UNIVERSIDADE POSITIVO

Alysson Fernando Medeiros Paiz

Diogo Vanzella

Lucas Juliano Possa Gomes

CRIAÇÃO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA CÁLCULO DIDÁTICO DE ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS VIA MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM FORMULAÇÃO MATRICIAL

Curitiba

2017

Alysson Fernando Medeiros Paiz

Diogo Vanzella

Lucas Juliano Possa Gomes

CRIAÇÃO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA CÁLCULO DIDÁTICO DE ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS VIA MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM FORMULAÇÃO MATRICIAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado a Universidade Positivo como requisito parcial para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso do curso de Engenharia Civil da Universidade Positivo

Professor Orientador: Juliano Jorge Scremin

Curitiba

2017

RESUMO

A compreensão de conceitos básicos da análise estrutural é fundamental para o uso correto de qualquer *software* de modelagem estrutural. Objetivando auxiliar o ensino destes fundamentos a estudantes de engenharia civil, este trabalho apresenta um *software* desenvolvido em Python para calcular esforços seccionais e deslocamentos de modelos estruturais reticulados planos com um viés didático. O código é aberto e foi desenvolvido com base no método da rigidez matricial e apresenta uma interface gráfica (implementada em PyQt) concebida para orientar o usuário ao longo dos passos do método. Estes passos incluem a definição das coordenadas nodais, indicação de incidência das barras, aplicação de cargas nodais e distribuídas, definição de restrições nodais e de deformações e etc. Entretanto, estes passos não são efetuados por meio de simplesmente clicar em uma área de desenho, mas sim, por meio da digitação dos dados em respectivas janelas de entrada, o que obriga o usuário a realmente entender como o método funciona. Além dos diagramas de esforços seccionais e da plotagem da deformada, o código gera um arquivo de relatório PDF com todas as matrizes de rigidez elementares, vetor de cargas, deslocamentos nodais calculados e a matriz de rigidez global da estrutura. Além disso, o arquivo PDF contem as equações utilizadas para o traçado dos diagramas de cortante, momento fletor e esforço axial bem como as equações de inclinações e deflexões de cada barra do modelo. Os resultados foram validados com a versão gratuita do *software* FTOOL.

Palavras-chave: Método Matricial da Rigidez, *Python, Software* Didático.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sentido positivo para cargas e deslocamentos segundo a convenção de Green e sistema de eixos considerado. 6

Figura 2 - Convenção para traçado de diagramas de esforços axiais, esforços cortantes e momentos fletores respectivamente. 7

Figura 3 - Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações 9

Figura 4 - Rotação da linha elástica de um ponto qualquer em uma viga 12

Figura 5 - Deformação global de uma barra 12

Figura 6 - Deformação axial em termos infinitesimais (à direita seção transversal deformada) 13

Figura 7 - Deformação axial devido efeito de flexão 14

Figura 8 - Equilíbrio de um elemento infinitesimal (Carregamentos positivos) 15

Figura 9 - Resolução de estrutura hiperestática via método das forças 17

Figura 10 - Coeficiente de rigidez devido deslocamento unitário 20

Figura 11 - Orientação dos graus de liberdade 21

Figura 12 – graus de liberdade tipo engaste-engaste. 23

Figura 13 – Coeficientes de rigidez para a matriz do tipo engaste-engaste. 24

Figura 14 – graus de liberdade do tipo rótula-engaste. 24

Figura 15 – Coeficientes de rigidez para a matriz do tipo rótula-engaste. 25

Figura 16 - Exemplo de estrutura com os graus de liberdade nomeados para espalhamento na matriz de rigidez global 28

Figura 17 - Entrada de dados. 38

Figura 18 - Entrada de dados referentes às barras. 38

Figura 19 - Obtenção das matrizes de rotação através dos comprimentos das barras. 39

Figura 20 - Montagem da matriz de rigidez global 41

Figura 21 – Vetor das cargas nodais e carregamentos distribuídos. 42

Figura 22 – Resolução de estrutura hiperestática via método das forças. 43

Figura 23 - Posicionamento dos deslocamentos prescritos em função dos graus de liberdade 45

Figura 24 - Cálculo dos deslocamentos dos graus de liberdade livres 46

Figura 25 - Cálculo das reações de apoio 46

Figura 26 - Cálculo dos esforços internos 47

Figura 27 – Seções transversais 49

Figura 28 - Materiais 49

Figura 29 – Nós. 50

Figura 30 – Barras. 51

Figura 31 – Carregamentos distribuídos. 51

Figura 32 – Cargas nodais. 52

Figura 33 – Deslocamentos prescritos. 52

Figura 34 – Obtenção de resultados. 53

Figura 35 – Mensagem de erro. 53

Figura 36 – Escalas do carregamento. 53

Figura 37 – Valores em ponto qualquer da barra. 53

Figura 38 - Validação do código –Treliça plana – Configuração da estrutura 58

Figura 39- Validação do código –Treliça plana – Entrada de dados - Nós 58

Figura 40 - Validação do código –Treliça plana – Entrada de dados - Barras 59

Figura 41- Validação do código –Treliça plana – Entrada de dados – Carregamentos distribuídos 59

Figura 42 - Validação do código –Treliça plana – Entrada de dados – Cargas nodais 59

Figura 43 - Validação do código –Treliça plana – Entrada de dados – Deslocamentos Prescritos 60

Figura 44 - Validação do código –Treliça plana – Esforços axiais - ONÇA 60

Figura 45 - Validação do código –Treliça plana – Esforços axiais – Ftool 60

Figura 46- Validação do código –Treliça plana – Estado deformado – ONÇA..... 62

Figura 47 - Validação do código –Treliça plana – Estado deformado - Ftool..... 62

Figura 48 - Validação do código - Viga contínua – Configuração da estrutura 63

Figura 49 - Validação do código - Viga contínua – Nós..... 63

Figura 50 - Validação do código - Viga contínua – Barras..... 64

Figura 51 - Validação do código - Viga contínua – Carregamentos distribuídos..... 64

Figura 52 - Validação do código - Viga contínua – Cargas nodais 64

Figura 53 - Validação do código - Viga contínua – Deslocamentos prescritos 64

Figura 54 - Validação do código - Viga contínua – Esforços cortantes - ONÇA 65

Figura 55 - Validação do código - Viga contínua – Esforços cortantes – Ftool..... 65

Figura 56 - Validação do código - Viga contínua – Momentos fletores – ONÇA..... 66

Figura 57 - Validação do código - Viga contínua – Momentos fletores – Ftool 66

Figura 58 - Validação do código - Viga contínua – Estado deformado - ONÇA..... 66

Figura 59 - Validação do código - Viga contínua – Estado deformado – Ftool 67

Figura 60 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada..... 68

Figura 61 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada - Nós 68

Figura 62 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada - Barras 69

Figura 63 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Carregamentos distribuídos 69

Figura 64 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Cargas nodais 69

Figura 65 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Deslocamento prescrito 69

Figura 66 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Esforços axiais – ONÇA 70

Figura 67 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Esforços axiais – Ftool..... 70

Figura 68 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Esforços cortantes – ONÇA 71

Figura 69 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Esforços cortantes– Ftool..... 72

Figura 70 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Momentos fletores – ONÇA 73

Figura 71 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Momentos fletores – Ftool..... 74

Figura 72 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Estado deformado – ONÇA 75

Figura 73 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Estado deformado – Ftool..... 75

Figura 74 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas 77

Figura 75 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas - Nós..... 77

Figura 76 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas - Barras 78

Figura 77 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Carregamentos distribuídos..... 78

Figura 78 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Cargas nodais 78

Figura 79 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Deslocamento prescrito 79

Figura 80 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Esforços axiais – ONÇA 79

Figura 81 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Esforços axiais – Ftool..... 80

Figura 82 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Esforços cortantes – ONÇA..... 81

Figura 83 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Esforços cortantes– Ftool 81

Figura 84 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Momentos fletores – ONÇA 82

Figura 85 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Momentos fletores – Ftool 83

Figura 86 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Estado deformado – ONÇA 84

Figura 87 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Estado deformado – Ftool 84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Validação do código - Treliça plana – Esforços axiais 61

Tabela 2 - Validação do código –Treliça plana – Deslocamentos 62

Tabela 3 - Validação do código –Treliça plana – Reações de apoio 62

Tabela 4 - Validação do código - Viga contínua – Esforços cortantesl 65

Tabela 5 - Validação do código - Viga contínua –Momentos fletores 66

Tabela 6 - Validação do código - Viga contínua – Deslocamentos 67

Tabela 7 - Validação do código - Viga contínua – Reações de apoio 67

Tabela 8 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Esforços axiais 71

Tabela 9 - Validação do código - Pórtico com deslocamento prescrito - Esforços cortantes 72

Tabela 10 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Momentos fletores 74

Tabela 11 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Deslocamentos ... 76

Tabela 12 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Deslocamentos 76

Tabela 13 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Esforços axiais 80

Tabela 14 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas - Esforços cortantes 82

Tabela 15 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Momentos fletores 83

Tabela 16 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Deslocamentos 85

Tabela 17 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Deslocamentos 85

LISTA DE VARIÁVEIS

{D} - Vetor de deslocamentos global

{F} - Vetor de forças global

{Fe} - Vetor de forças de engastamento nas extremidades de um elemento

{Qe} - Vetor de esforços internos nas extremidades de um elemento

[K] - Matriz de rigidez global

[Ke] - Matriz de rigidez elementar local

[Kr] - Matriz de rigidez elementar rotacionada (global)

[R] - Matriz de rotação

A - Área da seção transversal

E - Módulo de elasticidade

f - Coeficiente de flexibilidade

Fx - Força na direção x

Fy - Força na direção y

G - Módulo de cisalhamento

I - Momento de inércia à flexão

J - Momento de inércia à torção

k - Coeficiente de rigidez

L - Comprimento de um elemento

M - Esforços de flexão

N - Esforços longitudinais (axial)

n - Deslocamentos longitudinais (sentido de x)

P - Carga unitária

Q - Esforços transversais (corte)

q(x) - Carregamento distribuído transversal

r - Raio de curvatura

v - Deslocamentos transversais (sentido de y)

W - Trabalho de uma força

δ - Deslocamento de um ponto

ε - Deformação

$\boldsymbol{\sigma}$ - Tensão solicitante

φ - Rotações em torno do eixo z

η(x) - Carregamento distribuído longitudinal

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 1
1.1 Objetivo geral 2
1.2 Objetivo específico 2
1.3 Justificativa 2
1.4 Delimitação do tema 3
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 4
2.1 Revisão bibliográfica 5
2.2 Convenção de sinais 6
2.3 Linearidade geométrica e linearidade física 7
2.4 Condições de equilíbrio e compatibilidade 8
2.5 Superposição de efeitos 10
2.6 Equações de deslocamentos e esforços internos 11
2.7 Método das forças (Flexibilidade) 16
2.8 Método dos deslocamentos (Rigidez) 18
2.8.1 Graus de liberdade 20
2.8.2 Método da rigidez x Método matricial 21
2.8.3 Matriz de rigidez elementar 22
2.8.4 Matriz de rotação 26
2.8.5 Matriz de rigidez global 27
2.8.6 Sistema de equações de equilíbrio 31
2.8.7 Esforços internos 32
2.9 Barras infinitamente rígidas e inextensíveis 33
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 35
3.1 Metodologia do trabalho 35
3.2 Metodologia do código 37
3.2.1 Entrada de dados 38

3.2.2 Matriz de rotação 39
3.2.3 Vetor da identificação dos graus de liberdade 40
3.2.4 Matrizes de rigidez 40
3.2.5 Vetores de cargas 42
3.2.6 Vetor de deslocamentos 45
3.2.7 Deslocamentos globais nos graus de liberdade livres 45
3.2.8 Reações de apoio 46
3.2.9 Esforços internos 47
3.2.10 Equações para plotagem de diagramas 47
3.2.11 Interface Gráfica 48
3.2.12 Relatório 54
4 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO 57
4.1 Treliça plana 57
4.2 Viga contínua 63
4.3 Pórtico com barra inclinada 67
4.4 Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas 76
5 CONCLUSÃO **Erro! Indicador não definido.**
Referências Bibliográficas 87
APÊNDICE A – CÓDIGO DE CÁLCULO 89
APÊNDICE B – MANUAL DO USUÁRIO 96
APÊNDICE C – EXEMPLO DE RELATÓRIO 107

1 INTRODUÇÃO

Estruturas são sistemas com peças conectadas entre si, com a função de resistir aos carregamentos oriundos da construção em si ou fenômenos naturais. Dentre os tipos de estruturas, destacam-se os pórticos, que são conjuntos de vigas e colunas em duas ou três dimensões, e treliças, compostas por elementos geralmente dispostos de forma triangular e frequentemente usadas para vãos grandes. (HIBBELER, 2013).

Segundo Koerich (2015), “Não é viável fazer projetos de maneira competitiva sem um programa profissional para cálculo estrutural como apoio”. Cálculo de estruturas mais complexas exigem a utilização de *softwares* de apoio, pois o tempo demandado para resolver este problema de modo manual é extremamente superior ao do *software* o que prejudica a competitividade do profissional.

Além disso, há a exigência do mercado na geração de modelos estruturais que busquem soluções otimizadas para o objeto em análise, pois detalhamentos de projeto exigem mais trabalho e tornam projetos complexos inviáveis sem o auxílio de *softwares*. Como é explicado por KOERICH (2015), o mercado exige que os projetos apresentem mais detalhes e prescrições que demandam tempo para sua elaboração e ainda há a necessidade de apresentar diversas soluções possíveis para um determinado problema. Neste sentido, é imprescindível a utilização de programas computacionais capazes de apresentar diferentes alternativas de soluções de estruturas mantendo a produtividade o profissional.

Já foram criadas ferramentas didáticas que apresentam os resultados, como o Ftool, criado pelo Engº e Prof. Dr. Luiz Fernando Martha, que tem como intuito o ensino do comportamento estrutural de pórticos planos.

Visando facilitar e melhorar o aprendizado, é viável a criação de um programa que apresente os passos intermediários do processo de cálculo de um problema estrutural de modo a deixar mais claro o entendimento deste.

Entretanto, tais ferramentas devem ser usadas como subsídio ao trabalho do engenheiro, não substituindo o trabalho do profissional, pois um programa não é capaz de tomar as decisões fundamentais pertinentes ao exercício da profissão.

1.1 Objetivo geral

Desenvolver e disponibilizar um programa computacional que faça o papel de assistente em cálculos de deslocamentos, reações de apoio, e esforços internos solicitantes em estruturas reticuladas planas com enfoque na vertente matricial do método dos deslocamentos.

1.2 Objetivo específico

O *software* elaborado visa obter as respostas acima citadas em vigas, pórticos e treliças no plano, esboçar os diagramas de momentos fletores, esforços cortantes e esforços axiais, fornecer ao usuário as equações destes esforços e a equação da linha elástica de cada barra e apresentar um memorial de cálculo com os passos intermediários do procedimento de cálculo utilizado.

1.3 Justificativa

A justificativa para o trabalho calca-se na necessidade de um *software* de código aberto que exponha os passos intermediários do procedimento de cálculo de estruturas reticuladas planas, servindo de instrumento didático para estudantes de análise estrutural. Os *softwares* disponíveis para tal fim não demonstram os entes matriciais envolvidos no processo.

A lógica de programação significa o uso correto das leis do pensamento, da ordem da razão e de processos de raciocínio e simbolização formais na programação de computadores, objetivando a racionalidade e o desenvolvimento de técnicas que cooperam para a produção de soluções logicamente válidas e coerentes, que resolvam com qualidade os problemas que se deseja programar (FORBELLONE e EBERSPÄCHER, 2005).

Sendo assim, torna-se pertinente a criação de um código computacional para o cálculo de estruturas reticuladas planas que faça o estudante compreender a lógica do processo de cálculo matricial, não somente expondo os resultados, mas o tirando o mesmo da posição de mero usuário e fazendo com que este atue no processo, desenvolvendo assim seu senso crítico com relação aos resultados finais.

1.4 Delimitação do tema

Para o carregamento das estruturas será considerado que todas as cargas serão perpendiculares ou paralelas ao eixo da barra. Deste modo, forças que possuírem determinada inclinação ao eixo das barras devem ser decompostas em cargas perpendiculares e paralelas para ser possível a entrada de dados no *software*. Serão considerados apenas carregamentos lineares distribuídos nos elementos da estrutura e carregamentos concentrados são considerados nodais, ou seja, para aplicá-los em pontos intermediários de uma barra, é necessário subdividir a barra criando um nó específico para cada carga.

Serão considerados apenas efeitos de primeira ordem, assim será mantida a linearidade física e geométrica da estrutura, as seguintes hipóteses serão válidas:

1. Regime elástico-linear do material
2. Pequenas deformações em comparação à geometria original
3. Validade da hipótese de Navier-Bernoulli que seções planas de uma viga deformada permanecem planas.
4. Não serão considerados efeitos de corte.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente trabalho expressa uma técnica de resolução de estruturas isostáticas e hiperestáticas aporticadas. Para isso faz-se necessário o conhecimento dos métodos de cálculo de estruturas que são abordados em cursos de graduação de engenharia civil, a totalidade deste conhecimento é extensa e por isso é fundamental conhecer seus conceitos.

Basicamente, a Mecânica Estática trata das grandezas de força, dos princípios de ação e reação, transmissibilidade, decomposições e equilíbrio do ponto e corpo material no plano. Também são apresentados os diagramas de momentos fletores, esforços cortantes, axiais e de torção, que regem o comportamento dos esforços ao longo de um elemento, além de métodos para obtenção de momentos de primeira e segunda ordem. Com estes conceitos é possível garantir as condições de equilíbrio para estruturas isostáticas (MARTHA, 2010).

A Resistência dos Materiais trata dos conceitos de tensão e deformação, que garantem condições de compatibilidade para a resolução de problemas estaticamente indeterminados. Já a Teoria das Estruturas, ou Análise Estrutural conforme abordado, a partir de todos os conceitos citados anteriormente apresenta alguns métodos e uma série de técnicas para obtenção dos esforços e reações de apoio de estruturas hiperestáticas (MARTHA, 2010).

Para um modelo ser idealizado são necessários dois requisitos. Um de equilíbrio, para a estrutura ser estável, e outro de compatibilidade do material, para que os elementos da estrutura não venham à ruína. Segundo McCormac (2009), “Projeto estrutural inclui a disposição e o dimensionamento de estruturas e de suas partes de forma que elas suportem satisfatoriamente as cargas às quais possam estar sujeitas”.

Portanto, para adequar modelos matemáticos que garantem resultados satisfatórios às condições de serviço, fica explícita a necessidade do aprofundamento deste conteúdo.

2.1 Revisão bibliográfica

A introdução da tecnologia à análise estrutural é algo que tem ganhado bastante espaço nos últimos anos, e tem se tornado uma poderosa ferramenta na área de estruturas e no ensino destas disciplinas. A exemplo disso, Lana e Machado (2015) realizaram trabalho sobre a importância de *softwares* para a melhoria da metodologia do ensino, e concluíram que estes recursos não só auxiliam no aprendizado, mas também motivam os alunos e fazem com que os mesmos reflitam sobre seu desenvolvimento profissional.

Nesta linha, Carvalho (2010), em seu trabalho final de mestrado, desenvolveu um programa computacional de cálculo de estruturas reticuladas planas pelo Método dos Elementos Finitos, que ao realizar todos os cálculos de reações de apoio, esforços e demais incógnitas nos processos de análise estrutural, permite que o usuário possua uma ferramenta de auxílio nos resultados e criando certa sensibilidade ao produto final da análise.

Longo (2015) desenvolveu aplicativo de análise de estruturas reticuladas planas para a plataforma *Android*, evidenciando a tese de que as tecnologias devem ser exploradas e utilizadas para nos auxiliar com os trabalhos na área da engenharia.

A principal base para o desenvolvimento deste trabalho é o livro do Dr. Luiz Fernando Martha (ANÁLISE DE ESTRUTURAS: CONCEITOS E MÉTODOS BÁSICOS, 2010), que, em seu prefácio salienta o enfoque da análise de estruturas hiperestáticas em formulação matricial. Conforme supracitado, Martha é desenvolvedor do *software Ftool (Two-dimensional Frame Analysis)*, porém sua obra não necessariamente apresenta os passos para obter o código esperado, mas, no entanto apresenta todas as considerações necessárias para de fato obtê-lo.

2.2 Convenção de sinais

A convenção de sinais utilizada não apresenta consequências significativas, desde que sejam condições coerentes. Porém, o uso de convenções padronizadas facilita o entendimento e comunicação entre os engenheiros. (MCCORMAC, 2009).

As equações definidas pelo método dos deslocamentos determinam o equilíbrio dos nós de uma estrutura na direção das deslocabilidades (MARTHA, 2010). Nesta linha, é necessário determinar uma convenção de sinais para forças e deslocamentos, possibilitando a definição das equações de equilíbrio. Será adotada a convenção de Green, que considera positivas as forças e deslocamentos horizontais para a direita, forças e deslocamentos verticais para cima e momento aplicado e rotações no sentido anti-horário. Também é considerado o sistema de eixos cartesianos, abscissas, ordenadas e cotas.

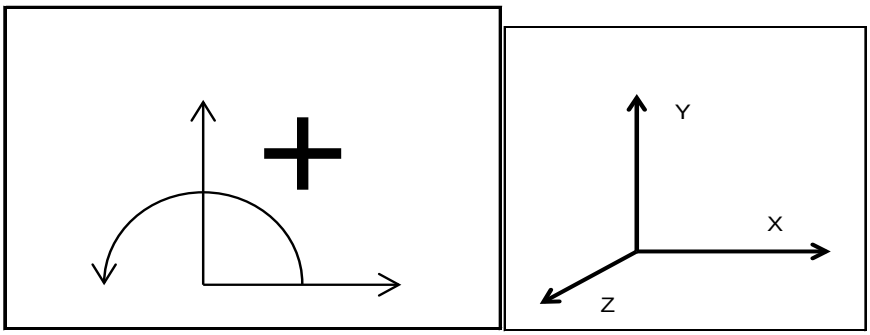


Figura 1 – Sentido positivo para cargas e deslocamentos segundo a convenção de Green e sistema de eixos considerado.

Além disso, é necessário adotar uma convenção de sinais para o traçado dos diagramas de esforços internos. Para isso, a convenção é associada ao sistema de eixos local destas barras e depende da posição de sua fibra inferior (linhas tracejadas paralelas a cada barra, a fim de orientar a convenção de sinais), localizada abaixo da barra quando se trata deste elemento em um sistema destrógeno, ou seja, visualizando o mesmo da esquerda para a direita. Deste modo, o ponto inicial da barra é localizado à esquerda e seu ponto final à direita. Quando tratamos de um elemento cujo ponto inicial encontra-se à direita, a fibra inferior fica localizada acima da barra (MARTHA, 2010).

A figura 2 exibe o sentido dos esforços positivos em função das extremidades iniciais e finais de um elemento e a posição do diagrama positivo em

função da fibra inferior. A barra é representada com uma linha espessa e a fibra inferior por uma linha tracejada, em ordem axial, cortante e momento.

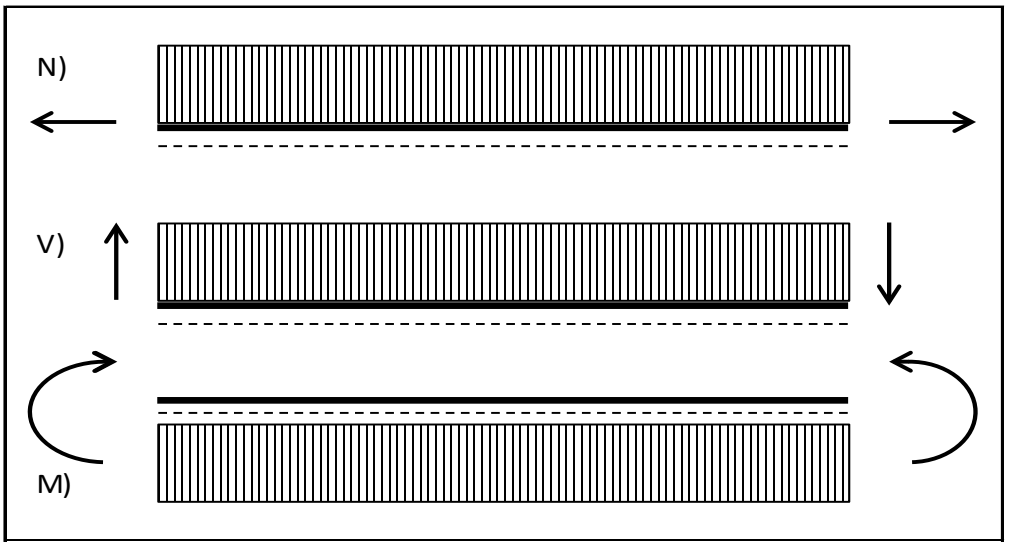


Figura 2 - Convenção para traçado de diagramas de esforços axiais, esforços cortantes e momentos fletores respectivamente.

2.3 Linearidade geométrica e linearidade física

As linearidades física e geométrica fornecem condições para simplificação do processo de cálculos de estruturas, servindo como base para as condições de equilíbrio e compatibilidade de um modelo estrutural (MARTHA, 2010).

A linearidade geométrica está relacionada com os deslocamentos e deformações dos elementos, assim quando uma estrutura após se deformar, permanecer contínua ao longo de todos os elementos e em relação aos seus vínculos externos garante-se que o elemento possui linearidade geométrica. Caso não haja linearidade geométrica, a hipótese de pequenos deslocamentos em relação a geometria do elemento não é válida, assim é necessário a análise de efeitos de segunda ordem, que consideram os deslocamentos da estrutura interferindo no equilíbrio da mesma, nesta condição, é necessário a utilização de processo iterativo para a solução do modelo estrutural (MARTHA, 2010).

A linearidade física está relacionada ao comportamento do material e a relação entre tensões e deformações. Assim quando há proporcionalidade linear

entre as deformações e as tensões de um elemento estrutural, e ainda quando ao ser descarregado este elemento não apresente qualquer deformação residual, pode-se garantir que este elemento se encontra em regime elástico-linear. Porém caso o elemento estrutural não se encontre neste regime, as deformações passam a interferir no cálculo do modelo estrutural, sendo necessário a consideração de efeitos de segunda ordem (MARTHA, 2010).

2.4 Condições de equilíbrio e compatibilidade

O principal objetivo de uma análise estrutural é a determinação das forças resultantes e reações que determinada estrutura sofre. Para que esta possua equilíbrio estático, deve atender às condições de equilíbrio, não somente a estrutura como um todo, mas todas as suas partes como corpos independentes. (GERE e WEAVER JR., 1990).

Da mecânica clássica, sabe-se que as condições de equilíbrio para certa configuração são impostas quando o resultado do somatório das forças para cada sentido de deslocabilidade for nulo, desta forma é possível calcular as configurações isostáticas (MARTHA, 2010).

Além das condições de equilíbrio estático, as estruturas devem atender às condições de compatibilidade, que se referem aos deslocamentos que ocorrem nos eixos de uma estrutura (translação ou rotação) e se esta poderá suportar. Estas condições devem ser atendidas em todos os pontos da estrutura, assim como as condições de equilíbrio (GERE e WEAVER JR., 1990).

Por exemplo, um deslocamento “δ” em uma estrutura composta por duas barras vinculadas. Para as duas barras, o deslocamento em cada uma deve ser igual. Tal situação é apresentada na figura 3.

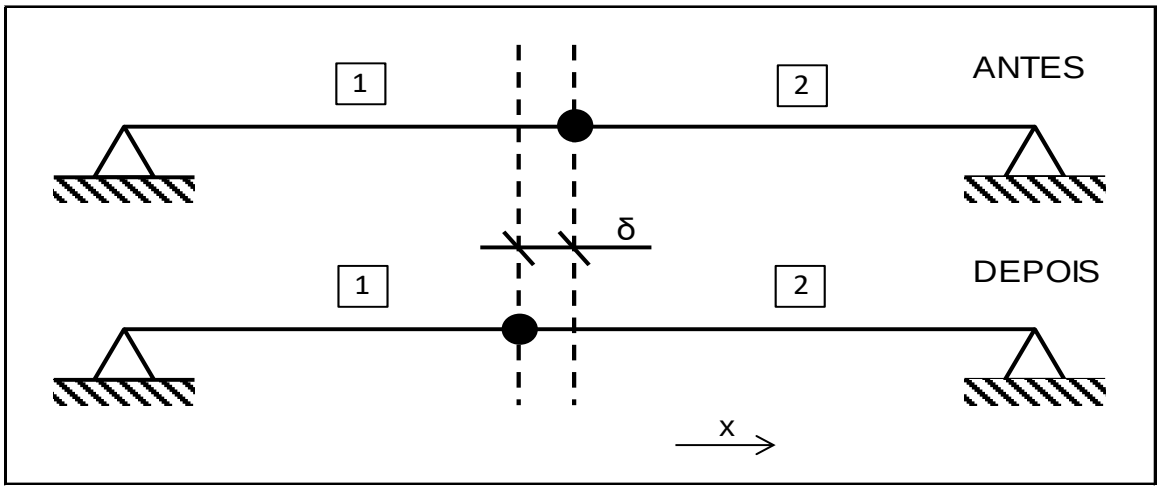


Figura 3 - Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações

Conforme ilustrado na figura 3, há um deslocamento na ligação entre as barras 1 e 2, portanto, a barra 1 possui o mesmo deslocamento da barra 2. Sendo δ um deslocamento qualquer, a equação de compatibilidade deste caso é expressa pela seguinte expressão.

$$-\delta_1 - \delta_2 = 0 \ \therefore \ -\delta_1 = +\delta_2 \quad (1)$$

No contexto acima, há relações matemáticas entre tensões e deformações, chamadas leis constitutivas, que definem o comportamento do material. Baseado na teoria da elasticidade que estabelece equações lineares para o comportamento do material em regime elástico linear é possível definir a equação acima a partir da lei de Hooke (MARTHA, 2010).

Sendo σ a tensão solicitante, E o módulo de elasticidade do material e Ɛ sua deformação específica, segundo a lei de Hooke, tem-se:

$$\sigma = E * \mathcal{E} \quad (2)$$

Sendo esta deformação uma razão entre o deslocamento e o comprimento inicial da barra L_0e que tensão é a razão entre o esforço N_0e área da seção transversal A_0, se obtém (3) e (4).

$$\frac{N_1}{A_1} = E_1 * \frac{\delta_1}{L_1} \quad (3)$$

$$\frac{N_2}{A_2} = E_2 * \frac{\delta_2}{L_2} \quad (4)$$

Isolando os deslocamentos das equações (3) e (4):

$$\delta_1 = \frac{N_1 * L_1}{A_1 * E_1} \quad (5)$$

$$\delta_2 = \frac{N_2 * L_2}{A_2 * E_2} \quad (6)$$

Substituindo as equações (5) e (6) em (1), temos:

$$-\frac{N_1 * L_1}{A_1 * E_1} = +\frac{N_2 * L_2}{A_2 * E_2} \quad (7)$$

Com isso, conclui-se que, a partir dos deslocamentos, surgem equações auxiliares para a resolução de sistemas de equilíbrio indeterminados.

2.5 Superposição de efeitos

Segundo McCormac (2009), "..., se o comportamento estrutural for linearmente elástico, as forças que agem em uma estrutura poderão ser separadas ou divididas em qualquer modo conveniente e a estrutura poderá ser analisada para os diferentes casos". Ou seja, para se chegar aos resultados finais, as solicitações de uma estrutura podem ser separadas para que seus resultados sejam somados algebricamente.

Conforme supracitado, os esforços e deslocamentos que ocorrem em uma estrutura com comportamento elástico linear, devido a um conjunto de carregamentos atuando simultaneamente, podem ser definidos analisando separadamente as cargas aplicadas na estrutura e somando os seus efeitos (esforços e deslocamentos). Com este princípio, é possível analisar estruturas hiperestáticas pela combinação de estruturas isostáticas, sobrepondo os efeitos destas estruturas para a determinação destes no modelo estrutural (LEET *et al*., 2010).

Para o comportamento da estrutura ser linear, há duas condições: o material apresenta apenas regime elástico-linear e a estrutura possui pequenos

deslocamentos. “..., os deslocamentos podem ser considerados pequenos quando as equações de equilíbrio escritas para a geometria indeformada da estrutura fornecem resultados praticamente iguais aos obtidos pelas mesmas equações de equilíbrio escritas para a geometria deformada da estrutura.” (MARTHA, 2010).

Para os casos em que não se pode considerar que os deslocamentos da estrutura são pequenos, as equações de equilíbrio dependem da deformação da mesma, sendo necessário um processo iterativo para definir essa deformação (MARTHA, 2010).

2.6 Equações de deslocamentos e esforços internos

A teoria de vigas de Navier explica conceitos matemáticos que idealizam o comportamento de barras, utilizando as hipóteses simplificadoras: deslocamentos são pequenos em relação às dimensões da seção transversal, deformações por cisalhamento são desprezadas, quando a barra se deforma suas seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da barra (hipótese de Bernoulli) e que o material possui comportamento elástico-linear, ou seja, a lei de Hooke (MARTHA, 2010).

Estes conceitos preveem os comportamentos axial, transversal e de torção das barras, sendo que o último não atua nos pórticos em questão, além disso, os efeitos axiais e transversais podem ser analisados separadamente e posteriormente combinados pela superposição dos efeitos. Desta forma esta teoria vale a partir de duas hipóteses básicas, seções planas permanecem planas e as deformações por efeitos de cisalhamento são desprezadas (MARTHA, 2010).

Com base no sistema de coordenadas são definidas funções para os deslocamentos, são elas, $n(x)$ deslocamentos longitudinais na direção x, $v(x)$ deslocamentos transversais na direção y e $\varphi(x)$ deslocamentos de rotação em torno de z. A linha elástica é definida pelos deslocamentos longitudinais e transversais, a partir de sua tangente é possível obter a equação das rotações (MARTHA, 2010).

Para um ponto qualquer, a expressão que relaciona a rotação e o deslocamento de um elemento é dada por (8).

$$\varphi = dv/dx \tag{8}$$

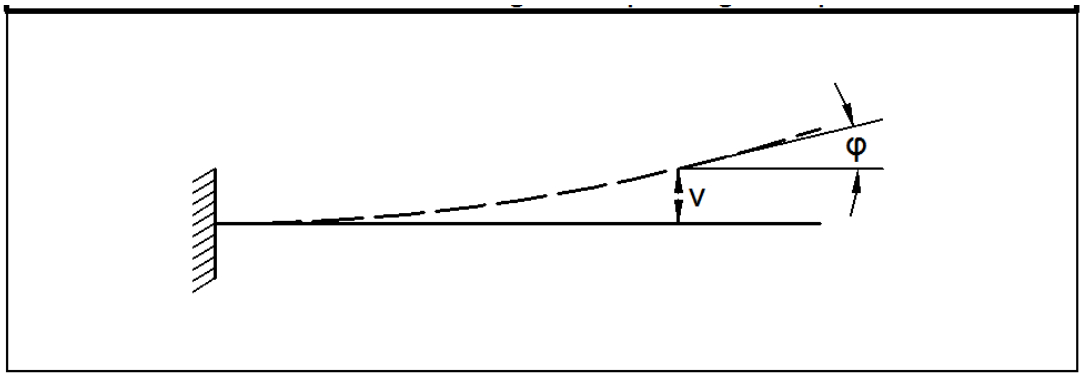


Figura 4 - Rotação da linha elástica de um ponto qualquer em uma viga

Para definir a linha elástica em termos dos esforços é necessário verificar as deformações que ocorrem ao longo dos elementos. Quando um elemento é submetido a carregamento axial surge um deslocamento no mesmo sentido e com isto deformações longitudinais.

