UNIVERSIDADE POSITIVO

MARIO BARBOSA JUNIOR
RAPHAEL PEREIRA JACON

CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA VERIFICAÇÃO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SOLICITADOS POR FLEXÃO COMPOSTA RETA

CURITIBA
2017

MARIO BARBOSA JUNIOR
RAPHAEL PEREIRA JACON

CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA VERIFICAÇÃO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SOLICITADOS POR FLEXÃO COMPOSTA RETA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Civil da Universidade Positivo, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Me. Juliano Jorge Scremin

CURITIBA
2017

MARIO BARBOSA JUNIOR
RAPHAEL PEREIRA JACON

CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA VERIFICAÇÃO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO SOLICITADOS POR FLEXÃO COMPOSTA RETA

Monografia aprovada como requisito parcial à obtenção do título de Engenheiro Civil, no curso de Engenharia Civil da Universidade Positivo, pela seguinte banca examinadora

Orientador: Prof. Me. Juliano Jorge Scremin
Universidade Positivo

Prof. Me. Charles Jaster de Oliveira
Universidade Positivo

Prof. Me. Mara Cristina Detsch
Universidade Positivo

CURITIBA
2017

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de um código computacional, intitulado FCR-BJ, capaz de proceder a verificação de resistência e estabilidade de pilares de concreto armado, com índice de esbeltez $\lambda \leq 200$, com seção transversal retangular e disposição de armadura simétrica, submetidos a flexão composta reta, contemplando os efeitos da não linearidade física dos materiais através do método das fibras e da não linearidade geométrica através do método das diferenças finitas.

Palavras chave: Pilares de concreto armado, Flexão composta reta, Método da fibras, Método das diferenças finitas, Código computacional.

Lista de Figuras

Figura 1 - Exemplo atuação dos momentos de 1ª ordem e seus respectivos diagramas. 13
Figura 2 - Distribuição de tensões do concreto 17
Figura 3 - Diagrama de tensões no aço 18
Figura 4 -Domínios de deformação 19
Figura 5 - Pilar de seção retangular Flambagem segundo o eixo de menor inércia . 26
Figura 6 - Representação comprimento equivalente 27
Figura 7 - Comportamento tensão- deformação 30
Figura 8- Distribuição de tensões do concreto 31
Figura 9 - Diagrama de tensões no aço 32
Figura 10 - Não linearidade geométrica originando os esforços de segunda ordem 33
Figura 11 - Discretização da seção transversal do pilar 34
Figura 12 – Aplicação método das fibras 34
Figura 13 - Linha elástica 36
Figura 14 - Raio de curvatura proveniente da flexão 37
Figura 15 - Relação momento curvatura, ... 39
Figura 16 - Definição das diferenças regressiva, central e progressiva 41
Figura 17 - Ilustração aplicação do método das diferenças finitas 43
Figura 18- Pilar em Balanço 46
Figura 19 - Pilar em balanço representando o pilar biapoiado 47
Figura 20 - Entrada de dados código computacional FCR-BJ 50
Figura 21 – Saída de dados 1 51
Figura 22 – Saída de dados 2 52
Figura 23 – Saída de dado 3 52
Figura 24 - Fluxograma do Código 54
Figura 25 - Fluxograma função propriedades geométricas das fibras 58
Figura 26 - Fluxograma função propriedades geométricas das barras 59
Figura 27 - Fluxograma função máximos resistentes 61
Figura 28 - Função esforços resistentes 62
Figura 29 - Fluxograma função 64
Figura 30 - Opção da escolha do método de análise do efeito de segunda ordem PCalc 67
Figura 31- Critérios consideração fluência 67
Figura 32 - Representação pilar P1 68
Figura 33 - Interface FCR-BJ exemplo P1 69
Figura 34 - Interface PCalc exemplo 1 Método Geral 69
Figura 35 - Interface PCalc exemplo 1 Curvatura aproximada 70
Figura 36 - Interface PCalc exemplo 1 Rigidez aproximada 70
Figura 37 - Representação pilar P2 71
Figura 38 - Interface FCR-BJ exemplo P2 72
Figura 39 - Interface PCalc exemplo 2 Método Geral 72
Figura 40 - Interface PCalc exemplo 2 Curvatura aproximada 73
Figura 41 - Interface PCalc exemplo 2 Curvatura aproximada 73
Figura 42 - Representação pilar P3 74
Figura 43- Interface FCR-BJ exemplo P3 75

Figura 44- Interface PCalc exemplo 3 Método Geral..... 75

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Tabela coeficiente de Fluência 25
Tabela 2 - Tabela coef. Alfa_b 28
Tabela 3- Dados P1 68
Tabela 4 - Dados P2 71
Tabela 5 - Dados P3 74
Tabela 6 - Deslocamentos P1 76
Tabela 7 - Deslocamentos P2 77
Tabela 8 - Deslocamentos P3 77
Tabela 9 - Curvaturas P1 78
Tabela 10 - Curvaturas P2 78
Tabela 11 - Curvaturas P3 78
Tabela 12 – Momentos de segunda ordem P1 79
Tabela 13 – Momentos de segunda ordem P2 79
Tabela 14 – Momentos de segunda ordem P3 80
Tabela 15 – Momentos totais P1 80
Tabela 16 – Momentos totais P2 81
Tabela 17 – Momentos totais P3 81

Sumário

1 INTRODUÇÃO 11
1.1 OBJETIVO GERAL 11
1.2 JUSTIFICATIVA 12
1.3 DELIMITAÇÕES DO TRABALHO 12
2 EMBASAMENTO TEÓRICO 14
2.1 SOLICITAÇÃOES NORMAIS 14
2.1.1 Definições básicas 14
2.1.2 Estados limites 15
2.1.2.1 Estados limites de serviço (ELS) 15
2.1.2.2 Estados limites últimos (ELU) 16
2.1.3 Hipóteses básicas 16
2.1.4 Domínios de deformação 18
2.1.4.1 Reta “a” 19
2.1.4.2 Domínio 1 20
2.1.4.3 Domínio 2 20
2.1.4.4 Domínio 3 20
2.1.4.5 Domínio 4 21
2.1.4.6 Domínio 4a 21
2.1.4.7 Domínio 5 22
2.1.4.8 Reta “b” 22
2.2 DIMENSIONAMENTO DE PILARES 22
2.2.1 Métodos de cálculo de pilares de concreto armado 27
2.3 NÃO LINEARIDADE 30
2.3.1 Não linearidade física 31
2.3.2 Não linearidade geométrica 32
2.4 MÉTODO DAS FIBRAS 33
2.5 DEFINIÇÃO DE CURVATURA 36
2.5.1 Relação momento curvatura 38
2.5.2 Diagrama M, N,1/r (Momento fletor, Esforço axial e Curvatura) 40
2.6 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS 40
2.7 APLICAÇÃO DO DIAGRAMA M, N, 1/r NO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS 44
2.8 REVISÃO DA LITERATURA 44
3 METODOLOGIA DO TRABALHO 46

3.1 MODELOS ESTRUTURAIS DE PILARES CONTEMPLADOS NO CÓDIGO 46
3.2 MÁXIMO MOMENTO FLETOR SOLICITANTE 46
3.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS FIBRAS 47
3.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS 49
3.5 FUNCIONAMENTO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL PROPOSTO 49
3.5.1 Visão Geral do Código 50
3.5.2 Descrição Detalhada das Funções Componentes 55
3.5.2.1 Função conversão de unidades 55
3.5.2.2 Função combinações 55
3.5.2.3 Função verificação da dimensão mínima 55
3.5.2.4 Função verificação de limite de esbeltez 56
3.5.2.5 Função verificação do limite de bitola 56
3.5.2.6 Função de verificação momento mínimo 56
3.5.2.7 Função de verificação da dimensão máxima 57
3.5.2.8 Função verificação do limite de f_{ck} 57
3.5.2.9 Função propriedades geométricas das fibras 57
3.5.2.10 Função propriedades geométricas das barras 59
3.5.2.11 Função verificação da taxa de armadura 60
3.5.2.12 Função verificação compressão máxima 60
3.5.2.13 Função máximos esforços resistentes 60
3.5.2.14 Função esforços resistentes 61
3.5.2.15 Função determinação da tabela relação momento x curvatura 63
3.5.2.16 Função determinação da excentricidade de fluência 63
3.5.2.17 Função determinação efeitos de 2ª ordem 64
3.5.2.18 Função determinação da curvatura em relação aos esforços solicitantes 65
4. VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DESENVOLVIDO 66
4.1 PCalc 1.4 66
4.2 Exemplos para validação 67
4.2.1 Pilar P1 68
4.2.2 Pilar P2 71
4.2.3 Pilar P3 74
4.3 Validação dos Resultados 76
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 83
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 84

APÊNDICE 87

1 INTRODUÇÃO

O concreto armado é o material composto, obtido pela associação do concreto com barras de aço, convenientemente colocadas em seu interior (ARAUJO, 2010). Segundo a NBR 6118:2014 os elementos de concreto armado são aqueles cujo comportamento estrutural depende da aderência entre concreto e a armadura, e nos quais não se aplicam alongamentos iniciais das armaduras antes da materialização dessa aderência.

Dentre alguns destes elementos, encontram-se os pilares, que conforme Clímaco (2008), são elementos lineares de eixo reto, em geral verticais, em que as forças normais de compressão são preponderantes e que têm a função de transmitir às fundações as ações atuantes na estrutura.

Conforme Scandelai (2004), no caso de pilares de concreto armado, a instabilidade configura-se em um estado limite último que pode ser atingido nos elementos submetidos à flexo-compressão, resultado da atuação de um carregamento que cessa a capacidade portante antes mesmo do elemento atingir a ruína por falha do concreto ou deformação plástica excessiva da armadura.

Scandelai (2004) também afirma que o comportamento estrutural de um pilar esbelto de concreto armado é bastante complexo e tipicamente não linear. Para estes elementos, duas não-linearidades são ressaltadas no processo de análise, a saber, a não linearidade física, decorrente das equações constitutivas não-lineares do concreto e do aço, e a não-linearidade geométrica, caracterizada pela substancial alteração sofrida pelas solicitações em função dos deslocamentos transversais do eixo do pilar.

Assim sendo, o estado de deformação do elemento estrutural influi nos esforços internos, não valendo a superposição dos efeitos. Esse fenômeno é designado de efeito de segunda ordem (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

1.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolver um código computacional capaz de verificar a capacidade resistente de pilares de concreto armado, com seção transversal retangular e disposição simétrica de armadura, solicitados por flexão composta reta empregando

o método das diferenças finitas (para não linearidade geométrica) e o método das fibras para a relação momento curvatura (não linearidade física).

1.2 JUSTIFICATIVA

Conforme a NBR 6118:2014, o cálculo dos efeitos de segunda ordem pode ser feito pelo método geral ou métodos aproximados.

Segundo Ribeiro (2011) o método geral considera o comportamento não linear físico dos materiais e o comportamento não linear geométrico dos elementos estruturais, proporcionando uma solução teórica mais precisa do que as obtidas por métodos aproximados. Contudo, quanto maior a precisão almejada, maior é a complexidade dos procedimentos em análise. Em geral, a consideração do comportamento não linear envolve métodos iterativos, cuja solução só pode ser obtida por meios de tentativas ou aproximações sucessivas.

Devido ao demasiado trabalho necessário para solução de problemas deste tipo, faz-se necessária a utilização de recursos computacionais para a resolução dos mesmos. Com isso, justifica-se a elaboração de um código computacional capaz de proceder as verificações de resistência e estabilidade de pilares de concreto armado solicitados por flexão composta reta como ferramenta de estudos de casos simplificados em termos didáticos.

1.3 DELIMITAÇÕES DO TRABALHO

O presente trabalho limita-se a verificação da capacidade resistente de pilares com as seguintes características:

- **Dimensão mínima 19 cm**: Segundo o item 13.2.3 da NBR 6118:2014 a seção transversal de pilares maciços, não pode apresentar dimensões menores que 19 cm. Em casos especiais, permite-se a consideração de dimensões entre 19 cm e 14 cm, desde que se multipliquem os esforços solicitantes de cálculo a serem considerados no dimensionamento por um coeficiente adicional (γ_n).
- **Seção transversal retangular e contínua ao longo do eixo longitudinal do pilar.**
- **Armadura simétrica e constante ao longo do eixo longitudinal do pilar.**

- **Pilares limitados por um índice de esbeltez λ ≤ 200:** Segundo o item 15.8.1 da NBR 6118:2014 os pilares devem ter índice de esbeltez menor ou igual a 200 (λ ≤ 200). Apenas no caso de elementos pouco comprimidos o índice de esbeltez pode superar o valor de 200.
- **Pilares onde a resistência característica a compressão não supere 50MPa:** Para concretos de classe superior a C50, sua relação tensão e deformação tem um comportamento diferente das classes inferiores à C50.
- **Restrição a pilares que não se caracterizem como pilares-parede:** Segundo a NBR 6118:2014 os pilares são considerados pilares paredes quando a maior dimensão da seção transversal ultrapassa em 5 vezes o valor da sua menor dimensão. Para esses elementos são considerados outras formas de análises para seu dimensionamento.
- **Pilares submetidos a flexão composta reta.**
- **Pilares biapoiados e em balanço solicitados por momentos de primeira ordem constantes ao longo do seu eixo longitudinal:** Conforme figura a 1.

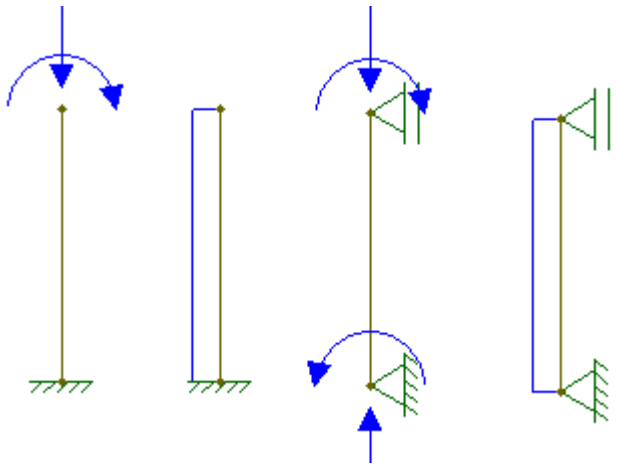

Figura 1 - Exemplo atuação dos momentos de 1ª ordem e seus respectivos diagramas.

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017.

2 EMBASAMENTO TEÓRICO

Neste capitulo serão abordados os conceitos e definições necessários para desenvolvimento do trabalho proposto.

2.1 SOLICITAÇÃOES NORMAIS

Designam-se por solicitações normais os esforços solicitantes que produzem tensões normais nas seções transversais das peças estruturais. As solicitações normais englobam o momento fletor e a força normal (FUSCO, 1981). Podem ser: tração centrada, compressão centrada, flexão normal simples, flexão normal composta, flexão oblíqua simples e flexão oblíqua composta (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

Segundo Clímaco (2008) nos pilares usuais de edifícios, predominam a força normal e o momento fletor. De acordo com a consideração, ou não, do momento fletor no cálculo, tem-se a classificação:

1. **Compressão centrada, axial ou simples:** Quando apenas forças normais – paralelas ao eixo longitudinal – solicitam o pilar, podendo ser desprezados os momentos fletores (CLÍMACO, 2008).
2. **Flexão composta:** Quando a força normal e momento fletor atuam conjuntamente (CLÍMACO, 2008).

a. **Flexão composta reta:** Os momentos fletores atuam segundo apenas um dos eixos principais da seção (CLÌMACO, 2008).
b. **Flexão composta obliqua:** Os momentos fletores atuam nos dois eixos principais (CLÍMACO, 2008).

2.1.1 Definições básicas

A seguir são definidos alguns termos recorrentes no restante do texto.

1. **Linha Neutra (LN):** É a reta em que todos os pontos têm tensão nula na seção transversal do pilar; o conhecimento de sua posição conduz a solução do problema (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

2. **Ações:** Causas que provocam esforços ou deformações nas estruturas. Do ponto de vista prático, as forças e as deformações impostas pelas ações são consideradas como se fossem as próprias ações (NBR 8681:2003).

3. **Ações Permanentes:** São as que ocorrem com valores praticamente constantes durante toda a vida da construção (NBR6118:2014).

4. **Ações variáveis:** Ações que ocorrem com valores que apresentam variações significativas em torno de sua média, durante a vida da construção (NBR 8681:2003).

5. **Combinações de ações:** Um carregamento é definido pela combinação das ações que têm probabilidades não desprezíveis de atuarem simultaneamente sobre a estrutura, durante um período preestabelecido (NBR 6118:2014).

6. **Critérios de segurança:** Segundo a NBR 8681:2003 a segurança das estruturas deve ser verificada em relação a todos os possíveis estados que são admitidos como limites para a estrutura considerada.

2.1.2 Estados limites

De acordo com a norma NBR 8681:2003 são estados a partir dos quais a estrutura apresenta desempenho inadequado às finalidades da construção.

Segundo a NBR 6118:2014 na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura em exame, levando em conta os possíveis estados limites últimos e os de serviço.

2.1.2.1 Estados limites de serviço (ELS)

Segundo Graziano (2005) os ELS correspondem à comprovação de que a estrutura em análise atenderá minimamente às condições de serviço e de durabilidade, mantendo, pelo tempo de vida útil previsto, as condições esperadas de desempenho.

Os ELS estão relacionados ao conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas, seja em relação aos usuários, seja em relação às máquinas e aos equipamentos suportados pela estrutura (NBR 6118:2014).

Segundo a NBR 8681:2003 os ELS decorrem de ações cujas combinações podem ter três diferentes ordens de grandeza de permanência na estrutura:

1. Combinações quase permanentes.
2. Combinações frequentes.
3. Combinações raras.

2.1.2.2 Estados limites últimos (ELU)

Os estados limites últimos concentram o seu foco sobre as situações normais que podem conduzir as estruturas ao esgotamento de sua capacidade portante (ruína) (GRAZIANO, 2005).

Segundo a NBR 6118:2014, os ELU estão relacionados ao colapso, ou qualquer outra forma de ruína estrutural, que determine a paralização do uso da estrutura.

A verificação da segurança de peças de concreto armado submetidas a solicitações normais, é feita admitindo que o esgotamento da capacidade resistente, possa ocorrer, tanto pela ruptura do concreto comprimido quanto pela deformação excessiva da armadura tracionada (FUSCO, 1981).

Este estado limite último (ELU de ruptura ou ELU de deformação plástica excessiva) é alcançado quando na fibra mais comprimida de concreto o encurtamento é igual a um valor último convencional, ou quando na armadura tracionada a barra de aço mais deformada tem alongamento igual ao valor último convencional (FUSCO, 1981).

2.1.3 Hipóteses básicas

No ELU, o estudo da capacidade resistente das peças submetidas a solicitações normais é feito levando em consideração algumas hipóteses básicas:

1. Resistência a tração do concreto: Segundo a NBR 6118:2014 as tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, devem ser desprezadas no ELU.

2. Hipótese de Bernoulli: As seções transversais permanecem planas após o início da deformação e até o estado limite último; as deformações são em cada

ponto, proporcionais à sua distância à linha neutra da seção (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

3. **Solidariedade dos materiais:** Admite-se a solidariedade perfeita entre as barras da armadura e o concreto que as envolve. Com esta hipótese, a deformação específica de uma barra da armadura é igual à deformação específica do concreto que lhe é adjacente (FUSCO,1981).

4. **Ruína da seção transversal:** A ruína da seção transversal para qualquer tipo de flexão no estado limite último fica caracterizada quando o aço, o concreto ou ambos atingem suas deformações específicas últimas (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

5. **Diagrama parábola retangulo:** Adimite-se que, no estado limite último, as tensões de compressão na seção transversal da peças submetidas a solicitações normais tenham uma distribuição de acordo com o diagrama parábola retangulo indicado na Figura 2 (FUSCO, 1981).

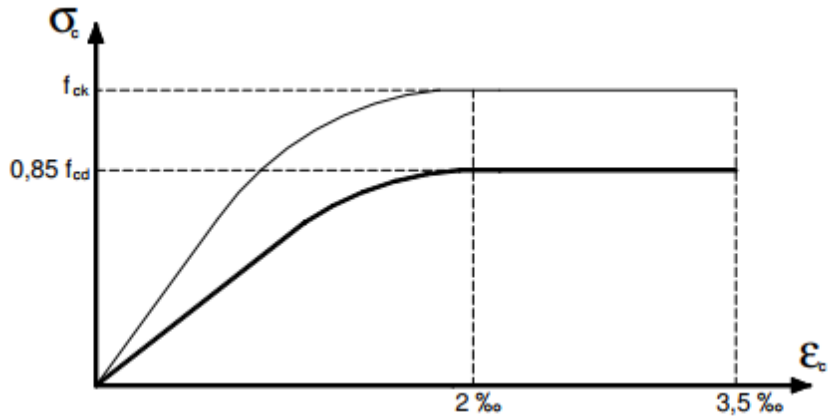

Figura 2 - Distribuição de tensões do concreto

Fonte: BASTOS, 2014.pg.22

6. **Distribuição das tensões no aço:** Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) a distribuição das tensões do aço são dadas de acordo com o diagrama da Figura 3.

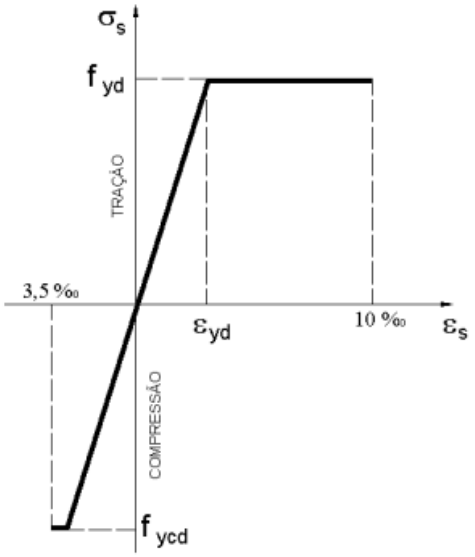

Figura 3 - Diagrama de tensões no aço
Fonte: CARVALHO; PINHEIRO, 2009. pg.261

2.1.4 Domínios de deformação

Conforme já explicado, a ruína da seção transversal para qualquer tipo de flexão no estado limite último fica caracterizada pelas deformações específicas de cálculo do concreto e do aço, que atingem (uma delas ou ambas) os valores últimos (máximos) das deformações específicas desses materiais (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

Denomina-se domínio de deformações um intervalo convencional que compreende todas as possíveis situações de ruptura da seção transversal plana de um elemento linear de concreto armado, para uma determinada solicitação normal (CLÍMACO, 2008).

O ELU de ruptura ou de deformação plástica excessiva é caracterizado convencionalmente na situação de cálculo pelas deformações específicas (ε_{cd}) e (ε_{yd}), respectivamente, do concreto e da armadura tracionada (FUSCO,1981).

Para a determinação da resistência de cálculo de uma dada seção transversal, é necessário considerar em qual dos domínios definidos pela Figura 4 está situado o diagrama de deformações específicas de cálculo da seção analisada (FUSCO,1981).

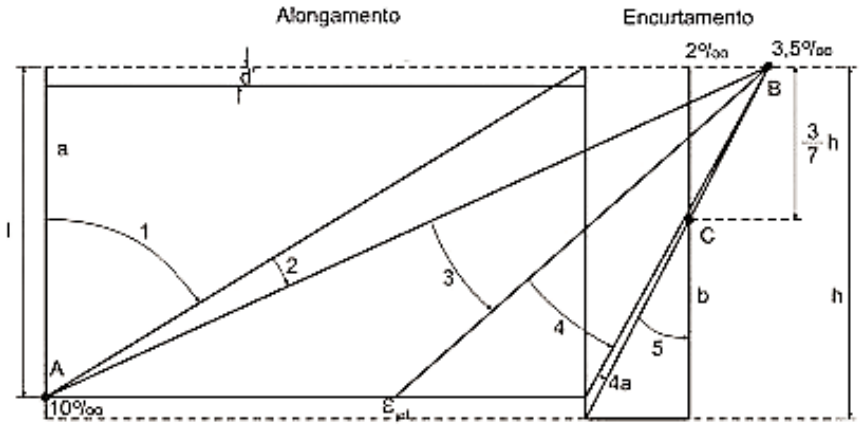

Figura 4 -Domínios de deformação

Fonte: FUSCO, 1981.pg.4

Segundo Clímaco (2008), cada domínio de deformações de um elemento linear sob solicitações normais é identificado com um modo de ruptura, por sua vez associado ao tipo de solicitação, às dimensões da seção e à taxa e disposição das armaduras de aço.

