MXPAND, 15                         ! Expand 15 modes
LUMPM, ON
DK, 1, ALL                         ! Constrain keypoint one
DK, 2, ALL
DK, 3, ALL
DK, 4, ALL
LPLOT
CMSEL, S, MONT
CMSEL, A, DIAGP
CMSEL, A, DIAGS
CMSEL, A, ANELS
```

```
CMSEL, A, ANELM


/VIEW, 1, 0, 0, 1
/ANG, 1, -70,XM,1
/ANG, 1, -30,ZM,1
!!/PNUM,LINE,1
/REPLOT
SOLVE
FINISH
/POST1                                          ! List solutions
SET,LIST,2
SET,SUBSET, 1
PLDISP ! uncomment to plot the displacement
ANMODE,10,.5e-1 ! uncomment to animate the displacement
*STAT
FINISH
```

ANEXO A – DMENSÕES DOS ELEMENTOS UTILIZADOS NOS MODELOS

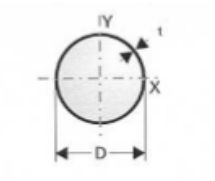
i. TABELA DE CANTONEIRAS



Bitola	h (cm)	Peso (kg/m)	Área (cm^2)	t_o (cm)	Jx=Jy (cm^4)	Wx=Wy (cm^3)	$i_x=i_y$ (cm)	i_z. mim (cm)	Xg (cm)
1/2 x 1/8	1,270	0,55	0,70	0,317	0,10	0,11	0,37	0,25	0,43
5/8 x 1/8	1,588	0,71	0,90	0,317	0,20	0,19	0,47	0,32	0,51
3/4 x 1/8	1,905	0,87	1,11	0,317	0,36	0,27	0,57	0,38	0,59
7/8 x 1/8	2,220	1,04	1,32	0,317	0,58	0,38	0,66	0,46	0,66
1 x 1/8	2,540	1,19	1,48	0,317	0,83	0,49	0,79	0,48	0,76
1 x 3/16	2,540	1,73	2,19	0,476	1,25	0,66	0,76	0,48	0,81
1 x 1/4	2,540	2,22	2,84	0,635	1,66	0,98	0,76	0,48	0,86
1.1/4 x 1/8	3,175	1,50	1,93	0,317	1,67	0,82	0,97	0,64	0,89
1.1/4 x 3/16	3,175	2,20	2,77	0,476	2,50	1,15	0,97	0,61	0,97
1.1/4 x 1/4	3,175	2,86	3,62	0,635	3,33	1,47	0,94	0,61	1,02
1.1/2 x 1/8	3,810	1,83	2,32	0,317	3,33	1,15	1,17	0,76	1,07
1.1/2 x 3/16	3,810	2,68	3,42	0,476	4,58	1,64	1,17	0,74	1,12
1.1/2 x 1/4	3,810	3,48	4,45	0,635	5,83	2,13	1,15	0,74	1,19
1.3/4 x 1/8	4,445	2,14	2,71	0,317	5,41	1,64	1,40	0,89	1,22
1.3/4 x 3/16	4,445	3,15	4,00	0,476	7,50	2,30	1,37	0,89	1,30
1.3/4 x 1/4	4,445	4,12	5,22	0,635	9,57	3,13	1,35	0,86	1,35
2 x 1/8	5,080	2,46	3,10	0,317	7,91	2,13	1,60	1,02	1,40
2 x 3/16	5,080	3,63	4,58	0,476	11,70	3,13	1,58	1,02	1,45
2 x 1/4	5,080	4,74	6,06	0,635	14,60	4,10	1,55	0,99	1,50
2 x 5/16	5,080	5,83	7,42	0,794	17,50	4,91	1,53	0,99	1,55
2 x 3/8	5,080	6,99	8,76	0,952	20,00	5,73	1,50	0,99	1,63
2.1/2 x 3/16	6,350	4,57	5,80	0,476	23,00	4,91	1,98	1,24	1,75
2.1/2 x 1/4	6,350	6,10	7,67	0,635	29,00	6,40	1,96	1,24	1,83
2.1/2 x 5/16	6,350	7,44	9,48	0,794	35,00	7,87	1,93	1,24	1,88
2.1/2 x 3/8	6,350	8,78	11,16	0,952	41,00	9,35	1,91	1,22	1,93
3 x 3/16	7,620	5,52	7,03	0,476	40,00	7,21	2,39	1,50	2,08
3 x 1/4	7,620	7,29	9,29	0,635	50,00	9,50	2,36	1,50	2,13
3 x 5/16	7,620	9,07	11,48	0,794	62,00	11,60	2,34	1,50	2,21
3 x 3/8	7,620	10,71	13,61	0,952	75,00	13,60	2,31	1,47	2,26
3 x 1/2	7,620	14,00	17,74	1,270	91,00	18,00	2,29	1,47	2,36
3.1/2 x 1/4	8,890	8,56	10,90	0,635	83,70	13,00	2,77	1,76	2,46
3.1/2 x 5/16	8,890	10,59	13,50	0,794	102,00	16,00	2,75	1,75	2,52