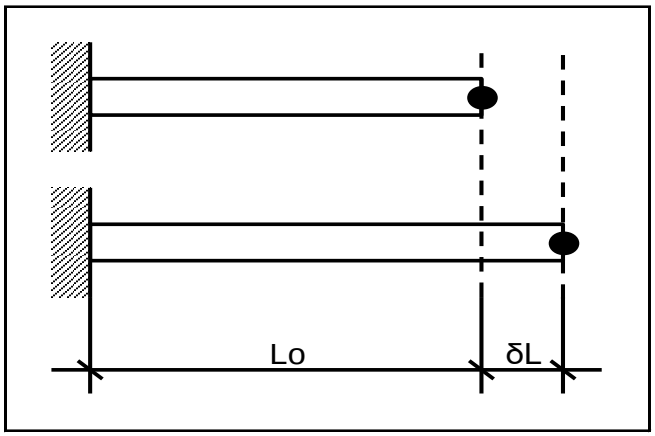


Figura 5 - Deformação global de uma barra

Conforme supracitado, para aplicação da equação (2) a deformação global é dada pela razão entre o deslocamento total e o comprimento inicial da barra, portanto, $\varepsilon = {}^{\delta L}/_{Lo}$. De modo recíproco, a deformação axial em termos infinitesimais é dada pela seguinte expressão, $\varepsilon a = {}^{d\delta}/_{dx}$ (9), vide figura 6 (adaptado de MARTHA, 2010).

Dado que tensão é uma relação de força e área, com a expressão (9) e a lei de Hooke (2), se obtém.

$$d\delta = \frac{N}{E * A} dx \tag{10}$$

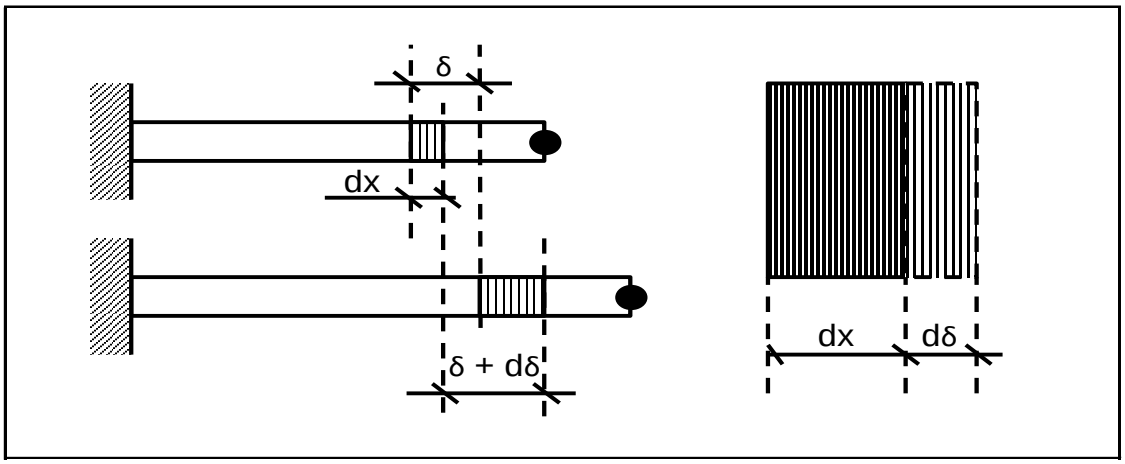


Figura 6 - Deformação axial em termos infinitesimais (à direita seção transversal deformada)

Quando um elemento é submetido a esforços de flexão, também surgem deformações axiais, causadas devido ao encurtamento das fibras superiores e alongamento das fibras inferiores para momentos fletores positivos. Para cada valor de y (vide figura 7) que dista da linha neutra, é possível obter um valor de deslocamento segundo a expressão $\delta = d\varphi * y$. Com o exemplo da figura 7 (adaptado de MARTHA, 2010) é possível obter a razão de deformação pela seguinte expressão:

$$\varepsilon f = {}^{d\varphi}/_{dx} * y \tag{11}$$

Além disso, o raio de curvatura r possibilita o cálculo da seção dx da viga após a deformação devido o momento fletor segundo a expressão $dx = r * d\varphi$. O inverso do raio de curvatura $(1/r)$ é definido como curvatura e, sua relação, é apresentada na expressão (12).

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r} \tag{12}$$

Com a expressão (8) na (12) se obtém (13). Esta última expressão mostra uma relação importante entre a curvatura e a segunda derivada da linha elástica (MARTHA, 2010).

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{r} \tag{13}$$

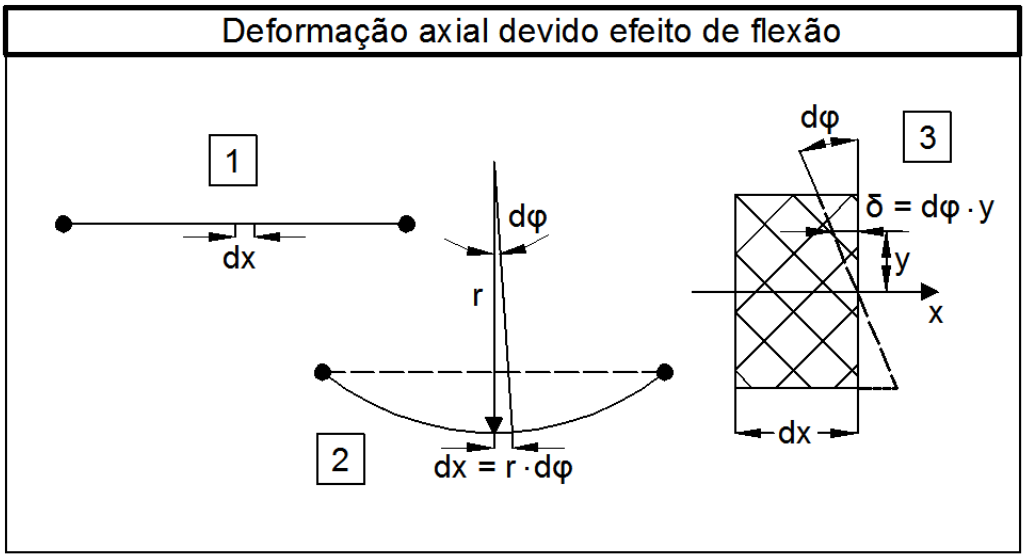


Figura 7 - Deformação axial devido efeito de flexão

Sabe-se que a tensão devido ao momento fletor para um ponto qualquer da seção transversal é dado pela relação (14), sendo y a altura da fibra em que se pretende calcular a tensão e I o momento de inércia da seção transversal.

$$\sigma = \frac{M * y}{I} \tag{14}$$

Substituindo as equações (11) e (14) na (2), é obtido (15), e substituindo a (12) na (15) equaciona-se a curvatura e o momento fletor (16), a partir disso pode ser escrita a segunda relação importante entre o momento fletor e a segunda derivada da linha elástica.

$$d\varphi = \frac{M}{E * I}\, dx \tag{15}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E * I} \tag{16}$$

Com base na figura 8 (adaptado de MARTHA, 2010), serão apresentadas, a partir das condições de equilíbrio, equações diferenciais que regem o comportamento dos esforços internos de uma viga, em que $\eta(x)$ é um carregamento axial distribuído, $q(x)$ é o carregamento transversal distribuído, $\mathrm{N}(x)$ é o esforço interno axial, $Q(x)$ é o esforço interno de corte e $M(x)$ é o esforço interno de flexão.

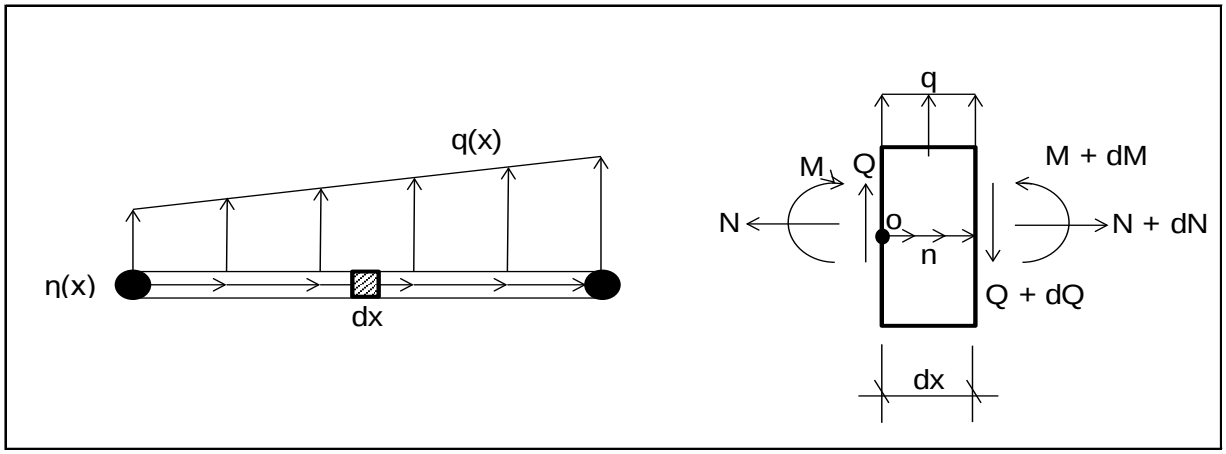


Figura 8 - Equilíbrio de um elemento infinitesimal (Carregamentos positivos)

A partir das equações de equilíbrio na seção transversal, são obtidas as relações a seguir. Vale lembrar que a equação dos momentos fletores despreza o valor infinitesimal do esforço cortante (MARTHA, 2010).

$$\sum Fx = 0 \ \rightarrow \ -N + (N + dN) + n(x) * dx = 0 \ \rightarrow \ \frac{dN}{dx} = \ -\eta(x) \tag{17}$$

$$\sum Fy = 0 \ \rightarrow \ \ Q - (Q + dQ) + q(x) * dx = 0 \ \rightarrow \ \frac{dQ}{dx} = \ q(x) \tag{18}$$

$$\sum Mo = 0 \ \rightarrow \ -M + (M + dM) + q(x) * \frac{dx^2}{2} - (Q + dQ) * dx = 0 \ \rightarrow \ \frac{dM}{dx} = Q(x) \tag{19}$$

Combinando as equações (18) e (19) conclui-se que existe uma relação entre o momento fletor e o carregamento distribuído:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x) \tag{20}$$

Obtidas as relações acima e adotando sistema de coordenadas destrógero é possível relacionar as deflexões com o carregamento, sendo.

$$v(x) = deflexões\ dos\ pontos\ da\ linha\ elástica; \tag{21}$$

$$\varphi(x) = \frac{dv(x)}{dx} = inclinações\ (rotações)\ dos\ pontos\ da\ linha\ elástica; \tag{22}$$

$$M(x) = \ \frac{d^2v}{dx^2} \ * E * I = equação\ de\ momentos\ fletores; \tag{23}$$

$$Q(x) = \frac{d^3v}{dx^3} * E * I = \frac{dM(x)}{dx} = equação\ de\ esforços\ cortantes \quad (24)$$

$$q(x) = -\frac{d^4v}{dx^4} * E * I = \frac{dQ(x)}{dx} = equação\ do\ carregamento \quad (25)$$

2.7 Método das forças (Flexibilidade)

Neste trabalho o método das forças foi utilizado para determinar as ações de carregamentos nodais devido ao carregamento distribuído.

Este método, também chamado de método da flexibilidade, consiste no cálculo de esforços ou reações através de equações de compatibilidade de deslocamentos, ao contrário do método dos deslocamentos, que utiliza equações de equilíbrio. O método das forças é necessário para o desenvolvimento do método dos deslocamentos (SORIANO, 2004).

Primeiramente, para a aplicação do método das forças, devem ser levados em consideração os teoremas da reciprocidade, ou seja, teoremas de Betti e de Maxwell.

O Teorema de Betti consiste na afirmação de que uma estrutura linear elástica, quando submetida a dois sistemas de forças independentes, o trabalho realizado pelo primeiro sistema será igual ao realizado pelo segundo: (MARTHA, 2010).

$$W_{i,j} = W_{j,i} \quad (26)$$

Portanto:

$$\sum P_i . \delta_{ij} = \sum P_j . \delta_{ji} \quad (27)$$

Tomando o teorema de Betti como base, se obtém o teorema de Maxwell. Este supõe que, utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, aplicam-se cargas unitárias na estrutura, e se as cargas são iguais, temos que: (MARTHA, 2010).

$$P_i = P_j = 1\ kN \quad (28)$$

Conclui-se que:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{29}$$

O método das forças inicia-se com a seleção de um conjunto de redundantes estáticas que serão retiradas da estrutura hiperestática. Então, esta estrutura torna-se isostática. O modelo isostático é denominado sistema principal (CASO 0). Posteriormente, serão escritas equações de compatibilidade de deslocamentos nas direções das redundantes estáticas escolhidas, procedendo para a superposição de esforços. (SORIANO, 2004).

Na figura 9, é apresentado um exemplo de estrutura hiperestática e os três casos oriundos da escolha das redundantes.

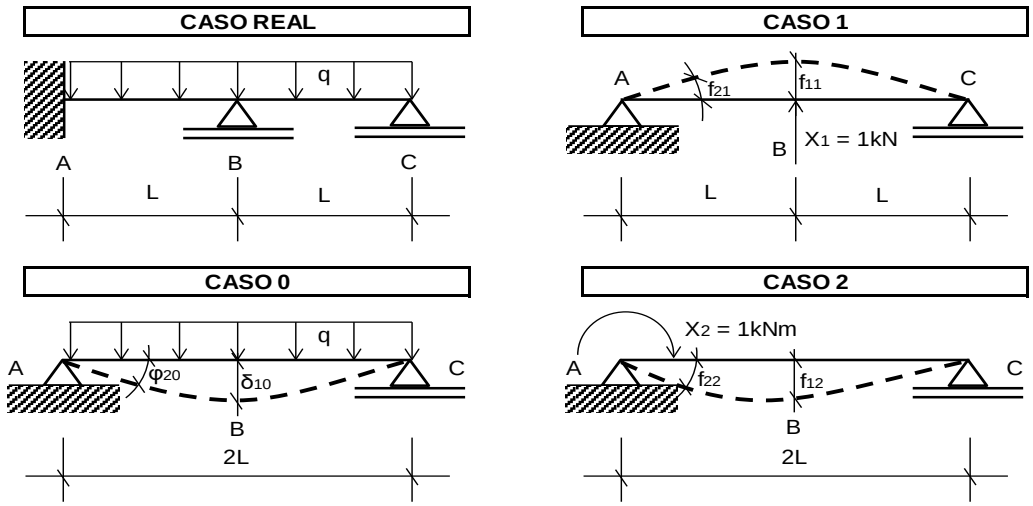


Figura 9 - Resolução de estrutura hiperestática via método das forças

As redundantes escolhidas foram o apoio tipo 1 no centro da barra e o momento fletor no apoio do tipo engaste, na esquerda. Por isso, o caso 1 utiliza carga unitária vertical no lugar do apoio tipo 1, e no caso 2 é utilizado um momento concentrado unitário na extremidade esquerda do pórtico.

Sendo os deslocamentos representados pelos símbolos δ e φ, os coeficientes de flexibilidade f, e as redundantes estáticas representadas por X, têm-se as expressões a seguir, referentes à estrutura da figura 9:

$$\begin{cases} \delta_{10} + f_{11}.\mathrm{X}_1 + f_{12}.\mathrm{X}_2 = 0 \\ \varphi_{20} + f_{21}.\mathrm{X}_1 + f_{22}.\mathrm{X}_2 = 0 \end{cases} \tag{30}$$

Ou, em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \delta_{10} \\ \varphi_{20} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Os valores dos coeficientes de flexibilidade f_{ij} bem como os termos de carga ($\delta_{ij}\ e\ \varphi_{ij}$), são encontrados pelo método da força unitária, que se escreve:

$$f_{\mathrm{ij}} = \sum \int_X \left(\frac{N_i . N_j}{E . A} + \frac{M_i . M_j}{E . I} + \frac{V_i . V_j}{G . A} + \frac{T_i . T_j}{G . J} \right) dx \quad (32)$$

Onde N são os esforços axiais, M momentos fletores, V esforços cortantes e T esforços devido torção. E é o módulo de elasticidade do material, A é a área da seção transversal, I o momento de inércia à flexão e J momento de inércia à torção da seção transversal e G é o módulo de cisalhamento do material. Por não serem considerados os efeitos de torção e corte, suas respectivas parcelas que contém os mesmos tiveram valor igual à zero (0).

2.8 Método dos deslocamentos (Rigidez)

É o método mais utilizado para a análise de estruturas, tendo em vista sua praticidade para ser feito computacionalmente. Neste, o número de incógnitas a serem calculadas é igual ao grau de indeterminação estática (GERE e WEAVER JR., 1990).

Este método consiste em somar uma série de casos básicos que atendem às condições de compatibilidade da estrutura, porém, não às condições de equilíbrio, sendo necessária a superposição dos efeitos de cada caso básico para que a estrutura atenda às condições de equilíbrio e desta forma obter o resultado de reações de apoio e esforços internos do modelo estrutural (MARTHA, 2010).

Para cada caso básico existem infinitos valores de deslocabilidades (componentes de deslocamentos e rotações nodais que estão livres) que satisfazem as condições de compatibilidade dos apoios, nos deslocamentos no interior das barras e em suas ligações, mas destas infinitas configurações, apenas uma combinação satisfaz o equilíbrio da estrutura (MARTHA, 2010).

Os deslocamentos dos nós são tratados como incógnitas. Então, são escritas as equações de equilíbrio para as cargas aplicadas, propriedades dos elementos estruturais conectados ao nó e deslocamentos desconhecidos dos nós para cada nó da estrutura. Isto resulta em equações algébricas lineares que serão resolvidas e, consequentemente, fornecerão os deslocamentos dos nós (MCCORMAC, 2009).

Segundo Soares (2011), as etapas fundamentais para resolução de problemas pelo método dos deslocamentos são as seguintes: (1) identificação estrutural, onde será definido um sistema global de eixos da estrutura e os sistemas de eixos locais para cada barra; (2) matriz de rigidez das barras e vetor de cargas nodais, neste processo são determinadas as matrizes de rigidez elementares para cada barra da estrutura, com base nos sistemas de eixos locais; (3) determinação da matriz de rigidez global e do vetor de cargas globais a partir da associação das matrizes elementares de cada barra da estrutura; (4) introduzir condições de contorno da estrutura; (5) resolução dos sistemas de equações lineares; e (6) determinar os esforços solicitantes na estrutura.

O primeiro passo, chamado de caso zero, é o cálculo dos esforços de modo a equilibrá-los em função somente do carregamento aplicado na estrutura. Para os demais casos, os esforços, “reações de apoio fictícias”, são calculados de modo que a estrutura se mantenha em equilíbrio em função de apenas uma deslocabilidade unitária enquanto as demais são mantidas nulas. Na sequência, o procedimento é repetido caso a caso. Desta forma são obtidos os valores destes esforços, também chamados de coeficientes de rigidez, tantos quanto forem necessários na mesma ordem em que existirem deslocabilidades na estrutura em questão (quantidade de casos básicos) (MARTHA, 2010).

Com os valores dos esforços supracitados, aplica-se superposição para cada esforço externo de modo que a resultante seja zero, assim as condições de equilíbrio são restabelecidas e as deformações reais que ocorrerão em cada nó da estrutura são obtidas. Os esforços internos são também determinados aplicando-se a superposição dos diagramas de cada um dos casos básicos, neste caso a somatória da superposição é o resultado final do esforço, e, de modo recíproco são obtidas as reações de apoio (MARTHA, 2010).

O coeficiente de rigidez permite uma relação com força e deslocamento segundo a expressão $F = k * \delta$ onde F é uma força, k o coeficiente de rigidez e δ um deslocamento unitário. A figura 10 ilustra a condição.

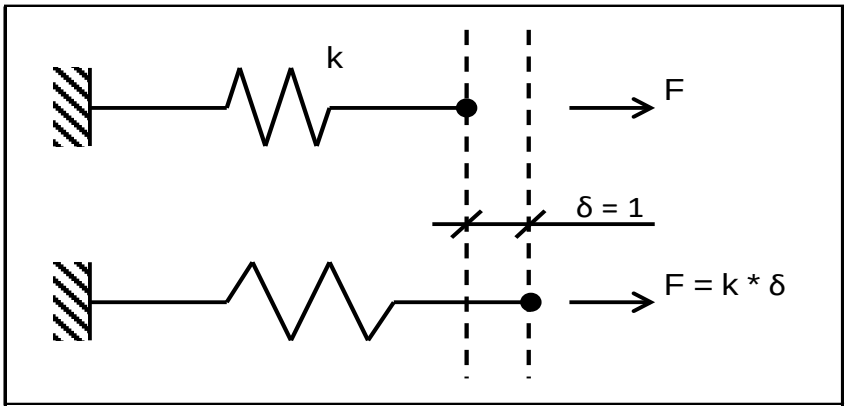


Figura 10 - Coeficiente de rigidez devido deslocamento unitário

2.8.1 Graus de liberdade

Quando uma estrutura é submetida a carregamentos ou forças, alguns nós sofrerão deslocamentos desconhecidos, chamados graus de liberdade. Estes deslocamentos serão as incógnitas na aplicação deste método (HIBBELER, 2013).

Em estruturas planas existe a possibilidade da ocorrência de três tipos de graus de liberdade em seus nós, sendo dois translacionais ao plano da estrutura e o terceiro que representa a rotação deste ponto. Os graus de liberdade podem ser classificados como livres, quando não há nenhum tipo de travamento da deslocabilidade do nó (deslocamentos desconhecidos), ou restringido, quando existir travamento na deslocabilidade (deslocamentos conhecidos). Os graus de liberdade ordenam a superposição das matrizes de rigidez de barra rotacionadas na matriz de rigidez global da estrutura e, para isso, deve ser adotada uma ordem na distribuição dos deslocamentos para compor as matrizes de rigidez elementares (SORIANO, 2005).

A ordem da orientação dos deslocamentos utilizada é horizontal, vertical e giro, vide figura 11.

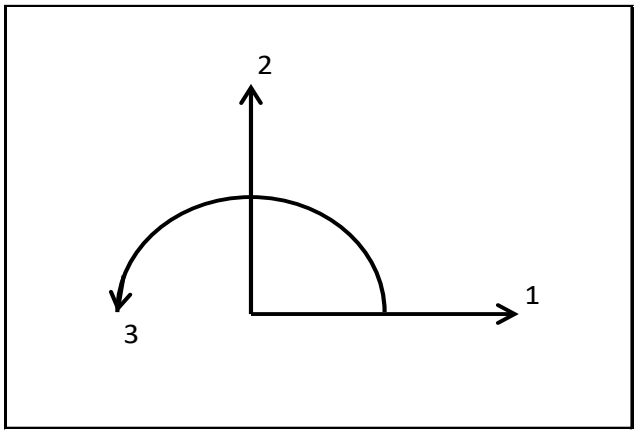


Figura 11 - Orientação dos graus de liberdade

2.8.2 Método da rigidez x Método matricial

Neste trabalho é utilizado o método da rigidez matricial para análise de estruturas reticuladas. Este método tem como base o método da rigidez, porém difere no número de deslocabilidades utilizadas para o cálculo. No método da rigidez, as deslocabilidades da estrutura são os nós, que não possuem restrição externa (apoios), assim é possível determinar o sistema hipergeométrico da estrutura (caso 0), restringindo as deslocabilidades do modelo estrutural, assim as barras do modelo estrutural são consideradas engastadas nas duas extremidades, e a partir de soluções fundamentais para estas barras, obtidas através do método das forças, é possível determinar as reações de apoio fictícias destas deslocabilidades restringidas (MARTHA, 2010).

Os demais casos são referentes aos deslocamentos ocorridos na estrutura após a aplicação de um deslocamento unitário nas deslocabilidades da estrutura. Com a aplicação destes deslocamentos são definidos os coeficientes de rigidez relacionado as deslocabilidades da estrutura. Após conhecer as reações de apoio fictícias e os coeficientes de rigidez, através da superposição dos efeitos é possível determinar equações de equilíbrio para a solução do modelo estrutural (MARTHA, 2010).

Já para método matricial todos os nós da estrutura são considerados deslocabilidades, sendo chamados de graus de liberdade. Nesta linha são definidas as reações de apoio fictícias para todos os nós da estrutura formando o vetor de cargas do modelo estrutural. Também são definidos para todos os nós os coeficientes de rigidez, e estes coeficientes são posicionados em uma matriz de rigidez. Portanto neste método restrições externas da estrutura são consideradas em etapa posterior do cálculo, onde são realizadas operações matriciais para a resolução do modelo estrutural. Tais operações matriciais justifica a utilização deste método para a implementação computacional (MARTHA, 2010).

2.8.3 Matriz de rigidez elementar

Segundo Soriano (2005), “é mais prático trabalhar com eixos de referências locais em cada barra, onde o eixo x tem sua origem em uma das extremidades da barra dirigindo-se para outra extremidade da barra, já os eixos y e z são paralelos a seção transversal do elemento”.

A matriz de rigidez elementar é obtida a partir da superposição de deslocamentos unitários nas direções onde os vínculos são restringidos. Portanto, são necessárias quatro configurações desta matriz, são elas, barra sem articulações (engaste-engaste, $[Ke_{(E-E)}]$), barra com nó inicial articulado (rótula-engaste, $[Ke_{(R-E)}]$), barra com nó final articulado (engaste-rótula, $[Ke_{(E-R)}]$) e articulações nas duas extremidades da barra (rótula-rótula, $[Ke_{(R-R)}]$). Assim, as possíveis matrizes de rigidez para barras de pórticos planos são definidas através das expressões a seguir onde E é o módulo de elasticidade do material, A área da seção transversal da barra, I o momento de inércia em relação ao eixo horizontal da seção transversal da barra e L o comprimento da barra.

Para a determinação da matriz de rigidez, com a configuração engaste-engaste, a barra possui 6 graus de liberdade como demonstrado na figura 12.

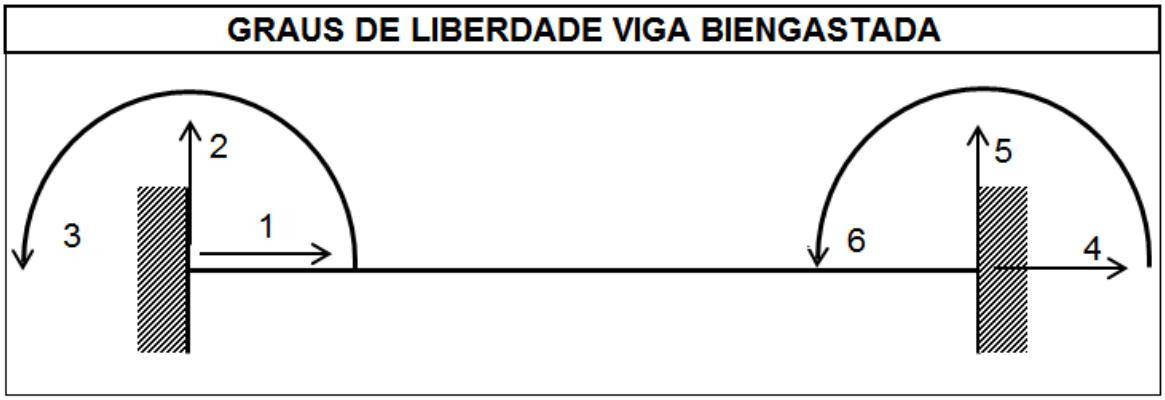
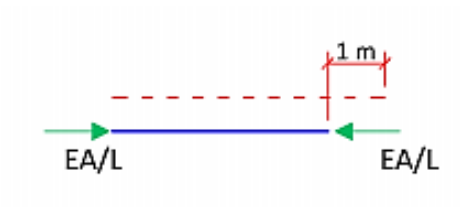
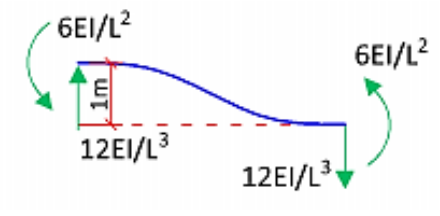
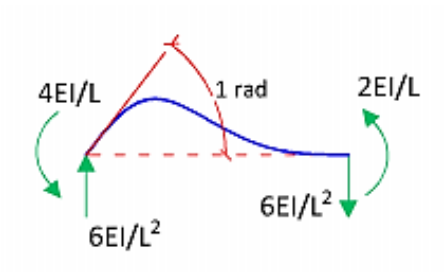
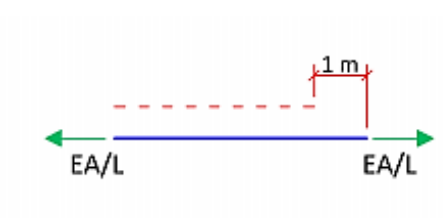


Figura 12 – graus de liberdade tipo engaste-engaste.

Assim aplicando um deslocamento unitário em cada um dos graus de liberdade, são encontrados os seguintes coeficientes de rigidez apontados na figura 13.

	$K_{11} = EA/L$ $K_{12} = 0$ $K_{13} = 0$	$K_{14} = -EA/L$ $K_{15} = 0$ $K_{16} = 0$
	$K_{21} = 0$ $K_{22} = 12EI/L^3$ $K_{23} = 6EI/L^2$	$K_{24} = 0$ $K_{25} = -12EI/L^3$ $K_{26} = 6EI/L^2$
	$K_{31} = 0$ $K_{32} = 6EI/L^2$ $K_{33} = 4EI/L$	$K_{34} = 0$ $K_{35} = -6EI/L^2$ $K_{36} = 2EI/L$
	$K_{41} = -EA/L$ $K_{42} = 0$ $K_{43} = 0$	$K_{44} = EA/L$ $K_{45} = 0$ $K_{46} = 0$

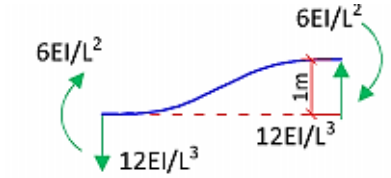
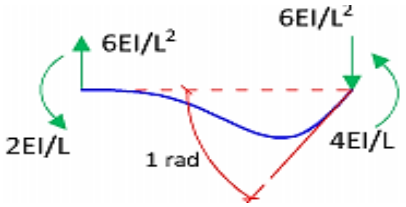
	$K_{51} = 0$ $K_{52} = -12EI/L^3$ $K_{53} = -6EI/L^2$	$K_{54} = 0$ $K_{55} = 12EI/L^3$ $K_{56} = -6EI/L^2$
	$K_{61} = 0$ $K_{62} = 6EI/L^2$ $K_{63} = 2EI/L$	$K_{64} = 0$ $K_{65} = -6EI/L^2$ $K_{66} = 4EI/L$

Figura 13 – Coeficientes de rigidez para a matriz do tipo engaste-engaste.

Realizando o espalhamento destes coeficientes na em suas respectivas posições, de acordo com a identificação do grau de liberdade, é encontrado a seguinte matriz de rigidez elementar:

$$[Ke_{(E\text{-}E)}] = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{L^2} & +\frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & +\frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & +\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & +\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{L^2} & +\frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & +\frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Outra possibilidade de configuração das matrizes de rigidez elementares é a rotula engaste, possui 6 graus de liberdade como demonstrado na figura 14. Porém, em apenas cinco destes graus de liberdade são restringidos os seus deslocamentos, sendo permitida a rotação da terceira deslocabilidade. Assim, todos os coeficientes da matriz de rigidez associados ao terceiro grau de liberdade são nulos.

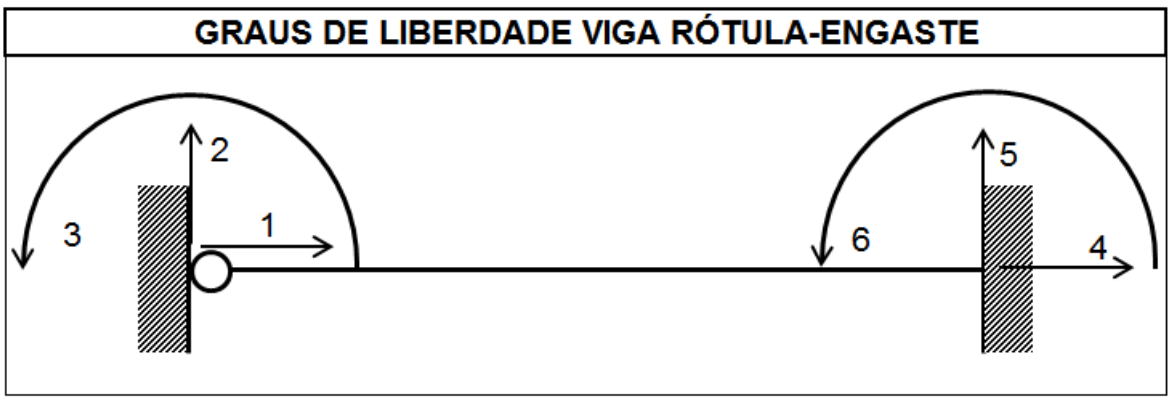


Figura 14 – graus de liberdade do tipo rótula-engaste.

Nesta linha, aplicando um deslocamento unitário em cada um dos graus de liberdade, são encontrados os seguintes coeficientes de rigidez, apontados na figura 15.

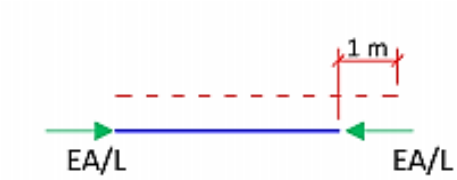
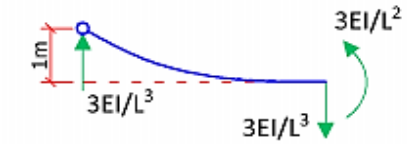
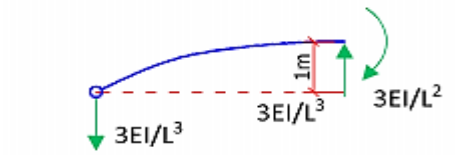
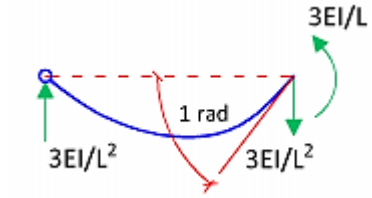
	K_{11} = EA/L K_{12} = 0 K_{13} = 0	K_{14} = -EA/L K_{15} = 0 K_{16} = 0
	K_{21} = 0 K_{22} = 3EI/L³ K_{23} = 0	K_{24} = 0 K_{25} = -3EI/L³ K_{26} = 3EI/L²
	K_{41} = -EA/L K_{42} = 0 K_{43} = 0	K_{44} = EA/L K_{45} = 0 K_{46} = 0
	K_{51} = 0 K_{52} = -3EI/L³ K_{53} = 0	K_{54} =0 K_{55} = 3EI/L³ K_{56} = -3EI/L²
	K_{61} = 0 K_{62} = 3EI/L² K_{63} = 0	K_{64} = 0 K_{65} = -3EI/L² K_{66} = 3EI/L

Figura 15 – Coeficientes de rigidez para a matriz do tipo rótula-engaste.

Realizando o espalhamento destes coeficientes na em suas respectivas posições, de acordo com a identificação do grau de liberdade, é encontrado a seguinte matriz de rigidez elementar com rotula na extremidade da esquerda:

$$[Ke_{(R\text{-}E)}] = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & +\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & +\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & +\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & +\frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & +\frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Realizando procedimento análogo a estes dois é possível determinar as matrizes de rigidez elementares das outras configurações possíveis, engaste-rotula e rotula-rotula. As matrizes destes casos são demonstradas a seguir:

$$[Ke_{(E\text{-}R)}] = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{3EI}{L^3} & +\frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & +\frac{3EI}{L^2} & +\frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & +\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & +\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$[Ke_{(R\text{-}R)}] = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & +\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

2.8.4 Matriz de rotação

A matriz de rotação tem como funcionalidade adequar o sistema local de uma barra para o sistema global da estrutura, realizando a transformação de coordenadas xy (sistema local) para coordenadas XY (sistema global), com base nos cossenos diretores das barras (SORIANO, 2005).