A Figura 4 representa os seis domínios de deformação, onde os domínios 1 e 2 são fixados pelo ponto “A”, os domínios 3, 4 e 4a pelo ponto “B” e o domínio 5 pelo ponto “C”. Os diferentes domínios variam desde a reta “a”, correspondente a tração uniforme, até a reta “b”, correspondente a compressão uniforme (FUSCO, 1981).

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) a reta “a” e os domínios 1 e 2 correspondem ao estado limite último por deformação plástica excessiva (aço com o máximo alongamento permitido); os domínios 3, 4, 4a, 5 e a reta “b” correspondem ao estado limite último por ruptura do concreto.

2.1.4.1 Reta “a”

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) a reta “a” é caracterizada pela solicitação à tração uniforme, com deformações do aço ($\varepsilon_{yd} = 10‰$) e do concreto ($\varepsilon_{cd} = 10‰$), onde a linha neutra encontra-se no infinito, a resultante das tensões atua no centro de gravidade da armadura e todas as fibras têm a mesma deformação de tração.

2.1.4.2 Domínio 1

Segundo Clímaco (2008) é desprezada a resistência a tração do concreto, admite-se que a peça rompe quando o aço alcança o alongamento de 10‰, limite convencional de deformação plástica excessiva.

A linha neutra é externa a seção transversal, a qual está inteiramente tracionada. Neste domínio estão incluídos os casos de tração axial e de tração excêntrica com pequena excentricidade (FUSCO, 1981).

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) este domínio é caracterizado pela solicitação à tração não uniforme, não ocorre tensões de compressão e as deformações de tração são diferentes em cada fibra.

2.1.4.3 Domínio 2

Caracterizado pela deformação do aço ($\varepsilon_{sd} = 10‰.$) A linha neutra corta a seção transversal, havendo na peça um banzo tracionado e um banzo comprimido. Neste domínio estão incluídos os casos de tração excêntrica com grande excentricidade, de flexão pura e de compressão excêntrica com grande excentricidade (FUSCO, 1981).

Segundo Clímaco (2008) neste domínio deve-se prevenir a ruptura frágil da peça na zona tracionada, característica das seções fracamente armadas, providenciando uma armadura mínima de tração.

Segundo Fusco (1981) o concreto da zona comprimida não atinge a ruptura, pois esta somente poderá ocorrer na posição limite do fim do domínio 2, quando ($\varepsilon_{cd} = 3{,}5‰.$)

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) o domínio é caracterizado pela solicitação à flexão simples ou composta e o concreto é mal aproveitado, pois sua deformação é menor que a ruptura.

2.1.4.4 Domínio 3

Caracterizado pela deformação ($\varepsilon_{cd} = 3{,}5‰.$). A linha neutra corta a seção transversal, havendo um banzo comprimido e outro tracionado. Na situação última, a deformação da armadura tracionada é pelo menos igual à deformação de início de

escoamento. Assim, a ruptura do concreto ocorre simultaneamente com o escoamento da armadura. Esta é a situação desejável para projeto, pois os dois materiais são aproveitados inteiramente e, além disso, não há risco de ruína não avisada (FUSCO, 1981).

Segundo Clímaco (2008) neste domínio a peça apresenta sinais visíveis do risco de ruptura: fissuras de grande abertura e flechas acentuadas.

Neste domínio também estão inclusos os casos de tração excêntrica com grande excentricidade, flexão pura e compressão excêntrica com grande excentricidade (FUSCO, 1981).

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) o domínio é caracterizado pela solicitação à flexão simples ou composta.

2.1.4.5 Domínio 4

É caracterizado pela deformação ($\varepsilon_{cd} = 3{,}5‰$.). A linha neutra corta a seção transversal, havendo um banzo comprimido e outro tracionado (FUSCO, 1981).

Segundo Clímaco (2008) neste domínio ocorre o esmagamento do concreto sem o escoamento do aço. Procura-se evitar o dimensionamento nesse domínio, para prevenir o risco de ruptura sem aviso, visto que o esmagamento do concreto ocorre de forma brusca.

Segundo Fusco (1981) neste domínio estão incluídos apenas os casos de compressão excêntrica com grande excentricidade.

O domínio é caracterizado pela solicitação à flexão simples ou composta, o concreto é bem aproveitado, pois se encontra na ruptura, mas o aço não, pois sua deformação é menor que a de início de escoamento (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

2.1.4.6 Domínio 4a

É caracterizado pela deformação ($\varepsilon_{cd} = 3{,}5‰$.). A linha neutra ainda corta a seção transversal, mas na região de cobrimento da armadura menos comprimida. No domínio ambas as armaduras estão comprimidas, embora sejam usualmente desprezíveis as tensões na armadura menos comprimida (FUSCO, 1981).

Segundo Carvalho e Ribeiro (2009) o domínio fica caracterizado pela solicitação à flexão composta e o aço da armadura menos comprimida é mal aproveitado, pois sua deformação é muito pequena.

2.1.4.7 Domínio 5

Segundo Clímaco (2008) a ruptura de seções no domínio 5 é proveniente da "compressão com pequena excentricidade".

A linha neutra não corta a seção transversal, a qual está inteiramente comprimida. Admite-se que neste domínio seja variável a deformação última ($2\text{‰} \leq \varepsilon_{cd} \leq 3{,}5\text{‰}$) do concreto (FUSCO,1981).

O domínio fica caracterizado pela solicitação à compressão não uniforme, não ocorre tensões de tração, com a ruptura do concreto e encurtamento da armadura (não há fissuração nem deformação que sirvam de advertência, caracterizando a ruptura frágil) (CARVALHO. PINHEIRO, 2009).

2.1.4.8 Reta "b"

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) a reta "b" é caracterizada pela solicitação à compressão uniforme, com deformações do aço ($\varepsilon_{yd} = 2\text{‰}$) e do concreto ($\varepsilon_{cd} = 2\text{‰}$) e a linha neutra encontra-se no infinito.

2.2 DIMENSIONAMENTO DE PILARES

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) o estudo de dimensionamento de pilares não é simples, pois além de estarem sujeitos à flexão composta (reta ou oblíqua) e consequentes possíveis efeitos de 2ª ordem, nas estruturas de concreto existe sempre o problema da fissuração, que influi no estado de deformação e é sempre de difícil avaliação.

A seguir são elencados alguns conceitos importantes correlatos ao dimensionamento de pilares:

1. Efeitos de segunda ordem: Em algumas peças, além dos esforços de 1ª ordem, os quais abrangem os esforços iniciais devidos às cargas aplicadas à

estrutura e os esforços devidos as excentricidades acidentais, também devem ser considerados os momentos fletores de segunda ordem que aparecem em virtude das deformações da própria estrutura (FUSCO, 1981).

2. Excentricidades: Uma força normal atuando em um pilar de seção retangular pode estar aplicada no seu centro geométrico (compressão centrada ou simples), a certa distância desse centro e sobre um dos eixos de simetria (flexão composta) e em um ponto qualquer da seção (flexão oblíqua). Essas distâncias, chamadas de excentricidades, que devem ser conhecidas para o dimensionamento de pilares isolados, são de diversos tipos e causadas por fatores diferentes (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

3. Excentricidade inicial: Essa excentricidade corresponde à posição prevista para o ponto de aplicação das cargas (FUSCO, 1981), para a determinação da excentricidade inicial é utilizado a equação abaixo:

$$e_i = \frac{M_{sk}}{N_{sk}} \quad (1)$$

Onde:

e_i Excentricidade inicial em relação ao eixo em estudo (x/y);

M_{sk} Momento solicitante no pilar em valor característico, resultante do carregamento da viga, em relação ao eixo em estudo (x/y);

N_{sk} Esforço normal solicitante no pilar em valor característico, resultante do carregamento da viga em relação ao eixo em estudo (x/y).

4. Excentricidade acidental: Como o próprio nome diz, pode acidentalmente ocorrer (por exemplo, incerteza na localização da força normal ou desvio do eixo da peça, durante a construção, em relação à posição prevista no projeto) (CARVALHO; PINHEIRO, 2009). Essa excentricidade pode ser determinada através das equações a seguir:

$$e_a^d = \theta_1 * l \quad (2)$$

$$e_a^r = \theta_1 * \frac{l}{2} \quad (3)$$

Onde:

e_a^d Excentricidade acidental de desaprumo;

e_a^r Excentricidade acidental de falta de retilineidade;

l Altura do pavimento;

θ_1 Desaprumo de um elemento vertical contínuo, deve respeitar os limites a seguir.

$$\frac{1}{300} \leq \theta_1 \leq \frac{1}{200} \quad (4)$$

5. Excentricidade mínima: Segundo Clímaco (2008) a excentricidade de 1ª ordem deve respeitar uma excentricidade mínima, obtida pela equação a seguir:

$$e_{1,min} = 1{,}5 + 0{,}3 * h \quad (5)$$

Onde:

$e_{1,min}$ Excentricidade de 1ª ordem mínima;

h Dimensão do pilar na direção em estudo (x/y).

6. Excentricidade de segunda ordem: Deslocamentos laterais nos pilares influem no próprio esforço interno (efeito de segunda ordem) podendo causar sua instabilidade. A teoria que estuda esse fenômeno é chamada de teoria de segunda ordem e pode ser mais ou menos simplificada, dependendo do índice de esbeltez do pilar (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

7. Excentricidade suplementar (fluência): Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) a excentricidade suplementar deve ser prevista de modo a levar em conta a fluência do concreto. É obrigatória para pilares com índice de esbeltez λ > 90 e pode ser efetuada, de maneira aproximada, acrescentando ao momento de segunda ordem M_2 um momento M_c dado por:

$$M_c = N_{sd} * e_c \quad (6)$$

Sendo:

$$e_c = \left(\frac{M_{sg}}{N_{sg}} + e_a\right) * \left(2{,}718^{\frac{\varphi * N_{Sg}}{N_e - N_{sg}}} - 1\right) \quad (7)$$

Onde:

e_c Excentricidade suplementar;

M_{sg} Valores característicos dos momentos solicitantes devido às ações permanentes;

N_{sg} Valores característicos das forças normais solicitantes devido às ações permanentes;

e_a Excentricidade acidental;

φ Coeficiente de fluência (determinado através da tabela 1);

N_e Carga crítica de Euler.

Tabela 1 - Tabela coeficiente de Fluência

Fonte: ABNT NBR 6118, 2014. pg. 46. Adaptado pelos autores, 2017

Umidade média ambiente (%)			40		55		75		90	
Espessura Fictícia 2Ac/u (cm)			20	60	20	60	20	60	20	60
φ Coef. Fluência Concreto das Classes C20 a C45	t0 dias	5	4,60	3,80	3,90	3,30	2,80	2,40	2,00	1,90
		30	3,40	3,00	2,90	2,60	2,20	2,00	1,60	1,50
		60	2,90	2,70	2,50	2,30	1,90	1,80	1,40	1,40
φ Coef. Fluência Concreto das Classes C50 a C90		5	2,70	2,40	2,40	2,10	1,90	1,80	1,60	1,50
		30	2,00	1,80	1,70	1,60	1,40	1,30	1,10	1,10
		60	1,70	1,60	1,50	1,40	1,20	1,20	1,00	1,00

Sendo:

$$N_e = \frac{10 * E_c * I_c}{l_e^2} \quad (8)$$

Onde:

E_c Módulo de elasticidade do concreto

I_c Momento de inércia da seção bruta do elemento de concreto segundo a direção do carregamento analisado.

8. Índice de esbeltez: Segundo Clímaco (2008) o parâmetro adotado como referência para a consideração dos efeitos de segunda ordem é o índice de esbeltez, λ, definido conforme a seguir:

$$\lambda = \frac{l_e}{i} \quad (9)$$

Sendo:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{10}$$

Onde:

l_e Comprimento equivalente em relação a eixo em estudo (x/y);

i Raio de giração em relação ao eixo em estudo (x/y);

I Inércia em relação a eixo em estudo (x/y);

A Área da seção transversal.

Observa-se na Figura 5 que, quando a deformação ocorre na direção do eixo x (portanto esbeltez λ_x), a rotação da seção transversal ocorre segundo o eixo y (assim raio de giração i_y) (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

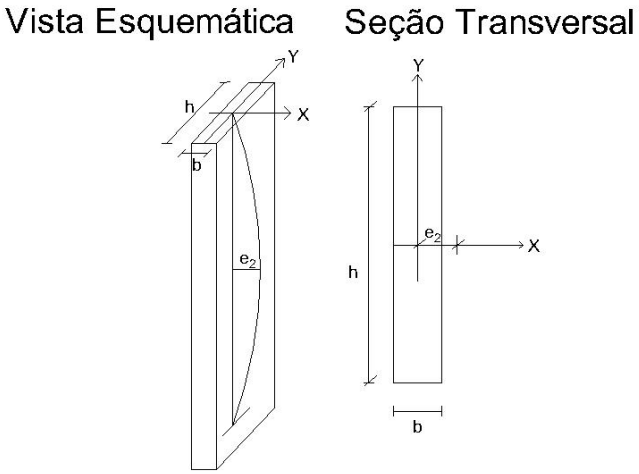

Figura 5 - Pilar de seção retangular Flambagem segundo o eixo de menor inércia

Fonte: CARVALHO; PINHEIRO, 2009. pg.318

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) o comprimento equivalente do elemento comprimido (pilar), suposto vinculado em ambas as extremidades, e deve ser o menor dos seguintes valores:

$$l_e \leq \begin{cases} l_0 + h \\ l \end{cases} \tag{11}$$

Onde:

l_0 Distância entre faces internas dos elementos vinculados do pilar;

h Dimensão da seção transversal do pilar no plano em análise;

l Distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado.

A figura a seguir representa o comprimento equivalente do pilar:

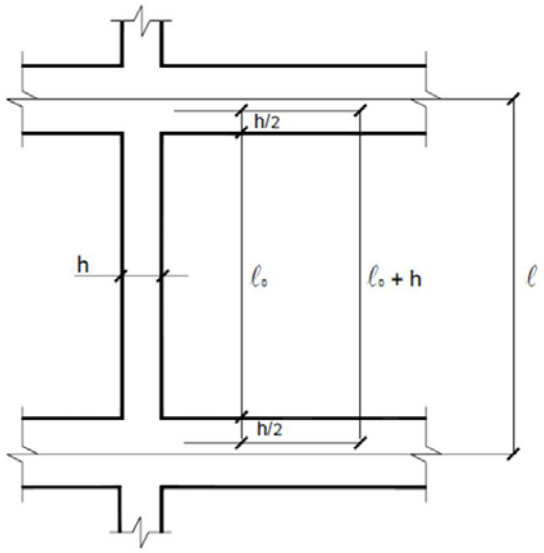

Figura 6 - Representação comprimento equivalente

Fonte: BASTOS, 2017. pg.15

2.2.1 Métodos de cálculo de pilares de concreto armado

Os esforços locais de segunda ordem, em elementos isolados podem ser desprezados quando o índice de esbeltez (λ) for menor que o valor limite (λ_1) dado pela expressão a seguir (CARVALHO; PINHEIRO, 2009)

$$\lambda_1 = \frac{(25 + 12{,}5 * \frac{e1}{h})}{\alpha_b} \quad (12)$$

$$35 \leq \lambda_1 \leq 90 \quad (13)$$

Onde:

λ_1 Limite para pilar curto;

e_1 Excentricidade de 1ª ordem excluindo a acidental;

α_b Coeficiente que depende da vinculação do pilar e do carregamento, pode ser determinado através da tabela a seguir.

Tabela 2 - Tabela coef. Alfa_b

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Situação	Tipo de vinculação	Coef. αb
1	Pilares biapoiados sem carga transversal	$\alpha b = 0,6 \pm 0,4\ (M_B/M_A)$
		$0,4 \leq \alpha b \leq 1$
2	Pilares biapoiados com cargas transversais significativas ao longo da altura	$\alpha b = 1$
3	Pilares em balanço	$\alpha b = 0,8 + 0,2\ (M_C/M_A)$
		$0,85 \leq \alpha b \leq 1$
4	Qualquer pilar com excentricidade de 1ª ordem menor que a excentricidade mínima	$\alpha b = 1$

Onde:

Para situação 1 = M_A e M_B são os momentos de 1ª ordem nos extremos do pilar, obtidos na análise de 1ª ordem no caso de estruturas de nós fixos e os momentos totais (1ª ordem + 2ª ordem) no caso de estruturas de nós móveis. Deve ser adotado para M_A o maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado e para M_B o sinal positivo, se tracionar a mesma face que M_A, e negativo, caso contrário (NBR 6118:2014).

Para situação 3 = M_A é o momento de 1ª ordem no engaste e M_C é o momento no meio do pilar em balanço (NBR 6118:2014).

Conforme já mencionado, para alguns casos podem ser desprezados os efeitos de segunda ordem. Nas situações em que os efeitos de segunda ordem não podem ser desprezados, a análise pode ser efetuada, de acordo com o item 15.8.3 da Norma NBR 6118:2014, por métodos aproximados e pelo método geral com a consideração ou não da fluência (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

Segundo a NBR 6118:2014 a determinação dos esforços locais de 2ª ordem pode ser feita por métodos aproximados ou o método geral. Segue abaixo uma descrição sucinta dos métodos apresentados pela referida norma.

1. **Método do pilar padrão com curvatura aproximada:** Pode ser empregado apenas no cálculo de pilares com $\lambda \leq 90$, com seção constante e armadura simétrica e constante ao longo do eixo. A não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo que a deformação da barra seja senoidal. A não linearidade

física é considerada através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica (NBR 6118:2014).

2. **Método do pilar padrão com rigidez k aproximada:** Pode ser empregado apenas no cálculo de pilares com $\lambda \leq 90$, com seção retangular constante e armadura simétrica e constante ao longo do seu eixo. A não linearidade geométrica deve ser considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal. A não linearidade física deve ser considerada através de uma expressão aproximada da rigidez (NBR 6118:2014).

3. **Método do pilar padrão acoplado a diagramas M, N 1/r:** A determinação dos esforços locais de 2ª ordem em pilares com $\lambda \leq 140$ pode ser feita pelo método do pilar padrão ou pilar padrão melhorado, utilizando-se para a curvatura da seção crítica os valores obtidos de diagramas M, N, 1/r específicos para o caso. Se $\lambda > 90$, é obrigatória a consideração da fluência (NBR 6118:2014).

4. **Método do pilar padrão para pilares de seção retangular submetidos a flexão composta oblíqua:** Quando a esbeltez de um pilar de seção retangular submetido à flexão composta oblíqua for menor ou igual que 90 ($\lambda \leq 90$) nas duas direções principais, podem ser aplicados os processos aproximados descritos nos itens 1 e 2, simultaneamente em cada uma das duas direções. A obtenção dos momentos de segunda ordem em cada direção é diferente, pois depende de valores distintos de rigidez e esbeltez (NBR 6118:2014)

5. **Método geral:** Consiste na análise não linear de 2ª ordem efetuada com a discretização adequada da barra, consideração momento - curvatura real em cada seção e consideração da não linearidade geométrica de maneira não aproximada, o método é obrigatório para $\lambda > 140$ (NBR 6118:2014).

Segundo Fusco (1981) a determinação da carga crítica pelo método geral é feita através do cálculo de deformações da estrutura, o método é aplicável a qualquer tipo de estrutura.

Pelo método geral, deve-se determinar, em primeiro lugar, a relação momento - curvatura (RIBEIRO, 2011). Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) a curvatura da peça é determinada em função do estado de esforços resistidos pela seção, onde em cada ponto se relaciona o momento atuante com a curvatura, diferente do

processo simplificado, em que se considera apenas a máxima curvatura da seção mais solicitada.

Segundo Ribeiro (2011) as deformações decorrentes dos efeitos de segunda ordem podem ser determinadas através do método das diferenças finitas.

2.3 NÃO LINEARIDADE

Conforme já explicado, para a determinação dos efeitos de segunda ordem pelo método geral, é necessário levar em consideração a não linearidade física do material e a não linearidade geométrica do pilar.

Segundo Borges (1999), o conceito de linearidade por vezes é confundido como conceito de elasticidade: se é dito que um determinado material tem comportamento elástico-linear, os conceitos elástico e linear são distintos. Uma barra é de material elástico quando, cessada a ação do carregamento aplicado, volta ao comprimento inicial; isso quer dizer que, quando a tensão retorna ao valor zero, a deformação também é nula, não havendo pois nenhuma deformação residual.

Na maioria dos materiais, para baixos níveis de solicitações, percebe-se comportamento elástico-linear, ou pelo menos, a hipótese de assumir tal comportamento é bastante satisfatória. Entretanto, as propriedades de linearidade e elasticidade nem sempre ocorrem juntas, como pode ser ilustrado na figura 7 (SILVA, 2012).

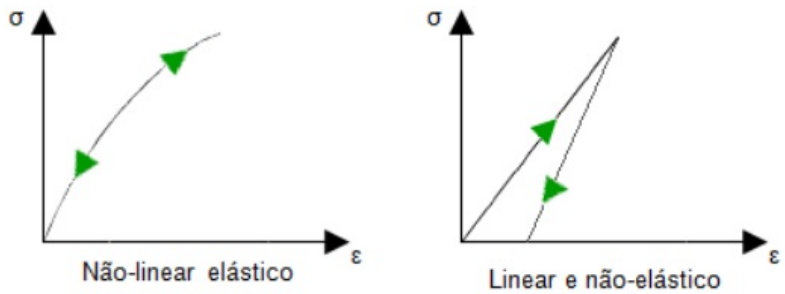

Figura 7 - Comportamento tensão- deformação

Fonte: SILVA, 2012. pg. 45

A Lei de Hooke é válida para deformações abaixo do limite elástico do material. O comportamento elástico dos materiais segue o regime elástico na lei de Hooke até um determinado valor de solicitação, após este valor, a relação de

proporcionalidade deixa de ser definida, sendo necessário recorrer à um outro tipo de análise (BARBOSA, 2008).

2.3.1 Não linearidade física

A não-linearidade física desenvolve-se a partir de fissuração, fluência, deformação plástica do concreto, escoamento das armaduras, entre outros fatores, e está associada ao comportamento dos materiais (FONTES, 2005).

Essa característica da estrutura de concreto armado ocorre devido a sua composição heterogênea, a existência de aço e concreto, e, principalmente, devido a sua baixa resistência à esforços de tração que leva a fissuração dos elementos estruturais submetidos à momentos fletores (KIMURA, 2007).

Quando as equações constitutivas do material não seguem a Lei de Hooke, isto é, não há proporcionalidade entre tensão e deformação é configurada a não-linearidade física (MENESES, 2012). A distribuição de tensões no concreto segue o modelo do diagrama parábola-retângulo proposto no item 8.2.10.1 da NBR 6118:2014 conforme Figura 8.