3.1/2 x 3/8	8,890	12,58	16,00	0,952	121,00	19,20	2,75	1,75	2,58
4 x 1/4	10,160	9,81	12,51	0,635	125,00	16,40	3,17	2,00	2,77
4 x 5/16	10,160	12,19	15,48	0,794	154,00	21,30	3,15	2,00	2,84
4 x 3/8	10,160	14,57	18,45	0,952	183,00	24,60	3,12	2,00	2,90
4 x 7/16	10,160	16,80	21,35	1,111	208,00	29,50	3,12	1,98	2,95
4 x 1/2	10,160	19,03	24,19	1,270	233,00	32,80	3,10	1,98	3,00
5 x 5/16	12,700	15,31	19,50	0,794	308,00	33,40	3,97	2,53	3,47
5 x 3/8	12,700	18,30	23,29	0,952	362,00	39,50	3,94	2,51	3,53
5 x 1/2	12,700	24,10	30,64	1,270	470,00	52,50	3,91	2,49	3,63
5 x 5/8	12,700	29,80	37,80	1,588	566,00	64,00	3,86	2,46	3,76

TABELA 8 – TABELA DE CANTONEIRAS.
FONTE: Prof. José Carlos Morilla.

ii. TABELA DE TUBOS VAZADOS



Diâmetro Externo	Espes. da parede	Massa por Unidade Compr.	Área da Seção Transv. Aço	Movimento Inércia	Raio de Giração	Módulo Elástico Resist. à Flexão	Módulo Plástico Resist. à Flexão	Const. Torção	Módulo I Torção
D	t	P	A	I	r	W	Z	It	Wt
(mm)	(mm)	(kg/m)	(cm)²	(cm)4	(cm)	(cm)³	(cm)³	(cm)4	(cm)³
26,7	2,9	1,69	2,15	1,55	0,849	1,16	1,64	3,09	2,32
	3,9	2,20	2,80	1,87	0,818	1,40	2,05	3,74	2,80
	3,4	2,50	3,19	3,64	1,07	2,18	3,06	7,27	4,36
33,4	4,6	3,24	4,12	4,40	1,03	2,63	3,82	8,79	5,27
	6,4	4,24	5,40	5,21	0,98	3,12	4,73	10,4	6,24
38,1	3,0	2,60	3,31	5,13	1,25	2,69	3,71	10,3	5,39
	5,0	4,08	5,20	7,28	1,18	3,82	5,52	14,6	7,65
	3,6	3,39	4,32	8,13	1,37	3,85	5,33	16,3	7,71
42,2	4,9	4,47	5,69	10,1	1,33	4,78	6,80	20,2	9,56
	6,4	5,61	7,15	11,8	1,29	5,62	8,25	23,7	11,2
	9,7	7,77	9,90	14,2	1,20	6,75	10,5	28,5	13,5
	3,7	4,05	5,16	12,9	1,58	5,35	7,34	25,9	10,7
48.3	5,1	5,41	6,90	16,3	1,54	6,76	9,53	32,7	13,5
	7,1	7,25	9,23	20,1	1,48	8,34	12,2	40,3	16,7
	10,2	9,55	12,2	23,7	1,40	9,81	15,1	47,4	19,6
	3,6	5,01	6,38	25,8	2,01	8,54	11,5	51,5	17,1
	3,9	5,44	6,93	27,7	2,00	9,18	12,5	55,3	18,4
	4,4	6,03	7,68	30,2	1,98	10,0	13,7	60,4	20,0
	4,8	6,54	8,34	32,4	1,97	10,7	14,8	64,7	21,5
60,3	5,5	7,48	9,53	36,1	1,95	12,0	16,7	72,2	23,9
	6,4	8,45	10,8	39,7	1,92	13,2	18,6	79,4	26,3
	7,1	9,36	11,9	42,9	24,9	1,90	14,2	20,3	85,8
	8,7	11,1	14,2	48,4	1,85	16,1	23,5	96,8	32,1
	11,1	13,4	17,1	54,5	1,78	18,1	27,3	109	36,1
	4,0	6,74	8,59	51,3	2,44	14,1	18,9	103	28,1
	4,4	7,40	9,42	55,7	2,43	15,3	20,6	111	30,5
	4,8	8,04	10,2	59,9	2,42	16,4	22,3	120	32,8
	5,2	8,63	11,0	63,6	2,41	17,4	23,8	127	34,9
73,0	5,5	9,14	11,6	66,8	2,39	18,3	25,1	134	36,6
	6,4	10,4	13,3	74,5	2,37	20,4	28,3	149	40,8
	7,0	11,4	14,5	80,0	2,35	21,9	30,6	160	43,8
	9,5	14,9	19,0	97,8	2,27	26,8	38,7	196	53,6
	14,0	20,4	26,0	119	2,14	32,7	49,7	239	65,4
	4,4	9,11	11,6	104	2,99	23,4	31,3	208	46,8

TABELA 9 – TABELA DE TUBOS VAZADOS (PARTE 1).