Para obter esta matriz, são necessários o seno e cosseno de “θ”, ângulo formado através da rotação no sentido horário a partir do eixo global até o eixo local. A obtenção destes valores se dá pela divisão do cateto pela hipotenusa, sendo que a componente horizontal corresponde ao cosseno e a componente vertical corresponde ao seno. Como um momento aplicado não possui transformação quando o elemento é rotacionado, o mesmo possui transformação igual a um. Ou seja, um momento qualquer aplicado na extremidade de uma barra com um θ qualquer será o mesmo se esta barra for tratada horizontalmente (MARTHA, 2010).

Segundo a orientação dos graus de liberdade de uma barra, a matriz de rotação possui a característica abaixo.

$$[R] = \begin{bmatrix} +\cos\theta & +sen\,\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\,\theta & +\cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\cos\theta & +sen\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\,\theta & +\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Para realizar a rotação de uma matriz elementar, utiliza-se a seguinte equação:

$$[Kr] = [R]^T * [Ke] * [R] \quad (38)$$

Onde [Kr] é a matriz de rigidez elementar da barra no referencial global da estrutura, [R] matriz de rotação e [Ke] é a matriz de rigidez elementar da barra no referencial local da estrutura. A propriedade da matriz de rigidez elementar rotacionada é permitir o cálculo dos esforços internos. (SORIANO, 2005).

2.8.5 Matriz de rigidez global

A matriz de rigidez global é a inversa da matriz de flexibilidade de uma estrutura e os coeficientes de rigidez dispostos nesta matriz são numericamente iguais à força restritiva na direção do deslocamento. A matriz global é composta pelas matrizes de rigidez elementares rotacionadas. Sua propriedade é permitir o cálculo dos deslocamentos globais nos graus de liberdade livres (SORIANO, 2005).

Após a rotação das matrizes de rigidez elementares, parte-se para o processo de montagem da matriz de rigidez global que ocorre através da superposição dos efeitos das matrizes de rigidez elementares de acordo com os graus de liberdade da estrutura, ou seja, a matriz de rigidez global é a soma dos coeficientes de rigidez das matrizes elementares rotacionadas vinculadas elemento a elemento em seus graus de liberdade (MARTHA, 2010).

Para exemplificar o processo será apresentado na figura 16 o espalhamento de duas matrizes elementares de pórtico em uma matriz de rigidez global. As barras

são nomeadas com letras, no caso, A e B, e os graus de liberdade serão nomeados com números, de 1 a 9 para este exemplo.

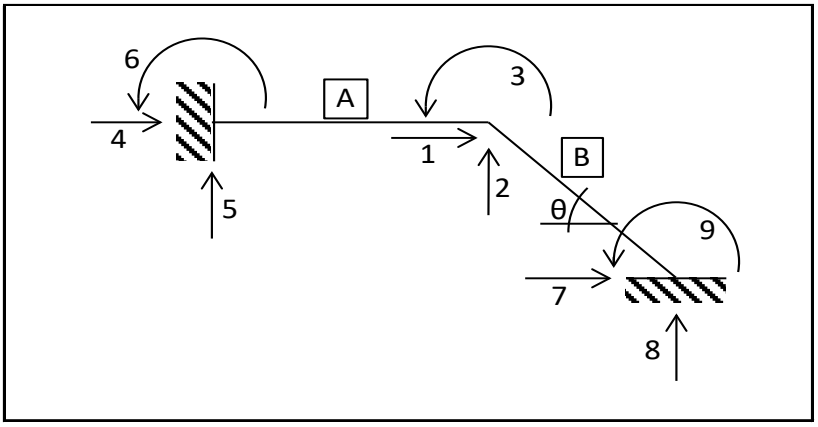


Figura 16 - Exemplo de estrutura com os graus de liberdade nomeados para espalhamento na matriz de rigidez global

Sendo a barra A horizontal, sua matriz de rigidez elementar é apresentada acima pela expressão (34), neste ponto será apresentada a mesma matriz, porém referenciada em seus graus de liberdade [K_A] (39) conforme figura 12. Já a barra B possui um ângulo θ em relação à horizontal, desta forma é necessária a rotação de sua matriz de rigidez, aplicando a transformação (38) é obtido [K_B] (40), esta será fracionada em duas partes para melhor visualização.

$$[K_A] = \begin{array}{cccccccc} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \\ +E*A/L & 0 & 0 & -E*A/L & 0 & 0 & \mathbf{4} \\ 0 & +12*E*I/L^3 & +6*E*I/L^2 & 0 & -12*E*I/L^3 & +6*E*I/L^2 & \mathbf{5} \\ 0 & +6*E*I/L^2 & +4*E*I/L & 0 & -6*E*I/L^2 & +2*E*I/L & \mathbf{6} \\ -E*A/L & 0 & 0 & +E*A/L & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & -12*E*I/L^3 & -6*E*I/L^2 & 0 & +12*E*I/L^3 & -6*E*I/L^2 & \mathbf{2} \\ 0 & +6*E*I/L^2 & +2*E*I/L & 0 & -6*E*I/L^2 & +4*E*I/L & \mathbf{3} \end{array} \quad (39)$$

Da superposição das duas matrizes acima se percebe que apenas os graus de liberdade 1, 2 e 3 são concomitantes às duas barras, portanto para estes pontos existe a superposição dos efeitos das duas barras para a composição do coeficiente de rigidez. Também se nota que não existe relação alguma entre os graus de liberdade (5, 6 e 7) e (8, 9 e 10), e, portanto, nas interseções entre estes graus o valor do coeficiente de rigidez é nulo. A matriz de rigidez global (41) para este caso é apresentada particionada em seguida.

$$[K_B] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\textbf{1} & \textbf{2} & \textbf{3} & \textbf{7} & \textbf{8} & \textbf{9} & \\
\hline
\begin{array}{c}+ A*E*\cos^2(\theta)/L \\ + 12*E*I*\text{sen}^2(\theta)/L^3\end{array} & \begin{array}{c}+ A*E*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L \\ - 12*E*I*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L^3\end{array} & - 6*E*I*\text{sen}(\theta)/L^2 & \begin{array}{c}- A*E*\cos^2(\theta)/L \\ - 12*E*I*\text{sen}^2(\theta)/L^3\end{array} & \begin{array}{c}- A*E*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L \\ + 12*E*I*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L^3\end{array} & - 6.0*E*I*\text{sen}(\theta)/L^2 & \textbf{1} \\
\hline
\begin{array}{c}+ A*E*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L \\ - 12*E*I*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L^3\end{array} & \begin{array}{c}+ A*E*\text{sen}^2(\theta)/L \\ + 12*E*I*\cos^2(\theta)/L^3\end{array} & + 6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & \begin{array}{c}- A*E*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L \\ + 12*E*I*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L^3\end{array} & \begin{array}{c}- A*E*\text{sen}^2(\theta)/L \\ - 12*E*I*\cos^2(\theta)/L^3\end{array} & + 6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & \textbf{2} \\
\hline
- 6*E*I*\text{sen}(\theta)/L^2 & + 6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & 4*E*I/L & + 6*E*I*\text{sen}(\theta)/L^2 & - 6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & 2*E*I/L & \textbf{3} \\
\hline
\begin{array}{c}- A*E*\cos^2(\theta)/L \\ - 12*E*I*\text{sen}^2(\theta)/L^3\end{array} & \begin{array}{c}- A*E*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L \\ + 12*E*I*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L^3\end{array} & + 6*E*I*\text{sen}(\theta)/L^2 & \begin{array}{c}+ A*E*\cos^2(\theta)/L \\ + 12*E*I*\text{sen}^2(\theta)/L^3\end{array} & \begin{array}{c}+ A*E*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L \\ - 12*E*I*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L^3\end{array} & + 6*E*I*\text{sen}(\theta)/L^2 & \textbf{7} \\
\hline
\begin{array}{c}- A*E*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L \\ + 12*E*I*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L^3\end{array} & \begin{array}{c}- A*E*\text{sen}^2(\theta)/L \\ - 12*E*I*\cos^2(\theta)/L^3\end{array} & - 6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & \begin{array}{c}+ A*E*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L \\ - 12*E*I*\cos(\theta)*\text{sen}(\theta)/L^3\end{array} & \begin{array}{c}+ A*E*\text{sen}^2(\theta)/L \\ + 12*E*I*\cos^2(\theta)/L^3\end{array} & - 6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & \textbf{8} \\
\hline
- 6*E*I*\text{sen}(\theta)/L^2 & + 6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & 2*E*I/L & + 6*E*I*\text{sen}(\theta)/L^2 & - 6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & 4*E*I/L & \textbf{9} \\
\hline
\end{array}$$

(40)

$$
[K] = \begin{array}{|ccccccccc|c}
\multicolumn{1}{c}{\mathbf{1}} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{2}} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{3}} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{4}} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{5}} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{6}} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{7}} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{8}} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{9}} & \\
\hline
+A*E*\cos^2(\theta)/L + 12*E*I*\mathrm{sen}^2(\theta)/L^3 + E*A/L & +A*E*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L - 12*E*I*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L^3 & -6*E*I*\mathrm{sen}(\theta)/L^2 & -E*A/L & 0 & 0 & -A*E*\cos^2(\theta)/L - 12*E*I*\mathrm{sen}^2(\theta)/L^3 & -A*E*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L + 12*E*I*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L^3 & -6.0*E*I*\mathrm{sen}(\theta)/L^2 & \mathbf{1} \\
+A*E*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L - 12*E*I*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L^3 & +A*E*\mathrm{sen}^2(\theta)/L + 12*E*I*\cos^2(\theta)/L^3 + 12*E*I/L^3 & 6*E*I*\cos(\theta)/L^2 - 6*E*I/ & 0 & -12*E*I/L^3 & -6*E*I/L^2 & -A*E*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L + 12*E*I*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L^3 & -A*E*\mathrm{sen}^2(\theta)/L - 12*E*I*\cos^2(\theta)/L^3 & +6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & \mathbf{2} \\
-6*E*I*\mathrm{sen}(\theta)/L^2 & +6*E*I*\cos(\theta)/L^2 - 6*E*I/L^2 & 4*E*I/L + 4*E*I/L & 0 & +6*E*I/L^2 & +2*E*I/L & +6*E*I*\mathrm{sen}(\theta)/L^2 & -6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & 2*E*I/L & \mathbf{3} \\
-E*A/L & 0 & 0 & +E*A/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \\
0 & -12*E*I/L^3 & +6*E*I/L^2 & 0 & +12*E*I/L^3 & +6*E*I/L^2 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \\
0 & -6*E*I/L^2 & +2*E*I/L & 0 & +6*E*I/L^2 & +4*E*I/L & 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} \\
-A*E*\cos^2(\theta)/L - 12*E*I*\mathrm{sen}^2(\theta)/L^3 & -A*E*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L + & +6*E*I*\mathrm{sen}(\theta)/L^2 & 0 & 0 & 0 & +A*E*\cos^2(\theta)/L + 12*E*I*\mathrm{sen}^2(\theta)/L^3 & +A*E*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L - 12*E*I*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta) & +6*E*I*\mathrm{sen}(\theta)/L^2 & \mathbf{7} \\
-A*E*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L + 12*E*I*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L^3 & -A*E*\mathrm{sen}^2(\theta)/L - 12*E*I*\cos^2(\theta)/L^3 & -6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & 0 & 0 & 0 & +A*E*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L - 12*E*I*\cos(\theta)*\mathrm{sen}(\theta)/L^3 & +A*E*\mathrm{sen}^2(\theta)/L + 12*E*I*\cos^2(\theta)/L^3 & -6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & \mathbf{8} \\
-6*E*I*\mathrm{sen}(\theta)/L^2 & +6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & 2*E*I/L & 0 & 0 & 0 & +6*E*I*\mathrm{sen}(\theta)/L^2 & -6*E*I*\cos(\theta)/L^2 & 4*E*I/L & \mathbf{9} \\
\hline
\end{array}
$$

(41)

É conveniente fracionar a matriz global em quatro entes para os cálculos subsequentes.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \quad (42)$$

Onde a matriz $[K_{11}]$ é quadrada, simétrica e representa os graus de liberdade livres. A matriz $[K_{12}]$ é a fatia da matriz global cujas linhas são referentes aos graus de liberdade livres e as colunas aos graus de liberdade restringidos. A matriz $[K_{21}]$ será a fatia da matriz global cujas linhas representam os graus de liberdade restringidos e colunas os graus de liberdade livres. A matriz de rigidez $[K_{22}]$ é quadrada, simétrica e representa os graus de liberdade restringidos.

2.8.6 Sistema de equações de equilíbrio

O sistema de equações de equilíbrio do método dos deslocamentos é representado pela multiplicação da matriz de rigidez global pelo vetor global dos deslocamentos nodais, resultando no vetor global das forças nodais. O vetor dos deslocamentos globais é dividido em duas formas de deslocamentos, os deslocamentos nodais livres e os restringidos (localizados nos apoios da estrutura). O vetor global das cargas nodais contém as forças externas aplicadas na estrutura e suas reações de apoio (SORIANO, 2005). Ou seja, o sistema de equação geral da estrutura é o seguinte:

$$[K]\ x\ \{D\} = \{F\} \quad (43)$$

Onde:

[K] = Matriz de rigidez global da estrutura;

{D} = Vetor dos deslocamentos globais;

{F} = Vetor das forças globais.

Tal sistema pode ser particionado em outros dois sistemas, o primeiro sistema para definir os deslocamentos desconhecidos, e o segundo as forças desconhecidas (reações de apoio da estrutura). Para realizar este particionamento é necessário que primeiro se defina a numeração dos graus de liberdade livres da estrutura, e após

definir todos os graus de liberdade livre inicia-se a numeração dos graus de liberdade restringidos (MARTHA, 2010). Deste modo pode ser escrito o sistema de equações como exposto a seguir:

$$\begin{bmatrix}[K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}]\end{bmatrix} * \begin{Bmatrix}D_u \\ D_k\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_k \\ F_u\end{Bmatrix} \quad (44)$$

Onde:

$\{D_u\}$ = Deslocamentos externos desconhecidos;

$\{D_k\}$ = Deslocamentos externos conhecidos;

$\{F_u\}$ = Forças externas desconhecidas;

$\{F_k\}$ = Forças externas conhecidas.

Assim obtemos as seguintes equações:

$$\{F_k\} = [K_{11}] * \{D_u\} + [K_{12}] * \{D_k\} \quad (45)$$

$$\{F_u\} = [K_{21}] * \{D_u\} + [K_{22}] * \{D_k\} \quad (46)$$

Com a solução da primeira equação são obtidas as deslocabilidades desconhecidas. Assim é possível a solução da segunda equação obtendo as forças externas desconhecidas (reações de apoio). Nestas reações, eventualmente, deverão ser superpostas cargas nodais aplicadas nos graus de liberdade restringidos (MARTHA, 2010).

2.8.7 Esforços internos

Após a determinação dos deslocamentos e das reações de apoios, são determinados os esforços internos da estrutura (esforço axial, cortante e momentos fletores), referentes a cada barra em seu referencial local. Para a determinação destes esforços, é necessário o conhecimento do vetor de deslocamentos das extremidades da barra e sua matriz de rigidez elementar. Ainda, para barras com carregamentos distribuídos, é necessário conhecer as suas reações de engastamento. Tais valores devem ser considerados no sistema local e, por este motivo, é necessário utilizar a matriz de rotação para a determinação destes

esforços (MARTHA, 2010). Assim os esforços internos da estrutura podem ser definidos pela seguinte expressão:

$$\{Qe\} = [R] * [Ke] * \{De\} + [R] * \{Fe\} \quad (47)$$

Onde:

$\{Q_e\}$ = Esforços internos nas extremidades das barras;

[R] = Matriz de rotação;

$[K_e]$ = Matriz de rigidez elementar;

$\{D_e\}$ = Deslocamento nas extremidades da barras;

$\{F_e\}$ = Forças de engastamento nas extremidades das barras.

2.9 Barras infinitamente rígidas e inextensíveis

Comumente para resolução manual de estruturas através do método dos deslocamentos, é adotada a simplificação de que as barras não se deformam axialmente, conhecida como hipótese de barras inextensíveis. Esta condição está sempre associada à hipótese de pequenos deslocamentos, permitindo a redução das deslocabilidades do tipo translação e não afetando as de rotação (MARTHA, 2010).

Deste modo, segundo Martha (2010), a consequência da utilização desta hipótese é a seguinte: “os dois nós extremos de uma barra só podem se deslocar relativamente na direção transversal ao eixo da barra”, ou ainda, “a distância, na direção do eixo indeformado, entre os dois nós extremos de uma barra não se altera quando esta se deforma transversalmente por flexão”. A solução de uma estrutura difere com a utilização esta hipótese, sendo sua adoção justificada apenas na resolução manual de pórticos pequenos.

Outra hipótese simplificadora é a consideração de barra infinitamente rígida, ou seja, barra que não sofre deformações. Tal consideração não é feita para todas as barras da estrutura e só faz sentido em alguns casos especiais. Eventualmente,

em tal barra, mesmo sem sofrer deformações, pode ocorrer giro em torno de uma das extremidades, caso esta seja articulada (MARTHA, 2010).

Para a consideração dessas simplificações, no método da rigidez direta, foram multiplicados os coeficientes da matriz de rigidez por $1x10^{10}$, sendo que a barra axialmente rígida considera-se somente a multiplicação dos termos referentes às deslocabilidades axiais e para barra infinitamente rígida, são multiplicados todos os termos da matriz.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 Metodologia do trabalho

O trabalho foi desenvolvido da seguinte maneira: foi realizada revisão bibliográfica referente à análise estrutural, seguida da definição do método a ser utilizado para o cálculo e da linguagem de programação mais apropriada ao desenvolvimento do código. Por fim, foi realizada a validação utilizando o *software* Ftool.

Inicialmente, foi feita revisão dos conceitos básicos da análise estrutural e os métodos de resolução, sendo o método das forças e dos deslocamentos (rigidez e matricial). Este trabalho tomou como base principalmente o método matricial, devido à facilidade de aplicação deste método a qualquer tipo de estrutura e por apresentar maior praticidade de implementação em código computacional, analisando a sistemática dos procedimentos do cálculo.

Para programar o código pretendido foi escolhida linguagem Python. Esta linguagem foi criada por Guido van Rossum em 1990, com a intenção de fazer um código computacional eficiente e mais fácil de ser manipulado, por ser uma linguagem mais simples, com pouco uso de caracteres especiais. É uma linguagem de alto nível e altamente dinâmica. Uma das vantagens de utilizá-la é a disponibilidade de pacotes com recursos matemáticos que vão além dos já implícitos na linguagem, como o NumPy, SciPy e outros. (BORGES, 2010).

Neste trabalho, foram utilizados os pacotes NumPy, que realiza a manipulação de vetores e matrizes. O SciPy, que traz uma diversidade de funções matemáticas e científicas, derivadas do NumPy, como funções de interpolação e integração numérica. E o SymPy, uma biblioteca que realiza operações algébricas com símbolos matemáticos.

Posteriormente, foi desenvolvido o código tomando como base as etapas da resolução do método matricial. A cada passo do procedimento, foi feita comparação

com exercícios resolvidos da literatura e, em etapas mais avançadas, com o *software* Ftool, que apresenta os resultados de cada modelo estrutural.

O funcionamento do ONÇA: Cálculo Estrutural 2D inicia-se através da interface do *software*, onde são inseridas as informações necessárias para o cálculo, ou seja, os nós, orientação, material e seção transversal de cada barra, carregamentos e deslocamentos prescritos.

A primeira etapa do procedimento de cálculo é a definição dos graus de liberdade dos nós através da entrada de dados fornecida ao código, ordenando-os no posicionamento adequado na matriz de rigidez global.

Em seguida, são definidas as matrizes de rigidez locais de cada barra, considerando as propriedades geométricas e dos materiais destes elementos. Após esta etapa é criada a matriz de rotação da barra, para a conversão das matrizes de rigidez elementares locais em valores relacionados ao sistema global.

Com as matrizes elementares convertidas para o sistema global, é realizado o espalhamento dos valores elementares na matriz de rigidez global, considerando o princípio da superposição dos efeitos e a ordenação dos graus de liberdade.

O passo seguinte é a montagem do vetor de cargas, que considera os esforços nodais aplicados e ordena-os de acordo com os respectivos graus de liberdade. Para carregamentos distribuídos, serão considerados os seus efeitos nodais, definidos com a utilização do método das forças. Em seguida, é definido o vetor de deslocamentos, sendo normalmente nulos nos graus de liberdade restringidos (exceto quando há aplicação de deslocamento prescrito nos apoios).

Com estes dados, monta-se o sistema de equações de equilíbrio, relacionando os vetores de carga, de deslocamentos e a matriz de rigidez global. A partir desta relação e do particionamento deste sistema, definem-se os esforços desconhecidos (reações de apoio) e os deslocamentos nos graus de liberdade não restringidos.

Conhecendo todos os esforços e deslocamentos de cada nó do modelo estrutural, são calculados os esforços internos das barras, bem como suas equações e diagramas. Estes resultados são apresentados na saída de dados do código, na interface gráfica.

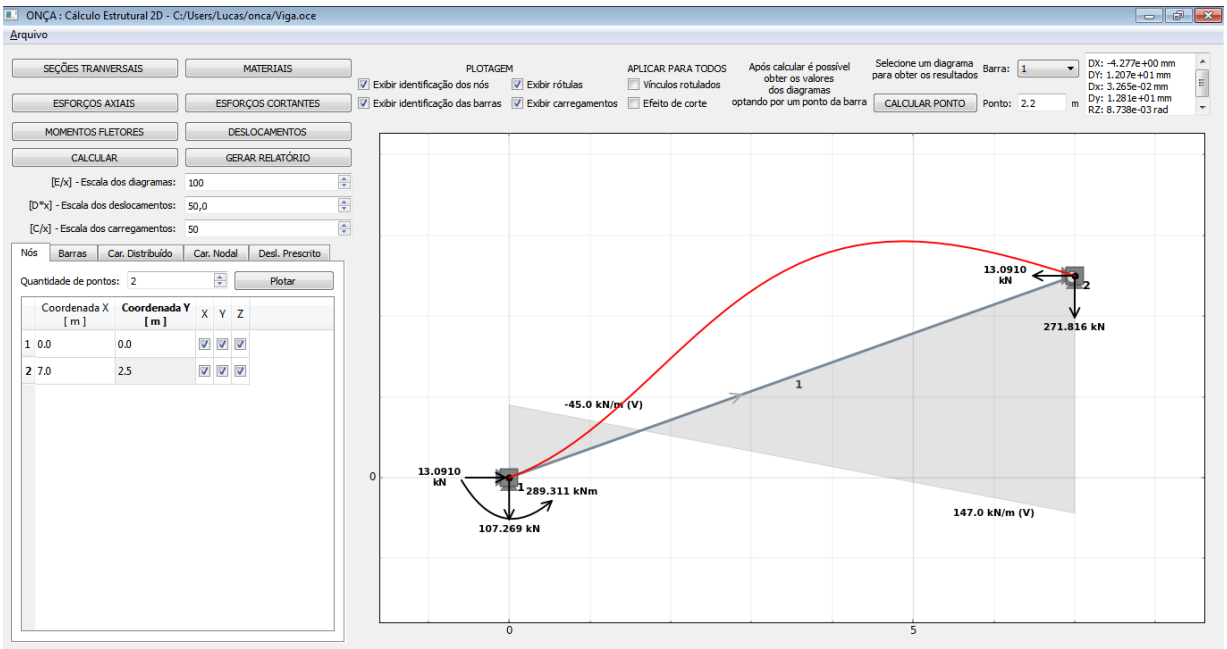
A interface, utilizada para a entrada e saída de dados, foi desenvolvida com as ferramentas Matplotlib e PyQt4, e é um objeto diferente do código de cálculo, apesar de estarem inter-relacionados.

A última etapa do trabalho é a validação do código. Para isso, foram verificados 5 modelos estruturais encontrados na literatura e, através do *software* Ftool, comparados os seus resultados. Tais modelos são apresentados a seguir:

1. Treliça com aplicação de deslocamento prescrito em um dos nós;
2. Viga contínua com carregamento distribuído linear;
3. Pórtico plano com carregamento nodal;
4. Pórtico plano com barras axialmente e infinitamente rígidas;

3.2 Metodologia do código

Aqui será apresentada a forma de obtenção dos resultados para um pórtico plano, o procedimento de cálculo para treliças e vigas é feito de forma análoga. O programa possui a seguinte característica.



3.2.1 Entrada de dados

A entrada de dados do *software* é feita através de listas que podem ser divididas nos seguintes itens, representados na figura 14.

1. Nós: coordenadas globais e restrições;
2. Barras: Incidências, seções transversais, materiais, vinculação das extremidades, barra axialmente rígida e barra infinitamente rígida;
3. Carregamentos distribuídos: horizontais e verticais, no sistema local ou global;
4. Carregamentos pontuais;
5. Deslocamentos prescritos.

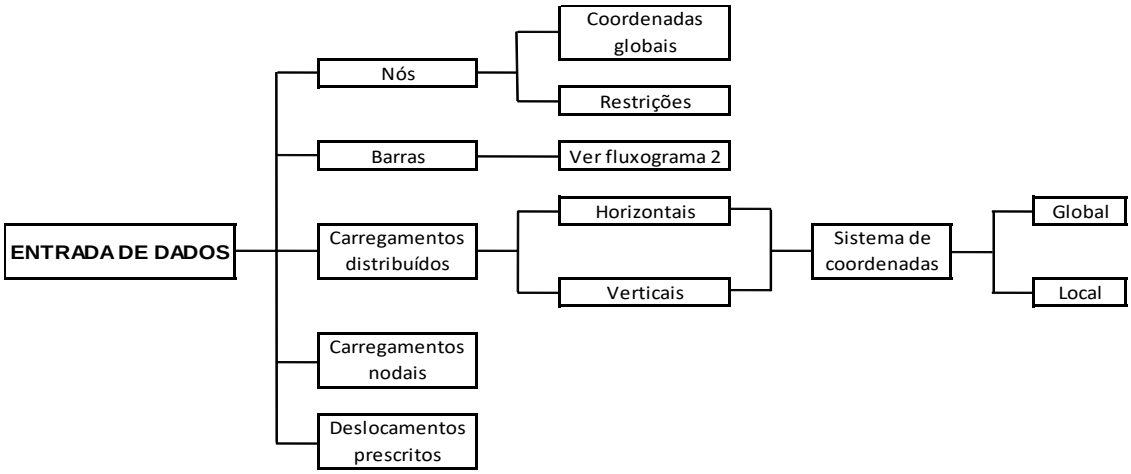


Figura 17 - Entrada de dados.

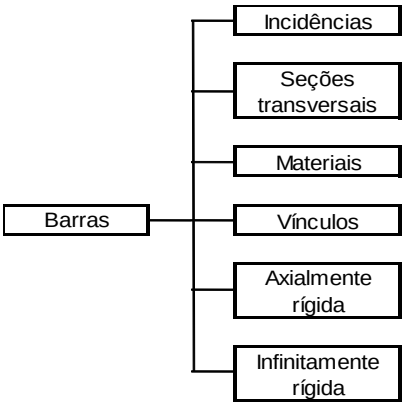


Figura 18 - Entrada de dados referentes às barras.

Primeiramente, são armazenadas pelo código as coordenadas globais (x, y) dos nós do modelo estrutural e as restrições de suas respectivas deslocabilidades

permitidas. Em seguida, o *software* armazena as incidências das barras, ou seja, os nós iniciais e finais de cada barra, as informações referentes às propriedades geométricas e ao material das barras e se as mesmas possuem comportamento axialmente ou infinitamente rígido.

Posteriormente, são armazenadas informações referentes aos carregamentos distribuídos (horizontais e verticais), sendo do sistema local ou global, seguido das cargas concentradas nos nós. Por último, armazena os deslocamentos prescritos aplicados nos nós restringidos.

3.2.2 Matrizes de rotação

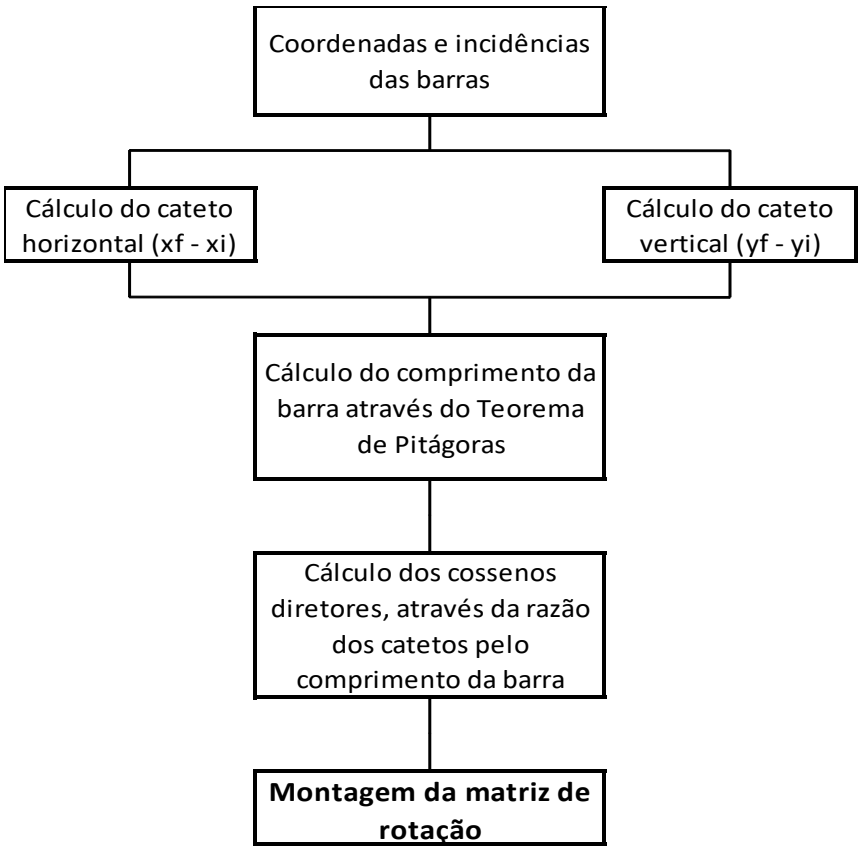


Figura 19 - Obtenção das matrizes de rotação através dos comprimentos das barras.

Os passos para o cálculo das matrizes de rotação, apresentados na figura 19, iniciam-se no cálculo da matriz de rotação [R] individual de cada barra, em função das coordenadas e das incidências. Inicialmente, através da diferença das

coordenadas da extremidade final com as da extremidade inicial, têm-se os catetos x e y da barra. Deste modo, determina-se o comprimento da barra (hipotenusa) através do teorema de Pitágoras. Por fim, calcula-se a razão dos catetos pelo comprimento do elemento, obtendo os cossenos diretores e, conforme modelo apresentado na Fundamentação Teórica, montada a matriz de rotação.

3.2.3 Vetor da identificação dos graus de liberdade

Os graus de liberdade livres e restringidos são armazenados em um vetor, obtido a partir das coordenadas e restrições dos nós (considerando três deslocabilidades para cada).

Para este vetor, o funcionamento é através de dois laços que percorrem a quantidade de nós da estrutura, sendo o primeiro laço para inserir o valor de uma variável contadora (que inicia em zero) nas posições onde o deslocamento não é restringido, e acrescido de um em um após a nomeação destes. O segundo laço insere o valor da variável contadora (que inicia com o valor do último grau de liberdade livre acrescido de um) nas posições onde o deslocamento é restringido e adiciona o valor “um” neste contador após cada inserção.

Este vetor, além de representar e delimitar os deslocamentos nodais entre conhecidos (restringidos e/ou prescritos) e desconhecidos (livres), determina as cargas conhecidas e desconhecidas (reações de apoio) e propicia a montagem e fragmentação da matriz de rigidez global.

3.2.4 Matrizes de rigidez

Como já demonstrado neste trabalho, há quatro possibilidades de matriz de rigidez elementares, sendo engaste-engaste, engaste-rotula, rotula-engaste e rotula-rotula. Deste modo, a partir dos vínculos das barras fornecidas na entrada de dados, o código identifica a matriz adequada para cada elemento.

Os coeficientes de rigidez desta matriz são determinados a partir do comprimento da barra, das propriedades da seção transversal e dos materiais. Também há a possibilidade de considerar barras axialmente e infinitamente rígidas.

Em seguida, o *software* converte os coeficientes de rigidez do sistema local para o sistema global, através da matriz de rotação, e armazena estes dados em uma lista.

Para a montagem da matriz de rigidez global, inicialmente é criada uma matriz nula, sendo o número de linhas e colunas igual à quantidade de graus de liberdade. Após, um laço percorre a quantidade de elementos, identificando a numeração dos graus de liberdade das extremidades da barra e salvando estas informações em uma variável “pivô”.

A partir desta variável, funcionam outros dois laços, sendo o primeiro referente ao número da linha da matriz de rigidez global e o segundo laço, que corre dentro do primeiro, referente ao número da coluna desta matriz. Estes laços realizam a leitura das matrizes de rigidez elementares, armazenadas anteriormente, e posicionam os coeficientes nos seus respectivos graus de liberdade na matriz de rigidez global.

Este processo é repetido para todas as barras, sendo sobrepostos os efeitos dos coeficientes de uma barra. Após este laço percorrer todos os elementos da estrutura, a matriz de rigidez global está definida. A seguir, é apresentado fluxograma que resume o processo da obtenção desta matriz.

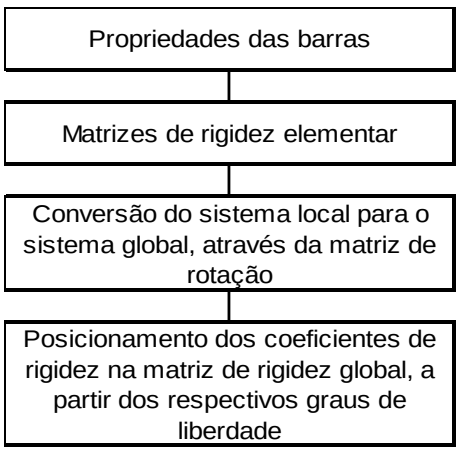


Figura 20 - Montagem da matriz de rigidez global

3.2.5 Vetores de cargas

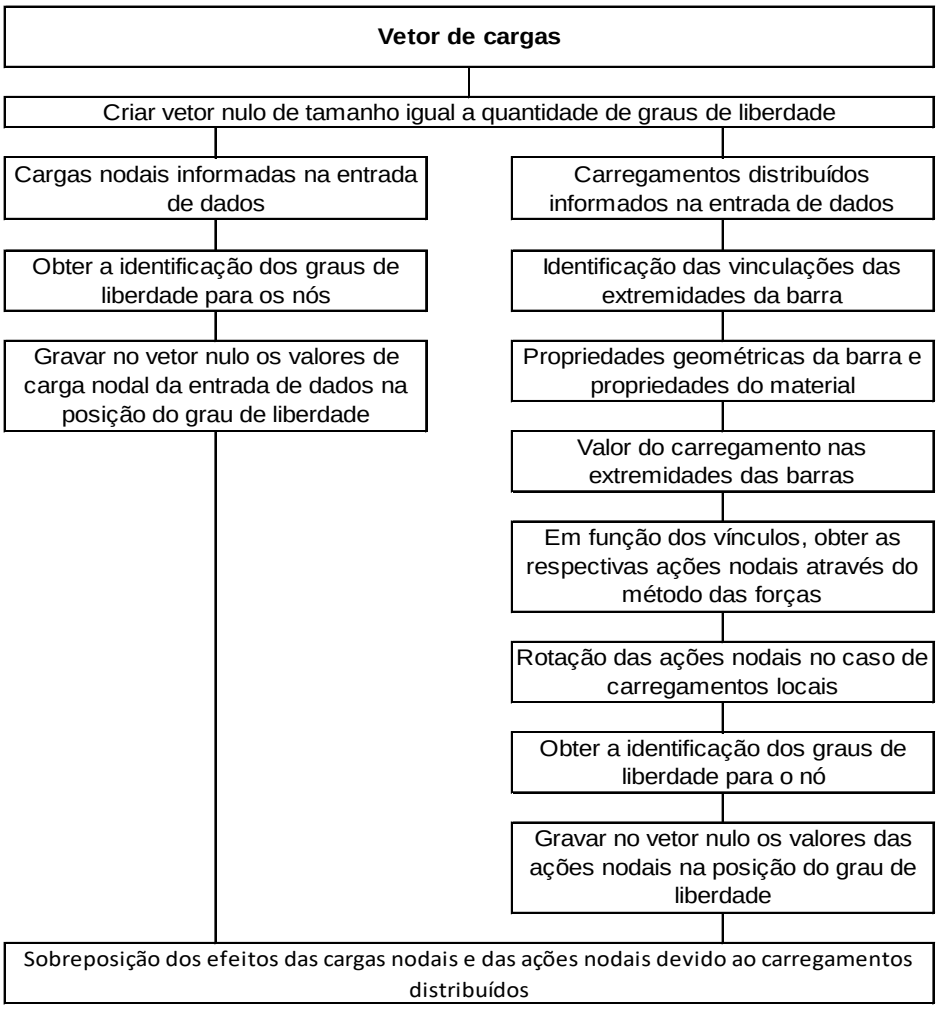


Figura 21 – Vetor das cargas nodais e carregamentos distribuídos.