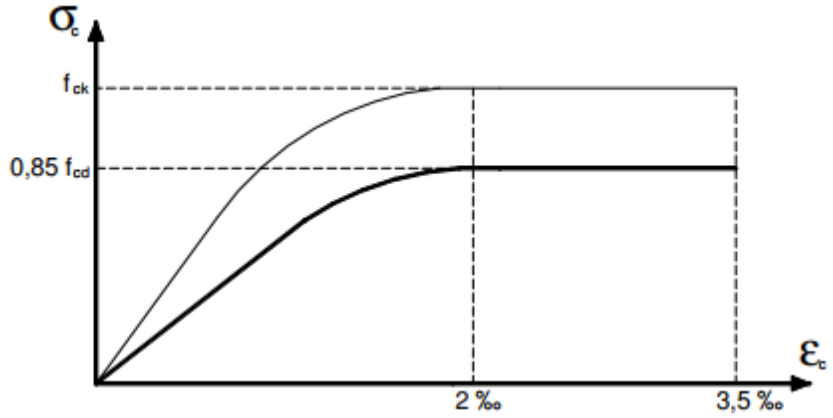

Figura 8- Distribuição de tensões do concreto

Fonte: Fonte: BASTOS, 2014.pg.22

Para os aços da Classe A, caracterizados pela linearidade do diagrama até o limite de escoamento e pela presença do patamar de escoamento, adota-se o diagrama indicado na Figura 9 (FUSCO,1981).

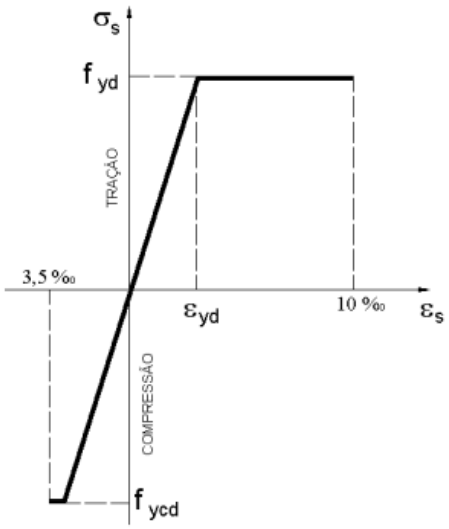

Figura 9 - Diagrama de tensões no aço

Fonte: CARVALHO; PINHEIRO, 2009. pg.261

2.3.2 Não linearidade geométrica

Segundo Kimura (2007) a não-linearidade geométrica (NLG), por sua vez, ocorre quando há uma alteração significativa do ponto de aplicação de carga em um elemento estrutural. Tal alteração é uma consequência direta dos carregamentos aplicados em uma estrutura que a deformam, tornando a sua resposta diferente daquela no estado indeformado.

Uma estrutura pode ter comportamento não-linear, ainda que constituída de um material que obedeça a lei de Hooke, desde que seus elementos estejam solicitados tanto por esforços axiais como por momentos fletores. Neste caso, a deflexão lateral de um membro traz como consequência o aparecimento de momentos fletores adicionais (de segunda ordem), em virtude da presença da força normal, conforme Figura 10 (GARCIA, 1974).

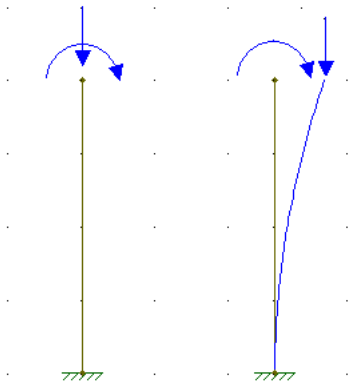

Figura 10 - Não linearidade geométrica originando os esforços de segunda ordem

Fonte: Elaborado pelas autores, 2017

Em outras palavras, enquanto nos estudos de primeira ordem os esforços e os deslocamentos variam linearmente com as ações, nos de segunda ordem essas relações tornam-se não-lineares (LIMA, 2001).

2.4 MÉTODO DAS FIBRAS

Nas últimas décadas, tem havido um forte desenvolvimento das estratégias de modelagem capazes de analisar a resposta não-linear de estruturas de concreto armado. Os modelos de elementos finitos discretos são aqueles que apresentam o melhor compromisso entre simplicidade e precisão (VALÉRIO, 2016). Os modelos mais promissores para análise não-linear de elementos viga-pilar de concreto armado são os denominados método das fibras (Spacone et al,1996).

Com este método é possível calcular a capacidade resistente de uma seção transversal qualquer (MENESES, 2013).

O método consiste na discretização da seção transversal de concreto armado através de sua divisão em áreas elementares, formando uma malha de fibras (MENESES, 2013) conforme figura 11.

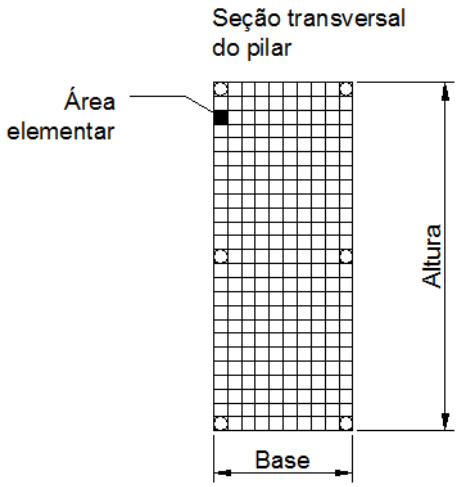

Figura 11 - Discretização da seção transversal do pilar

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Cada fibra possui propriedades mecânicas e geométricas próprias (posição, deformação e compressão elementar), conforme Figura 12, o método pode ser utilizado tanto para determinar a capacidade resistente de compressão do concreto, quanto as de tração e compressão da armadura (MONTEIRO, 2011).

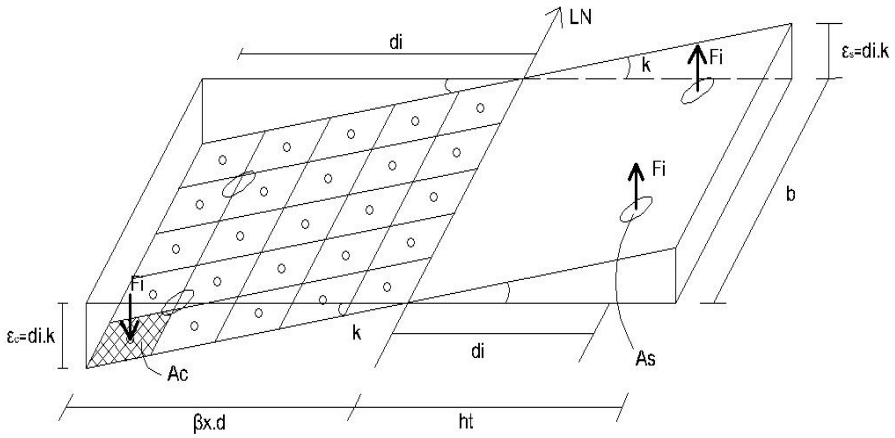

Figura 12 – Aplicação método das fibras

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Segundo Monteiro (2011) a tensão nas fibras pode ser determinada através do diagrama parábola retângulo do concreto, a força de compressão resultante em cada fibra comprimida, resulta da multiplicação entre a tensão na fibra em análise e a área elementar correspondente a mesma.

Já para as barras da armadura, a tensão pode ser obtida através da multiplicação do módulo de elasticidade do aço, pela deformação que ocorre na barra em análise. A força resultante exercida na barra é determinada pela multiplicação da tensão atuante na barra e a área da barra correspondente (MONTEIRO, 2011).

A equação a seguir pode ser utilizada para a determinação da força resultante tanto na fibra de concreto quanto na barra da armadura (MONTEIRO, 2011):

$$F_i = \sigma_i * A_i \quad (14)$$

Onde:

F_i Força normal resistente em cada fibra/barra;

σ_i Tensão resistente em cada fibra/barra;

A_i Área de cada fibra/barra.

Os momentos resistentes são calculados em relação ao centro de gravidade (CG) da seção, pelo que, ambos dependem da distância de cada fibra/barra ao CG e da força de compressão nelas resultante. A equação a seguir pode ser utilizada para a determinação dos momentos atuantes nas fibras de concreto ou nas barras da armadura (MONTEIRO, 2011):

$$M_i = F_i * d_i \quad (15)$$

Onde:

M_i Força normal resistente em cada fibra/barra;

d_i Distância entre o centro geométrico de cada fibra/ barra e o centro geométrico da seção transversal.

Segundo Meneses (2013) o esforço axial resistente da seção transversal de concreto armado, consiste no somatório do esforço axial resultante em cada fibra de concreto comprimida e do esforço axial resultante em cada barra da armadura.

O momento máximo resistente da seção transversal, resulta da soma entre os momentos elementares de cada fibra de concreto e das barras da armadura (MENESES, 2013).

2.5 DEFINIÇÃO DE CURVATURA

Segundo RIBEIRO (2011), considerando um elemento estrutural de eixo reto, submetido a um carregamento que produz compressão nas fibras superiores e tração nas fibras inferiores de sua seção transversal, observa-se que sob a ação deste carregamento, os pontos pertencentes ao eixo do elemento se deslocam e fazem com que o eixo assuma a forma curva, caracterizando a linha elástica do elemento, conforme Figura 13, sendo que o símbolo r, apresentado na figura 13, represente o raio de curvatura da linha elástica.

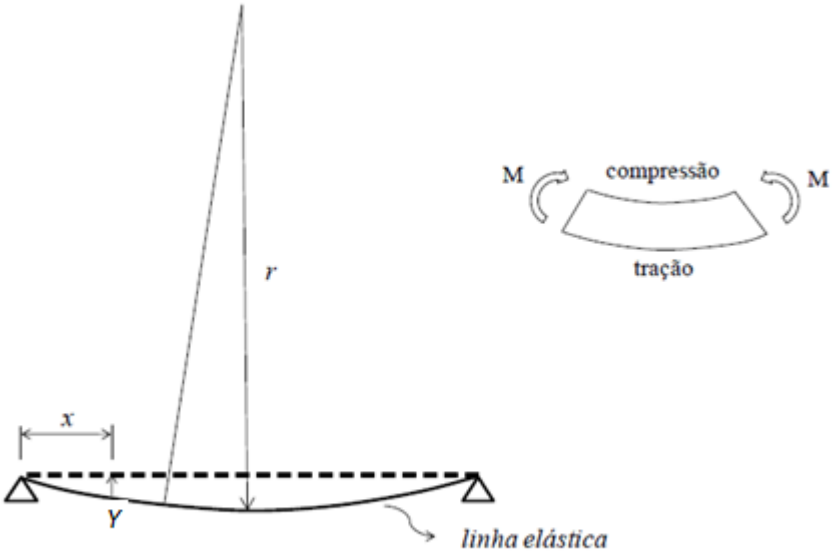

Figura 13 - Linha elástica
Fonte: RIBEIRO, 2011. pg. 54

Pode-se isolar um segmento genérico, indicado na Figura 14, considerando-se as hipóteses de que as seções planas permaneçam planas, de que o material obedeça a lei de Hooke e desprezando-se os deslocamentos axiais (RIBEIRO, 2011).

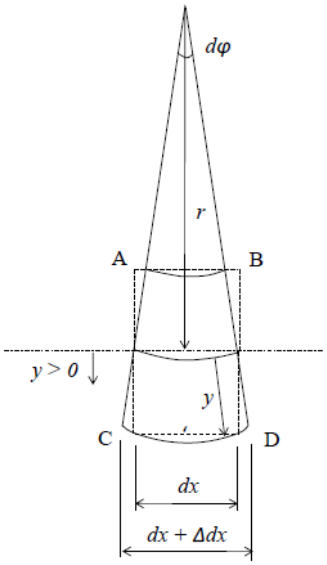

Figura 14 - Raio de curvatura proveniente da flexão

Fonte: RIBEIRO, 2011. pg. 54

Da Resistencia dos Materiais, obtem-se as expressões que relacionam a deformação específica:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \tag{16}$$

$$\sigma = E * \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{17}$$

Onde:

ε Deformação;

δ Alongamento total;

L Comprimento total;

σ Tensão normal;

E Módulo de elasticidade longitudinal.

Também da Resistência dos Materiais tem-se que a tensão normal devida à flexão é dada pela equação:

$$\sigma = \frac{M}{I} Y \tag{18}$$

Onde:

M Momento fletor;

I Momento de inércia;

Y Distância da fibra ao eixo neutro.

Da comparação entre as equações 16, 17 e 18 temos:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{\frac{M}{I}Y}{E} \rightarrow \frac{\Delta dx}{y} = \frac{Mdx}{EI} \quad (19)$$

Partindo do elemento da Figura 14, pode-se escrever:

$$d\varphi = \frac{dx}{r} = \frac{\Delta dx}{y}, \quad (20)$$

Onde:

$$\frac{dx}{r} = \frac{\Delta dx}{y} = \frac{Mdx}{EI} \quad (21)$$

Esta relação fornece a curvatura do elemento genérico:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad (22)$$

Onde:

$\frac{1}{r}$ Curvatura.

Salienta-se ainda que ao considerar pequenos deslocamentos e pequenas rotações pode-se adotar a expressão aproximada, ou expressão simplificada, da equação diferencial da linha elástica, comumente utilizada na engenharia (RIBEIRO, 2011).

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (23)$$

Onde:

$\frac{d^2v}{dx^2}$ Simplificação da curvatura para pequenos deslocamentos da linha elástica

2.5.1 Relação momento curvatura

Segundo a NBR 6118:2014 o principal efeito da não linearidade física pode, em geral, ser considerado através da construção da relação momento- curvatura

para cada seção, com armadura supostamente conhecida, e para o valor da força normal atuante.

As relações momento x curvatura são expressões que envolvem grandezas intimamente ligadas aos conceitos de não-linearidade. No caso da relação momento interno x curvatura, o conceito mais importante é o de não-linearidade física e, no caso da relação momento externo x curvatura, é o de não-linearidade geométrica (BORGES, 1999).

A construção do gráfico momento-curvatura, etapa fundamental para a aplicação do método geral, por si só já é um processo trabalhoso e complexo. Envolve uma série de cálculos iterativos e de aproximações sucessivas para cada valor de curvatura. Fazê-lo de forma manual demanda tempo e trabalho demais. Contudo, é possível automatizar esse processo através de planilhas eletrônicas e programação de *softwares*, tornando-o mais acessível. O efeito da não linearidade física pode ser considerado através da construção do gráfico da relação momento-curvatura. Através dele, extrai o valor de rigidez 'EI' para ser utilizado nos cálculos de deslocamento do pilar (CASAGRANDE, 2016).

Segundo a NBR 6118:2014 pode ser considerada também a formulação de segurança em que se calculam os efeitos de 2ª ordem das cargas majoradas. Assim, a relação momento x curvatura apresenta o aspecto da Figura 15.

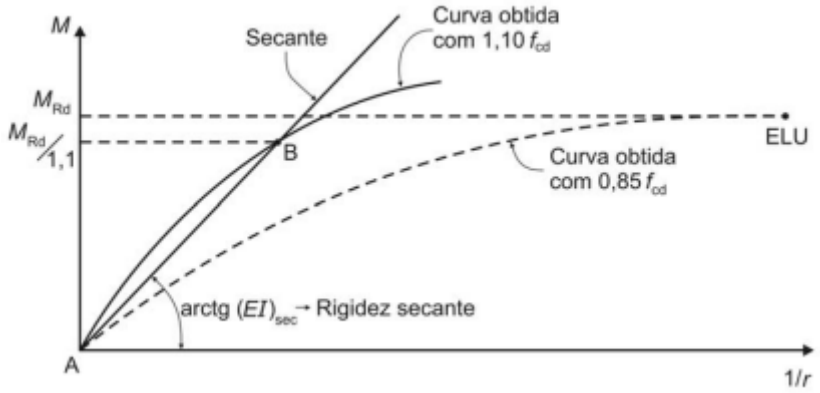

Figura 15 - Relação momento curvatura,
Fonte: ABNT NBR 6118, 2014. pg. 101

A curva cheia AB, obtida considerando o valor de força normal igual a N_{Rd}/γ_{f3}, que a favor da segurança pode ser linearizada pela reta AB e é utilizada no cálculo das deformações (NBR 6118 2014).

A curva tracejada, obtida com os valores de cálculo das resistências do concreto e do aço, é utilizada somente para definir o esforço resistente M_{Rd} correspondente a N_{Rd} (ponto máximo) (NBR 6118 2014).

A reta AB é caracterizada pela rigidez secante (*EI*)sec, que pode ser utilizada em processos aproximados para flexão composta normal ou oblíqua (NBR 6118 2014).

2.5.2 Diagrama M, N,1/r (Momento fletor, Esforço axial e Curvatura)

A análise de pilares de concreto armado submetidos a flexo-compressão envolve a consideração da teoria de segunda ordem, sendo essencial definir uma relação entre a curvatura e os esforços, através de diagrama de interação força normal - momento fletor - curvatura. Esses diagramas são a ferramenta básica de qualquer cálculo de verificação da estabilidade. O diagrama (M, N, 1/r) define graficamente uma relação entre essas três grandezas, porém a sua composição é trabalhosa (SCANDELAI, 2003).

O diagrama M, N, 1/r é utilizado para considerar a não linearidade física de forma rigorosa no dimensionamento de elementos de concreto armado. A construção do diagrama só é viável através de códigos computacionais ou planilhas eletrônicas uma vez que é necessária uma grande quantidade de operações matemáticas. Na construção do diagrama deve-se atentar para a verificação das deformações nos materiais sendo que estas deformações devem respeitar os domínios de deformações previsto na norma NBR 6118:2014. (KOCHEM, 2015).

2.6 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Segundo Ribeiro (2011) o método das diferenças finitas consiste em um processo meramente numérico.

Segundo Ruggiero (1996, apud MELO, 2011) “O método numérico das diferenças finitas é usado como uma abordagem alternativa para obter a aproximação da solução de uma equação diferencial parcial. A ideia básica desse método é transformar a resolução de uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças”.

Segundo Franco (2006, apud, MELO, 2011) “O MDF consiste na discretização do domínio e na substituição das derivadas presentes na equação diferencial por

aproximações utilizando apenas os valores numéricos da função. A ferramenta básica no cálculo das aproximações das derivadas é a fórmula de Taylor" (MELLO, 2011, apud FRANCO, 2006).

A seguir será deduzida as equações necessárias para o cálculo dos deslocamentos, a partir da expansão em série de Taylor.

A figura 16 mostra uma função genérica utilizada na dedução das equações do método das diferenças finita:

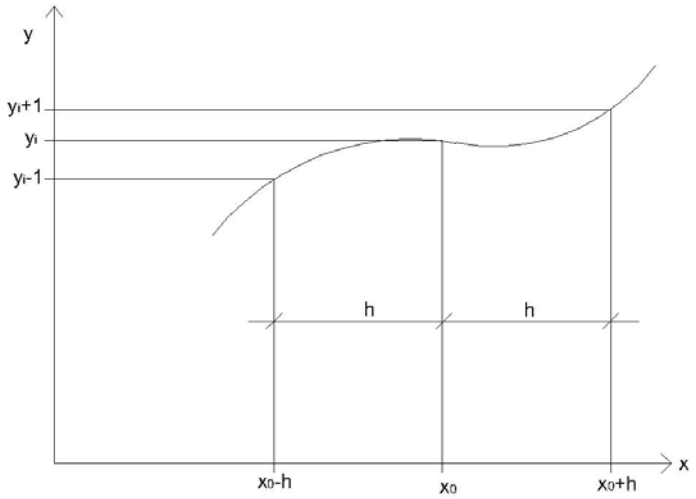

Figura 16 - Definição das diferenças regressiva, central e progressiva
Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

No eixo 'y' representado por f(x), são os deslocamentos submetidos as diferenças adotadas, para este trabalho foi a central de ordem dois.

Do gráfico, o valor da função a uma distância h = Δx de um ponto qualquer, pode ser estimado através de uma expansão de Taylor.

$$f(x+\Delta x) = \mathrm{f(x)} + \Delta \mathrm{x}\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{x}) + \frac{(\Delta \mathrm{x})^2}{2!}\frac{\mathrm{d^2f}}{\mathrm{dx^2}}(\mathrm{x}) + \frac{(\Delta \mathrm{x})^3}{3!}\frac{\mathrm{d^3f}}{\mathrm{dx^3}}(\mathrm{x}) + \cdots\frac{(\Delta \mathrm{x})^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n!}}\frac{\mathrm{d^nf}}{\mathrm{dx^n}}(\mathrm{x}) \tag{24}$$

A equação pode ser aproximada em primeira ordem da seguinte forma:

$$f(x+\Delta x) \approx \mathrm{f(x)} + \Delta \mathrm{x}\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{x}) \tag{25}$$

E reformulada para a determinação de ($\frac{df}{dx}$) para a diferença finita progressiva de primeira ordem:

$$\frac{df}{dx}(x) \approx \frac{\mathrm{f(x+\Delta x)-f(x)}}{\Delta \mathrm{x}} \tag{26}$$

E para diferença finita regressiva de primeira ordem:

$$f(x-\Delta \mathrm{x}) = f(x) - \Delta \mathrm{x}\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{x}) + \frac{(\Delta \mathrm{x})^2}{2!}\frac{\mathrm{d^2f}}{\mathrm{dx^2}}(\mathrm{x}) - \frac{(\Delta \mathrm{x})^3}{3!}\frac{\mathrm{d^3f}}{\mathrm{dx^3}}(\mathrm{x}) + \cdots + (-1)^{\mathrm{n}}\frac{\Delta \mathrm{x^n}}{\mathrm{n!}}\frac{\mathrm{d^n}}{\mathrm{dx^n}}(\mathrm{x}) \tag{27}$$

Que pode ser aproximada na forma:

$$f(x-\Delta \mathrm{x}) \approx \frac{\mathrm{f(x)-f(x-\Delta x)}}{\Delta \mathrm{x}} \tag{28}$$

Para obtenção da diferença finita central de primeira ordem soma-se as equações de diferenças finitas de primeira ordem progressiva e regressiva:

$$\frac{df}{dx}(x) \approx \frac{\mathrm{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}}{2\Delta \mathrm{x}} \tag{29}$$

Pode-se aproximar a função f em segunda ordem , utilizando o termo da segunda derivada da expansão Taylor, como mostrado a seguir :

$$f(x+\Delta \mathrm{x}) \approx \mathrm{f(x)} + \Delta \mathrm{x}\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{x}) + \frac{(\Delta \mathrm{x})^2}{2!}\frac{\mathrm{d^2f}}{\mathrm{dx^2}}(\mathrm{x}) \tag{30}$$

$$f(x-\ \Delta \mathrm{x}) \approx \mathrm{f(x)} -\ \Delta \mathrm{x}\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{x}) + \frac{(\Delta \mathrm{x})^2}{2!}\frac{\mathrm{d^2f}}{\mathrm{dx^2}}(\mathrm{x}) \tag{31}$$

Para obter as aproximações de $\frac{d^2f}{dx^2}$, é feita a combinação das equações anteriores obtendo a expressão:

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) \approx \frac{\mathrm{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}}{(\Delta \mathrm{x})^2} \tag{32}$$

Substituindo $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ pela curvatura $\frac{1}{r}$:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mathrm{y(i+1)+y(i-1)-2yi}}{(\Delta \mathrm{x})^2} \tag{33}$$

$$\frac{1}{r}(\Delta x)^2 = y(i+1) + y(i-1) - 2yi \tag{34}$$

$$y(i+1) = 2yi - y(i-1) - \frac{1}{r}(\Delta x)^2 \tag{35}$$

A equação 35 é o resultado obtido através do isolamento de f”(x), derivada de ordem dois. Equação diferencial reduzida a uma aproximação por diferenças algébricas. Esta equação é utilizada para aferir o deslocamento do ponto dois em diante.

Já a equação 36 é utilizada para aferir o deslocamentos no ponto inicial no pilar.

$$y_1 = y_0 - \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{1}{r}\right)_0 \tag{36}$$

As equações finais algebrizadas têm como finalidade o cálculo dos deslocamentos das seções do pilar, chegando-se a resultados satisfatórios e com boa precisão (RIBEIRO,2011).