FONTE: Portal Metálica.

	4,8	9,92	12,6	112	2,98	25,2	33,9	224	50,4
	5,5	11,3	14,4	126	2,96	28,3	38,3	251	56,5
	6,4	12,9	16,5	141	2,93	31,7	43,4	282	63,5
88,9	7,1	14,4	18,3	154	2,90	34,7	47,9	309	69,5
	7,6	15,3	19,5	162	2,89	36,5	50,5	324	72,9
	11,1	21,3	27,2	210	2,78	47,2	67,8	420	94,4
	15,2	27,7	35,3	249	2,66	56,1	83,9	499	112
	4,0	9,54	12,1	145	3,45	28,5	37,8	290	57,1
	4,4	10,5	13,3	158	3,44	31,1	41,3	316	62,2
	4,8	11,4	14,5	171	3,43	33,6	44,8	342	67,2
101,6	5,7	13,6	17,3	199	3,40	39,2	52,8	399	78,5
	6,4	14,9	19,0	216	3,38	42,6	57,7	433	85,2
	7,1	16,6	21,2	238	3,35	46,8	63,8	475	93,6
	8,1	18,6	23,7	261	3,32	51,5	70,8	523	103
	4,0	10,8	13,7	209	3,90	36,6	48,2	418	73,2
	4,4	11,8	15,1	228	3,89	40,0	52,8	457	79,9
	4,8	12,9	16,4	247	3,88	43,2	57,4	494	86,5
	5,2	13,9	17,7	264	3,86	46,2	61,5	528	92,4
	5,6	14,9	19,0	281	3,85	49,3	65,8	563	98,5
	6,0	16,1	20,5	301	3,83	52,7	70,7	602	105
114,3	6,4	16,9	21,5	315	3,82	55,1	74,1	630	110
	7,1	18,9	24,0	347	3,80	60,6	82,1	693	121
	7,9	20,8	26,5	377	3,77	65,9	89,8	753	132
	8,6	22,3	28,4	400	3,75	70,0	95,9	800	140
	11,1	28,3	36,1	486	3,67	85,0	119	971	170
	13,5	33,5	42,7	552	3,60	96,7	138	1100	193
	17,1	41,0	52,3	636	3,49	111	163	1270	223
	5,6	18,6	23,7	547	4,80	77,4	103	1090	155
	6,6	21,8	27,7	631	4,77	89,3	119	1260	179
	7,1	23,6	30,1	679	4,75	96,1	129	1360	192
	7,9	26,1	33,2	741	4,72	105	141	1480	210
141,3	8,7	28,6	36,4	803	4,70	114	154	1610	227
	9,5	31,0	39,5	861	4,67	122	166	1720	244
	12,7	40,3	51,3	1070	4,57	152	211	2140	303
	15,9	49,1	62,6	1250	4,47	177	251	2500	354
	19,1	57,4	73,2	1400	4,37	198	287	2800	396
	4,8	19,3	24,6	821	5,78	97,6	128	1640	195
	5,2	20,8	26,4	881	5,77	105	137	1760	209
	5,6	22,3	28,4	942	5,76	112	149	1880	224
	6,4	25,4	32,3	1060	5,73	126	167	2120	252
	7,1	28,3	36,0	1170	5,70	139	185	2360	278
	7,9	31,3	39,9	1290	5,68	153	204	2570	306
	8,7	34,4	43,8	1400	5,65	166	223	2800	332
	9,5	37,3	47,5	1500	5,62	179	241	3010	357
168,3	11,0	42,6	54,2	1690	5,58	200	272	3370	401
	12,7	48,7	62,1	1890	5,52	225	308	3780	450
	14,3	54,2	69,1	2070	5,47	245	340	4130	491
	15,9	59,7	76,0	2230	5,42	265	370	4460	531
	18,3	67,6	86,1	2460	5,34	292	413	4920	584
	19,1	70,1	89,3	2530	5,32	300	427	5060	601
	22,0	79,2	101	2760	5,23	328	474	5530	657
	22,2	80,1	102	2780	5,22	331	478	5570	662
	7,9	41,2	52,5	2930	7,47	268	353	5870	536
	8,2	42,5	54,2	3020	7,46	276	364	6040	551

TABELA 10 – TABELA DE TUBOS VAZADOS (PARTE 2).
FONTE: Portal Metálica.