Para montagem do vetor de cargas, inicialmente é criado um vetor nulo, em que o número de termos deste é igual à quantidade de graus de liberdade da estrutura. Em seguida, o código armazena as cargas nodais, informadas na entrada de dados, nestes vetores, nas respectivas posições, de acordo com as deslocabilidades. A figura 21 representa os procedimentos da montagem deste vetor.

Após o ordenamento das cargas concentradas nos nós é realizada a transformação dos carregamentos distribuídos em cargas nodais. Foi utilizado o método das forças para definir as reações de apoio das barras, considerando as quatro possibilidades de vinculação das extremidades, são estas, (engaste-engaste,

engaste-rotula, rotula-engaste e rotula-rotula). Para isso, foi escrito um código em *Python* utilizando a biblioteca *SymPy* que, a partir do método de cálculo descrito no capítulo 3.6, solucionou as equações integrais necessárias para a determinação das expressões que fornecem tais reações de apoio. O procedimento descrito a seguir é referente à vinculação engaste-engaste, para os demais casos o procedimento é análogo, porém é reduzido o numero de redundantes hiperestáticas.

Na condição engaste-engaste há duas redundantes hiperestáticas, sendo adotadas para resolução a força vertical aplicado no segundo grau de liberdade do modelo, e o momento aplicado no terceiro. A figura 22 demonstra os casos oriundos da escolha das redundantes.

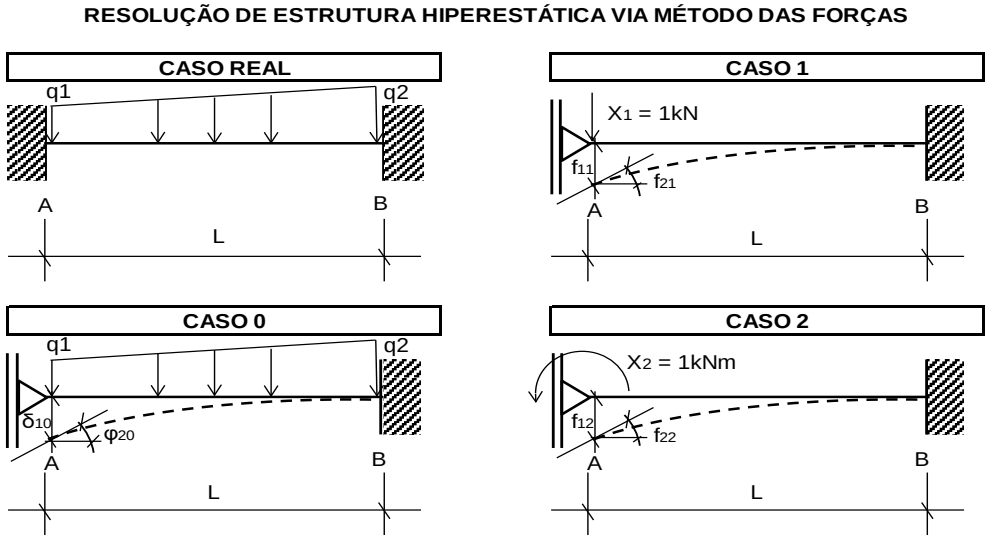


Figura 22 – Resolução de estrutura hiperestática via método das forças.

Assim, são definidas as equações de momentos fletores para os casos 0, 1 e 2. E a partir destas equações é possível definir os deslocamentos do caso 0, bem como os coeficiente de flexibilidade dos casos 1 e 2, com a utilização do método da força unitária, sendo considerado apenas os efeitos dos momentos fletores, através da equação 48.

$$f_{\mathrm{ij}} = \int_X \frac{M_i . M_j}{E . I} dx \tag{48}$$

Partindo dos símbolos (x, q1, q2, Dq, L, A, E, Iz), onde ‘x’ é uma posição qualquer da barra, ‘q1’ o valor inicial e ‘q2’ o valor final do carregamento distribuído, ‘Dq’ a diferença entre o carregamento final e inicial, ‘L’ o comprimento da barra, ‘A’ é

a área da seção transversal, ‘E’ o módulo de elasticidade do material, ‘Iz’ momento de inércia em relação ao eixo Z inicia-se a determinação dos deslocamentos e dos coeficientes de rigidez através das equações 49 a 53. Sendo encontrado os seguintes resultados:

$$\delta_{10} = -\frac{L^4}{EIz}\left(\frac{Dq}{30} - \frac{q1}{8}\right) \tag{49}$$

$$\varphi_{20} = \frac{L^3}{24EIz}\left(Dq - 4q1\right) \tag{50}$$

$$f_{11} = \frac{L^3}{3EIz} \tag{51}$$

$$f_{12} = -\frac{L^2}{2EIz} \tag{52}$$

$$f_{22} = \frac{L}{EIz} \tag{53}$$

Com os resultados acima foi possível solucionar o sistema de equações 54, sendo determinado os valores das redundantes hiperestáticas adotadas incialmente. Conhecendo tais valores, é possível determinar as demais reações de apoio desconhecidas.

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} x \begin{Bmatrix} F2 \\ F3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\delta_{10} \\ -\varphi_{20} \end{Bmatrix} \tag{54}$$

As reações são calculadas no sistema global, portanto, caso seja aplicado carregamento distribuído no sistema local, as reações equivalentes serão rotacionadas para o sistema global, através da matriz de rotação. Caso este carregamento distribuído seja no sistema global, não é necessária a transformação do mesmo.

Após o cálculo das reações equivalentes, estes efeitos são incluídos no vetor de cargas, nos seus respectivos graus de liberdade, utilizando o princípio da superposição dos efeitos.

Os valores dos carregamentos distribuídos (horizontal e vertical) e o sistema de coordenadas (global ou local) são informados pelo usuário na entrada de dados. Inicialmente, o código considera todos como no sistema local, fazendo a rotação e ordenando suas ações nodais em função dos graus de liberdade, utilizando o método das forças. Para a rotação, é utilizada a seguinte expressão:

$$\{Fe\} = \{FE\} * [R] \quad (55)$$

Sendo que $\{FE\}$ é o vetor das forças nodais rotacionadas.

Caso o sistema escolhido para o carregamento seja o sistema global, a função que realiza a rotação é desabilitada.

3.2.6 Vetor de deslocamentos

Análogo ao método utilizado para determinar o vetor de cargas da estrutura, o vetor de deslocamentos é formado inicialmente por um vetor nulo, sendo o número de termos deste igual à quantidade de graus de liberdade do modelo estrutural. Em seguida, o código posiciona os deslocamentos prescritos (se houver) nas deslocabilidades restringidas. Ou seja, para a aplicação de deslocamento prescrito no modelo, é necessário que haja restrição no grau de liberdade referente a este deslocamento.

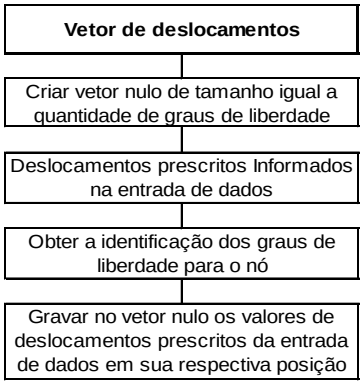


Figura 23 - Posicionamento dos deslocamentos prescritos em função dos graus de liberdade

3.2.7 Deslocamentos globais nos graus de liberdade livres

Os deslocamentos desconhecidos (nos graus de liberdade livres) são as primeiras incógnitas calculadas pelo método dos deslocamentos. Para esta determinação, utiliza-se somente a parte superior da matriz de rigidez global, bem

como as cargas conhecidas (nos graus de liberdade livres) e os deslocamentos prescritos.

O cálculo é satisfeito pela expressão (56) isolando a incógnita obtemos a expressão final.

$$\{Du\} = [K_{11}]^{-1} * (\{Fk\} - [K_{12}] * \{Dk\}) \quad (56)$$

A figura 24 exibe a sequência lógica para obter os deslocamentos.



Figura 24 - *Cálculo dos deslocamentos dos graus de liberdade livres*

3.2.8 Reações de apoio

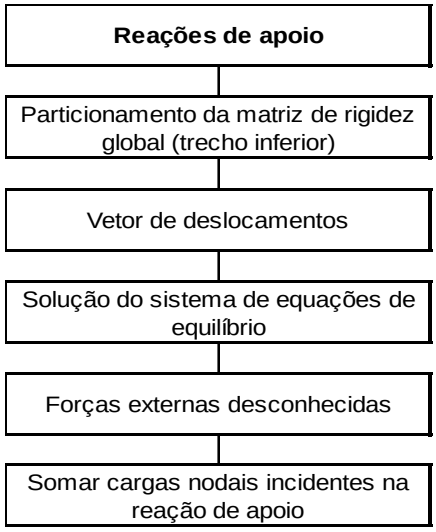


Figura 25 - *Cálculo das reações de apoio*

Após o cálculo dos deslocamentos nos graus de liberdade livres, são identificadas as cargas desconhecidas (reações de apoio). Para isto, são utilizados a seção inferior da matriz de rigidez global e o vetor de deslocamentos. Após o cálculo matricial, somam-se as cargas nodais incidentes nos apoios em seus respectivos graus de liberdade. A expressão (46) é utilizada para obter os valores das reações de apoio. A figura 25 exemplifica o processo.

3.2.9 Esforços internos

Os esforços internos são calculados elemento a elemento. Para isso, são utilizados os deslocamentos globais do ponto inicial e final de cada barra, bem como os carregamentos nodais devido às cargas distribuídas. Finalmente, aplicando a expressão (47), obtemos os esforços internos. Esta sequência é representada na figura 26.

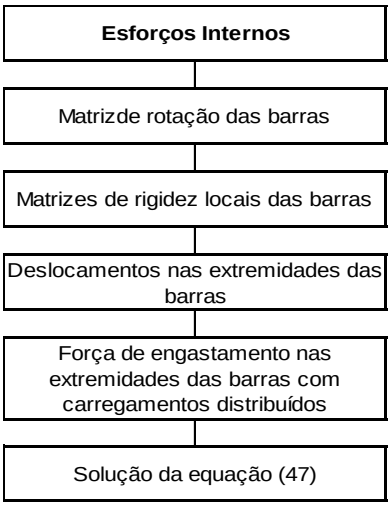


Figura 26 - *Cálculo dos esforços internos*

3.2.10 Equações para plotagem de diagramas

Para a obtenção das equações, são necessários os valores iniciais dos esforços axiais e cortantes, momentos fletores, deslocamentos e rotações das

barras, além dos valores iniciais e finais do carregamento distribuído. Inicialmente, determina-se a equação do carregamento para a barra. O carregamento axial é integrado uma vez para obtenção da equação dos deslocamentos axiais, já o carregamento perpendicular é integrado quatro vezes, para se obter a equação dos deslocamentos perpendiculares, considerando as condições de contorno para obter tais deslocamentos. Em seguida, esta equação é derivada para obter a expressão das rotações. As equações de corte e momento fletor são obtidas com a simples integração do carregamento somadas aos esforços inicias. As condições de contorno se satisfazem pelos esforços no ponto inicial do elemento em questão.

3.2.11 Interface Gráfica

Para a comunicação do usuário com a entrada e saída de dados, foi desenvolvida interface gráfica. A entrada de dados é realizada em sete passos e, depois de preenchidos, a estrutura é calculada e são apresentados os diagramas. Também é possível gerar o relatório em formato PDF e em texto.

3.2.11.1 Seções transversais

Há nove opções de seção transversal para escolha do usuário: genérica, retangular e circular (maciços e tubulares), e perfis H, I, L e T. A seção genérica permite que qualquer tipo de seção transversal seja utilizada, porém o usuário deve informar a área e o momento de inércia em Z. Todas as outras seções possuem uma figura que indica as dimensões a serem inseridas. Para distinguir uma seção de outra, existe um campo para nomear cada uma destas. Após o usuário configurar as seções desejadas, a caixa de seleção deve ser marcada para indicar ao *software* a utilização da respectiva seção transversal. A figura abaixo ilustra esta caixa de diálogo.

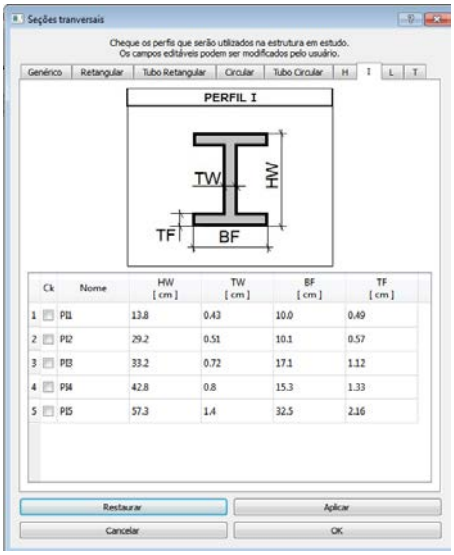


Figura 27 – Seções transversais

3.2.11.2 Materiais

Para a entrada de dados dos materiais a serem utilizados na estrutura em análise, o método é recíproco às seções transversais. O usuário deve escolher um nome para identificar o material, informar o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson. As seções que serão utilizadas na estrutura devem estar checadas conforme a figura abaixo.

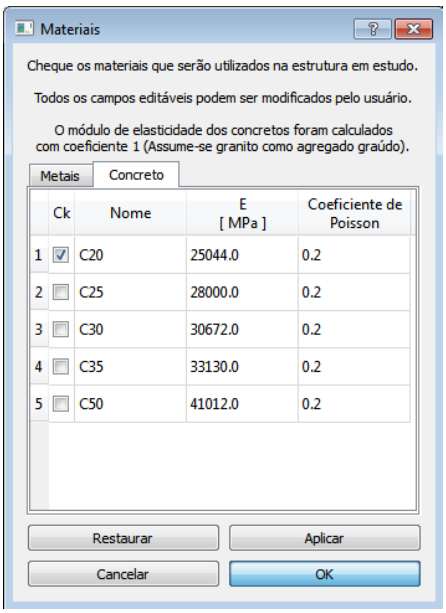


Figura 28 - Materiais

3.2.11.3 Nós e restrições

Todas as outras entradas serão realizadas nas tabelas que se encontram na parte esquerda inferior da interface gráfica. Começando pelos nós, existem duas colunas de coordenadas, X e Y, e três colunas com caixas de seleção que quando marcadas indicam que aquele grau de liberdade será restringido, ou seja, definem os apoios. É possível escolher a quantidade de nós que a estrutura irá possuir alterando o campo “Quantidade de pontos”. Sendo X a coordenada para a posição do ponto no eixo das abcissas e Y a posição no eixo das ordenadas, os nós devem ser entrados com unidade de medida em metros e, para o caso de números não inteiros, separar os algarismos utilizando “ponto”.

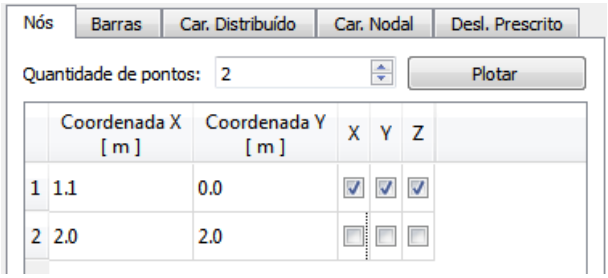


Figura 29 – Nós.

3.2.11.4 Barras, propriedades, vínculos e efeitos

As barras são discretizadas em função dos nós pelas suas incidências. Após a entrada dos nós, o usuário pode imprimi-los na interface gráfica para visualizar a identificação de cada nó, utilizando o botão “Plotar”. Deste modo, devem ser informadas as identificações dos nós inicial e final de cada barra. Os materiais e as seções transversais são escolhidos para cada barra utilizando os menus “*drop-down*”. Existem cinco caixas de seleção para cada barra, as duas primeiras devem ser selecionadas para a inserção de rótulas nas extremidades das barras, a coluna “IR” insere propriedade de barra infinitamente rígida e “AR” axialmente rígida. Após definidas as barras, o usuário pode visualizá-las na interface.



Figura 30 – Barras.

3.2.11.5 Carregamento distribuído

A próxima aba contém os dados dos carregamentos distribuídos. As duas primeiras colunas dizem respeito às cargas verticais e, as duas últimas, aos horizontais. Para valores não inteiros, as casas decimais devem ser separadas por ponto. Há uma caixa de seleção “GB” que quando marcada transpõe o carregamento para as coordenadas globais, a unidade de medida é kN/m.

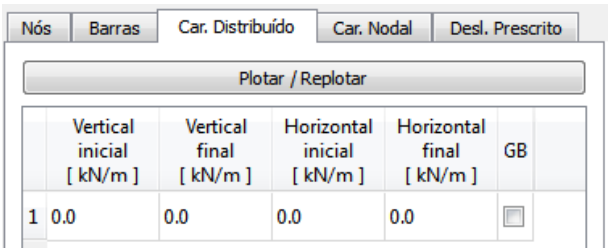


Figura 31 – Carregamentos distribuídos.

3.2.11.6 Carregamento nodal

Os carregamentos nodais são inseridos na quarta aba da entrada de dados. Nela há três colunas, sendo “Fx” para cargas horizontais (kN), “Fy” para cargas verticais (kN) e “Mz” para momentos concentrados (kNm). Não é possível considerar rotações para estes carregamentos e suas direções encontram-se em termos globais.

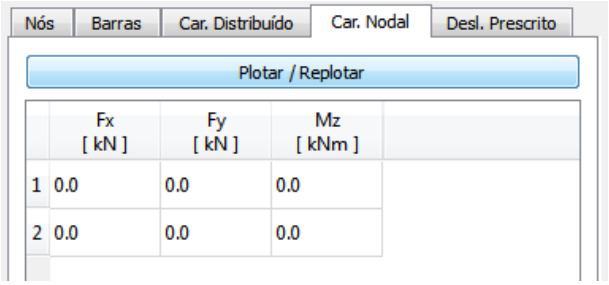


Figura 32 – Cargas nodais.

3.2.11.7 Deslocamentos prescritos

Por fim, os deslocamentos prescritos são inseridos na última aba, onde também existem três colunas: “Dx” para deslocamentos horizontais (cm), “Dy” para deslocamentos verticais (cm) e “Dz” para deslocamentos de rotação (rad). Da mesma forma que as forças concentradas, a direção para os deslocamentos encontra-se em termos globais.

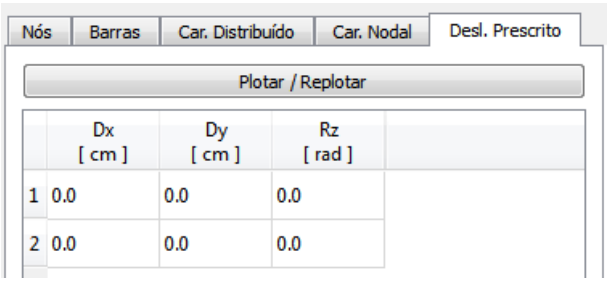


Figura 33 – Deslocamentos prescritos.

3.2.11.8 Obtenção dos resultados

Depois de finalizada a entrada dos dados, é necessário clicar no botão “Calcular” para obter acesso aos demais botões, pois estes possibilitam exibir os diagramas na tela e gerar o relatório. As imagens abaixo demonstram os botões.



Figura 34 – Obtenção de resultados.

Caso a estrutura apresente deslocamentos excessivos, equilíbrio hipostático ou erros na entrada de dados, a mensagem de erro apresentada abaixo será exibida.

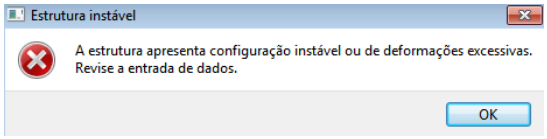


Figura 35 – Mensagem de erro.

Os diagramas e os carregamentos distribuídos possuem uma escala de plotagem. Caso o *software* apresente diagramas ilegíveis, é possível configurar esta escala nos campos localizados abaixo dos botões. A escala dos diagramas e dos carregamentos dividem suas dimensões, portanto quanto maior o valor informado, menor será o tamanho exibido na tela. Como os valores de deslocamento são pequenos, a escala para esta plotagem multiplica suas dimensões na tela. Para limpar a plotagem e garantir melhor visualização dos diagramas, é possível exibir ou não a identificação dos nós e das barras, as representações de rótula e carregamento. Os resultados pontuais ao longo das barras podem ser obtidos informando o número da barra e o ponto desejado em metros.



Figura 36 – Escalas do carregamento.

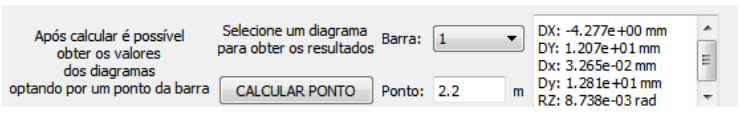


Figura 37 – Valores em ponto qualquer da barra.

O relatório é gerado com um clique no botão “GERAR RELATÓRIO”, um diálogo com o usuário irá permitir a escolha da pasta e o nome do arquivo. Dois arquivos serão salvos, um em PDF e outro em TXT.

3.2.12 Relatório

A ênfase didática do *software* consta no relatório em PDF e em arquivo de texto. Estes apresentam o memorial de cálculo do problema. Os itens que compõem o relatório em PDF são os seguintes.

1. Entrada de dados
2. Determinações preliminares
3. Obtenção dos dados para cada barra
4. Vetor das cargas globais da estrutura
5. Reações de apoio
6. Diagramas

Já o relatório em arquivo de texto possui os seguintes itens.

7. Matriz de rigidez global
8. Cálculo dos deslocamentos nos graus de liberdade livres
9. Cálculo das reações de apoio
10. Cálculo dos esforços internos nas extremidades das barras

O item 1 exibe os dados que o usuário inseriu no programa, na qual configura a estrutura em estudo. A apresentação é feita em forma de tabelas e os itens apresentados nelas são os seguintes.

1.1. Propriedades dos materiais que compõem a estrutura
1.2. Propriedades das seções transversais que compõem a estrutura
1.3. Nós e restrições
1.4. Incidências, vínculos e propriedades das barras
1.5. Carregamentos distribuídos
1.6. Cargas nodais e deslocamentos prescritos

O item 2 trata de duas predeterminações necessárias para o cálculo. O subitem 2.1, chamado de propriedades geométricas das seções transversais, exibe de forma analítica os cálculos para a determinação da área e do momento de inércia das seções transversais. Já 2.2, identificação dos graus de liberdade, apresenta em forma de tabela a sequência dos graus de liberdade nomeados pelo *software.*

Os graus de liberdade são nomeados com números a partir do zero (0, 1, 2...) e existem três regras que regem a identificação. Deve ser respeitada a sequência dos nós da estrutura e também a sequência da convenção adotada ("X", "Y" e "Z"), conforme o modelo utilizado para as matrizes de rigidez elementares.

Por fim, devem ser nomeados inicialmente apenas os graus de liberdade livres, e os graus de liberdade restringidos são identificados a partir da última deslocabilidade livre da estrutura.

O item 3 apresenta os seguintes subitens.

3.x.1. Cálculo do comprimento (L) e dos cossenos diretores (θ_X) e (θ_Y)

3.x.2. Determinação da matriz de rigidez {Ke} em termos globais

3.x.3. Determinação das forças nodais devido carregamento distribuído

3.x.4. Esforços internos nas extremidades

3.x.5. Deslocamentos nas extremidades

3.x.6. Equações

A letra “x” dos subitens acima é a identificação do número da barra. O item 3.1 exibe de forma analítica a obtenção dos catetos “x” e “y”, o comprimento “L” da barra, e seus cossenos diretores. A determinação da matriz de rigidez exibe as matrizes elementares, a matriz de rotação e a matriz de rigidez rotacionada. A determinação das forças nodais devido carregamento distribuído apresenta de forma analítica todo o processo do cálculo utilizando o método das forças para este fim.

Neste ponto, o item 3.x.4 faz referência ao item 10 do relatório em arquivo de texto, cujo mesmo apresenta o cálculo matricial que resulta nos esforços internos. O item 3.x.5 faz referência ao item 8 que apresenta o cálculo matricial que resulta nos deslocamentos. Finalmente, o item 3.x.5 mostra o procedimento de obtenção das equações de estado das barras.

Após, é apresentado o item 4, referente ao vetor das cargas globais da estrutura. Em forma de tabela, este item apresenta os valores totais dos carregamentos incidentes para cada nó. Em seguida, são apresentadas, também em forma de tabela, as reações de apoio no item 5.

No item 6, são apresentados os diagramas de esforços axiais e cortantes, momentos fletores e a linha de deformações, na escala em que foram exibidos no *software* antes de gerar o relatório.

No documento de texto, são apresentadas as matrizes, devido à melhor visibilidade em relação ao PDF.

4 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

A validação do código foi realizada em comparação com o Ftool 4.00.03 Basic (versão de Agosto de 2017), *software* consagrado e muito utilizado pelo seu cunho didático nos cursos de engenharia civil no Brasil e no exterior.

Foram analisados os esforços internos nas extremidades das barras e os deslocamentos globais nodais, os deslocamentos locais e os esforços internos ao longo dos elementos podem ser obtidos utilizando as equações da teoria de vigas de Navier.

Os resultados do Ftool são apresentados em forma de imagem capturada da tela do próprio programa e os resultados do código são exibidos em forma de tabela em função dos nós e dos elementos. A fibra inferior dos elementos é identificada do lado oposto onde houver a identificação da barra em questão.

4.1 Treliça plana

O primeiro caso analisado conta com uma treliça de sete elementos e cinco nós rotulados, sendo que as barras horizontais possuem 5 m de comprimento e as barras inclinadas 5,59 m. Existem dois apoios, um em cada extremidade, restringindo as translações horizontas e verticais. O material utilizado em todas as barras é aço com módulo de elasticidade E = 205 GPa e coeficiente de Poisson υ = 0,3. A geometria da seção é retangular e possui base de 50 mm e altura de 50 mm para todos os elementos. Foi aplicado deslocamento prescrito 5 mm na barra 6, sendo divido 2,5 mm para cada extremidade.

A figura 38 exibe a configuração das barras e dos nós, bem como os esforços solicitantes.

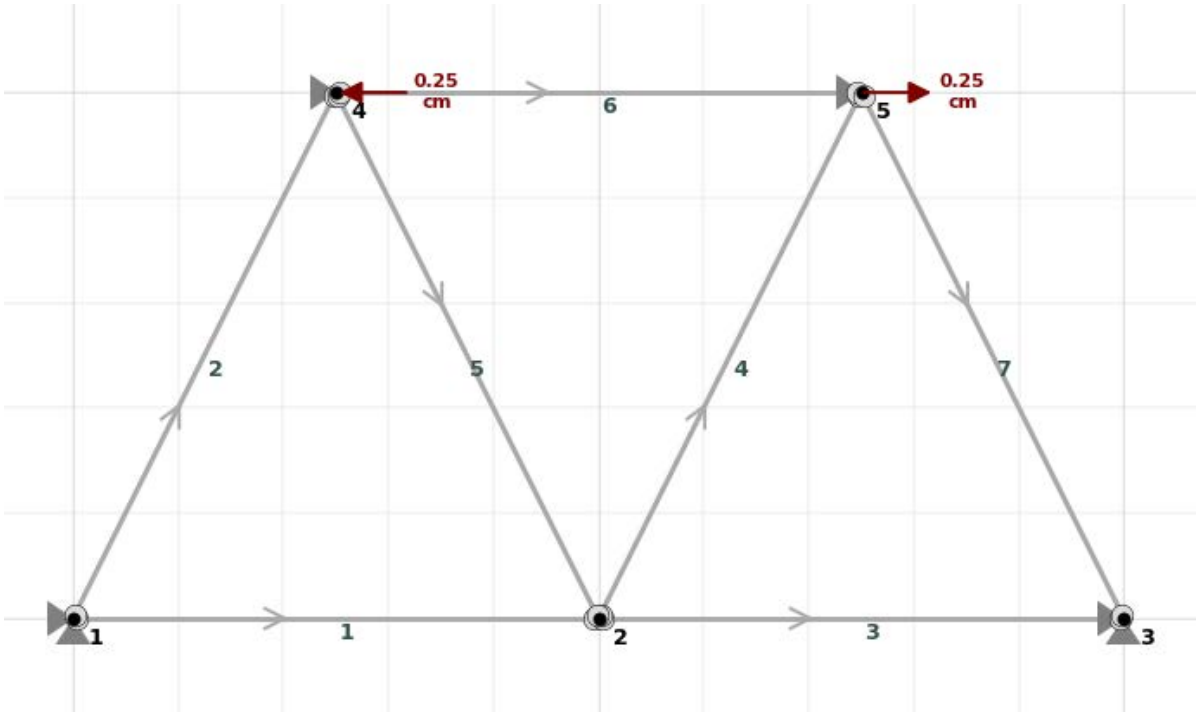


Figura 38 - Validação do código –Treliça plana – Configuração da estrutura

As figuras 39 a 43 demostram os dados informados para o código para resolução deste problema.

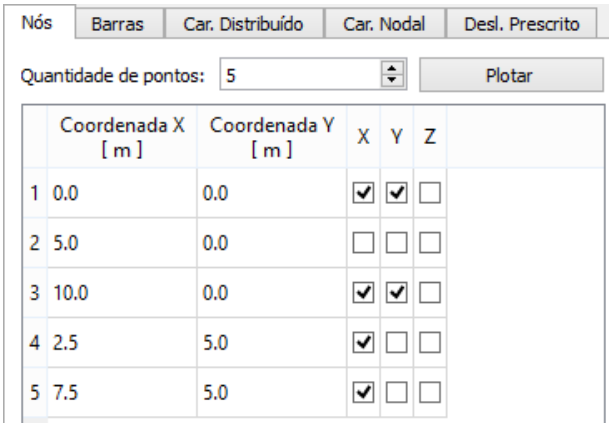


Figura 39- Validação do código –Treliça plana – Entrada de dados - Nós



Figura 40 - Validação do código –Treliça plana – Entrada de dados - Barras

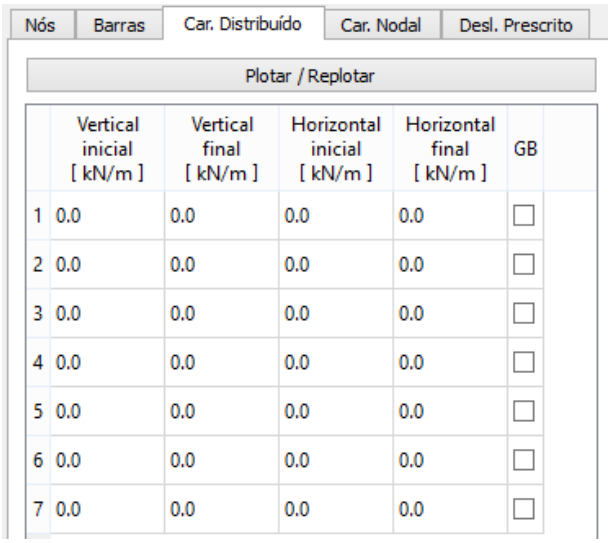


Figura 41- Validação do código –Treliça plana – Entrada de dados – Carregamentos distribuídos

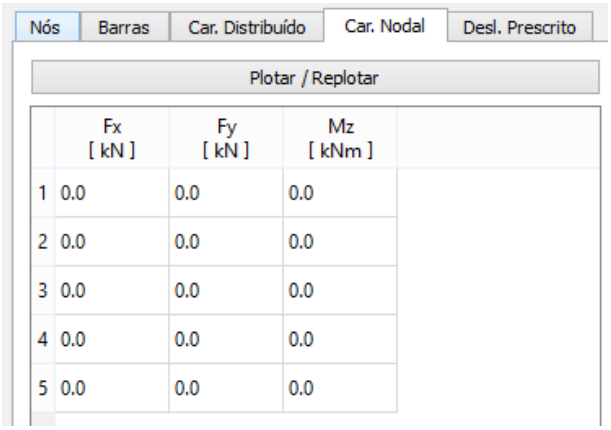
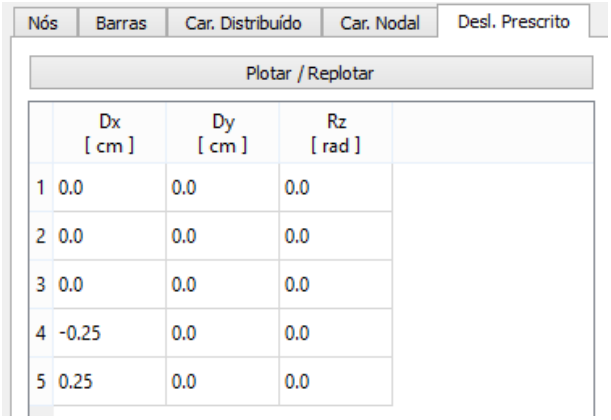


Figura 42 - Validação do código –Treliça plana – Entrada de dados – Cargas nodais



	Dx [cm]	Dy [cm]	Rz [rad]
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0
4	-0.25	0.0	0.0
5	0.25	0.0	0.0

Figura 43 - Validação do código –Treliça plana – Entrada de dados – Deslocamentos Prescritos

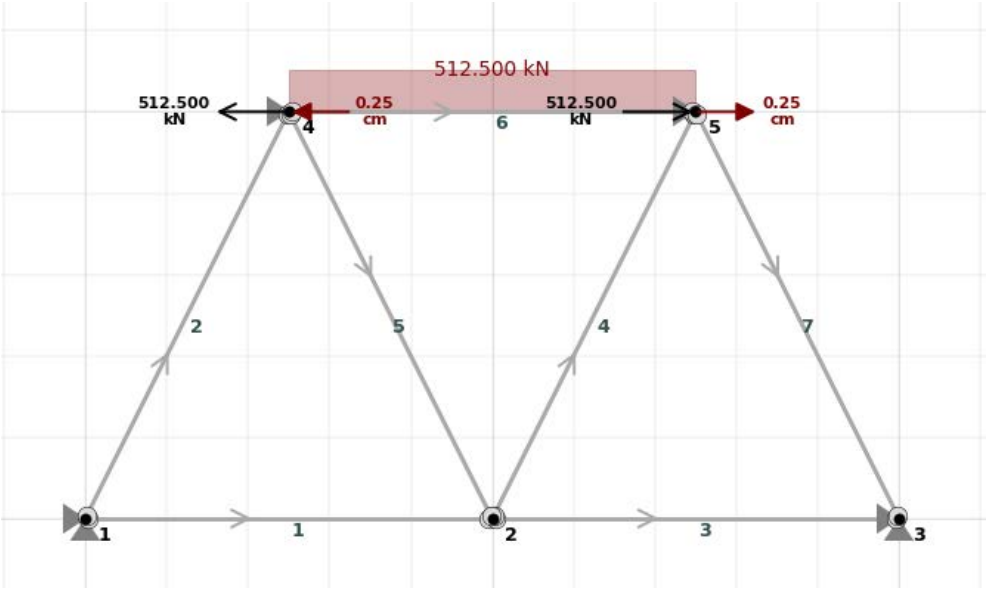


Figura 44 - Validação do código –Treliça plana – Esforços axiais - ONÇA

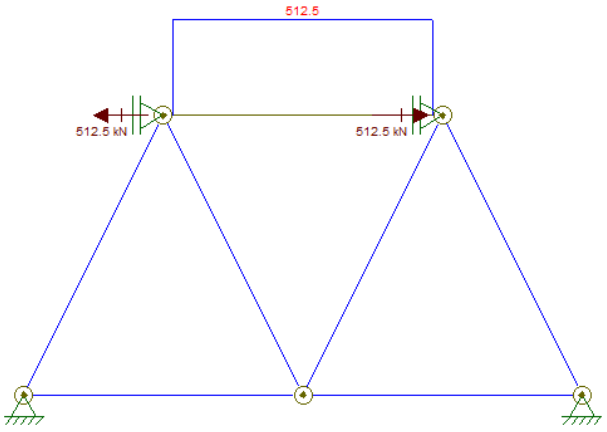


Figura 45 - Validação do código –Treliça plana – Esforços axiais – Ftool

A figura 44 exibe o diagrama de esforços axiais obtido com o Onça, a figura 45 demonstra o diagrama encontrado com a utilização do Ftool. Em seguida, é demonstrado o comparativo de valores dos esforços axiais nos nós da estrutura.