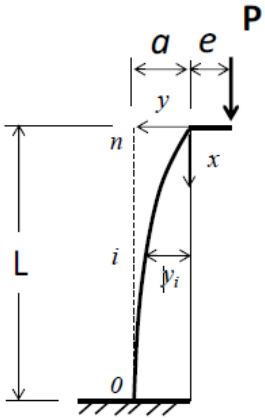

Figura 17 - Ilustração aplicação do método das diferenças finitas

Fonte: RIBEIRO, 2011. pg. 88

A sua aplicação se fundamenta na seguinte ideia: para um pilar engastado na base e livre no topo, no qual não se conhece o valor do deslocamento no topo do pilar, representado pela letra (a), adota-se um valor qualquer para este deslocamento e determinam-se os deslocamentos ao longo de toda a altura do pilar, dados por ($a-y_i$), para o sistema de eixos cartesianos posicionado conforme a Figura

17. Sabe-se que, para o deslocamento no topo do pilar, identificado pela seção (n), deve-se obter ($a-y_n=a$), donde (y_n) deve ser nulo ou, caso contrário, deve-se adotar outro valor para (a), por tentativas, até que se iguale à zero dentro de uma tolerância pré-definida. (RIBEIRO, 2011).

2.7 APLICAÇÃO DO DIAGRAMA M, N, 1/r NO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

A utilização do Método das Diferenças Finitas, juntamente com o diagrama de momento-curvatura, possibilita uma boa precisão na análise de pilares de concreto armado, com a inclusão da não linearidade física e também da não linearidade geométrica. Com o diagrama M-N-1/r, obtém-se os valores de curvaturas possíveis para a seção transversal, a qual pode ser substituída nas fórmulas do método das diferenças finitas a fim de determinar o valor do deslocamento da seção ao longo do eixo longitudinal do pilar (RIBEIRO, 2011).

2.8 REVISÃO DA LITERATURA

Neste item são apresentados de maneira resumida alguns trabalhos tomados como referência no desenvolvimento do código computacional proposto.

RIBEIRO (2011) apresentou a Universidade Federal de Santa Catarina uma dissertação, na qual, seu objetivo consistia na confecção de diagramas e tabelas utilizados na verificação da capacidade resistente e da estabilidade, levando em consideração as não linearidades físicas e geométricas de pilares de concreto armado com índice de esbeltez $\lambda \leq 90$, submetidos a flexão composta reta.

MENEZES (2013) apresentou sua dissertação de mestrado a Universidade de Aveiro (Portugal), que teve como objetivo o desenvolvimento de um programa computacional capaz de dimensionar e verificar a segurança de pilares de concreto armado seguindo as prescrições do Eurocódigo 2.

JUNIOR (2014) apresentou sua monografia a Universidade de São Paulo, que teve como objetivo a elaboração de um software capaz de verificar a capacidade resistente e a estabilidade de pilares de concreto armado, através de qualquer um dos métodos de análise dos efeitos de 2ª ordem prescritos pela NBR 6118: 2014

SANTOS; SOCZEK (2014), apresentou o trabalho de conclusão de curso que objetivou a implementação de um código computacional capaz de verificar a capacidade resistente de seções transversais de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua, gerando como resposta a envoltória dos momentos resistentes da seção.

UKASINSKI (2015) deu continuidade ao trabalho apresentado por Santos e Soczek, avançando para uma análise mais complexa a qual leva em consideração a não linearidade física do material gerando como resultados os gráficos da relação momento curvatura da seção transversal em análise.

3 METODOLOGIA DO TRABALHO

Os métodos utilizados no presente trabalho são o Método das Fibras para a não-linearidade física e o Método das Diferenças Finitas para a não-linearidade geométrica.

3.1 MODELOS ESTRUTURAIS DE PILARES CONTEMPLADOS NO CÓDIGO

Os modelos de pilar implementados no código computacional foram o pilar biapoiado e o pilar em balanço. Para ambos os pilares são introduzidos momentos que tracionam o mesmo lado da face do pilar. Na figura a seguir pilares em balanço, com a inserção dos efeitos de segunda ordem:

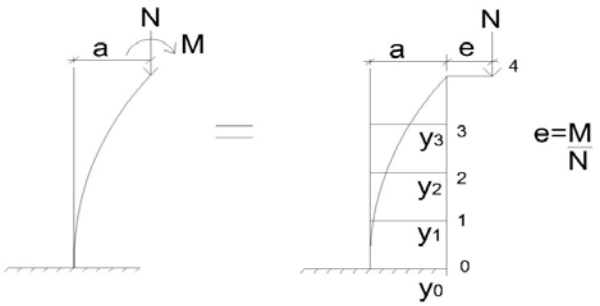

Figura 18- Pilar em Balanço
Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

O pilar em balanço representando com seus deslocamentos 'y_i' calculados com as equações do capítulo Método das Diferenças Finitas, a excentricidade inicial (e) junto com o esforço normal (N) são constantes nas verificações das seções. Variando-se o valor do deslocamento no topo do pilar (a) será verificada a condição de equilíbrio ou ruptura do elemento.

3.2 MÁXIMO MOMENTO FLETOR SOLICITANTE

Os pilares em balanço, têm o seu momento máximo fletor na base do pilar, por ser o ponto de maior braço de alavanca entre todos do os deslocamentos 'y_i', portanto, é na base que se encontra a maior curvatura entre todas as seções do pilar. Considerando que a aplicação de carregamento ocorre somente na seção do

topo, caso a seção transversal da base resista às solicitações aplicadas todas as demais seções também irão resistir. No caso dos pilares biapoiados, o carregamento considerado é simetricamente aplicado nas seções do topo e da base o que faz com haja uma superfície toda comprimida e outra toda tracionada com ocorrência do máximo momento fletor solicitante na seção transversal posicionada à meia altura do pilar. Assim sendo, para a verificação dos pilares biapoiados é possível a configuração de um pilar em balanço com comprimento igual a metade do biapoiado, coincidindo a seção da base de maior momento fletor com o valor de maior momento fletor do pilar biapoiado, na seção do meio como mostra na Figura 19:

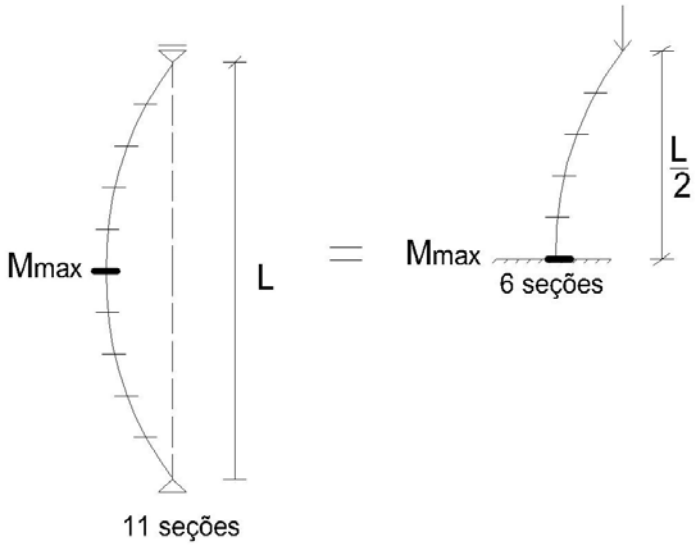

Figura 19 - Pilar em balanço representando o pilar biapoiado

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

A verificação do pilar biapoiado pode ter a sua outra metade espelhada por haver uma simetria dos valores de momentos fletores.

3.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS FIBRAS

Para aplicar o método das fibras no código, primeiramente foi necessário determinar as coordenadas dos centros geométricos das fibras de concreto e das barras de aço da armadura.

Para a determinação das coordenadas das fibras de concreto, o código define uma relação entre a altura e a base da seção transversal do pilar. Através desta relação e a quantidade de fibras estabelecidas pelo usuário, o código consegue

obter quantas fibras estão dispostas ao longo da base e da altura da seção transversal do pilar, além de determinar quais são as suas respectivas dimensões.

Com as dimensões de cada fibra definida e conhecendo os seus respectivos centros de gravidade, o código é capaz de definir suas coordenadas, onde serão utilizadas para a determinação das forças elementares atuantes em cada fibra.

No caso das barras o processo para conhecer as coordenadas dos CG é mais simples, já que o usuário define todos os dados necessários para relacionados à configuração da armadura. Através dos dados de base, altura, cobrimento da armadura e disposição das barras, o código define a distância entre os CG das barras e com isso é possível encontrar os valores das coordenadas dos mesmos.

Para determinar a resultante de força elementar atuante nas fibras de concreto e nas barras de aço, é necessário conhecer a curvatura na qual a seção transversal está sendo submetida, o próprio código define esse valor através de cálculos capazes de determinar a profundidade relativa da linha neutra levando em consideração o equilíbrio da seção transversal ($N_{rd} = N_{sd}$). Através do valor da curvatura é possível saber quais são as deformações sofridas em cada fibra de concreto e barra da armadura.

Através da Lei de Hooke, e sabendo que o módulo de elasticidade do aço é de 210 GPa, o código calcula o valor da tensão atuante em cada barra da armadura.

Já para a determinação das tensões atuantes nas fibras comprimidas de concreto armado, o código utiliza o diagrama parábola retângulo do concreto, conforme Figura 9. Onde, para valores de deformações entre 2‰ e 3,5‰, o código considera que as tensões atuantes nesse trecho são uniformes, já para deformações entre 0 e 2‰ o código utiliza a equação da parábola conforme a seguir:

$$\sigma_c = 0{,}85 * f_{cd} * \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{2‰}\right)^2\right] \tag{37}$$

Por fim, o código faz um somatório dos esforços normais elementares conforme explicado no item 2.4 deste trabalho, para determinar os esforços normais resistentes do pilar.

3.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Através dos valores do comprimento do pilar e da quantidade de seções a serem analisadas informados pelo usuário, o código faz a discretização do pilar em trechos de mesma distância. O código adota um valor inicial de deslocamento ocorrendo no topo do pilar, através deste valor obtém-se o valor do momento de segunda ordem resultante deste deslocamento, com a soma entre os momentos de 1ª ordem (informado pelo usuário) e de 2ª ordem, é possível saber qual o momento total atuante no engaste do pilar.

Como este momento é o momento crítico atuante no pilar, o mesmo é comparado com o seu momento resistente, onde o momento atuante não pode superar o valor do momento resistente.

Sabendo o valor do deslocamento inicial, o código determina o valor do deslocamento da próxima seção em análise através da Equação 36 exposta no item 2.6, agora conhecendo o deslocamento desta seção o código define qual o valor do momento fletor de 2ª ordem atuante na mesma.

Para os demais deslocamentos o código utiliza a Equação 35 também exposta no item 2.6, após ser determinado valor do último deslocamento, o código verifica se esse deslocamento tem o valor nulo (levando em consideração uma tolerância de $1e^{-3}$), já que no engaste não ocorre deslocamento, caso venha a encontrar algum valor diferente do permitido, o código retorna para a etapa onde arbitra um novo valor de deslocamento inicial fazendo novamente o processo das etapas seguintes, até encontrar uma valor dentro da tolerância permitida.

3.5 FUNCIONAMENTO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL PROPOSTO

Para atingir o objetivo proposto no presente trabalho, foi necessário criar um código computacional capaz de seguir uma sequência lógica programável. Neste capitulo serão apresentados e descritos os métodos utilizados na elaboração desta sequência.

3.5.1 Visão Geral do Código

O código trabalha dividido em três etapas (entrada de dados, processamento de dados e saída de dados).

A primeira etapa de execução do código é a entrada de dados que ocorre no momento em que o usuário informa os dados necessários para a determinação da capacidade resistente do pilar. A figura a seguir mostra como é feita a inserção dos dados na interface desenvolvida:

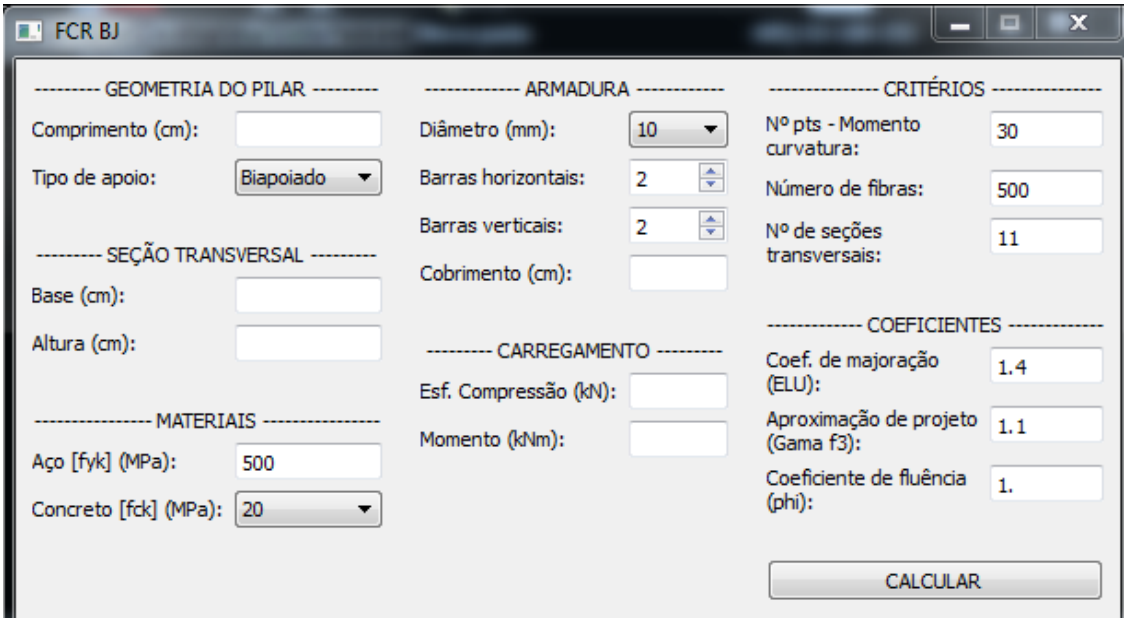

Figura 20 - Entrada de dados código computacional FCR-BJ

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Após o usuário fornecer os dados necessários para execução do código computacional, a próxima etapa é a do processamento de dados, onde o código irá determinar a capacidade resistente do pilar através de várias funções implementadas. A seguir são listadas as funções existentes no código na ordem de execução de cada uma:

1. Conversão de unidades;
2. Combinações;
3. Verificação da dimensão mínima;
4. Verificação do limite de esbeltez;
5. Verificação do limite bitola;
6. Verificação do momento mínimo;
7. Verificação da dimensão máxima;

8. Verificação do limite de fck
9. Determinação das propriedades geométricas das fibras;
10. Determinação das propriedades geométricas das barras;
11. Verificação dos limites taxa de armadura;
12. Verificação da compressão máxima
13. Determinação dos esforços máximos resistentes;
14. Determinação dos esforços resistentes para uma dada curvatura;
15. Determinação tabela relação momento X curvatura;
16. Determinação da excentricidade de fluência;
17. Determinação dos efeitos de segunda ordem;
18. Determinação da curvatura associada aos esforços solicitantes.

Na saída de dados o usuário recebe a resposta se o pilar é capaz de suportar aos esforços solicitantes nele atuantes. Existem três respostas possíveis informadas pelo código para o usuário, se o pilar não resiste aos esforços solicitantes (conforme figura 21), se o pilar resiste aos esforços solicitantes (conforme figura 22) e se o cálculo não ocorreu devido não satisfazer alguma das verificações impostas pela NBR 6118:2014 (conforme figura 23).

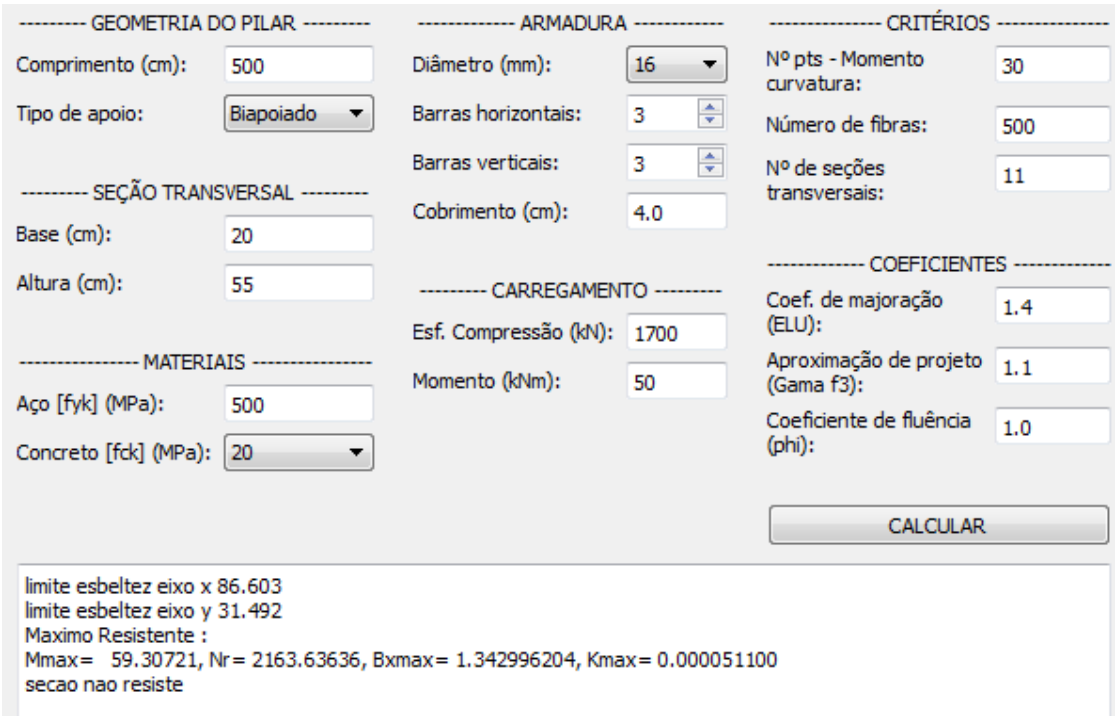

Figura 21 – Saída de dados 1

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

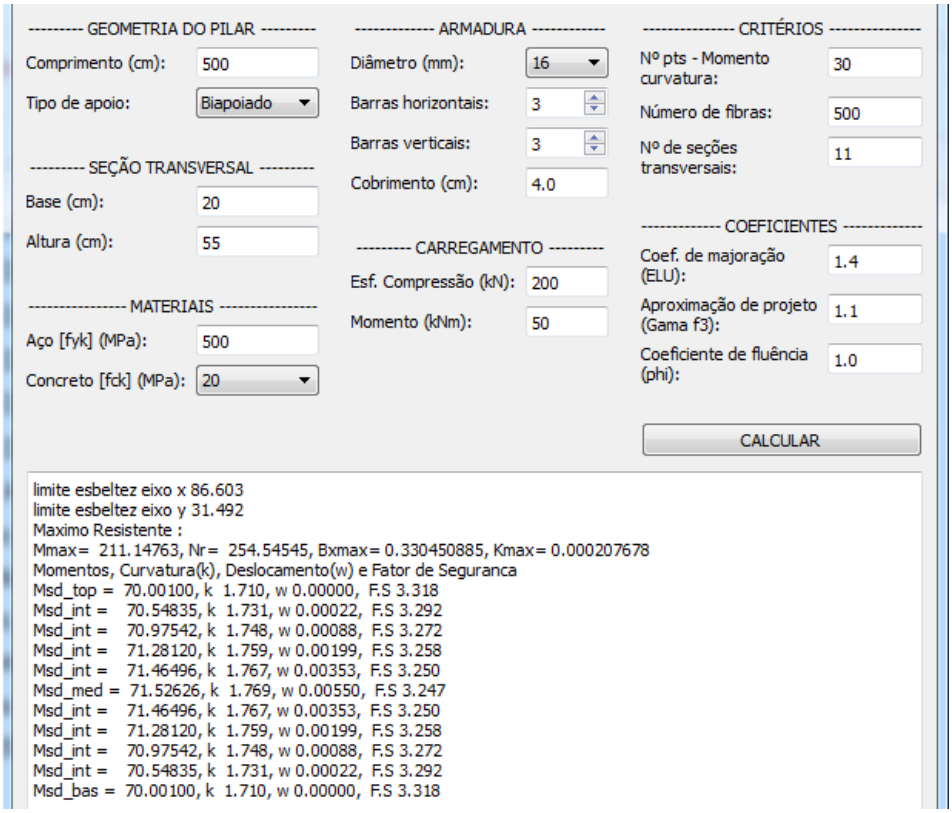

Figura 22 – Saída de dados 2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

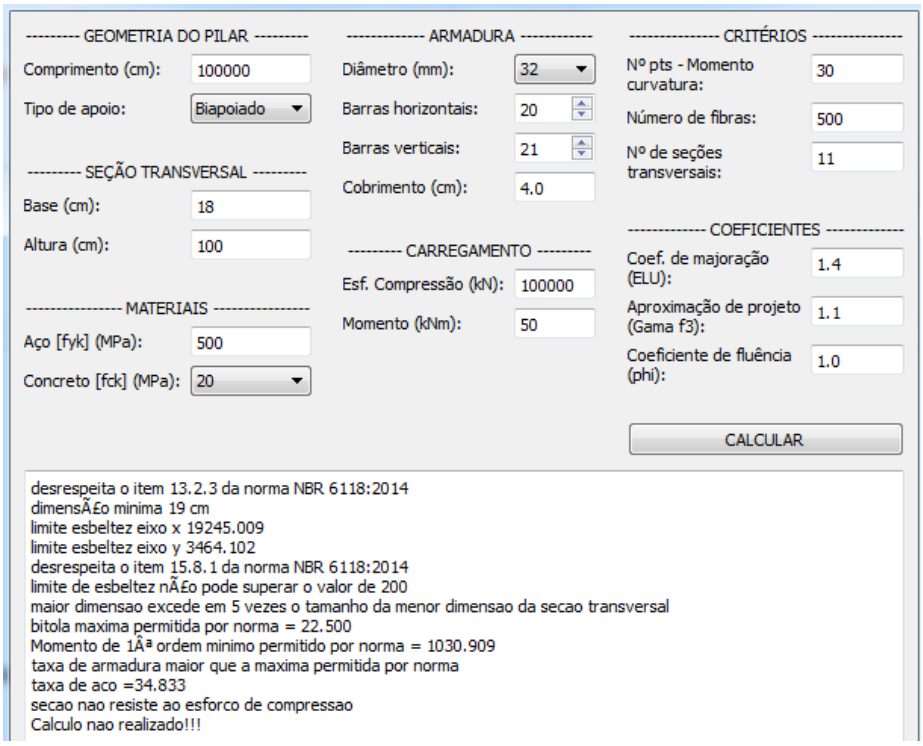

Figura 23 – Saída de dado 3

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

A figura 24 contém um fluxograma dos processos do código conforme descritos abaixo:

1. O usuário insere os dados do pilar e inicia a execução do código através do botão calcular.
2. Devido à diferença das unidades na entrada de dados, o código busca uma função implementada capaz de transformar todas as unidades em quilo Newton e centímetros, afim de padronizar as unidades para a iniciar as etapas de cálculos.
3. O código busca a função “combinações”, para transformar os esforços normais solicitantes, de valores característicos para valores de cálculo (para ELU e ELS).
4. É necessário que o código faça algumas verificações de limites impostos por norma, são eles: dimensão mínima da seção transversal, limite de esbeltez máximo, limite mínimo e máximo da bitola do aço e momento fletor solicitante mínimo. Além das limitações de norma o código tem algumas limitações impostas pelos programadores, tais como: limite para a resistência característica a compressão do concreto (f_{ck}) utilizado, e se o pilar em questão não entra na categoria de pilar-parede. Se as verificações estiverem de acordo, o código segue para o próximo passo, caso contrário uma mensagem de erro indicando qual verificação não está sendo respeitada é exibida para o usuário.
5. Através das funções “propriedades geométricas das fibras” e “propriedades geométricas das barras” o código determina as coordenadas dos centros geométricos fibras de concreto e das barras de aço e suas respectivas áreas.
6. Com as propriedades geométricas do problema determinadas, o código verifica através da função “verificação limites taxa de armadura” se a taxa de armadura do pilar informado pelo usuário respeita os limites máximo e mínimo impostos pela norma. Se a taxa de armadura informada pelo usuário não respeitar a verificação novamente o código irá exibir para o usuário uma mensagem de erro. Outra verificação aqui imposta foi a de compressão máxima permitida, se o valor do esforço de compressão solicitante for maior que a capacidade máxima resistente à compressão da seção transversal do pilar, o código gera novamente uma mensagem de erro.
7. A função “máximos resistentes” determina qual o valor do momento fletor máximo e a curvatura máxima que a seção transversal do pilar suporta para que a mesma esteja em equilíbrio ($N_{rd} = N_{sd}$).

8. O código gera uma tabela com as relações Momento X Curvatura possíveis para a seção em análise.

9. O código executa a função de determinação da excentricidade de fluência, para encontrar a excentricidade gerada pelo fenômeno da fluência que deve ser considerada para pilares com índice de esbeltez $\lambda > 90$.

10. Por fim a função de determinação dos efeitos de segunda ordem, calcula os valores dos momentos atuantes ao longo do pilar, levando em consideração a somatória dos momentos de 1ª ordem e 2ª ordem, e quando necessários os momentos provocados pelo fenômeno de fluência do concreto.

11. O código exibe para o usuário o resultado final.

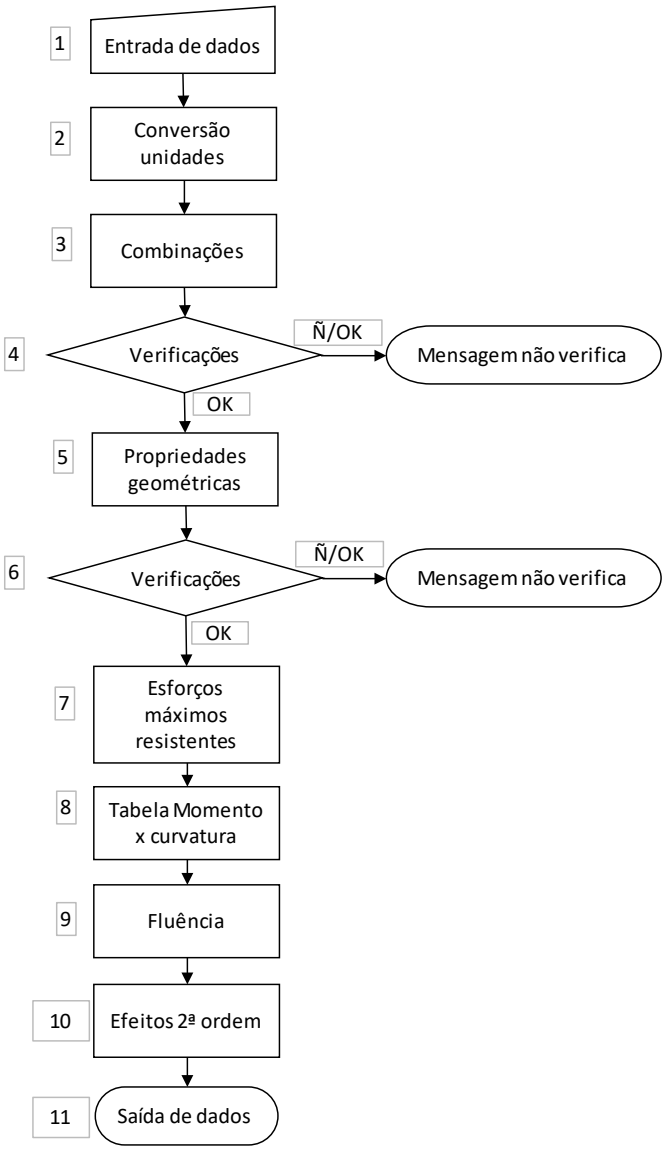

Figura 24 - Fluxograma do Código

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

3.5.2 Descrição Detalhada das Funções Componentes

3.5.2.1 Função conversão de unidades

Foi definida uma padronização de unidades em “cm” e “KN”, para não ocorrer erros durante os cálculos, por isso foi necessário implementar uma função capaz de converter as unidades inseridas pelo usuário, para o padrão adotado. Por exemplo, a resistência característica à compressão do concreto, que na entrada de dados o usuário informa em MPa, é transformada em KN/cm².

3.5.2.2 Função combinações

O usuário irá informar os valores característicos dos esforços solicitantes (momento fletor e esforço normal de compressão) e das resistências características do concreto e do aço (f_{ck} e f_{yk}), está função terá como objetivo transformar os valores característicos para valores de cálculo.

Como o código não recebe dados mais detalhados sobre as ações atuantes, para o presente trabalho são considerados os valores característicos dos esforços atuantes em favor da segurança para as combinações quase permanentes (ELS), já para a consideração dos ELU o usuário poderá informar o coeficiente de majoração conforme sua necessidade.

3.5.2.3 Função verificação da dimensão mínima

A norma NBR 6118:2014 limita a dimensão mínima de pilares para 19 cm. Em casos especiais a mesma norma permite a consideração de dimensões entre 19 cm e 14 cm, desde que os esforços solicitantes de cálculo sejam multiplicados por um coeficiente adicional e a área da seção transversal não seja inferior a 360 cm². Porém como essa dimensão inferior a 19 cm pode ocorrer apenas em casos especiais, o código irá aceitar apenas dimensões maiores ou iguais a 19 cm.

Esta função tem como objetivo verificar se os valores de base e altura da seção transversal informados pelo usuário respeitam essa imposição de norma, caso contrário, o código informa ao usuário que nenhuma dimensão da seção transversal pode ser inferior a 19 cm.

3.5.2.4 Função verificação de limite de esbeltez

Esta função tem como objetivo calcular o valor do índice de esbeltez do pilar e verificar se este obedece ao limite máximo $(\lambda \leq 200)$ imposto pela norma NBR 6118:2014. Este limite pode ser ultrapassado em casos de elementos pouco comprimidos com força normal inferior à $(0{,}10 * f_{cd} * A_c)$. Devido ao caso da extrapolação deste limite ocorrer apenas para alguns casos, o código foi definido para calcular apenas a condição em que o índice de esbeltez não ultrapasse o limite de $\lambda \leq 200$, caso o índice do pilar supere esse limite, o código gera uma mensagem de erro informando ao usuário essa exigência.

3.5.2.5 Função verificação do limite de bitola

O diâmetro das barras longitudinais não pode ser inferior a 10 mm nem superior a 1/8 da menor dimensão da seção transversal (NBR 6118:2014).

Quanto à bitola mínima usuário não precisa se preocupar, pois o código não permite a seleção de valores menores que o limite de 10 mm, já quanto a bitola máxima, se a função verificar que a bitola escolhida pelo usuário extrapole o limite máximo, o código gera uma mensagem de erro para o usuário, mostrando qual diâmetro máximo permitido por norma.

3.5.2.6 Função de verificação momento mínimo

Conforme já visto a armadura do pilar deve ser dimensionada atendendo a um momento mínimo. Caso o momento de 1ª ordem seja menor que o momento mínimo, deve-se adotar o valor do momento mínimo para o dimensionamento do pilar.

Esta função verifica se o valor do momento de 1ª ordem fornecido pelo usuário é maior do que o momento mínimo admissível. Se essa condição não for satisfeita o código retorna para o usuário o valor do momento mínimo, o qual o usuário deverá adotar para o dimensionamento do pilar.

3.5.2.7 Função de verificação da dimensão máxima

Como o código está limitado apenas à verificação da capacidade resistente para pilares que não se enquadram na classe de pilar parede, essa função tem como objetivo verificar se as dimensões fornecidas pelo usuário não fazem com que o pilar se classifique como pilar- parede.

Se o pilar se enquadrar no grupo de pilar parede, o código gera para o usuário uma mensagem informando a limitação do código.

3.5.2.8 Função verificação do limite de f_{ck}

A NBR 6118:2014 permite a utilização de concreto com classe inferior a classe C20 em caso de construções temporárias, já para concretos de classe superior a C50, a norma prevê diferentes análises do comportamento do concreto. Com isso o código fica limitado para cálculos utilizando as classes entre a classe C20 até C50, esta função tem como objetivo limitar esse intervalo.

3.5.2.9 Função propriedades geométricas das fibras

Esta função é responsável pela determinação das coordenadas dos centros geométricos das fibras de concreto e suas áreas elementares, como parte integrante na determinação da capacidade resistente da seção transversal do pilar, que está sob a ação do esforço normal de compressão. Um aspecto importante a ser levado em consideração neste método é a quantidade de fibras a serem adotadas no processo, pois quanto maior a sua quantidade mais preciso é o resultado. A quantidade de fibras adotada no programa ficou a critério do usuário conforme a sua necessidade de precisão.

A figura 25 apresenta o fluxograma que descreve a sequência lógica da função propriedades geométricas das fibras conforme os itens enumerados abaixo.

1. A função irá receber os dados necessários para a determinação das propriedades geométricas (coordenadas dos centros geométricos e áreas) das fibras.
2. Determina-se uma relação entre a base e a altura da seção transversal

3. Através desta relação e a quantidade de fibras informada pelo usuário, a função determina a quantidade de fibras dispostas ao longo da base e também da altura da seção transversal.

4. A função calcula quais são as dimensões (base e altura) de cada fibra.

5. Dentro do processo, a função irá executar algumas determinações capazes de encontrar os valores das coordenadas dos centros geométricos das fibras.

6. A função calcula qual o valor da área das fibras

7. Retorna para o código principal os valores das propriedades geométricas (coordenadas e áreas) das fibras.

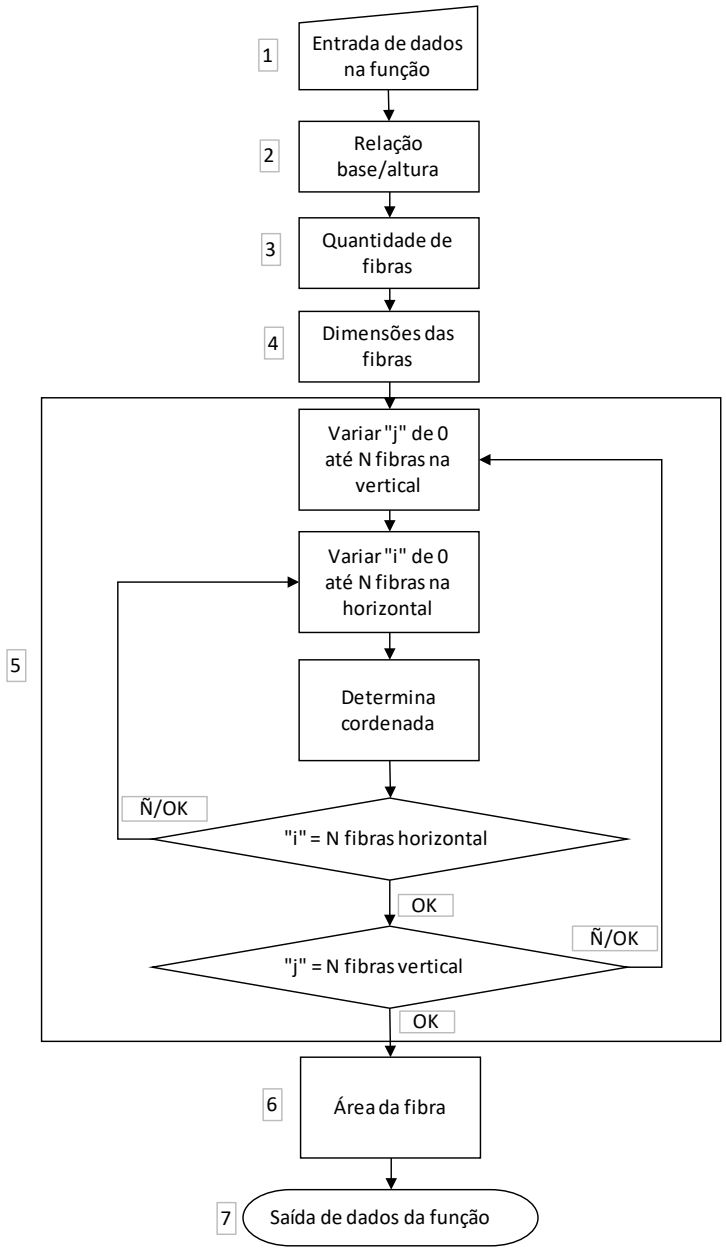

Figura 25 - Fluxograma função propriedades geométricas das fibras

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

3.5.2.10 Função propriedades geométricas das barras

Assim como na função anterior, esta função é responsável pela determinação dos centros geométricos e das áreas elementares, agora relacionadas as barras da armadura e não das fibras de concreto, para a determinação do cálculo da capacidade resistente da armadura (tanto a tração quanto a compressão).

A figura 26 descreve a sequência lógica da função propriedades geométricas das barras através de um fluxograma:

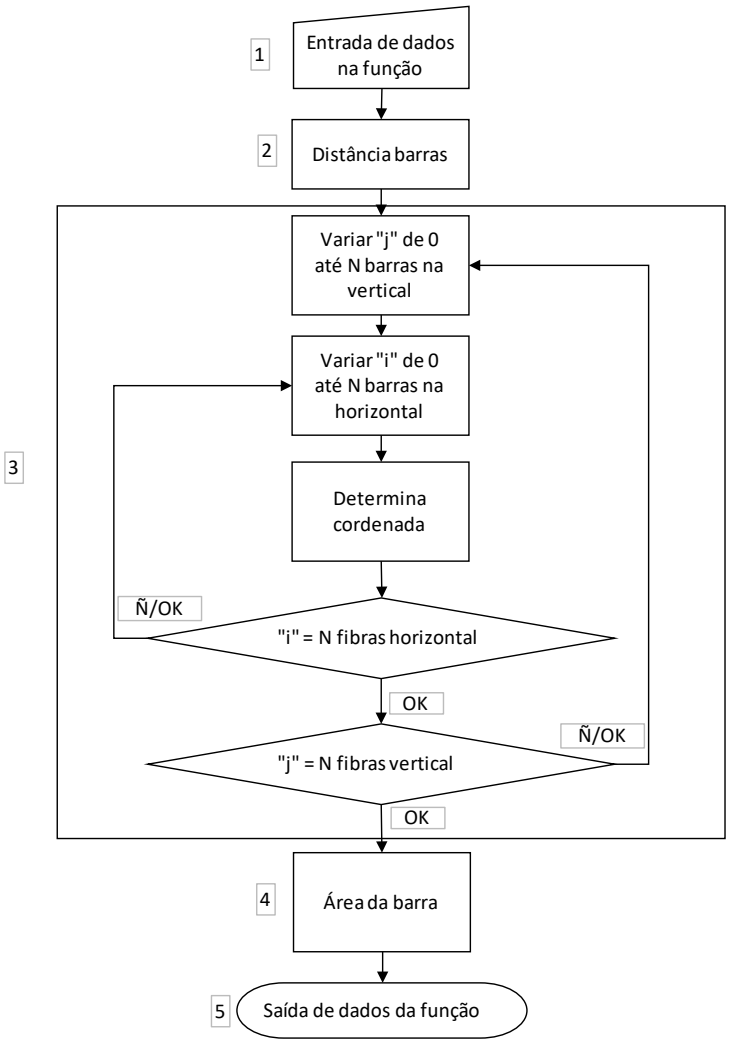

Figura 26 - Fluxograma função propriedades geométricas das barras

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

1. A função irá receber os dados necessários para a determinação das propriedades geométricas (coordenadas dos centros geométricos e áreas) das barras.
2. Determina qual a distância entre os centros geométricos das barras.

3. Com isso a função determina as coordenadas dos centros geométricos e as áreas de cada barra.

3.5.2.11 Função verificação da taxa de armadura

Esta função tem como objetivo verificar se a taxa da armadura informada está dentro do limite máximo e mínimo de taxa de armadura permitido por norma. Esse limite está disposto na relação abaixo:

$$\begin{cases} \rho_{min} = 0{,}15 * \dfrac{f_{cd}}{f_{yd}} * \dfrac{N_{sd}}{b * h * f_{cd}} \\ \rho_{max} = 4\,\% \end{cases} \quad (38)$$

3.5.2.12 Função verificação compressão máxima

Esta função verifica se o esforço de compressão atuante no pilar não supera a resistência máxima a compressão ao qual a seção transversal é capaz de suportar.

3.5.2.13 Função máximos esforços resistentes

Esta função tem como objetivo definir os valores dos esforços resistentes e qual será a máxima curvatura que poderá ocorrer com a seção transversal.

Para determinar os valores acima, a função irá procurar uma profundidade relativa da linha neutra (βx) que fará com que a seção transversal esteja em equilíbrio ($N_{rd} = N_{sd}$), respeitando uma tolerância de $1x10^{-9}$. A profundidade da linha neutra será determinada por um processo iterativo de tentativa e erro, o qual calculará a capacidade resistente da seção transversal para cada valor de βx dentro do limite [0;1,1] até que a seção esteja em equilíbrio.

A seguir a Figura 27 descreve a sequência lógica da função máximos esforços resistentes:

1. A função irá receber os dados necessários para a determinação dos esforços resistentes e a curvatura máxima associada a estes;
2. Determina os esforços resistentes da seção transversal do pilar através do processo iterativo supracitado, acionando uma nova função denominada esforços resistentes.

3. Retorna para o código principal os valores de momento máximo resistente e curvatura máxima em função do esforço axial solicitante informado pelo usuário

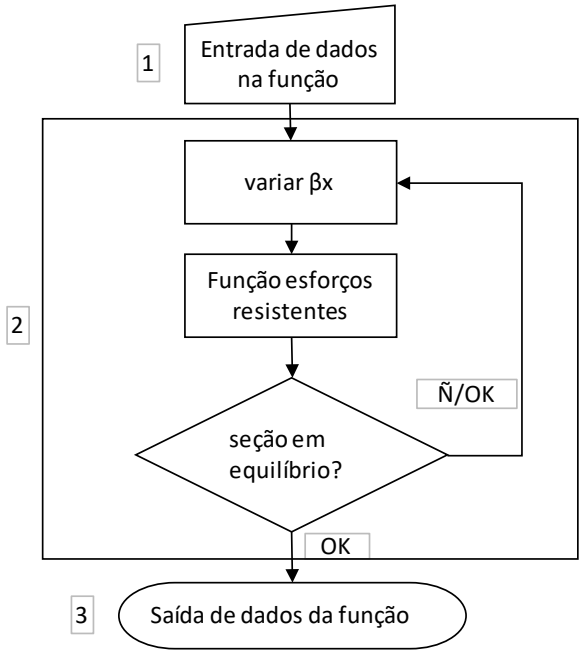

Figura 27 - Fluxograma função máximos resistentes

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

3.5.2.14 Função esforços resistentes

Ela é executada dentro da função máximos resistentes e serve para determinar o valor dos esforços normais resistentes do pilar, levando em consideração o método das fibras.

Com o valor de βx o código determina qual é a área da seção transversal que está sendo tracionada e qual está sendo comprimida, também é possível determinar qual o valor da curvatura que a seção está sofrendo. A partir daí o código é capaz de calcular o valor da resistência da seção comprimida de concreto armado (levando em consideração a distribuição de tensões parábola-retângulo) e a resistência tanto a tração quanto a compressão da armadura.

A Figura 28 apresenta um fluxograma que descreve a sequência lógica da função esforços resistentes.

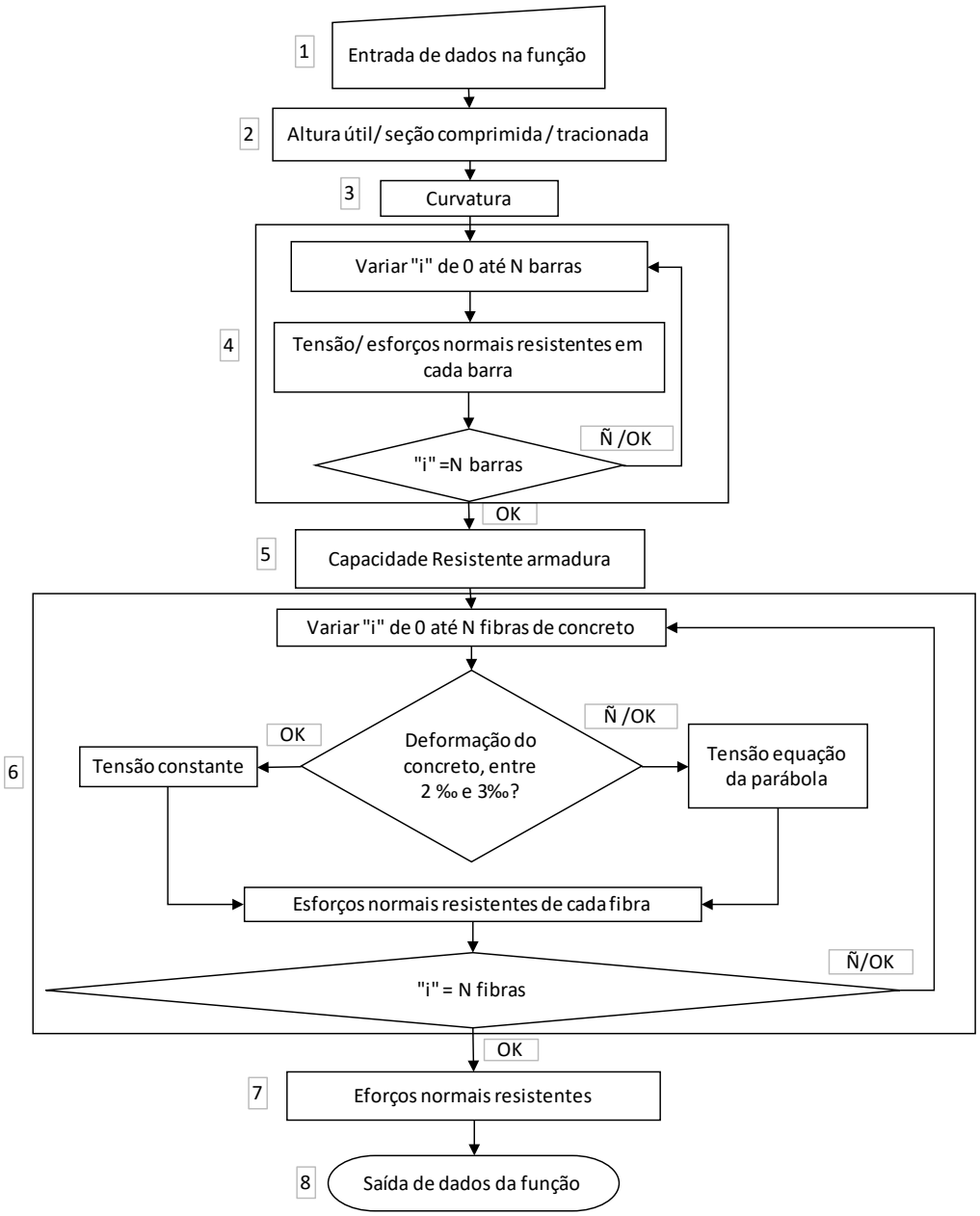

Figura 28 - Função esforços resistentes

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

1. Função recebe os dados necessários para a determinação dos esforços resistentes da seção transversal do pilar;
2. Determina qual a altura útil do pilar, com o valor de βx definido pela função anterior (máximos esforços resistentes), determina qual área da seção transversal está sendo solicitada a compressão e qual está sendo solicitada a tração.
3. Define o valor da curvatura à qual a seção transversal está sendo submetida;
4. Através das distâncias entre a linha neutra e cada centro geométrico das barras e a curvatura que a seção transversal é submetida, o código encontra o valor

da deformação que cada barra da armadura sofre, através desta deformação é possível determinar o valor da tensão atuante nas barras. O código determina a força normal e o momento fletor atuante em cada barra.