Esforços axiais			
Barra	**Nó**	**Onça**	**Ftool**
1	**1**	0	0
	2	0	0
2	**1**	0	0
	4	0	0
3	**2**	0	0
	3	0	0
4	**2**	0	0
	5	0	0
5	**4**	0	0
	2	0	0
6	**4**	512,5	512,5
	5	512,5	512,5
7	**5**	0	0
	3	0	0

Tabela 1- Validação do código - Treliça plana – Esforços axiais

As figuras 46 e 47 demonstram o estado deformado da estrutura no Onça e no Ftool respectivamente. Em seguida os resultados referentes aos deslocamentos da estrutura encontrados com o auxílio do Ftool em comparação com os resultados obtidos com o código desenvolvido.

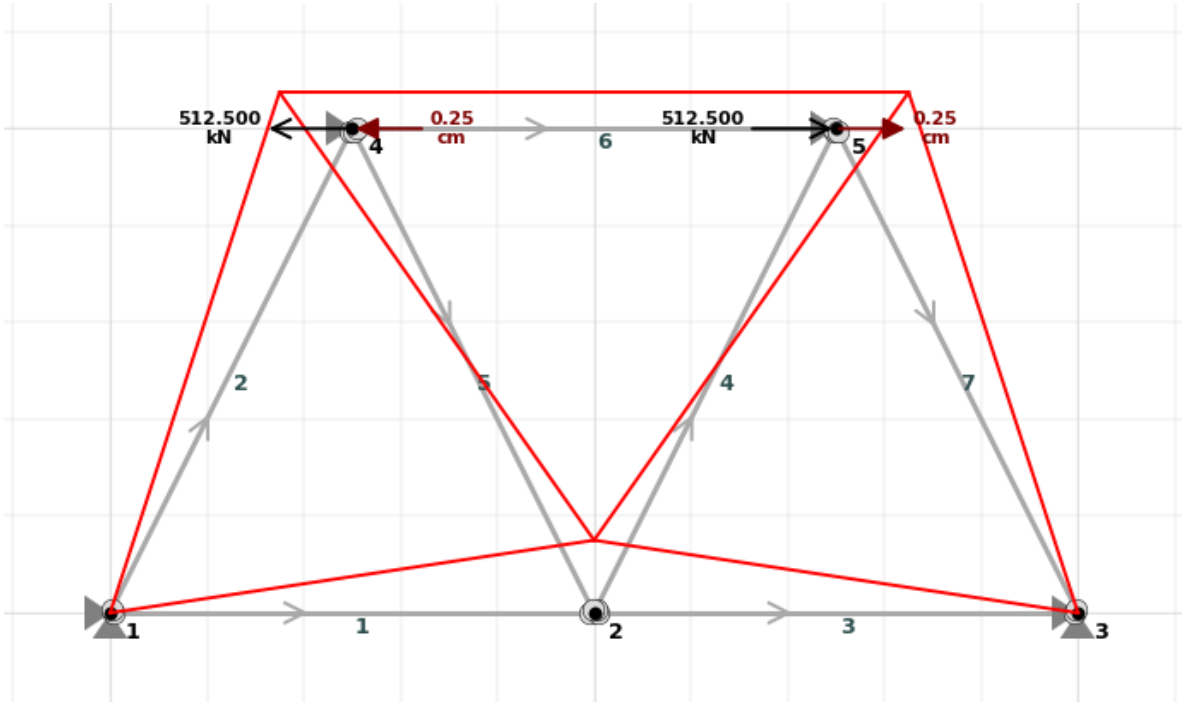


Figura 46- Validação do código –Treliça plana – Estado deformado – ONÇA

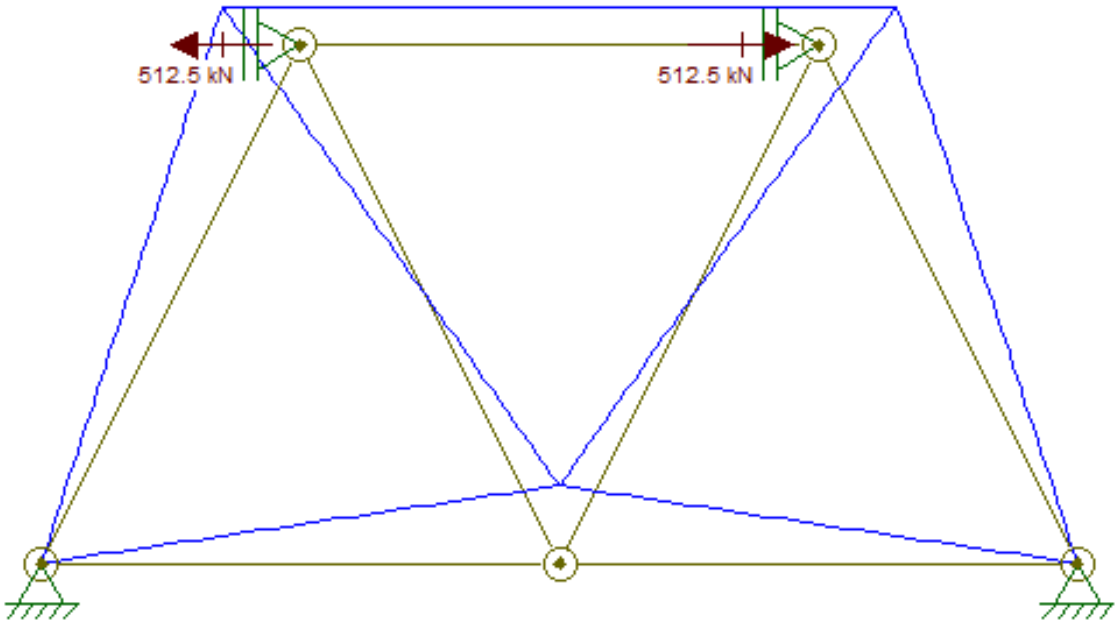


Figura 47 - Validação do código –Treliça plana – Estado deformado - Ftool

Deslocametos						
Nó	Onça			Ftool		
	Dx	Dy	R	Dx	Dy	R
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0,25	0	0	0,25	0
3	0	0	0	0	0	0
4	-0,25	0,125	0	-0,25	0,125	0
5	0,25	0,125	0	0,25	0,125	0

Tabela 2 - Validação do código –Treliça plana – *Deslocamentos*

Para finalizar a validação da treliça serão verificadas as reações de apoio da estrutura, a tabela a seguir demonstra esta comparação.

Reações de apoio						
Nó	Onça			Ftool		
1	0	0	-	0	0	-
3	0	0	-	0	0	-
4	-512,5	0	-	-512,5	0	-
5	512,5	0	-	512,5	0	-

Tabela 3 - Validação do código –Treliça plana – *Reações de apoio*

Conclui-se que tanto os deslocamentos como os esforços encontrados com o código para treliças são muito semelhantes aos resultados obtidos com o Ftool.

4.2 Viga contínua

O segundo caso de validação trata-se de uma viga contínua que possui três elementos, três nós engastados e um rotulado, sendo que a rótula encontra-se no segundo nó. Esta configuração conta com três apoios, sendo o primeiro de tipo dois e os outros do tipo um, sendo localizados no primeiro, terceiro e quarto nó respectivamente. Foi inserido carregamento distribuído ao longo de todas as barras e um carregamento nodal. O material utilizado em todas as barras é aço com módulo de elasticidade E = 205 GPa e a geometria da seção é de perfil I e possui altura total 57,3cm com espessura da alma 1,4cm, base do flange de 32,5cm e espessura 2,16cm.

A figura 48 exibe a configuração das barras e dos nós, bem como os esforços solicitantes.

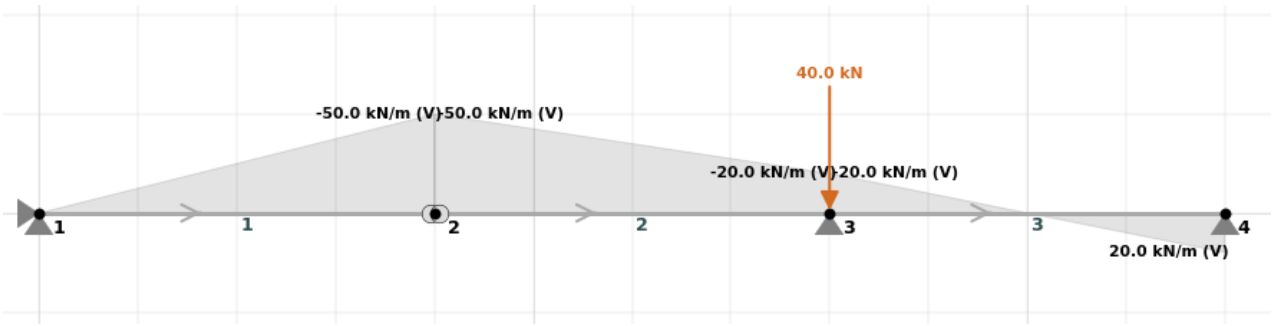


Figura 48 - Validação do código - Viga contínua – Configuração da estrutura

As figuras 49 a 53 demostram os dados informados para o código para resolução deste problema.



Figura 49 - Validação do código - Viga contínua – Nós

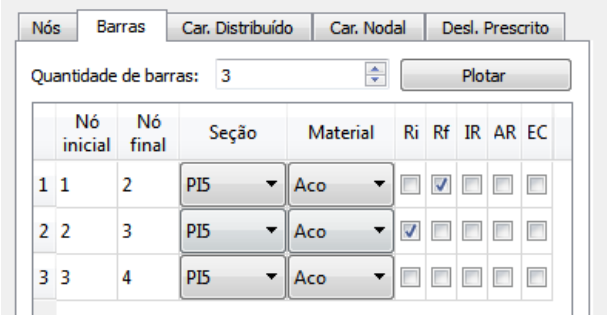


Figura 50 - Validação do código - Viga contínua – Barras

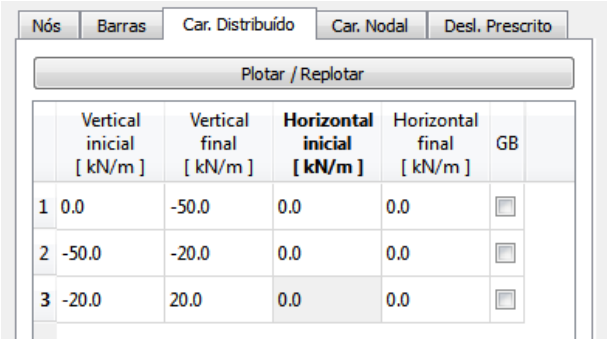


Figura 51 - Validação do código - Viga contínua – Carregamentos distribuídos

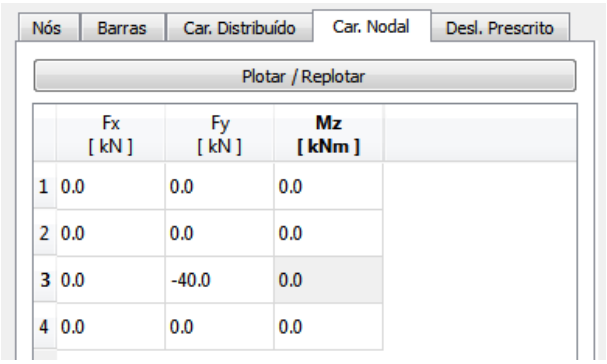


Figura 52 - Validação do código - Viga contínua – Cargas nodais

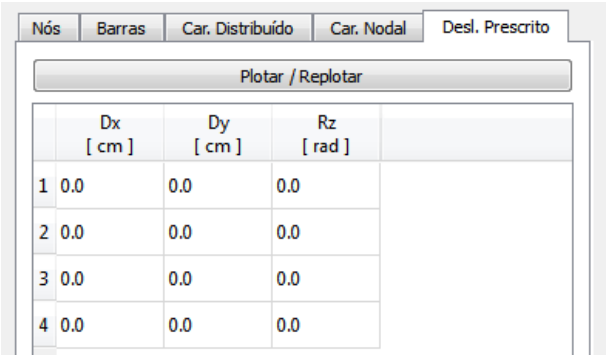


Figura 53 - Validação do código - Viga contínua – Deslocamentos prescritos

A seguir, a figura 54 exibe o diagrama dos esforços cortantes obtidos com o Onça, a figura 55 demonstra o diagrama encontrado com a utilização do Ftool. Em

seguida, é demonstrado o comparativo de valores dos esforços cortantes nos nós da estrutura.

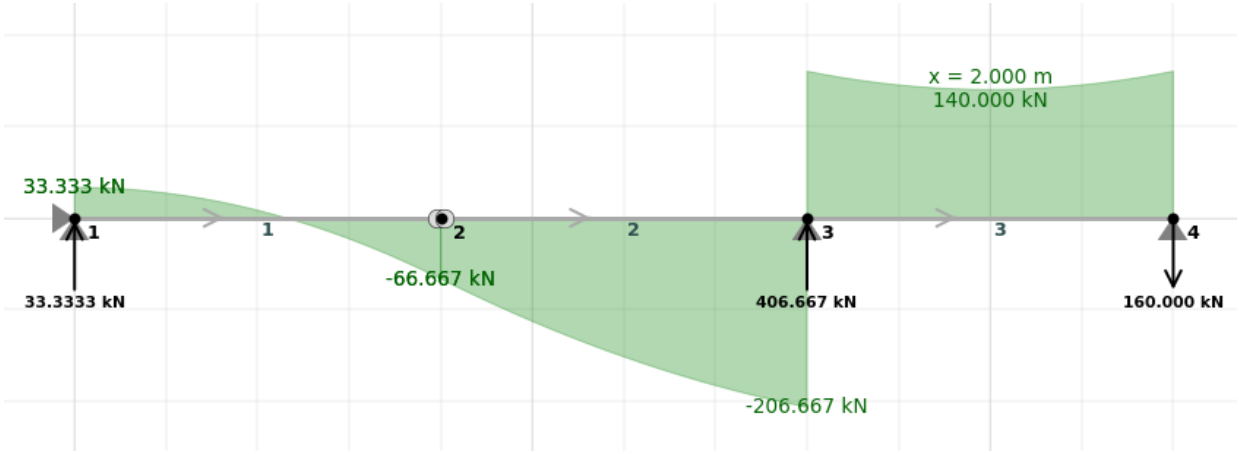


Figura 54 - Validação do código - Viga contínua – Esforços cortantes - ONÇA

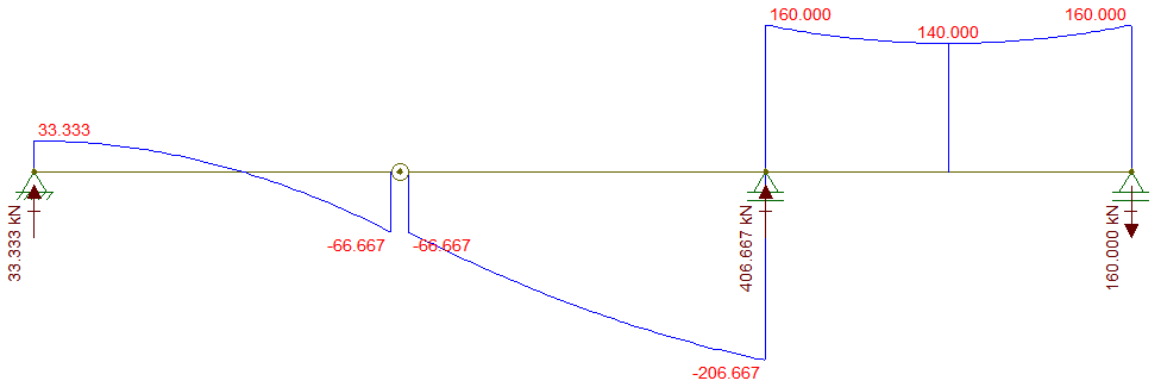


Figura 55 - Validação do código - Viga contínua – Esforços cortantes – Ftool

Esforços Cortante			
Barra	**Nó**	**Onça**	**Ftool**
1	**1**	33,333	33,333
	2	-66,667	-66,667
2	**2**	-66,667	-66,667
	3	-206,67	-206,67
3	**3**	160	160
	4	160	160

Tabela 4 - Validação do código - Viga contínua – Esforços cortantesl

A figura 56 exibe o diagrama de momentos fletores obtidos com o Onça, a figura 57 demonstra o diagrama encontrado com a utilização do Ftool. Em seguida, é demonstrado o comparativo dos resultados por nó da estrutura.

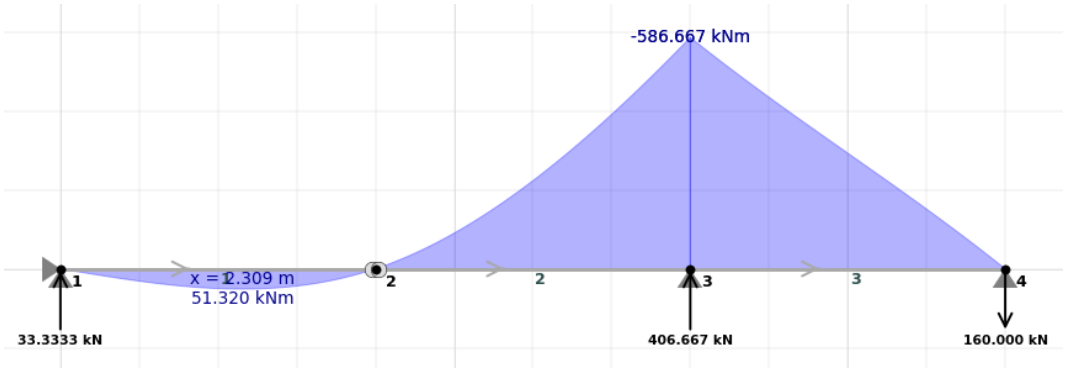


Figura 56 - Validação do código - Viga contínua – Momentos fletores – ONÇA

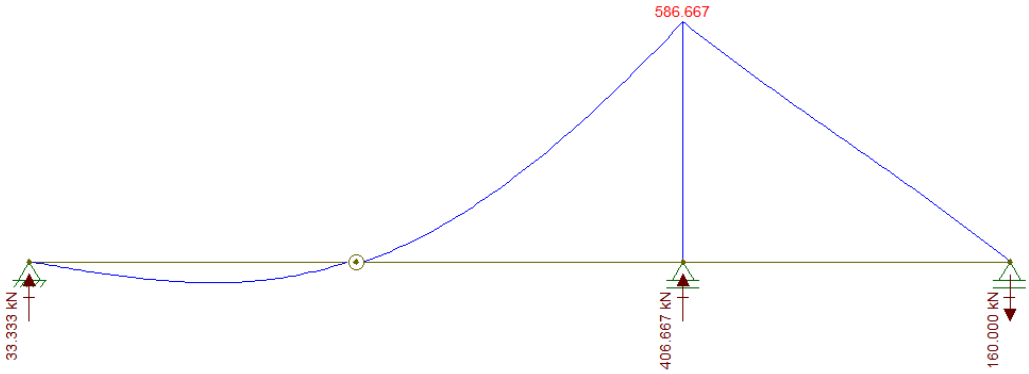


Figura 57 - Validação do código - Viga contínua – Momentos fletores – Ftool

Momentos fletores			
Barra	**Nó**	**Onça**	**Ftool**
1	**1**	0	0
	2	0	0
2	**2**	0	0
	3	-586,67	-586,67
3	**3**	-586,67	-586,67
	4	0	0

Tabela 5 - Validação do código - Viga contínua –Momentos fletores

As figuras 58 e 59 demonstram o estado deformado da estrutura no Onça e no Ftool respectivamente. Em seguida os resultados referentes aos deslocamentos da estrutura encontrados com o auxílio do Ftool em comparação com os resultados obtidos com o código desenvolvido.

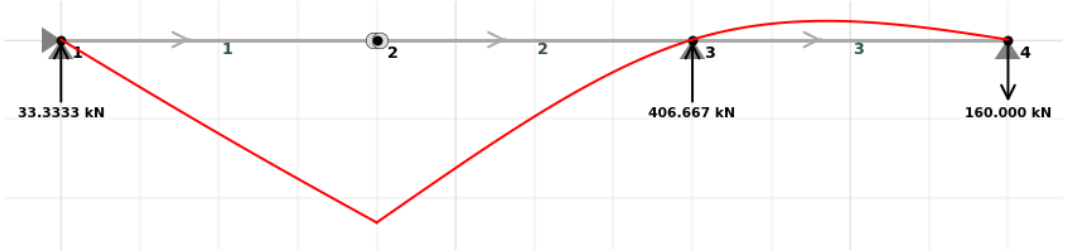


Figura 58 - Validação do código - Viga contínua – Estado deformado - ONÇA

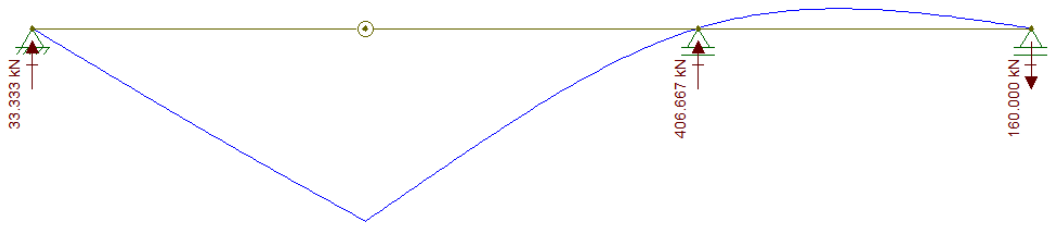


Figura 59 - Validação do código - Viga contínua – Estado deformado – Ftool

Deslocamentos						
Nó	Onça			Ftool		
	Dx	Dy	R	Dx	Dy	R
1	0	0	-0,00602	0	0	-0,00602
2	0	-2,3112	0	0	-2,3112	0
3	0	0	0,00306	0	0	0,00306
4	0	0	-0,00155	0	0	-0,00155

Tabela 6 - Validação do código - Viga contínua – Deslocamentos

Para finalizar a validação da viga serão verificadas as reações de apoio da estrutura, a tabela a seguir demonstra esta comparação.

Reações de apoio						
Nó	Onça			Ftool		
	H	V	M	H	V	M
1	0	33,333	-	0	33,333	-
3	-	406,67	-	-	406,67	-
4	-	-160	-	-	-160	-

Tabela 7 - Validação do código - Viga contínua – Reações de apoio

Conclui-se que tanto os deslocamentos como os esforços encontrados com o código para vigas contínuas são muito semelhantes aos resultados obtidos com o Ftool.

4.3 Pórtico com barra inclinada

O terceiro caso de validação trata-se de pórtico com barra inclinada que possui três elementos e quatro nós engastados. Esta configuração conta com dois apoios, sendo o primeiro um engaste o segundo tipo dois. Foi inserido carregamento distribuído ao longo da barra dois e um carregamento nodal no segundo nó. O

material utilizado em todas as barras é concreto com módulo de elasticidade E = 30,672 GPa com geometria da seção retangular possuindo 20cm de base e 45cm de altura.

A figura 60 exibe a configuração das barras e dos nós, bem como os esforços solicitantes.

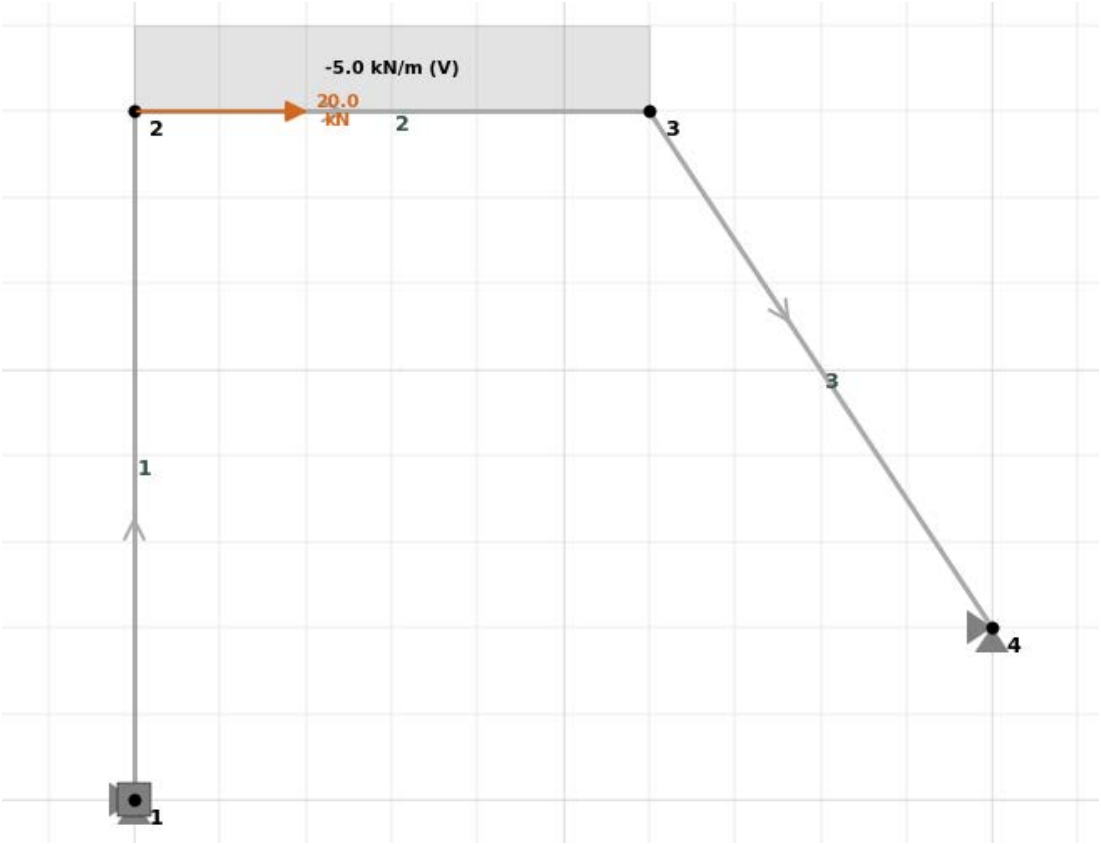


Figura 60 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada

As figuras 61 a 65 demostram os dados informados para o código para resolução deste problema.

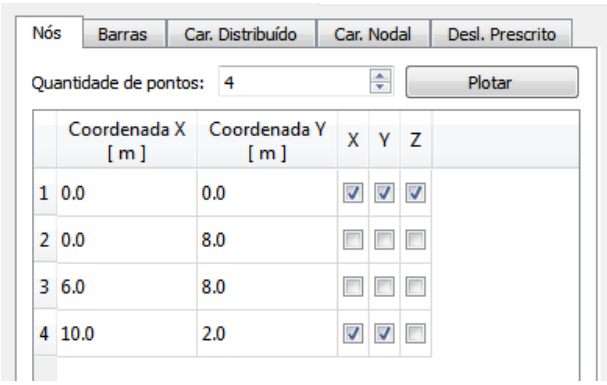


Figura 61 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada - Nós

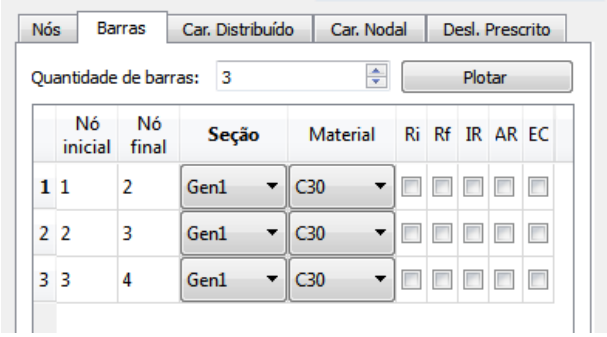


Figura 62 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada - Barras

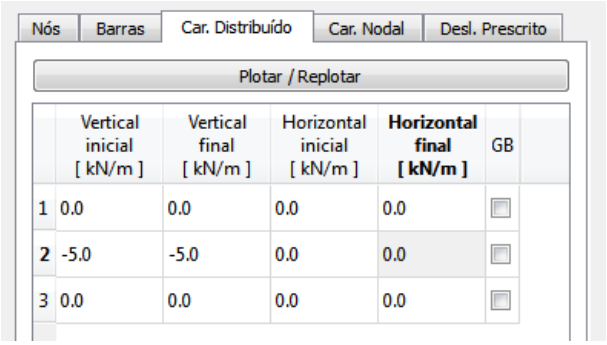


Figura 63 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Carregamentos distribuídos

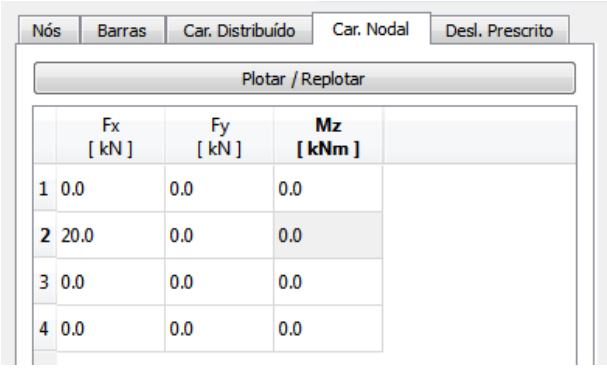


Figura 64 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Cargas nodais

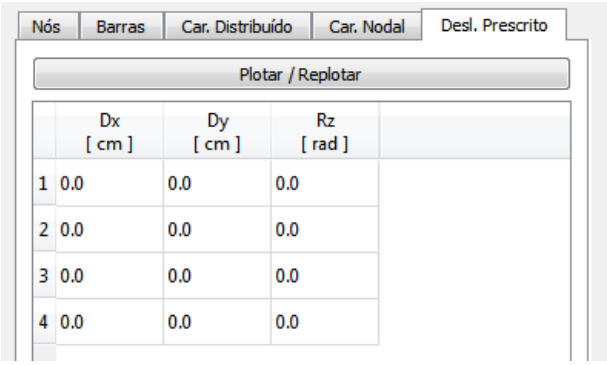


Figura 65 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Deslocamento prescrito

A seguir, a figura 66 exibe o diagrama de esforços axiais obtido com o ONÇA, a figura 67 demonstra o diagrama encontrado com a utilização do Ftool. Em seguida, é demonstrado o comparativo de valores dos esforços axiais nos nós da estrutura.

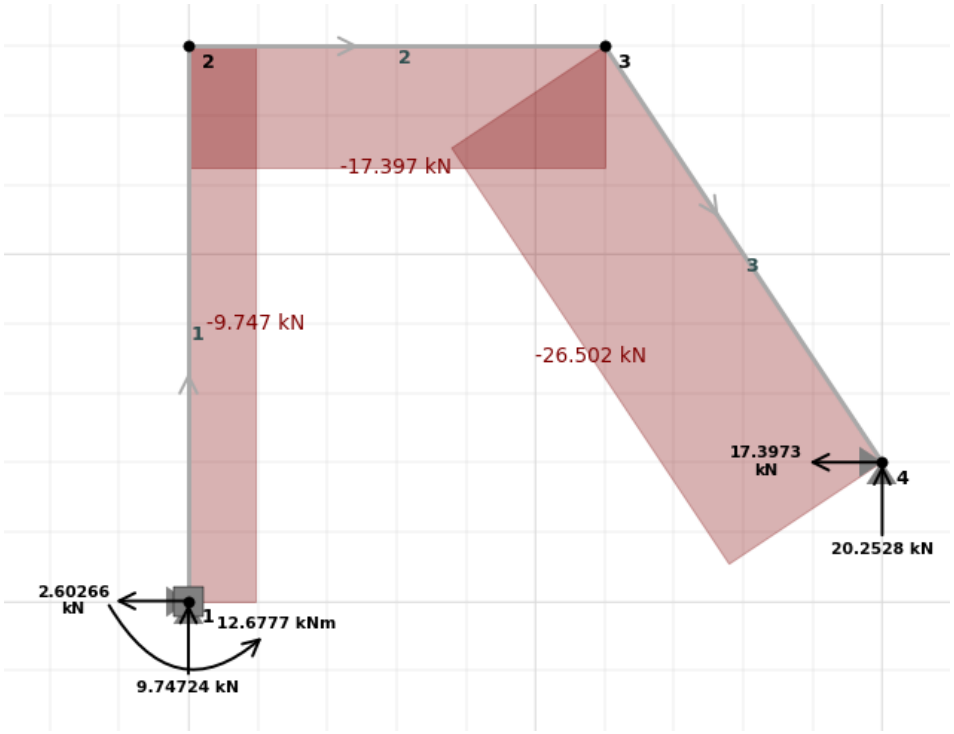


Figura 66 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Esforços axiais – ONÇA

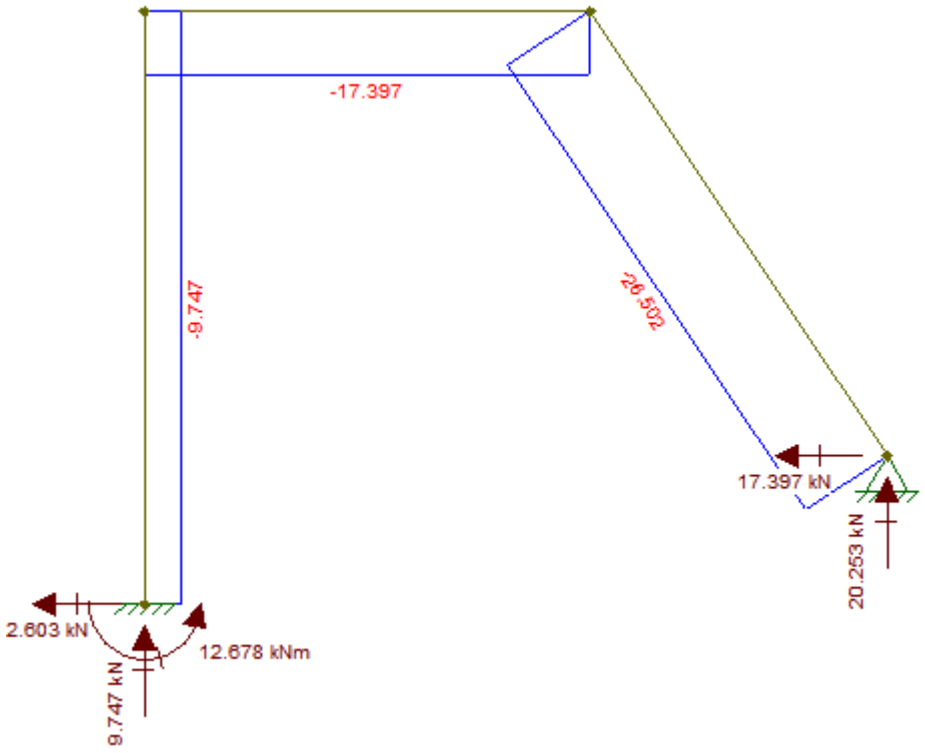


Figura 67 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Esforços axiais – Ftool

Esforços Axiais			
Barra	**Nó**	**Onça**	**Ftool**
1	**1**	-9,7472	-9,7472
	2	-9,7472	-9,7472
2	**2**	-17,394	-17,394
	3	-17,394	-17,394
3	**3**	-26,502	-26,502
	4	-26,502	-26,502

Tabela 8 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Esforços axiais

A seguir, a figura 68 exibe o diagrama dos esforços cortantes obtido com o ONÇA, a figura 69 demonstra o diagrama encontrado com a utilização do Ftool. Em seguida, é demonstrado o comparativo dos resultados nos nós da estrutura.