5. Com a somatória de todas essas forças normais atuantes em cada barra é possível determinar a capacidade resistente da armadura do pilar. Também, através de uma somatória dos momentos fletores atuantes nas barras, é possível determinar o momento resiste da armadura em face da deformação sofrida.

6. Para a seção comprimida de concreto o código utiliza a distribuição de tensões conforme o diagrama parábola retângulo. A capacidade resistente à compressão do concreto e o momento máximo resistente são determinados pelo mesmo processo utilizado para a armadura.

7. Somando os valores resistentes da seção de concreto e da armadura do pilar, o código determina qual é o momento máximo resistente e o esforço normal máximo resistente que o pilar é capaz de suportar.

8. Retorna para a função os esforços normais resistentes da seção.

3.5.2.15 Função determinação da tabela relação momento x curvatura

Esta função gera uma tabela com alguns valores possíveis de curvaturas referentes a momentos atuantes no pilar respeitando os limites de máximo momento e máxima curvatura ao qual a seção transversal resiste. Essa quantidade de valores da tabela pode ser definida pelo usuário dependendo da precisão que o mesmo deseja obter.

O diagrama momento X curvatura tem um comportamento parabólico, portanto quanto maior o número de pontos definido pelo usuário, mais próximo da realidade do comportamento do diagrama estarão os resultados.

3.5.2.16 Função determinação da excentricidade de fluência

O código determina o valor da carga crítica de flambagem, onde juntamente com os valores dos esforços normais devido à combinação quase permanente (ELS), o mesmo define a excentricidade adicional devido ao efeito de fluência do concreto.

Essa excentricidade adicional é incluída na determinação dos momentos devido aos efeitos de segunda ordem apenas em pilares que a norma impõe a consideração dos efeitos de fluência (λ > 90).

3.5.2.17 Função determinação efeitos de 2ª ordem

Esta função determina os momentos atuantes ao longo do pilar levando em consideração os efeitos de segunda ordem, para a determinação destes efeitos o método utilizado foi o método das diferenças finitas.

Na figura 29 é exibido um fluxograma detalhado da função com explicações textuais nos item numerados a seguir.

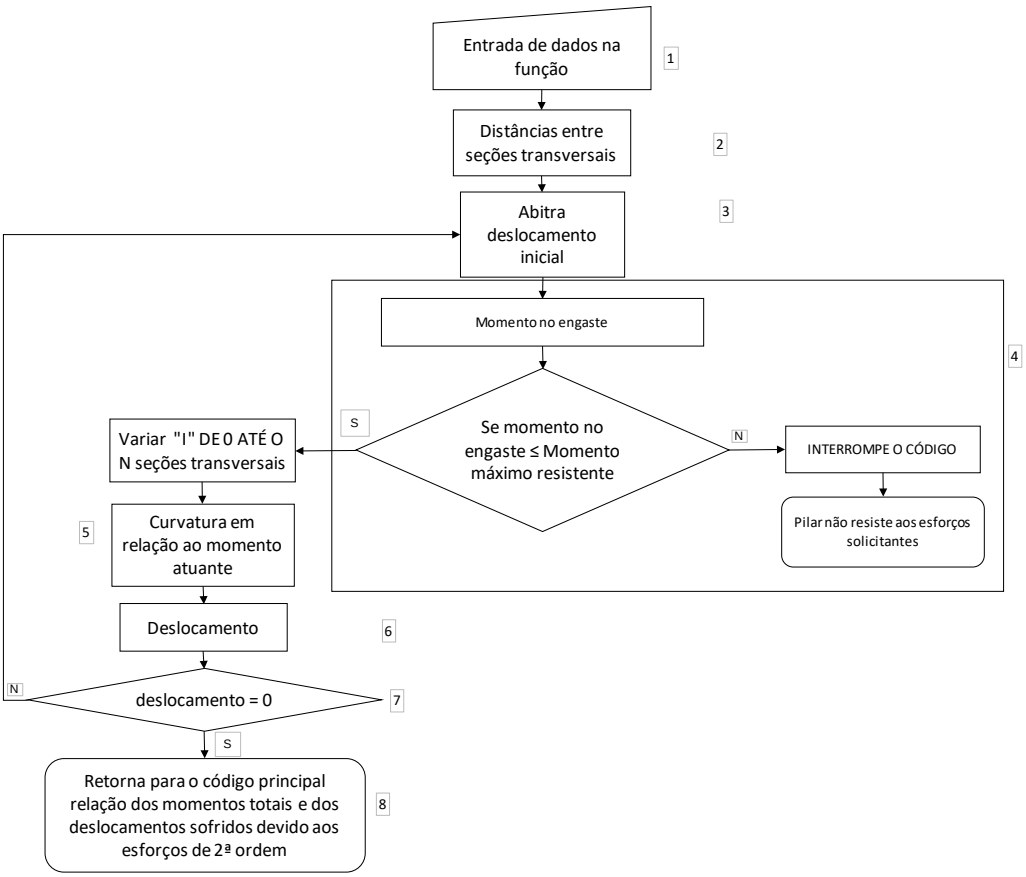

Figura 29 - Fluxograma função

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

1. Recebe os dados necessários para a determinação dos efeitos de 2ª ordem.
2. Adota-se o modelo engaste ponta livre. Divide-se o comprimento longitudinal em “N” seções (conforme valor estipulado pelo usuário), e calcula-se a distância entre cada seção transversal (Δx).

3. Arbitra-se um valor inicial de deslocamento (a).

4. Verificação se o valor do momento solicitante $\left(M_{1ordem} + M_{2ordem} + M_{fluência}\right)$ no apoio é menor que o momento máximo resistente do pilar, o momento devido a fluência é considerado apenas nos casos em que o índice de esbeltez é $\lambda > 90$.

5. O código executa a função “determinação da curvatura em relação aos esforços solicitantes”, para encontrar a curvatura devido ao momento atuante em cada seção em análise, esta mesma operação é efetuada para cada seção transversal em análise.

6. Partindo do apoio e rumando para a primeira seção em análise, o código determina qual é o deslocamento da seção devido aos efeitos de segunda ordem através da Equação 36. Esta mesma operação é efetuada para as seções seguintes porém através da Equação 35, até a seção transversal do topo do pilar.

7. No topo a convergência deve ser atendida se o momento de segunda ordem for zerado conforme uma tolerância de 1e-5. Caso contrário o código arbitra um novo valor para o deslocamento inicial, reproduzindo novamente as iterações, até encontrar o equilíbrio do pilar.

8. Retorna para o código principal os valores dos momentos fletores totais e os deslocamentos levando em consideração os efeitos de segunda ordem.

3.5.2.18 Função determinação da curvatura em relação aos esforços solicitantes

Esta função determina o valor da curvatura relacionada a um determinado momento solicitante, respeitando o momento máximo resistente do pilar.

Para isso a função busca na tabela de relação momento X curvatura gerada pelo código, um valor de curvatura referente ao momento atuante na seção em análise, caso não contenha o valor procurado na tabela, o código interpola linearmente os valores mais próximos afim de encontrar o valor procurado.

4. VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DESENVOLVIDO

Neste capítulo serão apresentados alguns exemplos numéricos com o intuito de validar o código computacional FCR-BJ, para isso os resultados aqui obtidos serão comparados com o com resultados obtidos pelo software PCalc, onde serão utilizados além da análise dos efeitos de 2ª ordem via método geral (o mesmo utilizado no FCR-BJ), outros dois métodos aproximados, são eles o do pilar padrão com curvatura aproximada e do pilar padrão com rigidez k aproximada.

4.1 PCalc 1.4

O programa PCalc foi desenvolvido por JUNIOR (2014), sendo este programa foi escolhido pelos autores para a comparação com os resultados obtidos ao longo do trabalho, já que o mesmo possui uma interface simplificada de fácil utilização, além de seguir uma linha de análise parecida com a utilizada para a implementação do código computacional aqui proposto.

No programa PCalc a determinação dos efeitos de segunda ordem favorece a comparação com o FCR-BJ, pois apresenta como uma das formas de cálculo o Método Geral (o mesmo utilizado para a implementação do código FCR-BJ), além de possibilitar a escolha de outros métodos (conforme Figura 30) os quais serão comparados ao FCR-BJ, para comprovar que os resultados do método geral são mais refinados do que os métodos propostos para comparação

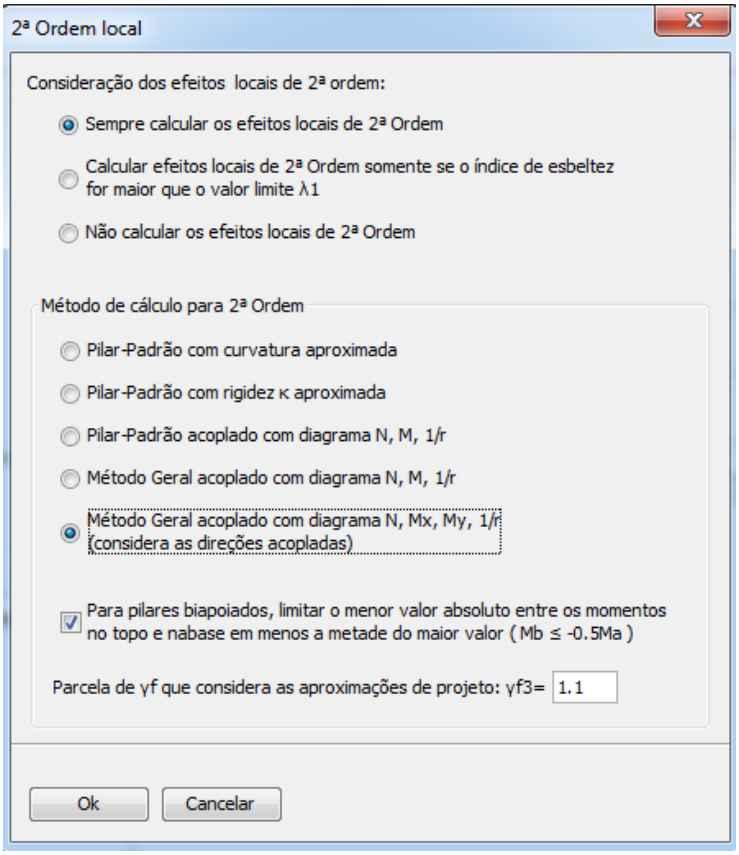

Figura 30 - Opção da escolha do método de análise do efeito de segunda ordem PCalc

Fonte: Elaborado pelos autores,2017

O PCalc também tem como opção a escolha da consideração da fluência, conforme Figura 31, para comparação com o FCR-BJ foi determinada que os efeitos da fluência serão considerados apenas para pilares com índice de esbeltez > 90.

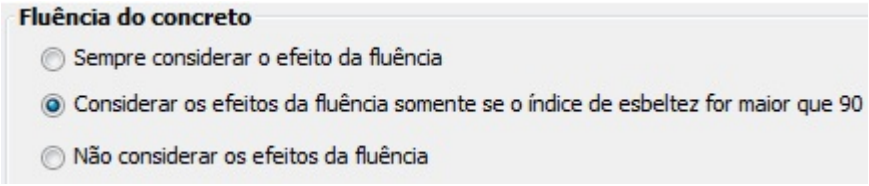

Figura 31- Critérios consideração fluência

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

4.2 Exemplos para validação

A seguir serão apresentadas 3 configurações distintas de pilares, os quais serão comparados aos resultados obtidos entre o código computacional FCR-BJ e o software PCalc, conforme já mencionado.

4.2.1 Pilar P1

A Figura 32 representa a configuração do pilar criado para a este exemplo, seguida da tabela 3, contendo os valores da geometria, configuração da armadura, dados dos materiais envolvidos e esforços atuantes:

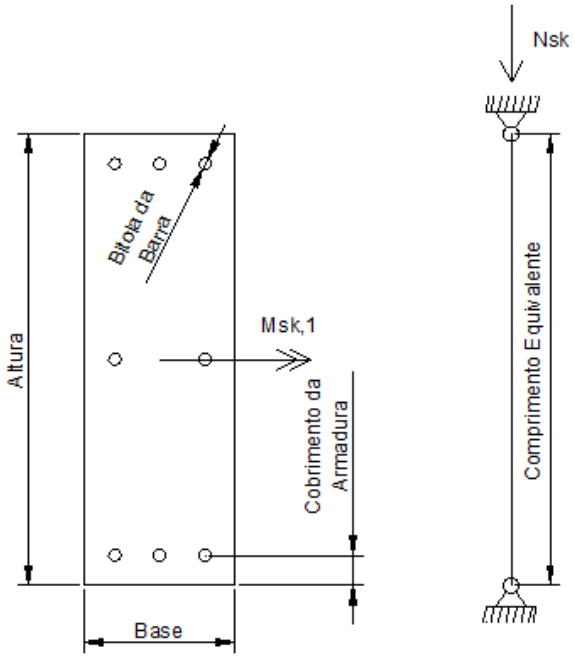

Figura 32 - Representação pilar P1

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Tabela 3- Dados P1

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Dados Exemplo Pilar P1											
Base (cm)	Altura (cm)	Comprimento equivalente (cm)	Tipo de apoio	Bitola da armadura (mm)	Nº de barras na horizontal	Nº de barras na vertical	Cobrimento da armadura (cm)	fck (MPa)	fyk (MPa)	Nsk (KN)	Msk,1 (KN.m)
20	60	500	biapoiado	16	3	3	4	25	500	800	50

Com os dados da tabela 3 inseridos no código computacional FCR-BJ, os resultados obtidos são os expostos na Figura 33:

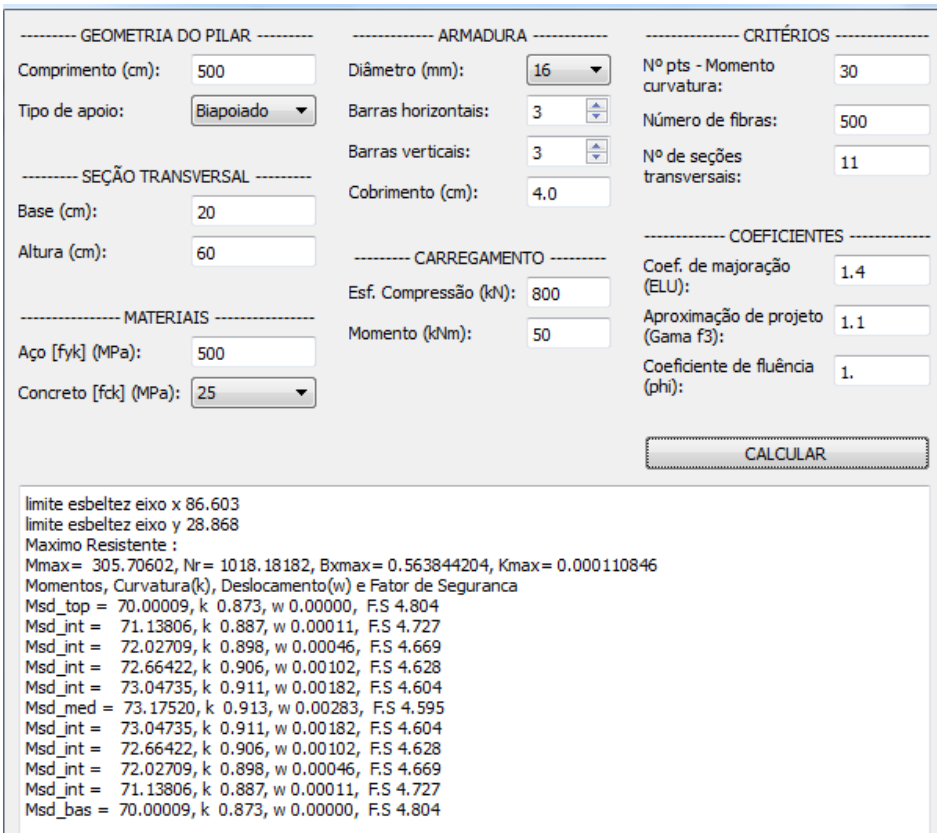

Figura 33 - Interface FCR-BJ exemplo P1

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

A figura 34 mostra os resultados obtidos pelo programa PCalc escolhendo o método geral.

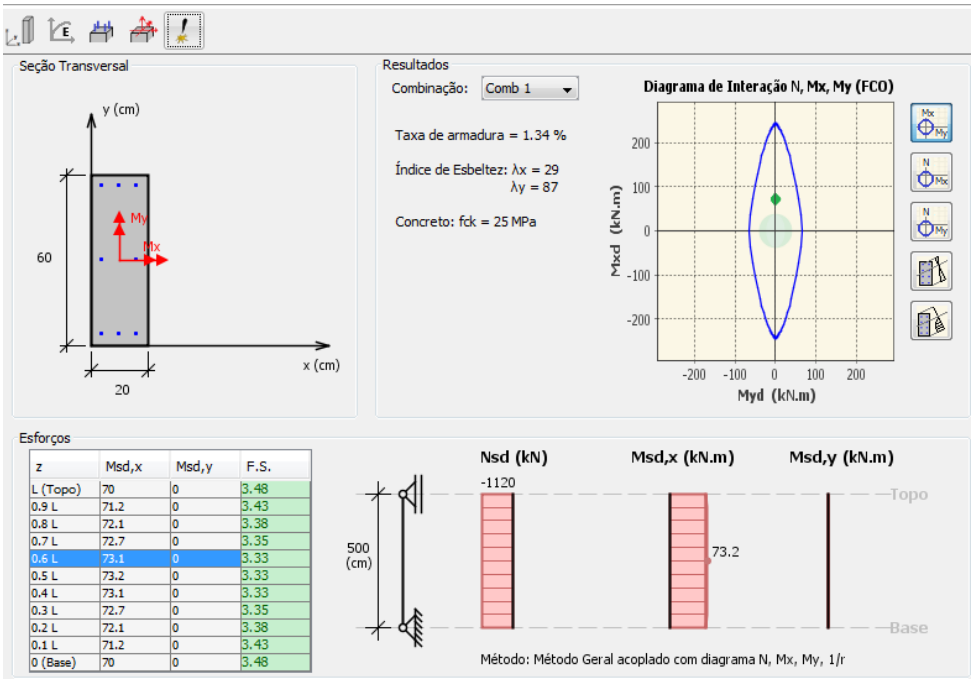

Figura 34 - Interface PCalc exemplo 1 Método Geral

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Já a Figura 35 e a Figura 36 correspondem aos resultados obtidos pelo programa PCalc levando em consideração as análises de segunda ordem via método do pilar padrão com curvatura aproximada (Figura 35) e método do pilar padrão com rigidez aproximada (Figura 36).

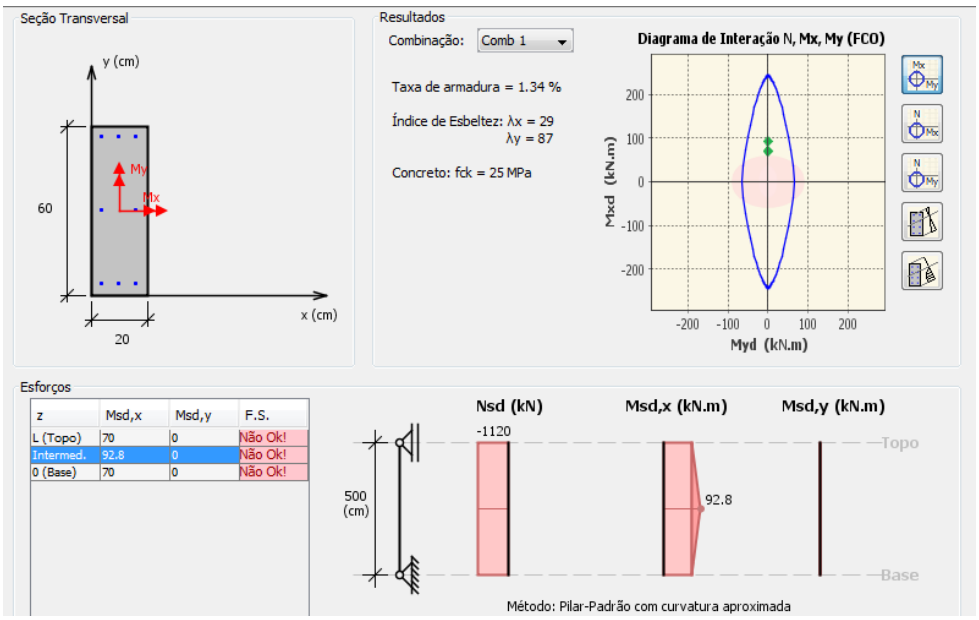

Figura 35 - Interface PCalc exemplo 1 Curvatura aproximada

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

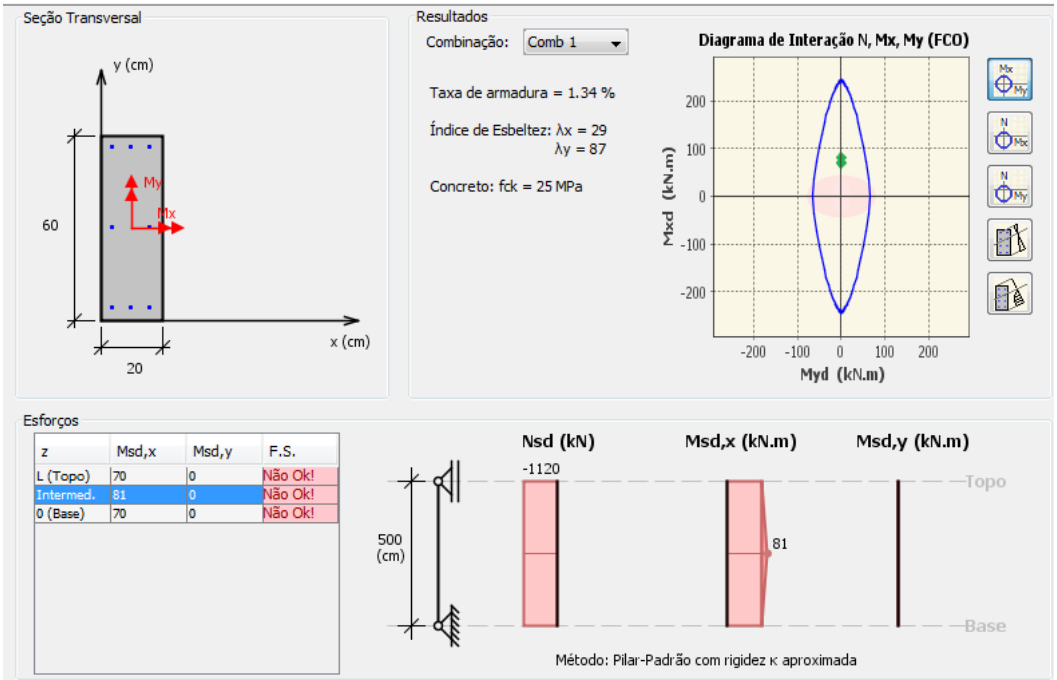

Figura 36 - Interface PCalc exemplo 1 Rigidez aproximada

Fonte: elaborado pelos autores, 2017

4.2.2 Pilar P2

A Figura 37 representa a configuração do pilar criado para a este exemplo, seguida da tabela 4, contendo os valores da geometria, configuração da armadura, dados dos materiais envolvidos e esforços atuantes:

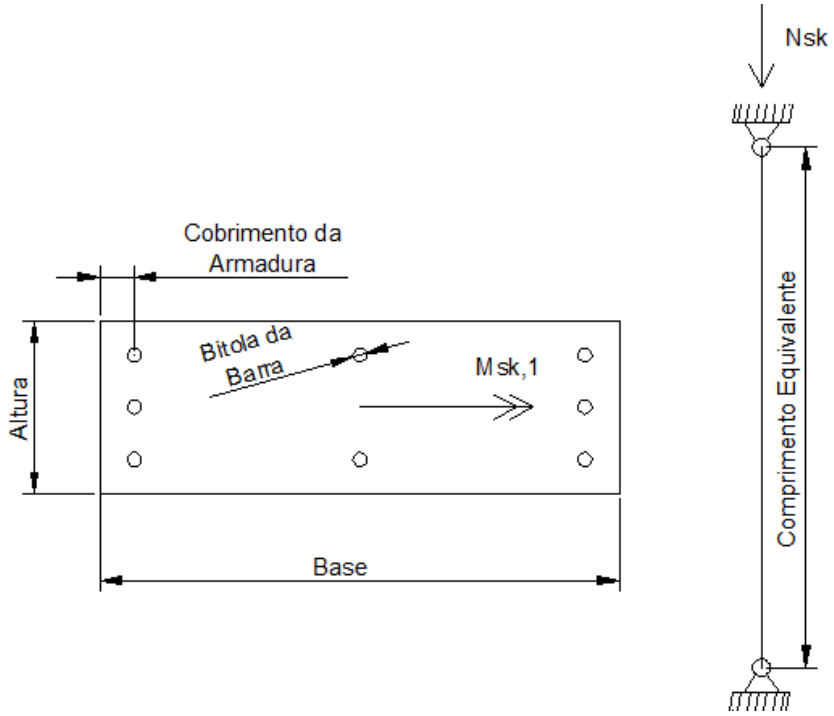

Figura 37 - Representação pilar P2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Tabela 4 - Dados P2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Dados Exemplo Pilar P2											
Base (cm)	Altura (cm)	Comprimento equivalente (cm)	Tipo de apoio	Bitola da armadura (mm)	Nº de barras na horizontal	Nº de barras na vertical	Cobrimento da armadura (cm)	fck (MPa)	fyk (MPa)	Nsk (KN)	Msk,1 (KN.m)
70	25	250	biapoiado	12,5	4	3	4	25	500	1000	50

Com os dados da tabela 4 inseridos no código computacional FCR-BJ, os resultados obtidos são os expostos na Figura 38:

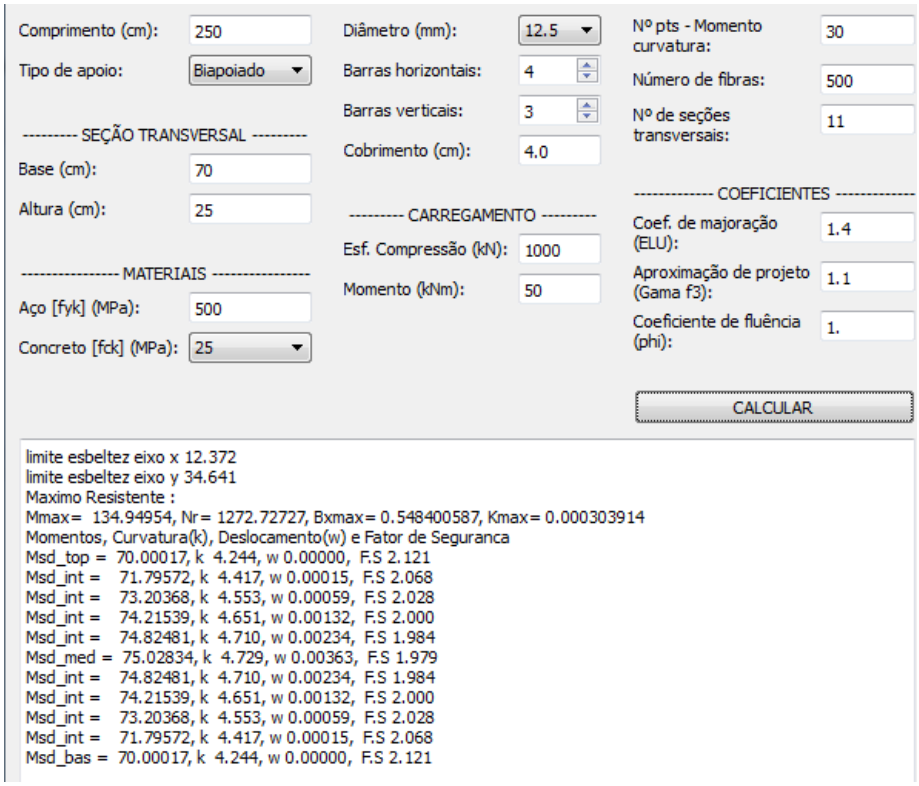

Figura 38 - Interface FCR-BJ exemplo P2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

A figura 39 mostra os resultados obtidos pelo programa PCalc escolhendo o método geral.

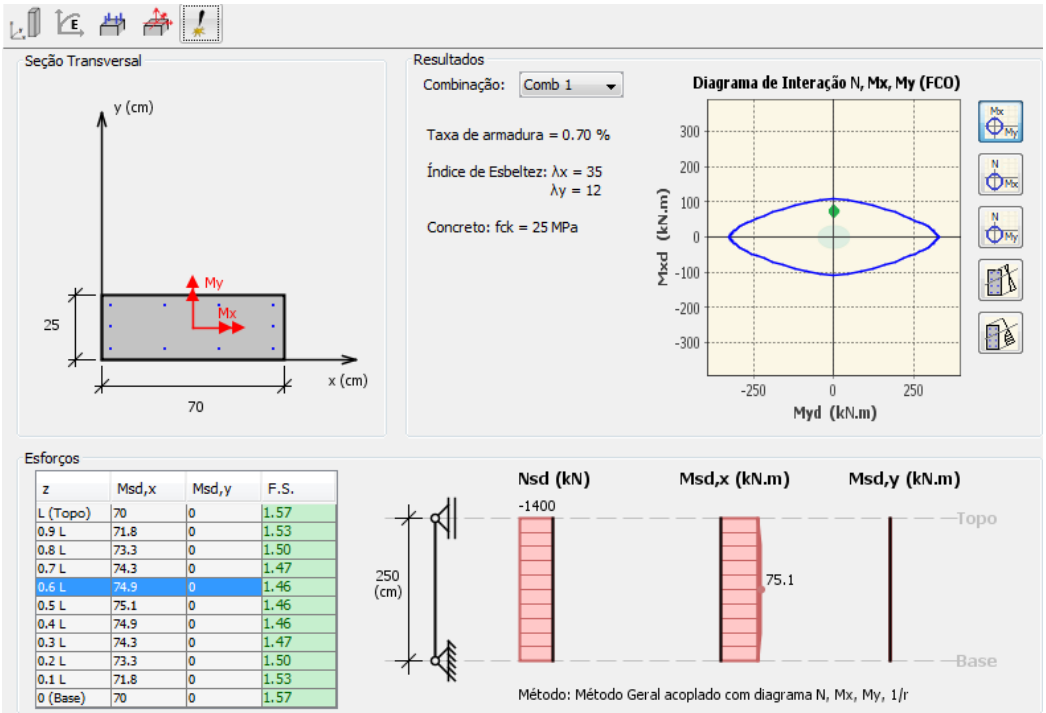

Figura 39 - Interface PCalc exemplo 2 Método Geral

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Já a Figura 40 e a Figura 41 corresponde aos resultados obtidos pelo programa PCalc levando em consideração as análises de segunda ordem via método do pilar padrão com curvatura aproximada (Figura 40) e método do pilar padrão com rigidez aproximada (Figura 41).

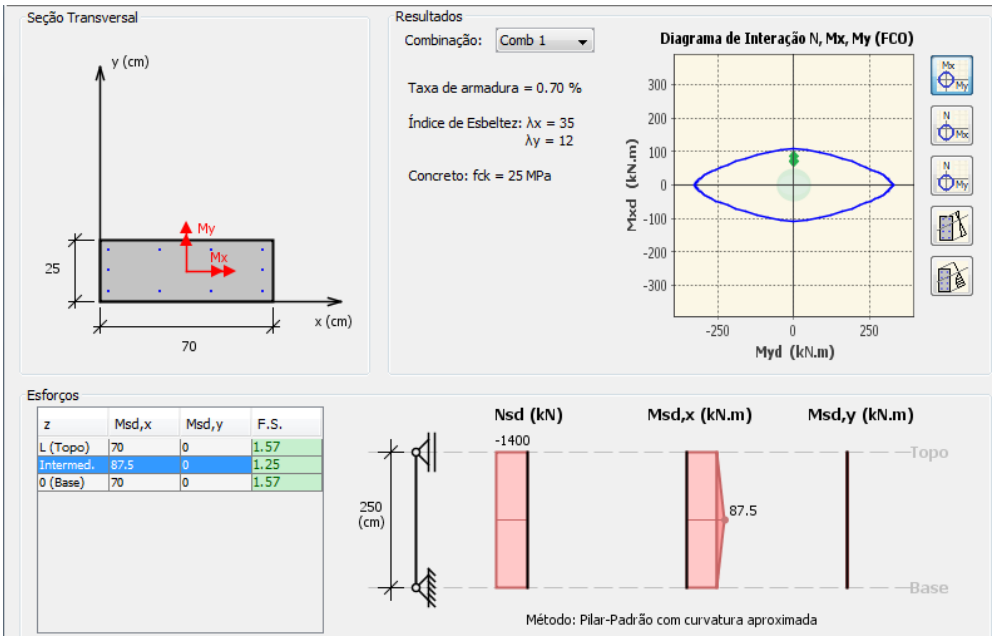

Figura 40 - Interface PCalc exemplo 2 Curvatura aproximada

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

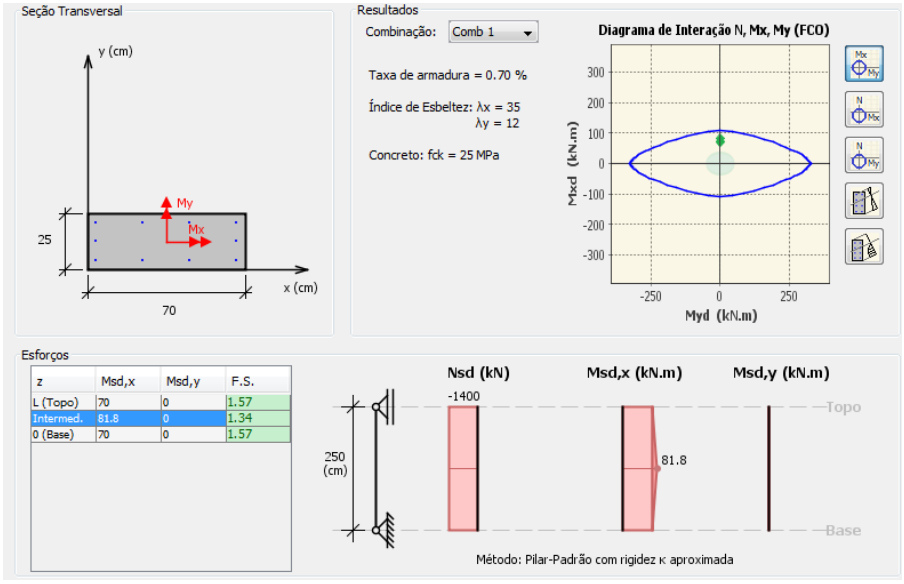

Figura 41 - Interface PCalc exemplo 2 Curvatura aproximada

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

4.2.3 Pilar P3

Como o objetivo do trabalho é a implementação de um código computacional capaz de verificar a capacidade resistente e estabilidade de pilares com índices de esbeltez menores ou iguais a 200 (λ ≤ 200), para este exemplo foi utilizado um comprimento equivalente bem alto, com a finalidade de obter um índice de esbeltez próximo do limite imposto por norma. A Figura 42 representa a configuração do pilar criado para a este exemplo, seguida da tabela 5, contendo os valores da geometria, configuração da armadura, dados dos materiais envolvidos e esforços atuantes:

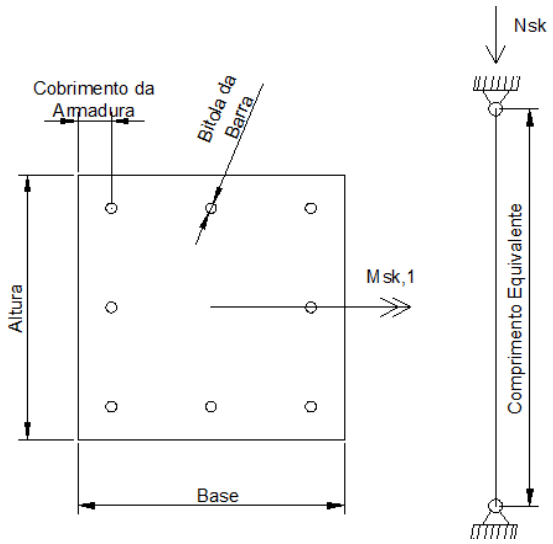

Figura 42 - Representação pilar P3

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Tabela 5 - Dados P3

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Dados Exemplo Pilar P3											
Base (cm)	Altura (cm)	Comprimento equivalente (cm)	Tipo de apoio	Bitola da armadura (mm)	Nº de barras na horizontal	Nº de barras na vertical	Cobrimento da armadura (cm)	fck (MPa)	fyk (MPa)	Nsk (KN)	Msk,1 (KN.m)
40	40	2100	biapoiado	20	3	3	5	35	500	100	70

Com os dados da tabela 4 inseridos no código computacional FCR-BJ, os resultados obtidos são os expostos na Figura 43:

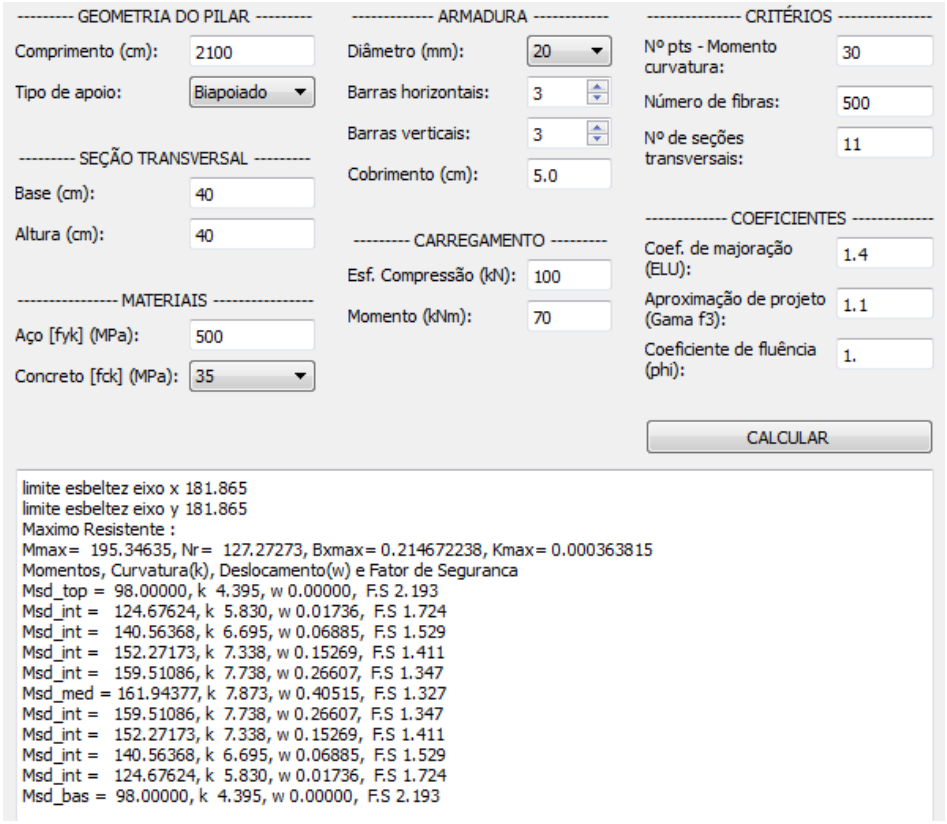

Figura 43- Interface FCR-BJ exemplo P3

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

A figura 44 mostra os resultados obtidos pelo programa PCalc escolhendo o método geral.

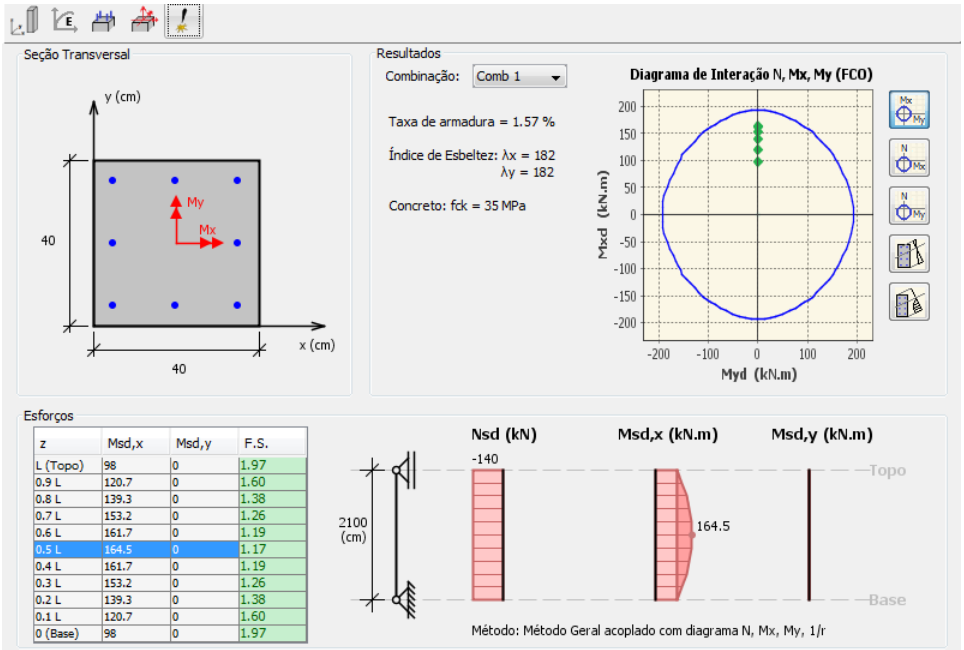

Figura 44- Interface PCalc exemplo 3 Método Geral

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

Devido ao fato dos métodos do pilar padrão com curvatura aproximada e método do pilar padrão com rigidez aproximada, serem métodos limitados à utilização apenas em casos onde o índices de esbeltez $\lambda \leq 90$, para este exemplo cujo índice de esbeltez $\lambda = 182$, não são apresentados dados de análise referentes a estes métodos.

4.3 Validação dos Resultados

A seguir são apresentas tabelas, onde são mostrados os resultados para validação do código. A saber os resultados utilizados para comparação são:

1. Deslocamento lateral da seção proveniente dos efeitos de 2ª ordem;
2. Curvatura da seção transversal em análise;
3. Momento fletor de 2ª ordem;
4. Momento fletor total.

Nas Tabelas 6, 7 e 8 são expostos os resultados dos deslocamentos laterais ocorridos nas seções transversais, devido aos efeitos de segunda ordem, para os exemplos criados.

Tabela 6 - Deslocamentos P1

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P1 - 20 cm x 60 cm - L = 500 cm - (3 x 3) ϕ 16 mm - Deslocamento - Wy (m)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	0,00000	0,00000	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%
0,9L	0,00011	0,00104	845,45%				
0,8L	0,00046	0,00184	300,00%				
0,7L	0,00102	0,00242	137,25%				
0,6L	0,00182	0,00277	52,20%				
0,5L	0,00283	0,00289	2,12%	0,02035	619,08%	0,00982	247,00%
0,4L	0,00182	0,00277	52,20%				
0,3L	0,00102	0,00242	137,25%				
0,2L	0,00046	0,00184	300,00%				
0,1L	0,00011	0,00104	845,45%				
0 (Base)	0,00000	0,00000	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%

Tabela 7 - Deslocamentos P2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P2 - 70 cm x 25 cm - L = 250 cm - (4 x 3) ϕ 12,5 mm - Deslocamento - Wy (m)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	0,00000	0,00000	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%
0,9L	0,00015	0,00131	773,33%				
0,8L	0,00059	0,00234	296,61%				
0,7L	0,00132	0,00308	133,33%				
0,6L	0,00234	0,00353	50,85%				
0,5L	0,00363	0,00368	1,38%	0,01562	330,30%	0,01054	190,36%
0,4L	0,00234	0,00353	50,85%				
0,3L	0,00132	0,00308	133,33%				
0,2L	0,00059	0,00234	296,61%				
0,1L	0,00015	0,00131	773,33%				
0 (Base)	0,00000	0,00000	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%

Tabela 8 - Deslocamentos P3

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P3 - 40 cm x 40 cm - L = 2100 cm - (3 x 3) ϕ 20 mm - Deslocamento - Wy (m)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	0,00000	0,00000	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%
0,9L	0,01736	0,16216	834,10%				
0,8L	0,06885	0,29516	328,70%				
0,7L	0,15269	0,39396	158,01%				
0,6L	0,26607	0,45479	70,93%				
0,5L	0,40515	0,47533	17,32%	0,00000	0,00%	0,00000	0,00%
0,4L	0,26607	0,45479	70,93%				
0,3L	0,15269	0,39396	158,01%				
0,2L	0,06885	0,29516	328,70%				
0,1L	0,01736	0,16216	834,10%				
0 (Base)	0,00000	0,00000	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%

Conforme já comentado, os métodos aproximados aqui propostos não podem ser utilizados na análise de segunda ordem, para índices de esbeltez $\lambda \leq 90$, devido a este motivo não existem dados nas tabelas para estes métodos, nos casos envolvendo o pilar P3.

As Tabelas 9, 10 e 11 apresentam todos os resultados das curvaturas ocorridas nas seções transversais, para os exemplos criados.

Tabela 9 - Curvaturas P1

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P1 - 20 cm x 60 cm - L = 500 cm - (3 x 3) ϕ 16 mm - Curvatura - 1/r (10³/m)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	0,873	0,891	2,06%				
0,9L	0,887	0,906	2,14%				
0,8L	0,898	0,916	2,00%				
0,7L	0,906	0,926	2,21%				
0,6L	0,911	0,930	2,09%				
0,5L	0,913	0,933	2,19%	8,330	812,38%	0,000	0,00%
0,4L	0,911	0,930	2,09%				
0,3L	0,906	0,926	2,21%				
0,2L	0,898	0,916	2,00%				
0,1L	0,887	0,906	2,14%				
0 (Base)	0,873	0,891	2,06%				

Tabela 10 - Curvaturas P2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P2 - 70 cm x 25 cm - L = 250 cm - (4 x 3) ϕ 12,5 mm - Curvatura - 1/r (10³/m)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	4,244	4,278	0,80%				
0,9L	4,417	4,466	1,11%				
0,8L	4,553	4,618	1,43%				
0,7L	4,651	4,718	1,44%				
0,6L	4,710	4,782	1,53%				
0,5L	4,729	4,809	1,69%	21,100	346,18%	0,000	0,00%
0,4L	4,710	4,782	1,53%				
0,3L	4,651	4,718	1,44%				
0,2L	4,553	4,618	1,43%				
0,1L	4,417	4,466	1,11%				
0 (Base)	4,244	4,278	0,80%				

Tabela 11 - Curvaturas P3

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P3 - 40 cm x 40 cm - L = 2100 cm - (3 x 3) ϕ 20 mm - Curvatura - 1/r (10³/m)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	4,395	5,280	20,14%				
0,9L	5,830	6,671	14,43%				
0,8L	6,695	7,832	16,98%				
0,7L	7,338	8,700	18,56%				
0,6L	7,738	9,224	19,20%				
0,5L	7,873	9,412	19,55%	0,000	0,00%	0,000	0,00%
0,4L	7,738	9,224	19,20%				
0,3L	7,338	8,700	18,56%				
0,2L	6,695	7,832	16,98%				
0,1L	5,830	6,671	14,43%				
0 (Base)	4,395	5,280	20,14%				

Não existem valores para curvaturas no método do pilar padrão com rigidez aproximada, devido ao fato do método não utilizar a curvatura para a determinação dos efeitos de segunda ordem, e sim um valor de rigidez.