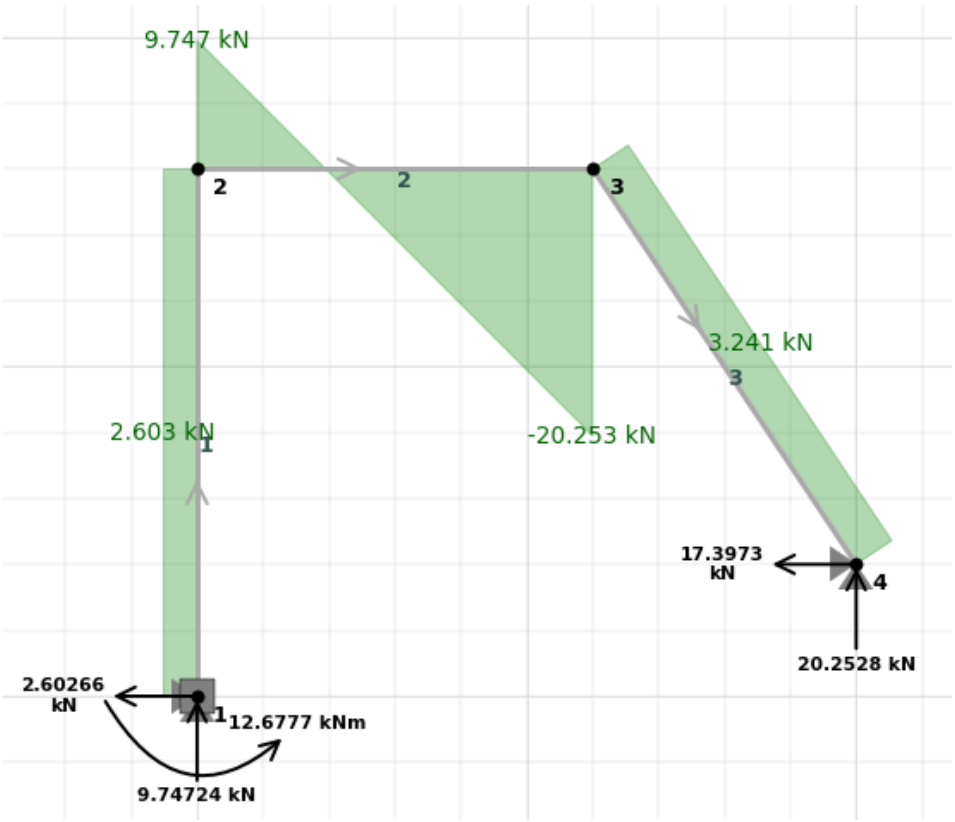


Figura 68 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Esforços cortantes – ONÇA

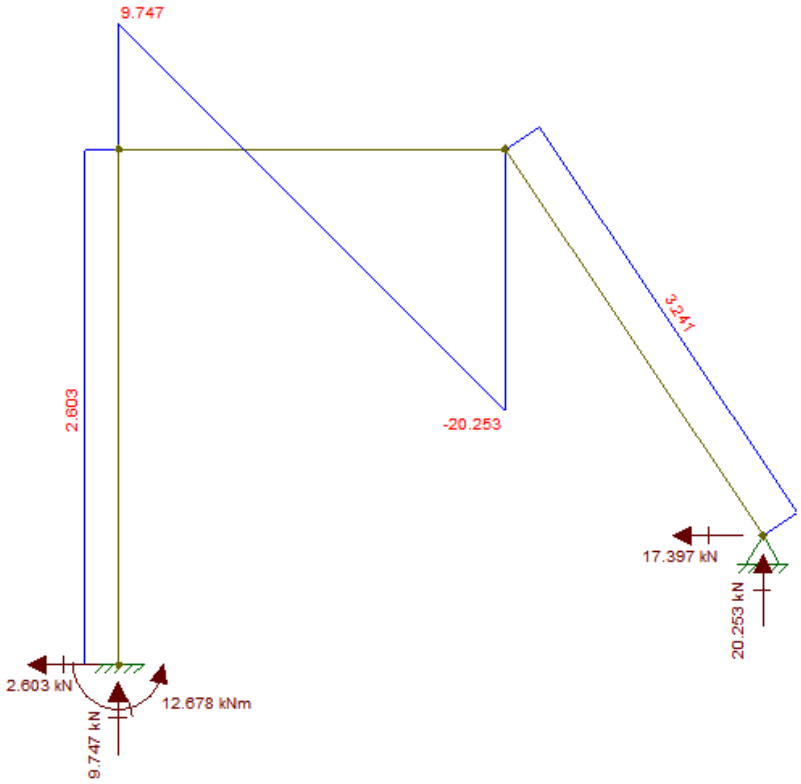


Figura 69 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Esforços cortantes– Ftool

Esforços Cortante			
Barra	**Nó**	**Onça**	**Ftool**
1	**1**	2,6027	2,6027
	2	2,6027	2,6027
2	**2**	9,7472	9,7472
	3	-20,253	-20,253
3	**3**	3,2413	3,2413
	4	3,2413	3,2413

Tabela 9 - Validação do código - Pórtico com deslocamento prescrito - Esforços cortantes

A figura 70 exibe o diagrama de momentos fletores obtidos com o Onça, a figura 71 demonstra o diagrama encontrado com a utilização do Ftool. Em seguida, é demonstrado o comparativo dos resultados por nó da estrutura.

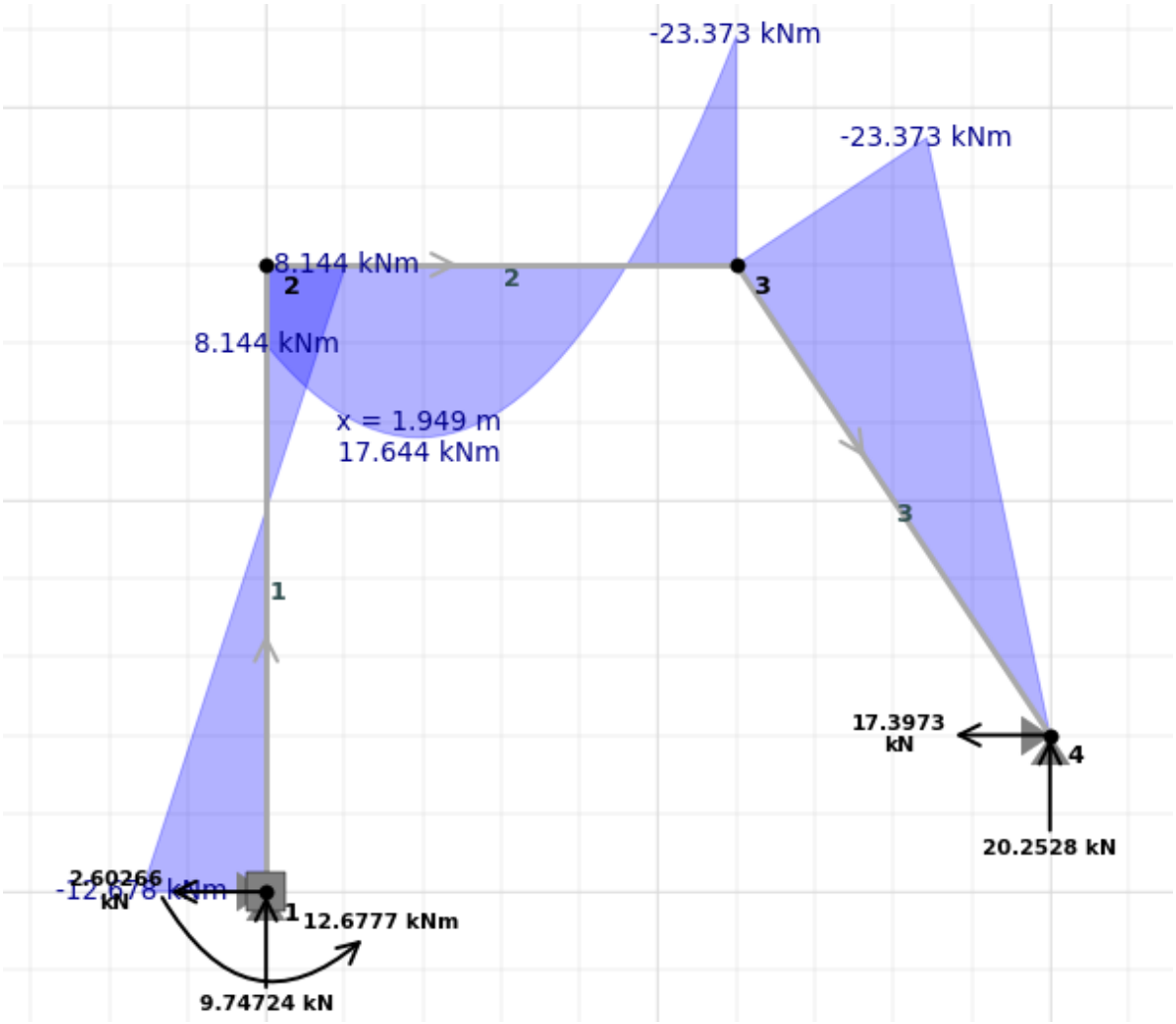


Figura 70 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Momentos fletores – ONÇA

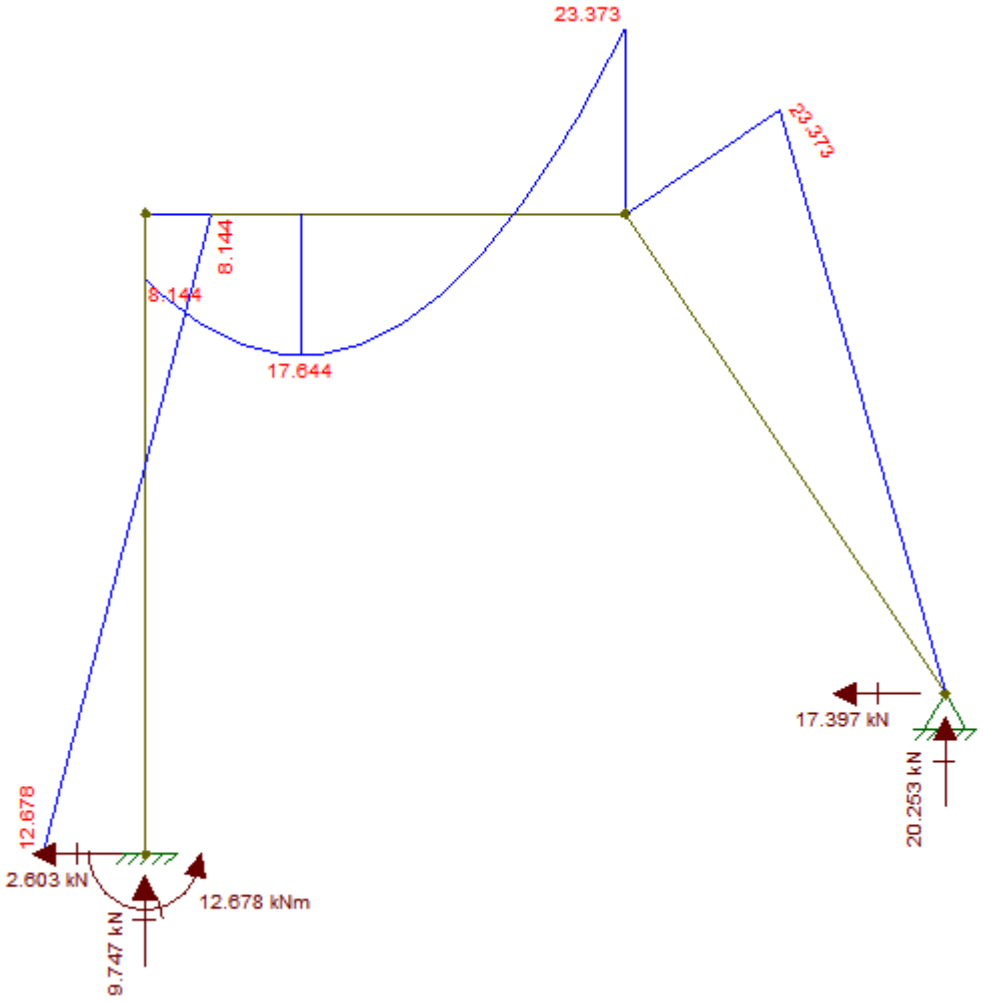


Figura 71 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Momentos fletores – Ftool

Momentos fletores			
Barra	**Nó**	**Onça**	**Ftool**
1	**1**	12,677	12,677
	2	8,1435	8,1435
2	**2**	8,1435	8,1435
	3	-23,373	-23,373
3	**3**	-23,373	-23,373
	4	0	0

Tabela 10 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Momentos fletores

As figuras 72 e 73 demonstram o estado deformado da estrutura no ONÇA e no Ftool respectivamente. Em seguida os resultados referentes aos deslocamentos da estrutura encontrados com o auxílio do Ftool em comparação com os resultados obtidos com o código desenvolvido.

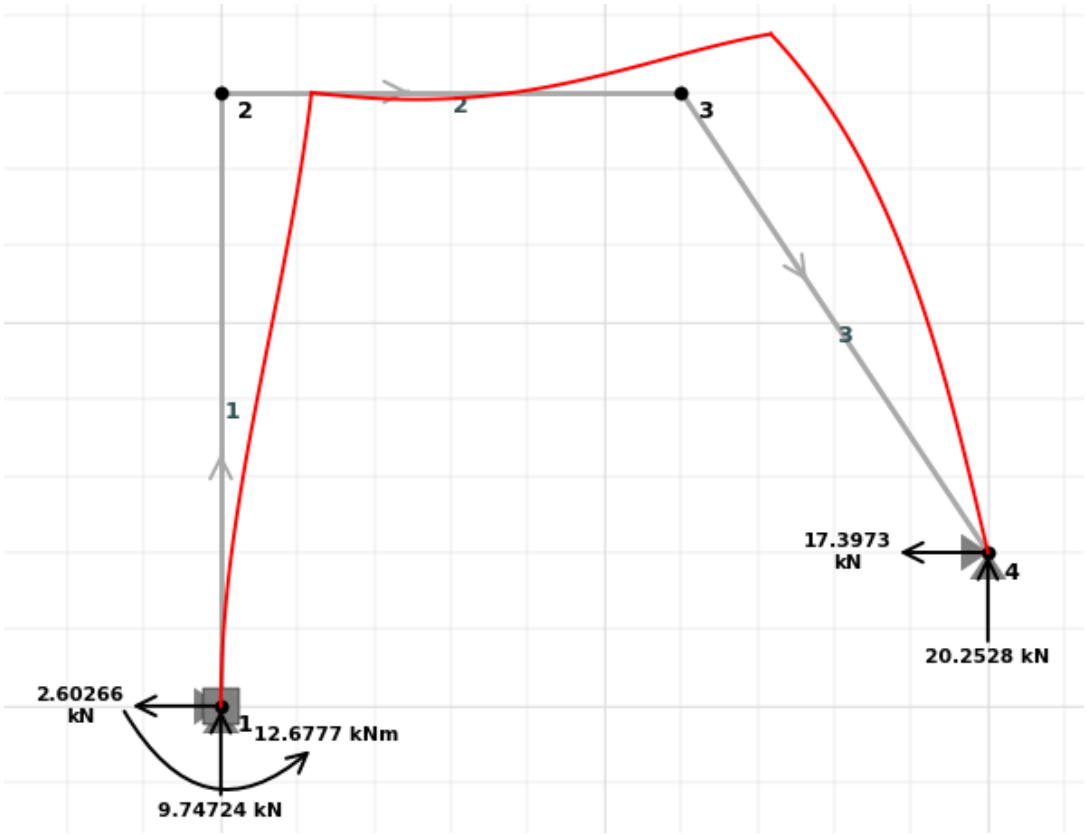


Figura 72 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Estado deformado – ONÇA

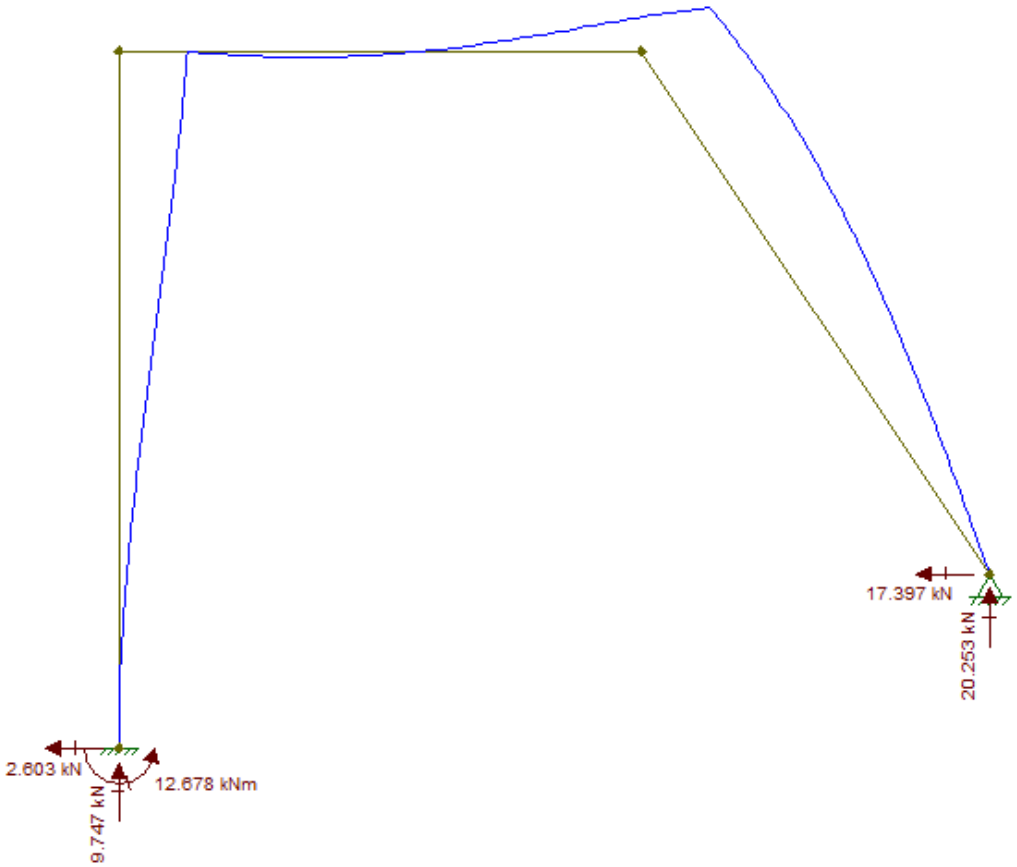


Figura 73 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Estado deformado – Ftool

Deslocamentos						
Nó	Onça			Ftool		
	Dx	Dy	R	Dx	Dy	R
1	0,00	0,00	0,00	0	0	0
2	0,39412	-0,00282	-0,00039	0,39412	-0,00282	-0,00039
3	0,39034	0,25191	0,00056	0,39034	0,25191	0,00056
4	0,00	0,00	-0,00125	0,00	0,00	-0,00125

Tabela 11 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Deslocamentos

Para finalizar a validação do pórtico serão verificadas as reações de apoio da estrutura, a tabela a seguir demonstra esta comparação.

Reações de apoio						
Nó	Onça			Ftool		
	H	V	M	H	V	M
1	-2,6027	9,7472	12,678	-2,6027	9,7472	12,678
4	-17,397	20,253	-	-17,397	20,253	-

Tabela 12 - Validação do código - Pórtico com barra inclinada – Deslocamentos

Conclui-se que tanto os deslocamentos como os esforços encontrados com o código para pórticos com barras inclinadas são muito semelhantes aos resultados obtidos com o Ftool.

4.4 Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas

O quarto caso de validação trata-se de pórtico com pilares axialmente rígidos e vigas infinitamente rígidas que possui seis elementos e quatro nós engastados dois rotulados. Esta configuração conta com dois apoios, sendo o primeiro tipo dois e o segundo engaste. Foi inserido cargas nodais nos nós 2 e 3. O material utilizado em todas as barras é concreto com módulo de elasticidade E = 30,672 GPa. A geometria da seção retangular dos pilarespossuem20cm de base e 60cm de altura e A geometria da seção retangular dos pilares possuem 20cm de base e 100cm de altura.

A figura 74 exibe a configuração das barras e dos nós, bem como os esforços solicitantes.

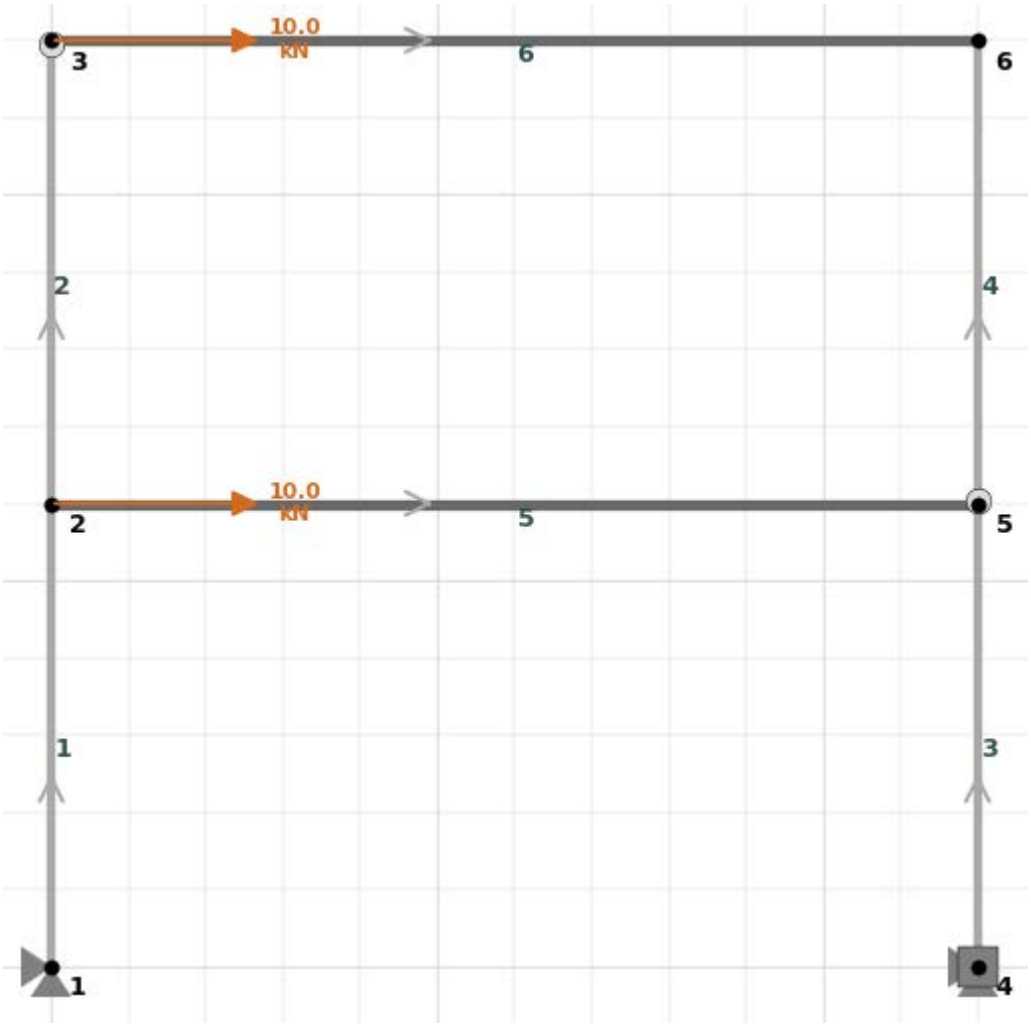


Figura 74 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas

As figuras 75 a 76 demostram os dados informados para o código para resolução deste problema.

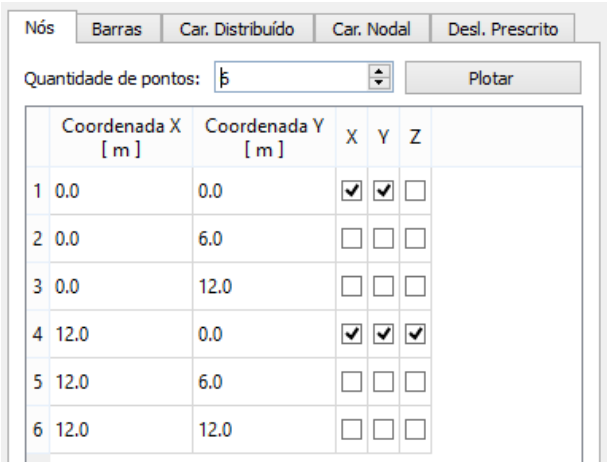
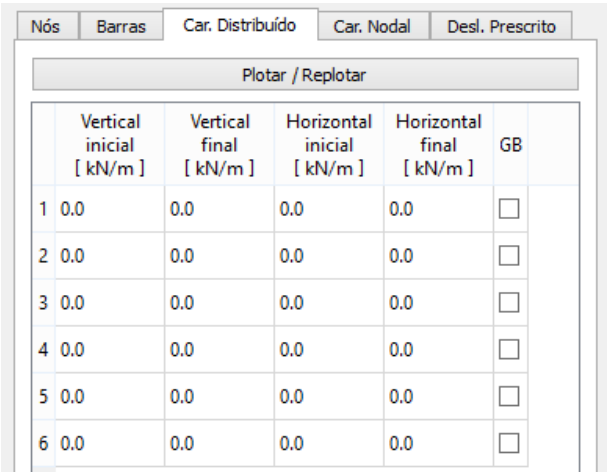


Figura 75 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas - Nós



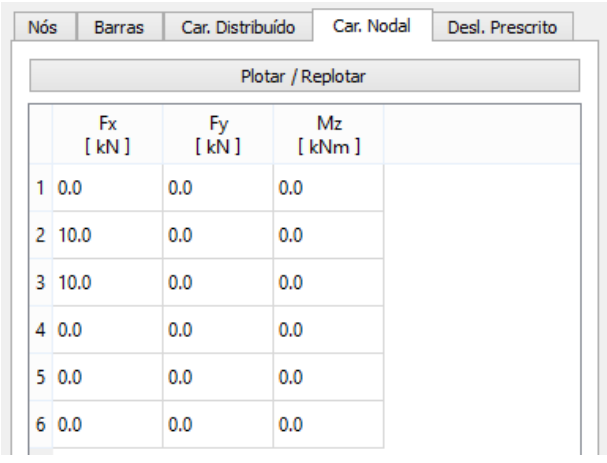
	Nó inicial	Nó final	Seção	Material	Ri	Rf	IR	AR	EC
1	1	2	Ret1	C30	☐	☐	☐	☑	☐
2	2	3	Ret1	C30	☐	☑	☐	☑	☐
3	4	5	Ret1	C30	☐	☐	☐	☑	☐
4	5	6	Ret1	C30	☑	☐	☐	☑	☐
5	2	5	Ret2	C30	☐	☐	☑	☐	☐
6	3	6	Ret2	C30	☐	☐	☑	☐	☐

Figura 76 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas - Barras



	Vertical inicial [kN/m]	Vertical final [kN/m]	Horizontal inicial [kN/m]	Horizontal final [kN/m]	GB
1	0.0	0.0	0.0	0.0	☐
2	0.0	0.0	0.0	0.0	☐
3	0.0	0.0	0.0	0.0	☐
4	0.0	0.0	0.0	0.0	☐
5	0.0	0.0	0.0	0.0	☐
6	0.0	0.0	0.0	0.0	☐

Figura 77 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Carregamentos distribuídos



	Fx [kN]	Fy [kN]	Mz [kNm]
1	0.0	0.0	0.0
2	10.0	0.0	0.0
3	10.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0

Figura 78 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Cargas nodais

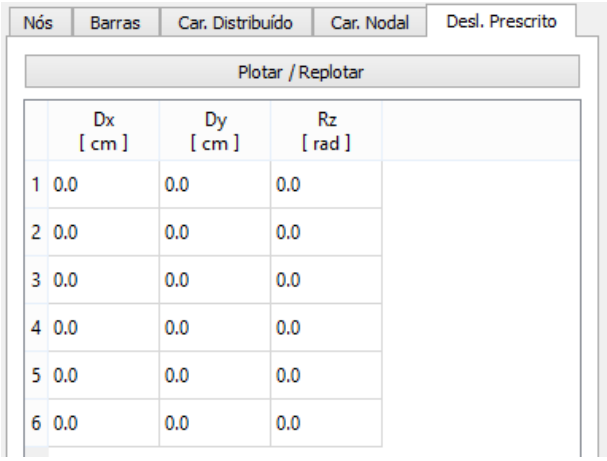


Figura 79 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Deslocamento prescrito

A seguir, a figura 80 exibe o diagrama de esforços axiais obtido com o ONÇA, a figura 81 demonstra o diagrama encontrado com a utilização do Ftool. Em seguida, é demonstrado o comparativo de valores dos esforços axiais nos nós da estrutura.

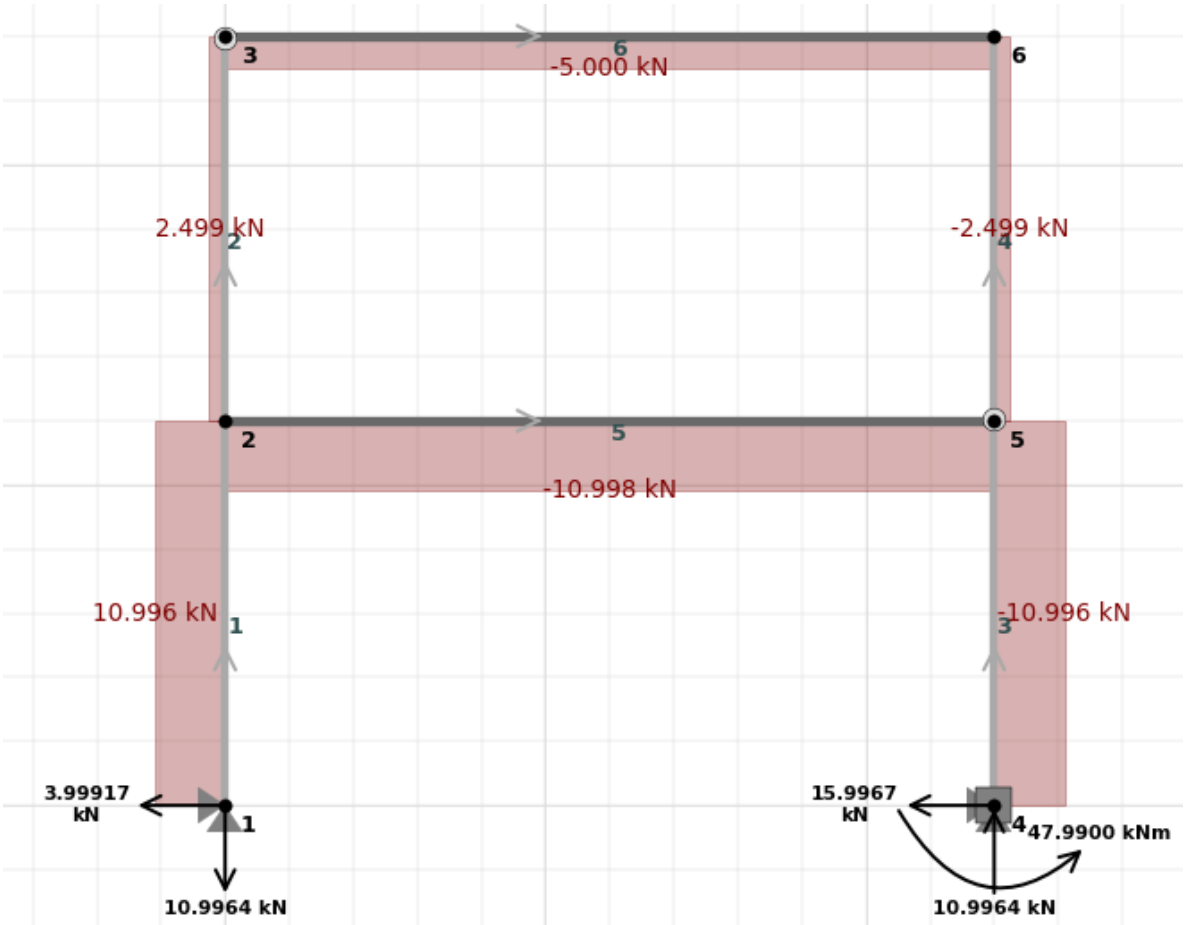


Figura 80 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Esforços axiais – ONÇA

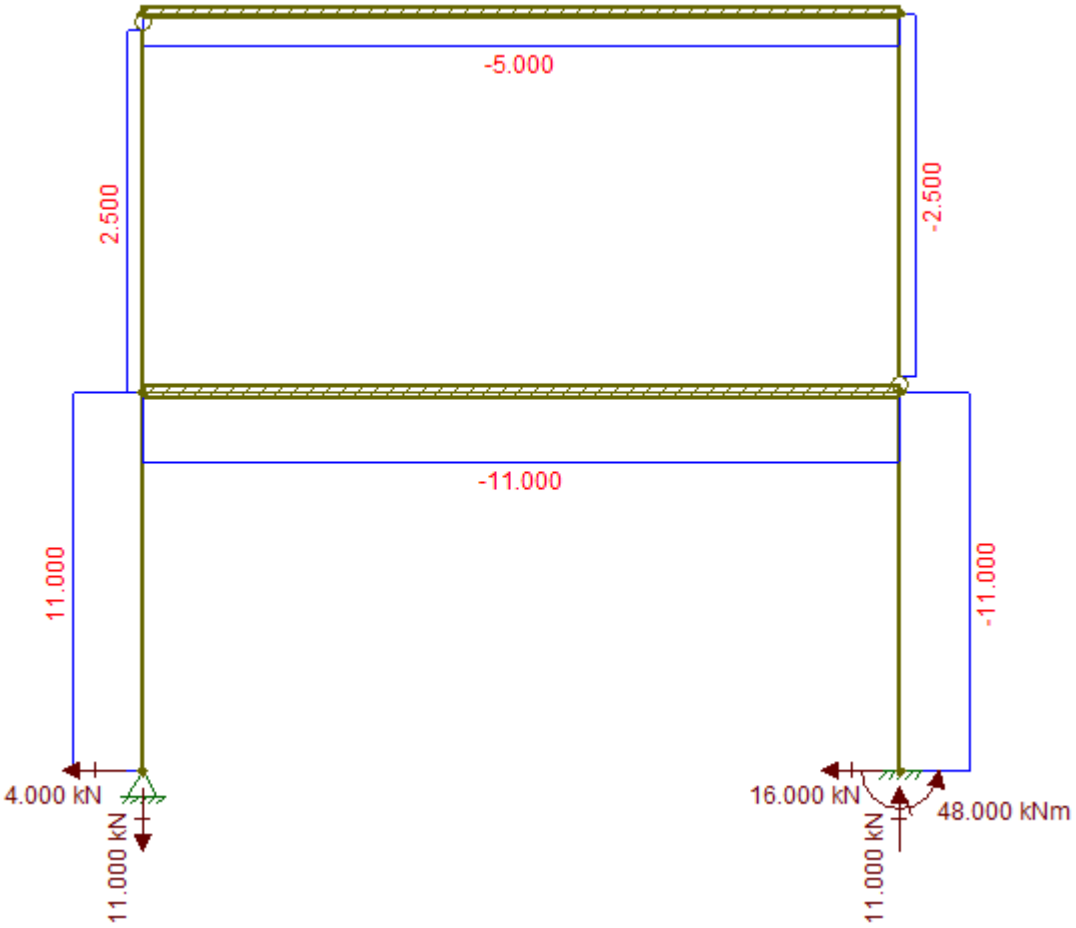


Figura 81 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Esforços axiais – Ftool

Esforços Axiais			
Barra	**Nó**	**Onça**	**Ftool**
1	**1**	10,996	11,000
	2	10,996	11,000
2	**2**	2,499	2,500
	3	2,499	2,500
3	**4**	-10,996	-11,000
	5	-10,996	-11,000
4	**5**	-2,499	-2,500
	6	-2,499	-2,500
5	**2**	-10,998	-11,000
	5	10,998	-11,000
6	**3**	-5,000	-5,000
	6	-5,000	-5,000

Tabela 13 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Esforços axiais

A seguir, a figura 82 exibe o diagrama dos esforços cortantes obtido com o ONÇA, a figura 83 demonstra o diagrama encontrado com a utilização do Ftool. Em seguida, é demonstrado o comparativo dos resultados nos nós da estrutura.

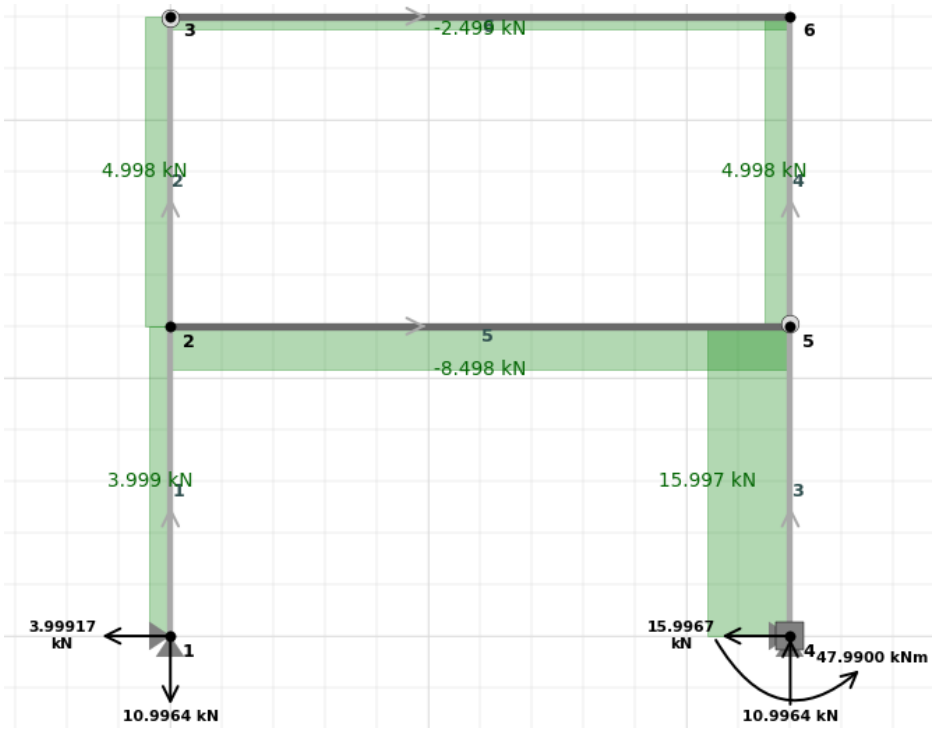


Figura 82 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Esforços cortantes – ONÇA

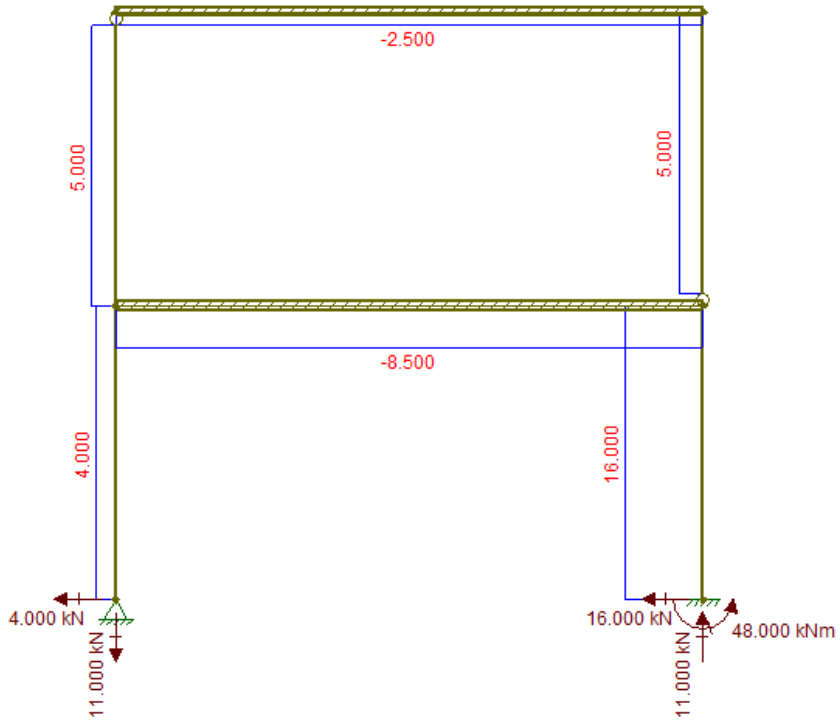


Figura 83 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Esforços cortantes– Ftool

Esforços Cortantes			
Barra	**Nó**	**Onça**	**Ftool**
1	**1**	3,999	4,000
	2	3,999	4,000
2	**2**	4,998	5,000
	3	4,998	5,000
3	**4**	15,997	16,000
	5	15,997	16,000
4	**5**	4,998	5,000
	6	4,998	5,000
5	**2**	-8,498	-8,500
	5	-8,498	-8,500
6	**3**	-2,499	-2,500
	6	-2,499	-2,500

Tabela 14 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas - Esforços cortantes

A figura 84 exibe o diagrama de momentos fletores obtidos com o Onça, a figura 85 demonstra o diagrama encontrado com a utilização do Ftool. Em seguida, é demonstrado o comparativo dos resultados por nó da estrutura.

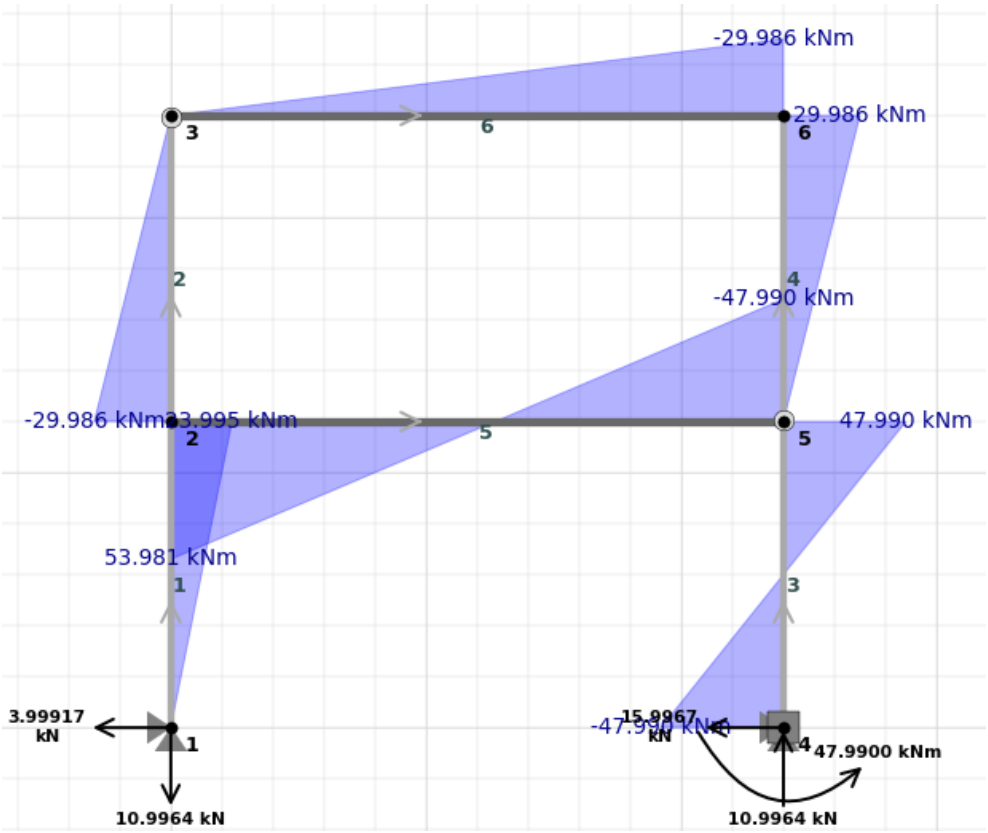


Figura 84 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Momentos fletores – ONÇA

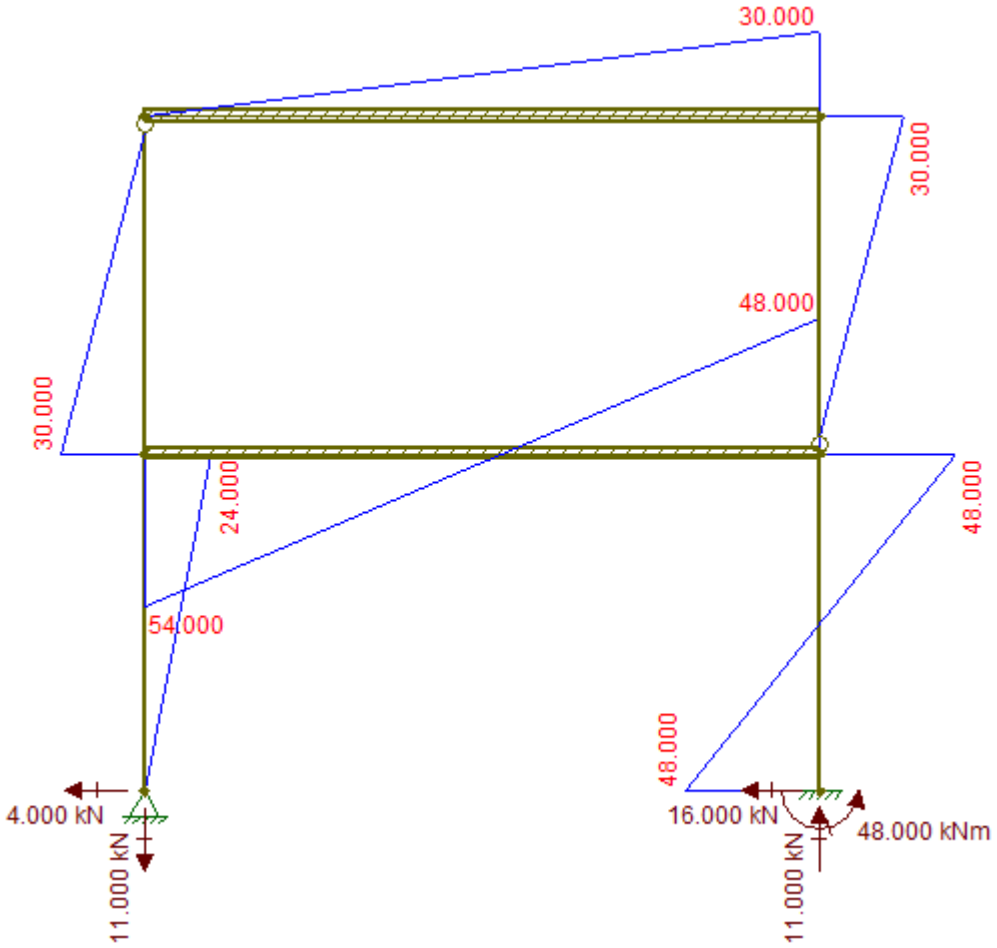


Figura 85 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Momentos fletores – Ftool

Momentos fletores			
Barra	**Nó**	**Onça**	**Ftool**
1	**1**	0,000	0,000
	2	23,995	24,000
2	**2**	-29,986	-30,000
	3	0,000	0,000
3	**4**	-47,990	-48,000
	5	47,990	48,000
4	**5**	0,000	0,000
	6	29,986	30,000
5	**2**	53,981	53,999
	5	-47,990	-48,000
6	**3**	0,000	0,000
	6	-29,986	-30,000

Tabela 15 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Momentos fletores

As figuras 86 e 87 demonstram o estado deformado da estrutura no ONÇA e no Ftool respectivamente. Em seguida os resultados referentes aos deslocamentos

da estrutura encontrados com o auxílio do Ftool em comparação com os resultados obtidos com o código desenvolvido.

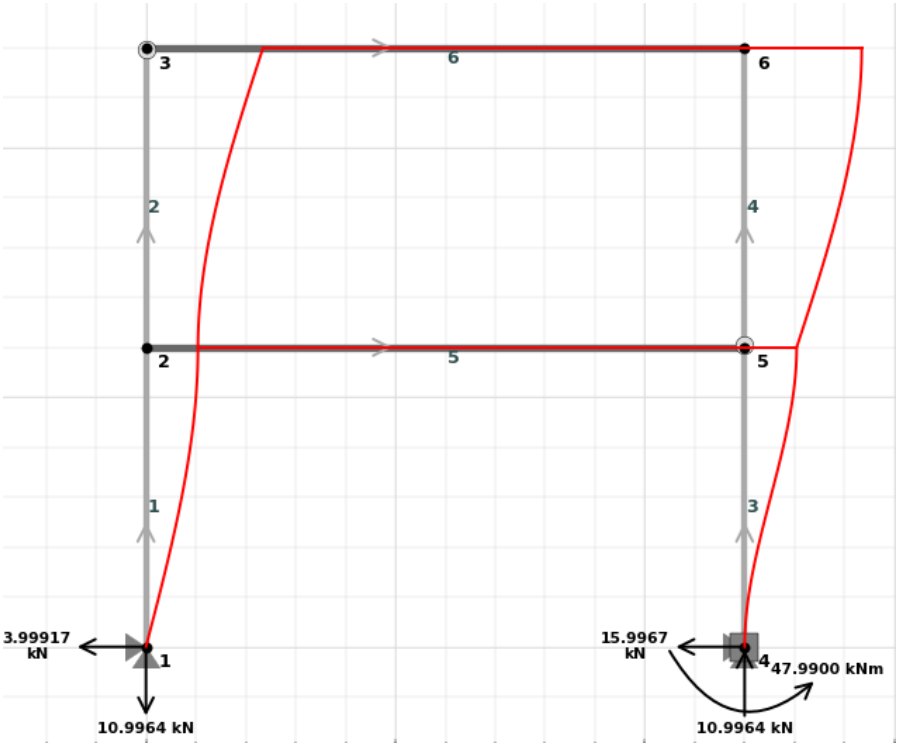


Figura 86 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Estado deformado – ONÇA

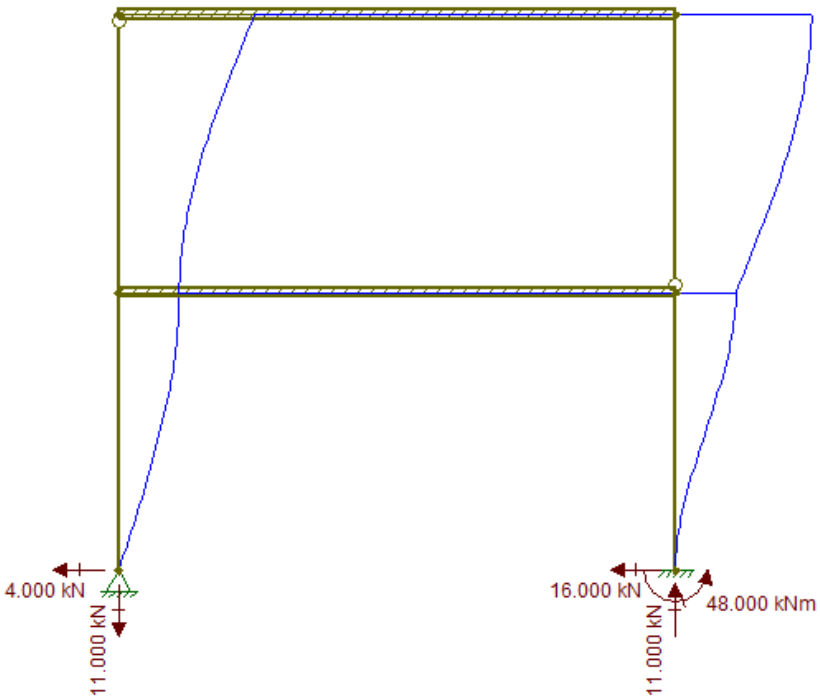


Figura 87 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Estado deformado – Ftool

Deslocamentos						
Nó	Onça			Ftool		
	Dx	Dy	R	Dx	Dy	R
1	0,00000	0,00000	-0,00065	0,00000	0,00000	-0,00065
2	0,26077	0,00000	0,00000	0,26080	0,00000	0,00000
3	0,58665	0,00000	0,00000	0,58690	0,00000	0,00000
4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,26077	0,00000	0,00000	0,26080	0,00000	0,00000
6	0,58665	0,00000	0,00000	0,58690	0,00000	0,00000

Tabela 16 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Deslocamentos

Para finalizar a validação do pórtico serão verificadas as reações de apoio da estrutura, a tabela a seguir demonstra esta comparação.

Reações de apoio						
Nó	Onça			Ftool		
	H	V	M	H	V	M
1	-3,999	-10,996	-	-4,000	-11,000	-
4	-15,997	10,996	47,999	-16,000	11,000	48,000

Tabela 17 - Validação do código - Pórtico com barras inextensíveis e infinitamente rígidas – Deslocamentos

Conclui-se que tanto os deslocamentos como os esforços encontrados com o código para pórticos com barras inclinadas são muito semelhantes aos resultados obtidos com o Ftool.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho foi desenvolvido o ONÇA: Cálculo estrutural 2D, tal software possibilita ao usuário a determinação dos esforços internos e deslocamentos de estruturas reticuladas planas e ainda fornece ao usuário um relatório, que pode ser utilizado para se entender os procedimentos intermediários do processo de cálculo.

Para desenvolvimento do código de cálculo foram considerados os procedimentos do método da rigidez em formulação matricial. Este é o método mais utilizado para a análise de estruturas, tendo em vista sua praticidade para ser feito computacionalmente (GERE e WEAVER JR., 1990).

Por meio da comparação dos resultados apresentados pelo *software* desenvolvido com os resultados obtidos via o software FTOOL 4.00.03 Basic (versão de Agosto 2017) comprovou-se a acurácia e precisão dos resultados finais. Ressalta-se que além dos resultados finais corretos o código desenvolvido apresenta a vantagem de fornecer os passos intermediários do processo de cálculo.

Considerando que o software apresenta resultados precisos para o objetivo do presente trabalho, pode-se sugerir para pesquisadores que tenham interesse na melhoria do mesmo os seguintes itens:

- Consideração do efeito de corte nos procedimentos de cálculo;
- Consideração dos efeitos causados pela temperatura na estrutura;
- Possibilidade de aplicação de carregamentos distribuídos não lineares;
- Possibilidade de aplicação de cargas móveis atuando nas estruturas;
- Análise de estruturas 3D.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORGES, L. E., **Python para desenvolvedores.** 2ª Ed. Rio de Janeiro: Edição do autor, 2010.

CARVALHO, N. M. V., **Cálculo automático de estruturas. Análise estrutural de pórticos planos utilizando método dos elementos finitos.** Trabalho final de mestrado – Departamento de Engenharia Civil. Lisboa: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, 2010.

FORBELLONE, A. L. V.; EBERSPÄCHER, H. F., **Lógica de programação – a construção de algoritmos e estruturas de dados.** 3ª Ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

GERE, J. M.; WEAVER JR., W. **Matrix analysis of framed structures.**3ª Ed. Nova Iorque: Van Nostrand Reinhold, 1990.

HIBBELER, R. C., **Análise das estruturas.** Tradutor: Jorge Ritter. Revisor Técnico: Pedro Viana.8ª Ed. São Paulo: Person Education do Brasil, 2013.

KOERICH, R., **Por que trabalhar com um programa para cálculo estrutural nos projetos?**. Disponível em: <http://maisengenharia.altoqi.com.br/estrutural/programa-para-calculo-estrutural-nos-projetos/>. Acesso em 29 de março de 2017.

LANA, E. F. D., MACHADO, N. L. R., **A importância da utilização de *softwares*para a melhoria da metodologia de ensino.** In: SEMINÁRIO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES/UFSM, 6, 2015, Santa Maria. Rio Grande do Sul: UFSM, 2015.

LEET, K. M.; UANG, C. M.; GILBERT, A. M. **Fundamentos da análise estrutural.** Tradutor: João Eduardo Nobrega Tortello. Revisor Técnico: Pedro V. P. Mendonça. 3ª Ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

LONGO, L. F., **Desenvolvimento de um aplicativo de análise de estruturas reticuladas planas em plataforma Android.** Trabalho de conclusão de curso – Departamento de Engenharia Civil. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.

MARTHA, L. F., **Análise de estruturas: Conceitos e Métodos Básicos.** 1ª Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MCCORMAC, J. C., **Análise estrutural: usando métodos clássicos e métodos matriciais.** Tradutor e revisor técnico: Amir Kurban. 4ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

MOREIRA, D. F., **Análise matricial das estruturas.** 1ª Ed. Rio de Janeiro: Editora da Universidade de São Paulo LTC, 1977.

O'HARA, S.; RAMMING, C. H., **Numerical structural analysis.**1ª ed. Nova Iorque: Momentum Press, 2014.

SOARES, S. M. B., **Análise matricial de estruturas de barras pelo método da rigidez**. Disponível em: <http://www.feng.pucrs.br/professores/soares>. Acesso em 31 demarço de 2017.

SORIANO, H. L., **Análise de estruturas – formulação matricial e implementaçãocomputacional**. 1a Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 2005

SORIANO, H. L., LIMA, S. S., **Análise de estruturas – método das forças e método dos deslocamentos.** 1a Ed. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna Ltda. 2004.

APÊNDICE A – CÓDIGO DE CÁLCULO

```
# ------------------ ROTACAO E COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS ------------------- #
    def Rotacao(self):
        self.Te = []
        self.Le = []
        self.Lb = []
        self.Xe = []
        self.Dx_bar = []
        for i in self.incid:
            xi = self.coord[i[0]][0] # Coordenada X do ponto inicial
            yi = self.coord[i[0]][1] # Coordenada Y do ponto inicial
            xf = self.coord[i[1]][0] # Coordenada X do ponto final
            yf = self.coord[i[1]][1] # Coordenada Y do ponto final
            dx = xf-xi # Cateto x
            dy = yf-yi # Cateto y
            L  = np.sqrt(dx**2 + dy**2) # Comprimento do elemento
            lbx = dx/L # Cosseno A
            lby = dy/L # Seno A
            # Matriz de rotacao
            T = np.matrix([
              [ lbx, lby, 0.,   0.,  0., 0.],
              [-lby, lbx, 0.,   0.,  0., 0.],
              [  0.,  0., 1.,   0.,  0., 0.],
              [  0.,  0., 0.,  lbx, lby, 0.],
              [  0.,  0., 0., -lby, lbx, 0.],
              [  0.,  0., 0.,   0.,  0., 1.]])
            self.Te.append(T) # Cria lista das matrizes de rotacao
            self.Le.append(L) # Cria lista dos comprimentos dos elementos
            self.Lb.append([lbx, lby]) # Lista dos lambdas
            self.Xe.append([xi,yi,xf,yf]) # Cria lista dos pontos das barras
            self.Dx_bar.append([dx, dy])
```

```
# ------------------- IDENTIFICACAO DOS GRAUS DE LIBERDADE ----------------- #
    def Id_gl(self):
        self.Idgl = np.zeros(self.no_gl).reshape(self.no_no,3)
        cont = 0
        for i in range(self.no_no):    # Graus de liberdade livres
            if self.restr[i][0] == 0:
                self.Idgl[i][0] = cont
                cont += 1
            if self.restr[i][1] == 0:
                self.Idgl[i][1] = cont
                cont += 1
            if self.restr[i][2] == 0:
                self.Idgl[i][2] = cont
                cont += 1
        self.gl_fr = cont            # Quantidade de graus de liberdade livres
        for i in range(self.no_no):  # Graus de liberdade restringidos
            if self.restr[i][0] == 1:
                self.Idgl[i][0] = cont
                cont += 1
            if self.restr[i][1] == 1:
                self.Idgl[i][1] = cont
                cont += 1
            if self.restr[i][2] == 1:
                self.Idgl[i][2] = cont
                cont += 1
        self.Idgl = self.Idgl.astype(int)
```

```
# ---------------------------- GEOMETRIA DA SECAO ------------------------- #
    def GeomSecao(self):
        self.Sec = []
        self.secoes   = []
        # Seções tranversais pré-definidas ------------------------------------
        for i in range(self.no_sec):
            # Seção genérica ------------------------------------------------
            if self.g_sec[i][0] == 'generico':
                A = self.g_sec[i][2]
                I = self.g_sec[i][3]
            # Seção retangular ----------------------------------------------
            if self.g_sec[i][0] == 'retangular':
                A = self.g_sec[i][2]*self.g_sec[i][3]
                I = self.g_sec[i][2]*self.g_sec[i][3]**3/12
            # Seção tubo retangular -----------------------------------------
            if self.g_sec[i][0] == 'TBretangular':
                bi = self.g_sec[i][2]-2*self.g_sec[i][4]
                hi = self.g_sec[i][3]-2*self.g_sec[i][4]
                Iint = bi*hi**3/12
                A = self.g_sec[i][2]*self.g_sec[i][3]-bi*hi
                I = self.g_sec[i][2]*self.g_sec[i][3]**3/12-Iint
            # Seção circular ------------------------------------------------
            if self.g_sec[i][0] == 'circular':
                A = np.pi*self.g_sec[i][2]**2/4
                I = np.pi*self.g_sec[i][2]**4/64
            # Seção tubo circular -------------------------------------------------
            if self.g_sec[i][0] == 'TBcircular':
                di = self.g_sec[i][2]-2*self.g_sec[i][3]
                A = np.pi*(self.g_sec[i][2]**2-di**2)/4
                I = np.pi*(self.g_sec[i][2]**4-di**4)/64
            # Seção perfil H ------------------------------------------------
            if self.g_sec[i][0] == 'ph':
                Aalma = 2*self.g_sec[i][4]*self.g_sec[i][5]
                A = self.g_sec[i][2]*self.g_sec[i][3]+Aalma
                I = 2*self.g_sec[i][5]*self.g_sec[i][4]**3/12+self.g_sec[i][2]*self.g_sec[i][3]**3/12
            # Seção perfil I ------------------------------------------------
            if self.g_sec[i][0] == 'pi':
                hw = self.g_sec[i][2]-2*self.g_sec[i][5]
                tw = self.g_sec[i][3]
                bf = self.g_sec[i][4]
                tf = self.g_sec[i][5]
                A = hw*tw+2*bf*tf
                I = tw*hw**3/12 + 2*(bf*tf**3/12+bf*tf*(hw/2+tf/2)**2)
            # Seção perfil L ------------------------------------------------
            if self.g_sec[i][0] == 'pl':
                bf = self.g_sec[i][2]
                tf = self.g_sec[i][3]
                A = bf*tf+bf*(bf+tf)
                yg = (bf*tf*(tf/2)+tf*(tf+bf)*((tf+bf)/2))/A
                I1 = tf*(tf+bf)**3/12+tf*(tf+bf)*(yg-(tf+bf)/2)**2
                I2 = bf*tf**3/12+tf*bf*(yg-tf/2)**2
                I = I1+I2
            # Seção perfil T ------------------------------------------------
            if self.g_sec[i][0] == 'pt':
                hw = self.g_sec[i][2]
                tw = self.g_sec[i][3]
                bf = self.g_sec[i][4]
                tf = self.g_sec[i][5]
                A = hw*tw+bf*tf
                yg = (0.5*tw*hw**2+bf*tf*(tf*0.5+hw))/A
                I = tw*hw**3/12+hw*tw*(hw/2-yg)**2+tf*bf**3/12+tf*bf*(tf/2+hw-yg)**2
            self.secoes.append([A, I])
        # Seções tranversais dos elementos ------------------------------------
        for i in range(self.no_el):
            for j in range(self.no_sec):
                if self.sec_el[i] == self.g_sec[j][1]:
                    sec_pivo = self.secoes[j]
                else: continue
            self.Sec.append(sec_pivo)
```

```
# ------------------------------- MATERIAIS -------------------------------- #
    def Material(self):
        self.Mat  = []
        materiais = []
        # Materiais pré-definidos ---------------------------------------------
        for i in range(self.no_mat):
            E = self.mater[i][1]
            materiais.append([E])
        # Materiais dos elementos ---------------------------------------------
        for i in range(self.no_el):
            for j in range(self.no_mat):
                if self.mat_el[i] == self.mater[j][0]:
                    mat_pivo = materiais[j]
                else: continue
            self.Mat.append(mat_pivo)
```

```
# -------------------------- MATRIZES DE RIGIDEZ ------------------------- #
  def Rigidez(self):
# ----------------------- MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR -------------------- #
        self.Ke = []
        self.Ke_nr = []
        for i in range(self.no_el):
            v1 = self.vinc[i][0]
            v2 = self.vinc[i][1]
            A  = self.Sec[i][0]
            I  = self.Sec[i][1]
            E  = self.Mat[i][0]
            L  = self.Le[i]
            IR = 1
            AR = 1

            if self.i_rigido[i] == 'ir':
                IR = 1e10
            if self.a_rigido[i] == 'ar':
                AR = 1e10

            if v1=='e' and v2=='e':
                kel = np.matrix([
                [ E*A/L*AR,             0.,             0., -E*A/L*AR,             0.,             0.],
                [       0.,  (12.*E*I/L**3),  (6.*E*I/L**2),       0., (-12.*E*I/L**3),  (6.*E*I/L**2)],
                [       0.,   (6.*E*I/L**2),     (4.*E*I/L),       0.,  (-6.*E*I/L**2),     (2.*E*I/L)],
                [-E*A/L*AR,             0.,             0.,  E*A/L*AR,             0.,             0.],
                [       0., (-12.*E*I/L**3), (-6.*E*I/L**2),       0.,  (12.*E*I/L**3), (-6.*E*I/L**2)],
                [       0.,   (6.*E*I/L**2),     (2.*E*I/L),       0.,  (-6.*E*I/L**2),     (4.*E*I/L)]])*IR

            if v1=='e' and v2=='r':
                kel = np.matrix([
                [ E*A/L*AR,             0.,             0., -E*A/L*AR,             0.,     0.],
                [       0.,  (3*E*I/L**3),  (3*E*I/L**2),       0., (-3*E*I/L**3),     0.],
                [       0.,  (3*E*I/L**2),     (3*E*I/L),       0., (-3*E*I/L**2),     0.],
                [-E*A/L*AR,             0.,             0.,  E*A/L*AR,             0.,     0.],
                [       0., (-3*E*I/L**3), (-3*E*I/L**2),       0.,  (3*E*I/L**3),     0.],
                [       0.,             0.,             0.,       0.,             0., 1.e-30]])*IR

            if v1=='r' and v2=='e':
                kel = np.matrix([
                [ E*A/L*AR,             0.,     0., -E*A/L*AR,             0.,             0.],
                [       0.,  (3*E*I/L**3),     0.,       0., (-3*E*I/L**3),  (3*E*I/L**2)],
                [       0.,             0., 1.e-30,       0.,             0.,             0.],
                [-E*A/L*AR,             0.,     0.,  E*A/L*AR,             0.,             0.],
                [       0., (-3*E*I/L**3),     0.,       0.,  (3*E*I/L**3), (-3*E*I/L**2)],
                [       0.,  (3*E*I/L**2),     0.,       0., (-3*E*I/L**2),     (3*E*I/L)]])*IR

            if v1=='r' and v2=='r':
                kel = np.matrix([
                [ E*A/L*AR,     0.,     0., -E*A/L*AR,     0.,     0.],
                [       0., 1.e-30,     0.,       0.,     0.,     0.],
                [       0.,     0., 1.e-30,       0.,     0.,     0.],
                [-E*A/L*AR,     0.,     0.,  E*A/L*AR,     0.,     0.],
                [       0.,     0.,     0.,       0., 1.e-30,     0.],
                [       0.,     0.,     0.,       0.,     0., 1.e-30]])*IR

            # Matrize de rigidez elementar rotacionada
            self.Ke.append(self.Te[i].T * kel * self.Te[i])
            self.Ke_nr.append(kel)
```

```
# ------------------------ MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL ------------------------ #
        self.Kg = np.zeros((self.no_gl,self.no_gl))
        cont = 0
        for i in self.incid:
            #Apontador para a matriz de rigidez global
            pivo = [self.Idgl[i[0]][0],
                    self.Idgl[i[0]][1],
                    self.Idgl[i[0]][2],
                    self.Idgl[i[1]][0],
                    self.Idgl[i[1]][1],
                    self.Idgl[i[1]][2]]
            #Laco para acumular os valores elementares para matriz global
            lin_e = 0
            for lin in pivo:
                col_e = 0
                for col in pivo:
                    self.Kg[lin,col] += self.Ke[cont][lin_e,col_e]
                    col_e += 1
                lin_e += 1
            cont += 1
```

```
# -------------------------- CARREGAMENTO NODAL -------------------------- #
    def Nodal(self):
        self.pontual = np.zeros(self.no_gl)
        cont = 0
        for i in self.Idgl:
            self.pontual[i[0]] = self.pont[cont][0]
            self.pontual[i[1]] = self.pont[cont][1]
            self.pontual[i[2]] = self.pont[cont][2]
            cont += 1
```

```
# ------------------------ CARREGAMENTO DISTRIBUIDO ------------------------ #
    def Distribuido(self):
        self.l_dist_nod = []
        for i in range(self.no_el):
            cosseno = self.Lb[i][0]
            seno = self.Lb[i][1]
            v1  = self.vinc[i][0]
            v2  = self.vinc[i][1]
            I   = self.Sec[i][1]
            E   = self.Mat[i][0]
            L   = self.Le[i]
            if self.distgb[i] == 'global':
                q1  = self.distv[i][0]*cosseno - self.disth[i][0]*seno
                q2  = self.distv[i][1]*cosseno - self.disth[i][1]*seno
                n1  = self.disth[i][0]*cosseno + self.distv[i][0]*seno
                n2  = self.disth[i][1]*cosseno + self.distv[i][1]*seno
            else:
                q1  = self.distv[i][0]
                q2  = self.distv[i][1]
                n1  = self.disth[i][0]
                n2  = self.disth[i][1]
            Dq  = q2 - q1
            Dn  = n2 - n1
            F1 = L*(Dn/6 + n1/2)
            F4 = L*(Dn/3 + n1/2)
```

```
26
27                  if v1=='e' and v2=='e':
28                      d10m = -L**4*(Dq/30 + q1/8)/(E*I)
29                      d20m = L**3*(Dq + 4*q1)/(24*E*I)
30                      f11m = L**3/(3*E*I)
31                      f22m = L/(E*I)
32                      f12m = -L**2/(2*E*I)
33                      f11 = f11m
34                      f22 = f22m
35                      f12 = f12m
36                      d10 = d10m
37                      d20 = d20m
38                      K = np.array([[f11, f12],[f12, f22]])
39                      F = np.array([-d10, -d20])
40                      R = la.solve(K,F)
41                      F2 = R[0]
42                      F3 = R[1]
43                      F5 = -(-Dq*L/2 - L*q1 + F2) # Convencao troca sinal F5
44                      F6 = -Dq*L**2/6 - L**2*q1/2 + F2*L - F3
45
46                  if v1=='r' and v2=='e':
47                      d10m = -L**4*(Dq/30 + q1/8)/(E*I)
48                      f11m = L**3/(3*E*I)
49                      f11 = f11m
50                      d10 = d10m
51                      F2 = -d10/f11
52                      F3 = 0
53                      F5 = -(-Dq*L/2 - L*q1 + F2) # Convencao troca sinal F5
54                      F6 = -Dq*L**2/6 - L**2*q1/2 + F2*L
55
56                  if v1=='e' and v2=='r':
57                      d10m = L**4*(Dq/30 - q2/8)/(E*I)
58                      f11m = L**3/(3*E*I)
59                      f11 = f11m
60                      d10 = d10m
61                      F5 = -d10/f11
62                      F6 = 0.
63                      F2 = -Dq*L/2 + L*q2 - F5 # Convencao troca sinal F5
64                      F3 = -(Dq*L**2/6 - L**2*q2/2 + F5*L) # Convencao troca sinal F3
65
66                  if v1=='r' and v2=='r':
67                      F2 = q1*L/2 + Dq*L/6
68                      F3 = 0.
69                      F5 = q1*L/2 + Dq*L/3
70                      F6 = 0.
71
72                  # Cargas nodais devido car. distribuido na sequencia dos elementos
73                  dist_el = np.array([F1, F2, F3, F4, F5, F6])
74                  dist_nod = la.solve(self.Te[i],dist_el)
75                  self.l_dist_nod.append(dist_nod)
76
77              # Cargas nodais devido carregamento distribuido na sequencia de Idgl
78              self.distnod = np.zeros(self.no_gl)
79              cont =0
80              for i in self.incid:
81                  self.distnod[self.Idgl[i[0]][0]] += self.l_dist_nod[cont][0]
82                  self.distnod[self.Idgl[i[0]][1]] += self.l_dist_nod[cont][1]
83                  self.distnod[self.Idgl[i[0]][2]] += self.l_dist_nod[cont][2]
84                  self.distnod[self.Idgl[i[1]][0]] += self.l_dist_nod[cont][3]
85                  self.distnod[self.Idgl[i[1]][1]] += self.l_dist_nod[cont][4]
86                  self.distnod[self.Idgl[i[1]][2]] += self.l_dist_nod[cont][5]
87                  cont += 1
```

```
# --------------------------- CARGAS NODAIS TOTAL -------------------------- #
    def CalcCarga(self):
        self.Nodal()
        self.Distribuido()
        self.Carregamento()
    def Carregamento(self):
        self.carga = np.zeros((self.no_gl,1))
        for i in range(self.no_gl):
            self.carga[i] += self.distnod[i] + self.pontual[i]
        self.DeslocGlobal()
```

```
# ------ DESLOCAMENTOS PRESCRITOS NOS GRAUS DE LIBERDADE RESTRINGIDOS ------ #
    def DlocPrescrito(self):
        self.desloc = np.zeros((self.no_gl,1))
        cont = 0
        for i in range(self.no_no): # Deslocamentos dos gl restringidos
            if self.restr[i][0] == 1:
                self.desloc[self.Idgl[i][0]] = self.dloc[i][0]
                cont += 1
            if self.restr[i][1] == 1:
                self.desloc[self.Idgl[i][1]] = self.dloc[i][1]
                cont += 1
            if self.restr[i][2] == 1:
                self.desloc[self.Idgl[i][2]] = self.dloc[i][2]
                cont += 1
```

```
# ----------- DESLOCAMENTOS GLOBAIS NOS GRAUS DE LIBERDADE LIVRES ---------- #
    def DeslocGlobal(self):
        k12 = self.Kg[0:self.gl_fr, self.gl_fr:self.no_gl] # Matriz global quadrante 1
        k11 = self.Kg[0:self.gl_fr, 0:self.gl_fr]   # Matriz global quadrante 2
        qk  = self.carga[0:self.gl_fr] # Vetor cargas nodais todais
        self.dk  = self.desloc[self.gl_fr:self.no_gl] # Vetor deslocam. prescrito
        if k11 != []: # Deslocamentos globais
            self.Du = la.solve(k11, qk - np.dot(k12,self.dk))
        else:
            self.Du = np.dot(k12,self.dk)

        cont = 0
        for i in range(self.no_no): # Deslocamentos dos gl livres
            if self.restr[i][0] == 0:
                self.desloc[self.Idgl[i][0]] = self.Du[cont]
                cont += 1
            if self.restr[i][1] == 0:
                self.desloc[self.Idgl[i][1]] = self.Du[cont]
                cont += 1
            if self.restr[i][2] == 0:
                self.desloc[self.Idgl[i][2]] = self.Du[cont]
                cont += 1

        self.ReacApoio()
        self.EsfInterno()
```

```
# --------------------------- REACOES DE APOIO --------------------------- #
    def ReacApoio(self):
        k21 = self.Kg[self.gl_fr:self.no_gl,0:self.gl_fr]   # Matriz global quadrante 3
        k22 = self.Kg[self.gl_fr:self.no_gl,self.gl_fr:self.no_gl] # Matriz global quadrante 4
        self.Qu  = np.dot(k21,self.Du) + np.dot(k22,self.dk) # Reacoes de apoio
        # Soma as cargas nodais incidentes nos apoios com as reacoes de apoio
        pont_apoio = self.carga[self.gl_fr:self.no_gl]
        for i in range((self.no_gl-self.gl_fr)):
            self.Qu[i] += -pont_apoio[i]
```

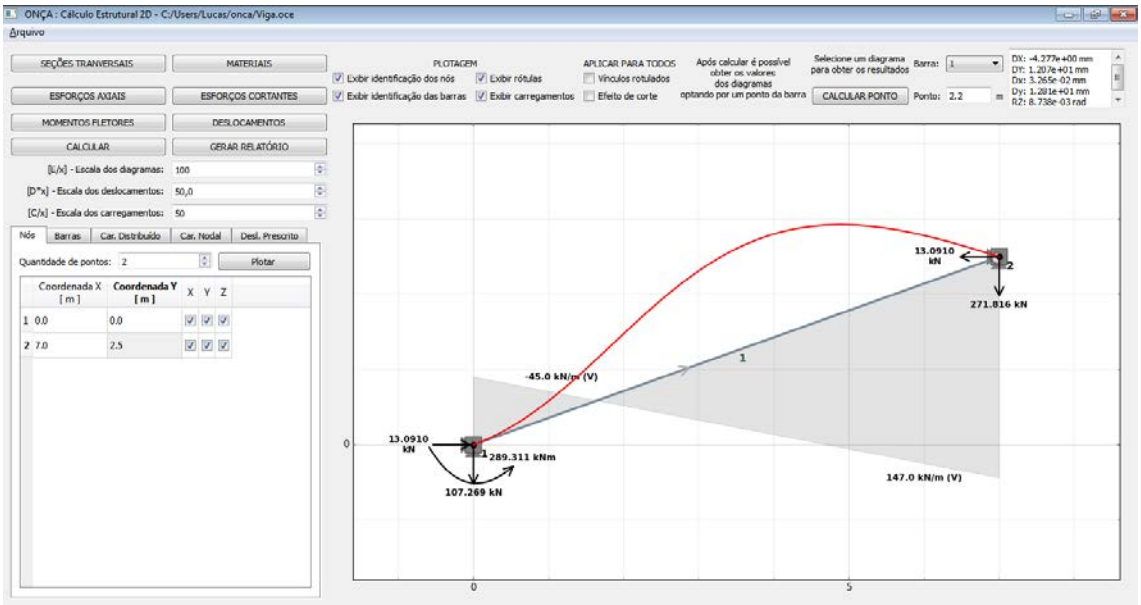
```
# ---------------------------- ESFORCOS INTERNOS ---------------------------- #
    def EsfInterno(self):
        cont = 0
        self.l_De = []
        self.l_Qi = []
        for i in self.incid:
            # Busca nos deslocamentos globais os deslocamentos elementares rotacionados
            Dix = self.desloc[self.Idgl[i[0]][0]] # Deslocamento em X do ponto inicial
            Diy = self.desloc[self.Idgl[i[0]][1]] # Deslocamento em Y do ponto inicial
            Dim = self.desloc[self.Idgl[i[0]][2]] # Rotacao em Z do ponto incial
            Dfx = self.desloc[self.Idgl[i[1]][0]] # Deslocamento em X do ponto final
            Dfy = self.desloc[self.Idgl[i[1]][1]] # Deslocamento em Y do ponto final
            Dfm = self.desloc[self.Idgl[i[1]][2]] # Rotacao em Z do ponto final
            # Vetor dos deslocamentos do elemento
            De = np.matrix([Dix, Diy, Dim, Dfx, Dfy, Dfm])
            self.l_De.append(De) # Lista dos deslocamentos por elemento

            # Vetor das forcas nodais devido carregamento distribuido
            Fi = -1.*np.matrix(self.l_dist_nod[cont]).T

            # Calculo dos esforcos internos
            Qi = self.Te[cont]*self.Ke[cont]*De + self.Te[cont]*Fi
            self.l_Qi.append(Qi) # Lista dos esforcos por elemento
            cont += 1
        self.Equacoes()
# ------------------- EQUACOES PARA PLOTAGEM DE DIAGRAMAS ------------------ #
    def Equacoes(self):
        cont = 0
        self.Eq = []
        for i in self.incid:
            A   = self.Sec[cont][0]
            E   = self.Mat[cont][0]
            IR = 1.
            if self.i_rigido[cont] == 'ir':
                IR = 1e10
            AR = 1.
            if self.a_rigido[cont] == 'ar':
                AR = 1e10
            cosseno = self.Lb[cont][0]
            seno = self.Lb[cont][1]
            if self.distgb[cont] == 'global':
                q1  = self.distv[cont][0]*cosseno - self.disth[cont][0]*seno
                q2  = self.distv[cont][1]*cosseno - self.disth[cont][1]*seno
                n1  = self.disth[cont][0]*cosseno + self.distv[cont][0]*seno
                n2  = self.disth[cont][1]*cosseno + self.distv[cont][1]*seno
            else:
                q1  = self.distv[cont][0]
                q2  = self.distv[cont][1]
                n1  = self.disth[cont][0]
                n2  = self.disth[cont][1]
            Dn  = (-n2)-(-n1)
            Dq  = (-q2)-(-q1)
            Ni  = self.l_Qi[cont][0] # Esforco axial no ponto inicial da barra
            Vi  = self.l_Qi[cont][1] # Esforco cortante no ponto inicial da barra
            Mi  = self.l_Qi[cont][2] # Momento fletor no ponto inicial da barra
            Di  = self.desloc[self.Idgl[i[0]][1]]*self.Lb[cont][0]-self.desloc[self.Idgl[i[0]][0]]*self.Lb[cont][1]
            Dix = self.desloc[self.Idgl[i[0]][1]]*self.Lb[cont][1]+self.desloc[self.Idgl[i[0]][0]]*self.Lb[cont][0]
            Df  = self.desloc[self.Idgl[i[1]][1]]*self.Lb[cont][0]-self.desloc[self.Idgl[i[1]][0]]*self.Lb[cont][1]
            C   = (((Df/self.Le[cont]) - (Di/self.Le[cont])) + ((Dq*(self.Le[cont])**3)/120 +
                ((-q1)*(self.Le[cont])**3)/24 - (Vi*(self.Le[cont])**2)/6 +
                (Mi*(self.Le[cont]))/2)/(self.Mat[cont][0]*self.Sec[cont][1]*IR))
            x  = sp.symbols('x')
            q  = (Dq/self.Le[cont])*x + (-q1)  # Equacao do carregamento
            n  = (Dn/self.Le[cont])*x + (-n1)  # Equação do carregamento horizontal
            N  = sp.integrate(n,x) - Ni        # Equação dos esforços axiais
            # Equação dos deslocamentos horizontais no sistema local
            Dx = sp.integrate(N,x)/(self.Mat[cont][0]*self.Sec[cont][0]*IR*AR) + Dix
            V  = -sp.integrate(q,x) + Vi       # Equacao dos esforcos cortantes
            M  = sp.integrate(V,x) - Mi        # Equacao dos momentos fletores
            # Equação dos deslocamentos verticais no sistema local
            Dy = sp.integrate(sp.integrate(M,x),x)/(self.Mat[cont][0]*self.Sec[cont][1]*IR) + C*x + Di
            R  = sp.diff(Dy,x)                 # Equacao de Rotações
            Dgx = Dx*self.Lb[cont][0] - Dy*self.Lb[cont][1] # Deslocamentos em x (global)
            Dgy = Dx*self.Lb[cont][1] + Dy*self.Lb[cont][0] # Deslocamentos em y (global)
            self.Eq.append([n, q, N, V, M, R, Dx, Dy, Dgx, Dgy])
            cont+=1
        self.Output()
```

APÊNDICE B – MANUAL DO USUÁRIO

MANUAL DO USUÁRIO

Outubro de 2017

Este documento traz informações quanto à operação do *software* ONÇA: Cálculo estrutural 2D, o método de realizar a entrada de dados e obter os resultados calculados dos modelos estruturais em estudo.



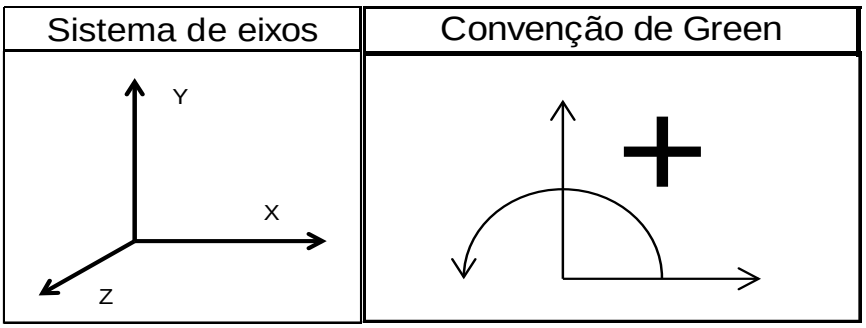
1 – CONVENÇÃO DE SINAIS

Para padronizar e possibilitar as equações de equilíbrio dos nós é necessário determinar uma convenção de sinais para forças, deslocamentos e diagramas.

Para nomear os referenciais do plano foi adotado o sistema de eixos cartesiano, assim, as abscissas (horizontais) são chamadas de X, as ordenadas (verticais) são chamadas de Y e as cotas (eixo perpendicular ao plano) são chamadas de Z. Letras maiúsculas indicam coordenadas globais, ou seja, os eixos X e Y são respectivamente sempre horizontais e verticais. Os pontos da estrutura encontram-se sempre na mesma cota (Z = NULO).

Assim como grande parte das bibliografias referente à análise de estruturas este programa adota a convenção de Green para determinar o sentido positivo das forças e deslocamentos, isto significa que translações e forças horizontais possuem sinal

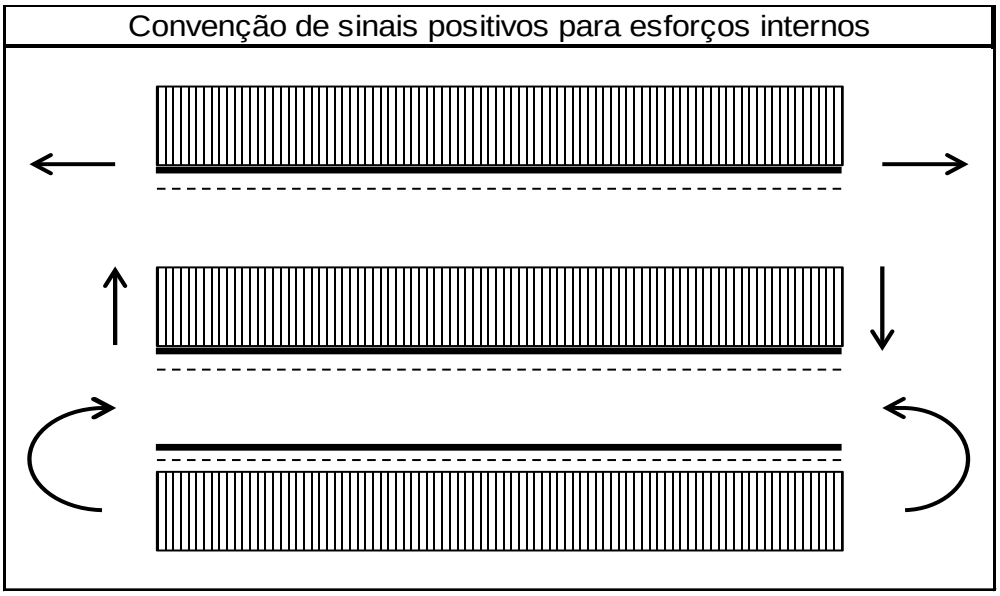
positivo quando o vetor apontar para a direita, de modo recíproco quando estas forem verticais, o sinal positivo aponta o vetor para cima. Já as rotações e os momentos pontuais possuem o sinal positivo quando o vetor aponta para fora do plano, ou seja, obedecendo a regra da mão direita, o giro será anti-horário.



Como o traçado dos esforços internos acontecem ao longo das barras, a convenção deve ser associada em um sistema de eixos local que depende da posição de sua fibra inferior. Letras minúsculas indicam coordenadas locais, servem para representar eixos perpendiculares à barra, ou seja, os eixos (x e y) são sempre função da incidência da barra, onde (x) possui o sentido positivo do ponto inicial da barra para o ponto final e (y) encontra-se ortogonal à (x). Uma seção de barra possui infinitos pontos contidos nos planos yOz.

A fibra inferior é localizada abaixo da barra quando se trata deste elemento em um sistema destrógeno, ou seja, visualizando o mesmo da esquerda para a direita, desta forma o ponto inicial da barra é localizado à esquerda e seu ponto final à direita. Quando tratamos de um elemento cujo ponto inicial encontra-se à direita, a fibra inferior fica localizada acima da barra e o ponto final à esquerda.

A figura abaixo exibe o sentido dos esforços positivos em função das extremidades iniciais e finais de um elemento e a posição do diagrama positivo em função da fibra inferior. A barra é representada com uma linha espessa e a fibra inferior por uma linha tracejada, em ordem axial, cortante e momento.

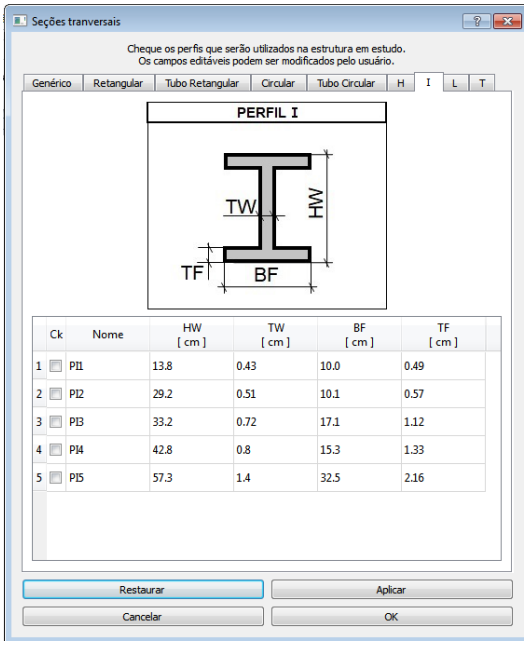


2 – MATERIAIS E SEÇÕES TRANSVERSAIS

Os botões "MATERIAIS" e "SEÇÕES TRANSVERSAIS" definem os materiais da estrutura e a configuração das seções transversais das barras a serem analisadas.

Os materiais possuem propriedades que interferem na rigidez e deformabilidade das barras, o módulo de elasticidade ou módulo de Young “E” expresso em MPa é diretamente proporcional à dificuldade de deformar o elemento, por exemplo, o aço é um material pouco elástico, portanto seu módulo de elasticidade é alto na ordem de 200,0 GPa, já a borracha é bastante elástica e portanto possui módulo de elasticidade baixo na ordem de 5,0 MPa para borrachas relativamente duras.

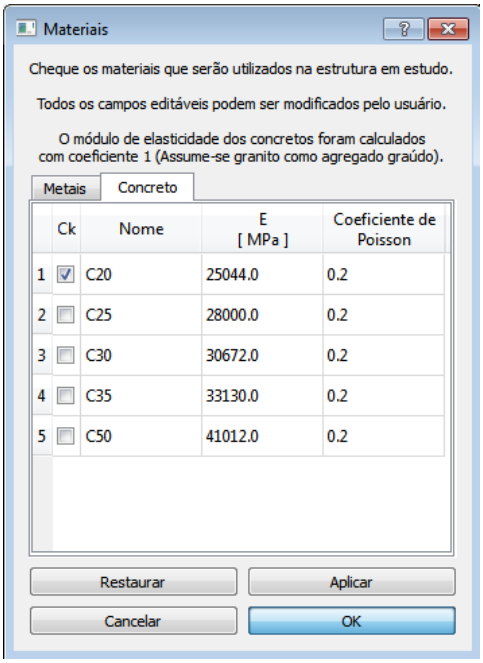
Assim como os materiais, as propriedades das seções transversais interferem na rigidez e deformabilidade das barras, a área da seção transversal “A” metro² é diretamente proporcional à dificuldade de deslocamentos axiais, quanto maior a área, menor o deslocamento. O momento de inércia “Iz” metro^4 está relacionado à dificuldade de deslocamentos de giro em torno do eixo Z na altura da linha neutra da seção transversal.



Para selecionar um material, clique no botão "MATERIAIS" e selecione um ou mais materiais que serão utilizados no modelo através das caixas de seleção. Idem para as propriedades da seção transversal. Clique no botão "SEÇÕES TRANSVERSAIS" e selecione uma ou mais seções, de acordo com o perfil desejado. A seção genérica permite o usuário inserir uma seção qualquer a partir da área e do momento de inércia Z.

Todos os campos são editáveis e os valores padrões que o software disponibiliza podem ser alterados pelo usuário.

O botão restaurar retorna os materiais e seções transversais padrão do software.



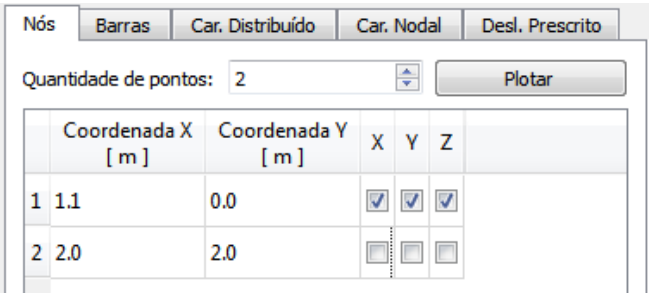
3 – NÓS E RESTRIÇÕES

As coordenadas [X, Y], expressas em metros, definem os nós da estrutura em termos globais no referencial cartesiano, sendo X a coordenada para a posição do ponto no eixo das abcissas e Y a posição no eixo das ordenadas.

Abaixo dos botões, na aba "Nós", cada linha define um nó (ou vínculo) da estrutura. Nas colunas “Coordenada X” e “Coordenada Y” devem ser inseridos os valores das coordenadas de todos os pontos correspondentes aos nós. Em caso de números não inteiros, separar os algarismos utilizando ponto “.”. A quantidade de nós deve ser escolhida no campo “Quantidade de pontos”, logo acima das coordenadas. Com as coordenadas escritas em seus devidos campos, é possível utilizar o botão “PLOTAR” para exibi-las na interface.

Existem três tipos de deslocamentos na análise de pórticos bidimensionais, dois translacionais contidos no plano da estrutura que possuem direções em "X" e "Y" e um de rotação em torno do eixo "Z" perpendicular a este plano. Em termos gerais, ao longo de todas as barras serão obtidas equações que estimam estes deslocamentos, porém o método dos deslocamentos determina apenas os deslocamentos nos graus de liberdade livres. Todo nó possui os três graus de liberdade, quando não há restrição de deslocamento para dado grau de liberdade este é chamado de grau de liberdade livre, caso contrário, trata-se de uma deslocabilidade chamada grau de liberdade restringido.

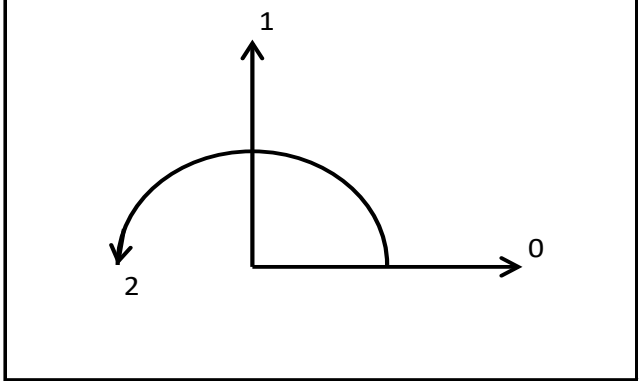
As restrições definem os apoios da estrutura (também chamados de vínculos externos), que equilibram os carregamentos incidentes na estrutura, imobilizando o deslocamento deste ponto na direção restringida. Para inserir as restrições, cheque as respectivas caixas de seleção (X, Y e Z) na aba dos nós e clique em “PLOTAR”.



Os graus de liberdade são nomeados com números a partir do zero (0, 1, 2,...) e existem três regras que regem a identificação. Deve ser respeitada a sequência dos nós da estrutura e também a sequência da convenção adotada ("X", "Y" e "Z"), conforme o modelo utilizado para as matrizes de rigidez elementares.

Por fim, devem ser nomeados inicialmente apenas os graus de liberdade livres, e os graus de liberdade restringidos são identificados a partir da última deslocabilidade livre da estrutura. Estas deslocabilidades definem todos os passos do cálculo matricial.

Disposição dos graus de liberdade de um nó



4 – BARRAS (VÍNCULOS, INFINITAMENTE RÍGIDO E INEXTENSÍVEL)

Para criar um elemento de barra "B" são necessários dois nós, por exemplo, nó 1 e nó 2, é possível que a barra "B" possua sua direção no sentido do nó 1 para o nó 2 e vice-versa, isto é chamado de incidência, ou seja, a barra "B" possui incidência (1,2) ou (2,1). O procedimento de "criação" das barras comentado acima é chamado de discretização da estrutura.

Quando um elemento da estrutura em análise possuir cargas concentradas em pontos intermediários do vão, alteração na linearidade do carregamento distribuído, múltiplos elementos concorrendo a um mesmo vínculo e mudanças na direção, será necessário adicionar nós que permitam discretizar este elemento em tantas barras quanto forem necessárias a fim de conferir à estrutura estas configurações.

Conforme explicado acima, as barras devem ser definidas pelas incidências. Desta forma, a entrada destes dados no programa é feito na aba “Barras” inserindo os nós inicial e final. A identificação do nó é visualizada na entrada de dados e pode ser plotada diretamente na interface gráfica.

Os vínculos das barras (ou vínculos internos) dizem respeito ao tipo da ligação entre os elementos da estrutura, estes podem ser engastados ou rotulados, uma barra que possua rótula em certa extremidade não irá transferir seus esforços de momento fletor para as demais barras que concorrem a este nó.

Em uma estrutura, quando certos elementos possuem rigidez muito maior que os outros elementos em análise, estes podem ser considerados assumindo comportamento de barra infinitamente rígida ou axialmente rígida.

A aba "Barras" possui as seguintes colunas: “Nó inicial”, “Nó final”, “Seção”, “Material”, “Ri”, “Rf”, “IR” e “AR”.



O preenchimento de cada uma é explicado abaixo:

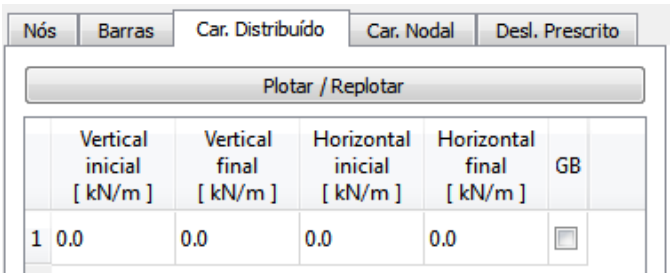
- Nó inicial: Preencha o primeiro nó da barra, onde ela começa, de acordo com o sentido de sua incidência;
- Nó final: Preencha o nó em que a barra termina, também levando em conta o sentido de sua incidência;
- Seção: neste menu, aparecerão as seções escolhidas pelo usuário anteriormente, no botão SEÇÕES TRANSVERSAIS, selecione a respectiva seção transversal;
- Material: neste menu, aparecerão os materiais escolhidos pelo usuário anteriormente, no botão MATERIAIS, selecione o respectivo material;

- Ri: Marque esta caixa de seleção se a barra for rotulada no primeiro nó, o “Nó i”;
- Rj: Marque esta caixa de seleção se a barra for rotulada no segundo nó, o “Nó j”;
- IR: Marque esta caixa de seleção caso a barra possua propriedades infinitamente rígidas em relação às outras barras da estrutura;
- AR: Marque esta caixa de seleção caso a barra possua propriedades axialmente rígidas em relação às outras barras da estrutura.

5 – CARREGAMENTOS DISTRIBUÍDOS

Em termos práticos, todas as barras de uma estrutura possuem carregamento distribuído. Estes podem fazer papel de peso próprio, carregamentos provenientes de outros elementos que incidem ao longo de toda a barra, vento, etc. O carregamento distribuído possui valor inicial e final, é uma função do tipo linear e a unidade de medida é kN/m. É possível que hajam carregamentos nos sentidos vertical e horizontal, além disso podem incidir nas barras de modo global ou local. Um carregamento distribuído local e horizontal irá incidir na estrutura com a mesma inclinação da barra, já os carregamentos globais irão sempre incidir com seu sentido original.

Na aba "Carregamento Distribuído", o usuário deve inserir os carregamentos distribuídos de cada barra, o software preenche automaticamente todos os campos com valor 0 "zero", e quando a barra não possuir carregamento, obrigatoriamente deve ser informado o valor "zero".



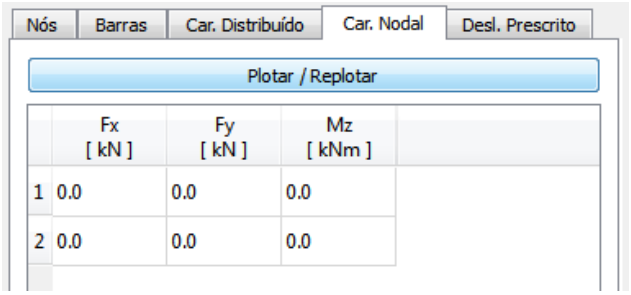
6 – CARREGAMENTOS NODAIS

Cargas nodais podem ser horizontais “Fx”, verticais “Fy” expressas em kN e de momento “Mz”, expresso em kNm.

As cargas horizontais podem representar simplificadamente a ação do vento em um nó e deslocam a estrutura ao longo de X, as verticais geralmente estão associadas a

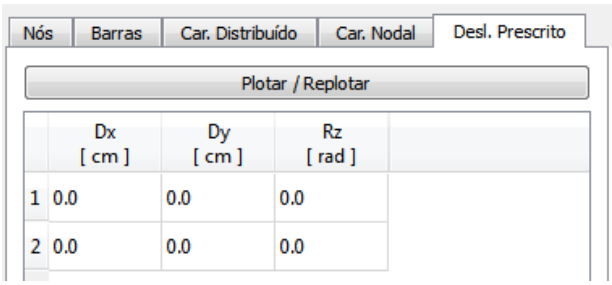
carga de vigas que encontram-se perpendicular ao plano do modelo em estudo e deslocam a estrutura ao longo de Y, já os momentos aplicados podem representar e excluir do modelo uma viga em balanço no mesmo plano da estrutura, o momento gera deslocamentos de rotação em torno do eixo Z.

Na aba "Carregamento Nodal" o usuário deve informar as cargas nodais que ocorrem na estrutura, de acordo com a numeração dos nós.



7 – DESLOCAMENTOS PRESCRITOS

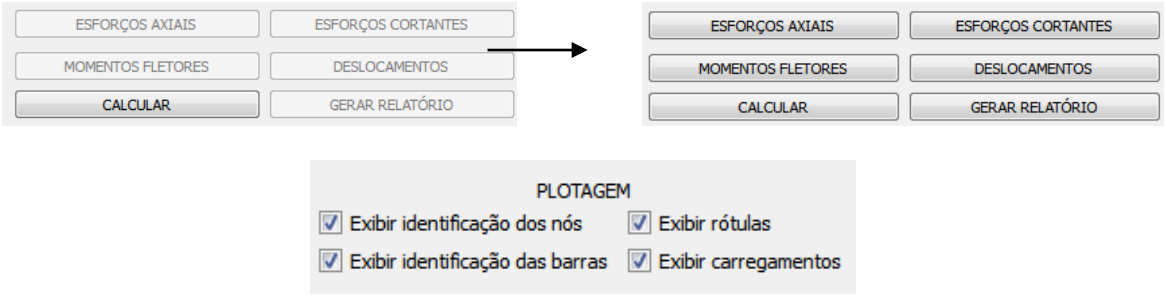
Os deslocamentos prescritos são associados aos recalques estruturais e as interferências de execução, como por exemplo, a montagem de um elemento que desloque as vinculações em relação as outras barras associadas. Os deslocamentos horizontal “Dx” e vertical “Dy” são expressos em centímetros, já deslocamentos de rotação “Dz” são expressos em radianos. Para inserir um deslocamento prescrito é necessário que o grau de liberdade seja restringido.



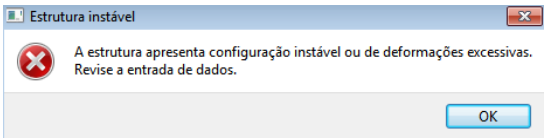
8 – RESULTADOS E RELATÓRIO

Abaixo dos botões de materiais e seções transversais, existem quatro botões para plotar os diagramas, são eles, "ESFORÇOS AXIAIS", "ESFORÇOS CORTANTES", "MOMENTOS FLETORES" e "DESLOCAMENTOS".

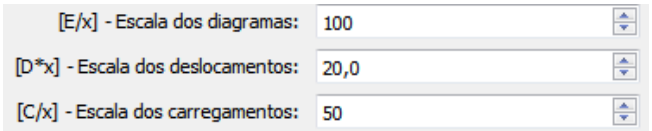
Após finalizar a entrada de dados da estrutura, clique no botão "CALCULAR", assim os botões citados acima são habilitados. Para limpar a plotagem e garantir melhor visualização dos diagramas, é possível exibir ou não a identificação dos nós e das barras, as representações de rótula e carregamento.



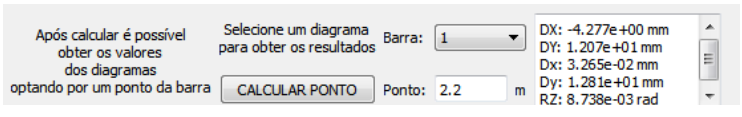
Caso a estrutura apresente deslocamentos excessivos, equilíbrio hipostático ou erros na entrada de dados, a mensagem de erro apresentada abaixo será exibida.



Abaixo dos botões há como definir a escala adequada para melhor visibilidade dos diagramas. A escala dos diagramas e dos carregamentos dividem suas dimensões, portanto quanto maior o valor informado, menor será o tamanho exibido na tela. Como os valores de deslocamento são pequenos, a escala para esta plotagem multiplica suas dimensões na tela.



Os resultados pontuais ao longo das barras podem ser obtidos informando o número da barra e o ponto desejado em metros.



O relatório em PDF apresenta a entrada de dados do usuário em forma de tabelas, seguido de determinações preliminares que apresentam o cálculo das propriedades geométricas das seções transversais e a identificação dos graus de liberdade da estrutura. Em seguida, o cálculo das propriedades de cada barra é exibido e, por fim, o vetor de cargas globais e as reações de apoio. Já o arquivo de texto apresenta a matriz de rigidez global e a organização do cálculo matricial junto de seus resultados.

Para cada barra é apresentado o cálculo do comprimento, dos cossenos diretores, montagem da matriz de rotação, matriz de rigidez elementar e em termos globais, determinação das cargas nodais devido carregamento distribuído e o cálculo das equações de esforços internos e deslocamentos.

APÊNDICE C – EXEMPLO DE RELATÓRIO