As Tabelas 12, 13 e 14 apresentam todos os resultados dos momentos de segunda ordem que ocorrem nas seções em análise, para os exemplos criados.

Tabela 12 – Momentos de segunda ordem P1

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P1 - 20 cm x 60 cm - L = 500 cm - (3 x 3) ϕ 16 mm - Momentos de segunda ordem - Msd,2 (kNm)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	0,00	0,00	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%
0,9L	1,14	1,20	5,26%				
0,8L	2,03	2,10	3,45%				
0,7L	2,66	2,70	1,50%				
0,6L	3,05	3,10	1,64%				
0,5L	3,18	3,20	0,63%	22,80	616,98%	11,00	245,91%
0,4L	3,05	3,10	1,64%				
0,3L	2,66	2,70	1,50%				
0,2L	2,03	2,10	3,45%				
0,1L	1,14	1,20	5,26%				
0 (Base)	0,00	0,00	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%

Tabela 13 – Momentos de segunda ordem P2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P2 - 70 cm x 25 cm - L = 250 cm - (4 x 3) ϕ 12,5 mm - Momentos de segunda ordem - Msd,2 (kNm)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	0,00	0,00	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%
0,9L	1,80	1,80	0,00%				
0,8L	3,20	3,30	3,12%				
0,7L	4,22	4,30	1,90%				
0,6L	4,82	4,90	1,66%				
0,5L	5,03	5,10	1,39%	17,50	247,91%	11,18	122,27%
0,4L	4,82	4,90	1,66%				
0,3L	4,22	4,30	1,90%				
0,2L	3,20	3,30	3,12%				
0,1L	1,80	1,80	0,00%				
0 (Base)	0,00	0,00	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%

Tabela 14 – Momentos de segunda ordem P3

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P2 - 70 cm x 25 cm - L = 250 cm - (4 x 3) ϕ 12,5 mm - Momentos de segunda ordem - Msd,2 (kNm)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	0,00	0,00	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%
0,9L	1,80	1,80	0,00%				
0,8L	3,20	3,30	3,12%				
0,7L	4,22	4,22	0,00%				
0,6L	4,82	4,90	1,66%				
0,5L	5,03	5,10	1,39%	17,50	247,91%	11,18	122,27%
0,4L	4,82	4,90	1,66%				
0,3L	4,22	4,22	0,00%				
0,2L	3,20	3,30	3,12%				
0,1L	1,80	1,80	0,00%				
0 (Base)	0,00	0,00	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%

As Tabelas 15, 16 e 17 apresentam todos os resultados dos momentos totais (1ª e 2ª ordem) que ocorrem nas seções em análise, para os exemplos criados.

Tabela 15 – Momentos totais P1

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P1 - 20 cm x 60 cm - L = 500 cm - (3 x 3) ϕ 16 mm - Momentos Soliticantes Totais - Msd (kNm)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	70,00	70,00	0,00%	70,00	0,00%	70,00	0,00%
0,9L	71,14	71,20	0,08%				
0,8L	72,03	72,10	0,10%				
0,7L	72,66	72,70	0,06%				
0,6L	73,05	73,10	0,07%				
0,5L	73,18	73,20	0,03%	92,80	26,81%	81,00	10,69%
0,4L	73,05	73,10	0,07%				
0,3L	72,66	72,70	0,06%				
0,2L	72,03	72,10	0,10%				
0,1L	71,14	71,20	0,08%				
0 (Base)	70,00	70,00	0,00%	70,00	0,00%	70,00	0,00%

Tabela 16 – Momentos totais P2

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P2 - 70 cm x 25 cm - L = 250 cm - (4 x 3) ϕ 12,5 mm - Momentos Soliticantes Totais - Msd (kNm)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	70,00	70,00	0,00%	70,00	0,00%	70,00	0,00%
0,9L	71,80	71,80	0,00%				
0,8L	73,20	73,30	0,14%				
0,7L	74,22	74,30	0,11%				
0,6L	74,82	74,90	0,11%				
0,5L	75,03	75,10	0,09%	87,50	16,62%	81,80	9,02%
0,4L	74,82	74,90	0,11%				
0,3L	74,22	74,30	0,11%				
0,2L	73,20	73,30	0,14%				
0,1L	71,80	71,80	0,00%				
0 (Base)	70,00	70,00	0,00%	70,00	0,00%	70,00	0,00%

Tabela 17 – Momentos totais P3

Fonte: Elaborado pelos autores, 2017

P3 - 40 cm x 40 cm - L = 2100 cm - (3 x 3) ϕ 20 mm - Momentos Soliticantes Totais - Msd (kNm)							
	A	B	C	D	E	F	G
z	FCR-BJ	Pcalc	(B-A)/A	Curvatura Aprox.	(D-A)/A	Rigidez Aprox.	(F-A)/A
L (Topo)	98,00	98,00	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%
0,9L	124,68	120,70	-3,19%				
0,8L	140,56	139,30	-0,90%				
0,7L	152,27	153,20	0,61%				
0,6L	159,51	161,70	1,37%				
0,5L	161,94	164,50	1,58%	0,00	0,00%	0,00	0,00%
0,4L	159,51	161,70	1,37%				
0,3L	152,27	153,20	0,61%				
0,2L	140,56	139,30	-0,90%				
0,1L	124,68	120,70	-3,19%				
0 (Base)	98,00	98,00	0,00%	0,00	0,00%	0,00	0,00%

Analisando as tabelas 15, 16 e 17 é possível verificar que os resultados obtidos para análise de segunda ordem comparando o código FCR-BJ e o Programa PCalc (através do método geral) chegam a diferenças máximas na casa dos 1,6%, também é possível visualizar que a diferença entre o Método Geral e os Métodos aproximados em análise são grandes, ficando na casa dos 10% para o método da rigidez aproximada, e chegando há uma diferença de 26,81% para o método da curvatura aproximada.

Fazendo uma comparação geral entre todas as tabelas, é visível que mesmo com percentuais altos nas tabelas de curvatura e deslocamentos, os resultados finais para momentos solicitantes totais são muito próximos entre os dois programas. Esta diferença nos cálculos de curvaturas e deslocamentos laterais se dá pelo fato do Pcalc utilizar a rigidez secante (vide Figura 15) uniforme para todas as seções

transversais do pilar e o FCR-BJ calcular para cada seção a curvatura real correlata ao momento solicitante aplicado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresentou o desenvolvimento de um código computacional capaz de verificar a capacidade resistente e a estabilidade de pilares de concreto armado solicitados por flexão composta reta, para utilização do mesmo como uma ferramenta auxiliar para a resolução de problemas acadêmicos e até mesmo profissionais.

Foram comparados os resultados obtidos pelo código FCR–BJ com o *software* PCalc, existem algumas diferenças encontradas entre os programas, devido ao fato do PCalc utilizar uma rigidez constante para toda a seção do pilar, já no FCR-BJ, para cada seção em análise é determinada um novo valor de rigidez, com isso é possível afirmar que o método de análise do FCR-BJ é mais refinado do que o utilizado no PCalc, por isso os valores obtidos através do código FCR-BJ tendem a ser menores.

Apesar das diferenças encontradas, os valores são satisfatórios, comprovando que o objetivo do trabalho foi atingido com sucesso, além de comprovar que a utilização do código é necessária para análises mais minuciosas. Ainda tem o fato de que com o trabalho aqui proposto, fica claro a superioridade do método geral em relação aos métodos aproximados analisados na validação dos resultados.

Também é possível verificar, que se o dimensionamento dos pilares forem feitos através do método geral, os momentos encontrados são menores, possibilitando uma redução na armadura do pilar, com o objetivo de encontrar dimensionamentos mais econômicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT - Associação Barileira de Normas Técnicas. **NBR6118** - Projeto de Estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR8681** - Ações e Segurança nas Estruturas : Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

BARBOSA, M. R. **Concepção e análise de estruturas de edifícios em concreto armado**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2008.

BORGES, A. C. **Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados a flexo-compressão oblíqua**. Dissetação (Dissertação em Engenharia Civil) - Escola de Engenhaira de São Carlos da USP, São Carlos, 1999.

CARVALHO, ROBERTO.C.; PINHEIRO, LIBÂNIO. M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. Volume 2. São Paulo Pini, 2009.

CASAGRANDE, A. F. **Consideração da fluência no cálculo dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado.** Dissertação - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.

CLÍMACO, J. C. **Estruturas de Concreto Armado - Fundamentos de Projetos, Dimensionamento e Verificação**. Brasília: Finatec, 2008.

FONTES, F. F. **Análise estrutural de elementos lineares segundo a nbr 6118:2003**. Dissertação - Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto - Solicitações normais**. Rio de Janeiro, 1981, LTC.

GARCIA, L. F. **Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado**. Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1974.

GRAZIANO, F. P. **Projetos e Execução de Estrturas de Concreto Armado.** Editora o Nome da Rosa São Paulo, 2005.

JÚNIOR, S. D. **Sistema computacional para análise não linear de pilares de concreto armado** . Monografia - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

KIMURA, A. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado**. Pini São Paulo, 2007.

LIMA, J. S. **Verificações da punção e da estabilidade global em edifícios de concreto: desenvolvimento e aplicação de recomendações normativas**. Dissertação - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

MELO, K. M. **Aplicação do Método das Diferenças Finitas Explícito na Solução da Equação do Calor para o Caso Transiente e Unidimensional.** Monografia - Universidade Federal do Semi-Árido, Angicos, 2011.

MENESES, F. M. **Desenvolvimento de programa para o cálculo de pilares de betão armado**. Dissertação - Universidade de Aveiro, Aveiro, 2013.

MONTEIRO, A. O. **Desenvolvimento de uma Programa de Cálculo de Secções de Betão Armado**. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Aveiro, Aveiro, 2011.

RIBEIRO, K. **Diagrama para verificação de pilares retangulares em concreto armado submetidos a flexão composta normal**. Dissertação (Pós-Graduação) - UFSC, Florianópolis, 2011.

SANTOS, E. D.; SOCZEC, M. A. **Desenolvimento de Código Computacional para a Verificação de Seções Retangulares de Concreto Armado, com Armaduras Simétricas em suas Faces, Submetidas a Flexão Composta Oblíqua**. (Graduação) - Universidade Positivo, Curitiba, 2014.

SCANDELAI, M. A. **Dimensionamento de pilares de acordo com a nbr: 6118:2003**. Dissertação - Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

SILVA, A. E. **Contribuições ao estudo da não-linearidade física em vigas de concreto armado**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2012.

SPACONE, E. F. **A Fiber Beam-Column Model for Non-Linear Analysis of reinforced Concrete Structures. University of California**. Volume 25. California, 1991.

UKASINSKI, W. D. **Desenvolvimento de Código Computacional para a Determinação da Relação entre Momento Fletor, Esforço Normal e Curvatura em Pilares com Seções Transversais Retangulares em Concreto Armado Empregando o Método das Fibras**. (Graduação) - Universidade Positivo, Curitiba, 2015.

VALÉRIO, D. N. **Modelo de fibras para análise de peças lineares de betão**. FCTUC - Faculdade de Ciências e Tecnologia Universidade de Coimbra, Coimbra, 2016.

APÊNDICE

A seguir a implementação do código computacional escrito para o presente trabalho:

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sat Aug 12 12:38:42 2017

@author: User
"""
global base, altura, nfib, diametro, cobrim, nbarver, nbarhor, np_curv, tab_flu
global fck, fyk, Mrd, Nrd, comprimento, ndiv_long, num_sec_trans, phi

# ENTRADA DE DADOS ----------------------------------------------------------
'''BASE              (cm)                    :''; base         =
'''ALTURA            (cm)                    :''; altura       =
'''DIÂMETRO          (cm)                    :''; diametro     =
'''NÚM. DE BARRAS HORI.                      :''; nbarhor      =
'''NÚM. DE BARRAS VERT.                      :''; nbarver      =
'''COBRIMENTO        (cm)                    :''; cobrim       =
'''Fck           (kN/cm2)                    :''; fck          =
'''Fyk           (kN/cm2)                    :''; fyk          =
'''N CARACTERÍSTICO(kN)                      :''; Nsk          =
'''M CARACTERÍSTICO(kNm)                     :''; Msk          =
'''NÚM. DE FIBRAS                           :''; nfib         =
''' COMPRIMENTO PILAR (cm)                   :''; comprimento  =
''' NÚM. SEÇÕES                             :''; num_sec_trans =
''' NÚM. PTS. DIAGRAMA                       :''; np_curv      =
```

```
''' COEF. MAJORAÇÃO (ELU)                        :''''; coef_major    =

''' TIPO APOIO:(1)-BI-APOIADO (2)-ENGASTE-PONTA LIVRE:''''; tipo_apoio    =

phi =

gama_f3 =

# ------------------------------------------------------------------------

import numpy as np


# combinações de ações

def Combinacoes():

    global Msd_ELU, Nsd_ELU, Msd_ELS, Nsd_ELS,fcd,fyd

    #Combinação ELU

    Msd_ELU = Msk * coef_major / gama_f3

    Nsd_ELU = Nsk * coef_major / gama_f3

    #Combinação ELS

    Msd_ELS = Msk

    Nsd_ELS = Nsk

    #valores de cálculo

    fcd = fck /1.4

    fyd = fyk /1.15


# verificação dimensão mínima

def Dimens_minima():

    global Area_sec_trans

    Area_sec_trans = base * altura

    if base < 19:

        dimens_minima = 0

        print "desrespeita o item 13.2.3 da norma NBR 6118:2014"

        print "dimensão mínima 19 cm"
```

```
    elif altura < 19:
        dimens_minima = 0
        print "desrespeita o item 13.2.3 da norma NBR 6118:2014"
        print "dimensão mínima 19 cm"
    else:
        dimens_minima = 1
    return dimens_minima


# verificação dimensão máxima
def Dimens_maxima():
    global Area_sec_trans
    Area_sec_trans = base * altura
    if base <= altura:
        if altura <= 5 * base:
            dimens_max = 1
        else:
            dimens_max = 0
            print "maior dimensão excede em 5 vezes o tamanho da menor dimensão da seção transversal"
    else:
        if base <= 5 * altura:
            dimens_max = 1
        else:
            dimens_max = 0
            print "maior dimensão excede em 5 vezes o tamanho da menor dimensão da seção transversal"
    return dimens_max
```

```
# limite bitola
def limite_bitola():
    if base <= altura:
        dim_min = base
    else:
        dim_min = altura
    bit_min = 1.
    bit_max = dim_min / 8.
    if diametro < bit_min:
        lim_bitola = 0
        print "bitola mínima permitida por norma = 10mm"
    else:
        if diametro > bit_max:
            lim_bitola = 0
            print "bitola máxima permitida por norma =", bit_max * 10
        else:
            lim_bitola = 1
    return lim_bitola


# verificação limite de esbeltez
def lim_esbeltez():
    global I_x, I_y,lim_esb_x
    I_x = (base*altura**3.)/12.
    I_y = (altura*base**3.)/12.
    r_x = (I_y/Area_sec_trans)**(1/2.)
    r_y = (I_x/Area_sec_trans)**(1/2.)
    lim_esb_x = tipo_apoio*comprimento/r_x
```

```
    lim_esb_y = tipo_apoio*comprimento/r_y
    print "limite esbeltez eixo x", lim_esb_x
    print "limite esbeltez eixo y", lim_esb_y
    if lim_esb_x <= 200. and lim_esb_y <= 200.:
        lim_esbelt = 1
    else:
        lim_esbelt = 0
        print "desrespeita o item 15.8.1 da norma NBR 6118:2014"
        print "limite de esbeltez não pode superar o valor de 200"
    return lim_esbelt


# verificação dimensão mínima
def momento_minimo():
    M_minimo = Nsd_ELU * (0.015 *0.03 * base)
    if Msd_ELU < M_minimo:
        mom_min = 0
        print "Momento de 1ª ordem mínimo permitido por norma =", M_minimo
    else:
        mom_min = 1
    return mom_min


#verificação fck minim e maximo
def lim_fck():
    if fck < 2 or fck > 5:
        print "entrar com fck entre 20 e 50 MPa"
        limite_fck = 0
    else:
        limite_fck = 1
```

```
    return limite_fck


# propriedades geométricas das fibras
def calc_coord_fibras():
    global cx_fib, cy_fib, A_fibra
    R = altura / base
    ndiv_base = np.round(np.sqrt(nfib/R))
    ndiv_altura = np.round(R * ndiv_base)
    aresta_h = base/ndiv_base
    aresta_v = altura/ndiv_altura
    cx_fib = []
    cy_fib = []
    for j in range(int(ndiv_altura)):
        for i in range(int(ndiv_base)):
            cx_fib.append(i*aresta_h + aresta_h/2)
            cy_fib.append(j*aresta_v + aresta_v/2)
    A_fibra = aresta_h * aresta_v


# propriedades geométricas das barras
def calc_coord_barras():
    global cx_bar, cy_bar, A_bar
    dh = (base - 2*cobrim)/(nbarhor-1)
    dv = (altura - 2*cobrim)/(nbarver-1)
    cx_bar = []
    cy_bar = []
    for j in range(nbarver):
        for i in range(nbarhor):
            if j == 0 or j == nbarver - 1:
```

```
                cx_bar.append(cobrim + i*dh)
                cy_bar.append(cobrim + j*dv)
            else:
                if i == 0 or i == nbarhor - 1:
                    cx_bar.append(cobrim + i*dh)
                    cy_bar.append(cobrim + j*dv)
    A_bar   = 0.25 * np.pi * diametro ** 2


def comp_max():
    N_max_comp = (base * altura * fcd) + (len(cy_bar) * A_bar * fyd)
    if Nsd_ELU > N_max_comp:
        ver_comp = 0
        print "seção não resiste ao esforço de compressão"
    else:
        ver_comp = 1
    return ver_comp


# verificação taxa armadura
def taxa_arm():
    global fyd, tax_arm


    fyd = fyk / 1.15
    ad_norm = Nsd_ELU / (base * altura * fcd)
    tax_min = 0.15 * (fcd / fyd) * ad_norm
    if tax_min < 0.004:
        tax_min = 0.004
    else:
        None
```

```
    tax_max = 0.04
    tax_arm = ((len(cy_bar) * (3.14 * diametro**2) / 4)) / (base * altura)
    if tax_arm < tax_min:
        print "taxa de armadura menor que a mínima permitida por norma"
        print "taxa de aço =", tax_arm * 100
        lim_tax = 0
    else:
        if tax_arm > tax_max:
            print "taxa de armadura maior que a máxima permitida por norma"
            print "taxa de aço =", tax_arm * 100
            lim_tax = 0
        else:
            lim_tax = 1

    return lim_tax
# resultantes esforços resistentes
def EsfResist(Bx,K=None):

    global fcd

    fcd = fck / 1.4
    d = altura - cobrim
    hc = Bx * d
    ht = d - hc
    if K == None:
        if Bx <= 0.259: # dominio 2
            K = 0.010/ht
        else:           # demais domínios
```

```
        K = 0.0035/hc
FRaT = 0.
FRaC = 0.
MRa = 0.
for i in range(len(cy_bar)):
    dista = altura - hc - cy_bar[i]
    dist_cga = cy_bar[i] - altura/2.
    sigma = K * dista * 21000.
    if abs(sigma) > fyd:
        sigma = fyd * (sigma/abs(sigma))
    fra = sigma * A_bar
    mra = fra * dist_cga
    dist_cg = abs(cy_bar[i] - altura/2.)
    if dista < 0:
        FRaC = FRaC - fra
    else:
        FRaT = FRaT - fra
    MRa = MRa - mra
FRcC = 0.
MRc  = 0.
for i in range(len(cy_fib)):
    distc = - altura + hc + cy_fib[i]
    dist_cg = cy_fib[i] - altura/2.
    e_c = distc * K
    if distc > 0:
        if e_c >= 0.002:
            m = 1.
        else:
```

```
                m = ( 1. - ( 1. - (e_c/0.002))**2)
            fc = ( gama_f3 * fcd ) * m * A_fibra
            FRcC = FRcC + fc
            mrc = fc * dist_cg
            MRc = MRc + mrc
    FR = FRcC + FRaT + FRaC
    MR = MRc + MRa
    return [FR, 0.01*MR, Bx, K]

# máximos resistentes
def MaximosResistentes(Nsd_ELU, K):
    '''
    Função para cálculo do máximo Mrd em função de um
    Nsd em uma curvatura K fornecidos como dados de entrada
    '''
    tol   = 1e999
    Bx    = 0.0
    sinal = 1.
    passo = 0.1
    div   = 2.
    if Nsd_ELU < 0:
        Bx    = 1.1
        passo = -0.1
    while abs(tol) > 1e-9:
        Nrd, Mrd, Bx, Kr = EsfResist(Bx,K)
        tol = (Nrd - Nsd_ELU)/Nsd_ELU
        if sinal < 0:
            div *=4.
```

```
        if tol < 0:
            if sinal < 0:
                sinal *= -1
            Bx += passo/div
        elif tol > 0:
            if sinal > 0:
                sinal *= -1
            Bx -= passo/div
        else:
            None
    return [Mrd, Nrd, Bx, Kr]


# curvatura em relação aos esforços solicitantes
def KfuncMrNr(Kmax):
    # composicao da tabela momento curvatura
    mom = [0]
    cur = [0]
    N = np_curv
    dK = Kmax/N
    for i in range(N):
        j = i + 1
        Mrd, Nrd, Bx, Kr = MaximosResistentes(Nsd_ELU, j*dK)
        mom.append(Mrd)
        cur.append(Kr)
    return [mom,cur]


# interpola curvatura para um dado momento
def Interpola(Msd_tot):
```

```
    cont = 0
    for k in mom:
        if k < Msd_tot:
            cont += 1
        else:
            break
    Mj = mom[cont]
    Kj = cur[cont]
    Mi = mom[cont-1]
    Ki = cur[cont-1]
    Kfinal = (Msd_tot-Mi) * (Kj-Ki) / (Mj-Mi) + Ki
    Mrd, Nrd, Bx, Kr = MaximosResistentes(Nsd_ELU, Kfinal)
    return [Mrd, Nrd, Bx, Kr]

# fluência
def fluencia():
    global ea,teta_min,teta_max,teta,ead,Ne,Nsg
    teta_min = 300**(-1)
    teta_max = 200**(-1)
    teta = 1/(100*(comprimento/100)**0.5)
    if teta<teta_min:
            teta=teta_min
    if teta>teta_max:
            teta=teta_max
    if teta_min<=teta<=teta_max:
            teta=teta
    else:
        None
```

```
    ea = 0.5 * teta * comprimento/100.
    ead = teta*comprimento/100
    Ne=((10*(5600 * (fck*10)**0.5) / 10)*I_x)/(comprimento**2)
    ecc=(Msd_ELU/Nsd_ELU+ea)*(2.718**(phi*Nsk/(Ne-Nsd_ELU))-1)
    return [ecc]

# efeito 2 ordem
def efe_2_ordem(comprimento,ecc):

    if tipo_apoio == 1:
        comprimento = comprimento / 2.
        nsec_long = np.round(num_sec_trans/2) + 1
    elif tipo_apoio == 2:
        comprimento = comprimento
        nsec_long = num_sec_trans
    else:
        None
    delta_x = (comprimento)/(nsec_long-1)
    a0 = Kmax*comprimento
    tol   = 1e-3
    if lim_esb_x > 90:
            n=1
    else:
            n=0
    while tol   == 1e-3:
        Msd_tot = Msd_ELU + Nsd_ELU * a0 + n*Nsd_ELU * ecc
        if Msd_tot > Mrmax:
            print 'seção nao resiste'
```

```
    return None
else:
    a = []
    y = []
    curvatura = []
    Msd_total = []
    for i in range(nsec_long):
        if i == 0:
            a.append(a0)
            y.append(a0)
            Mrs_tot, Nrs_tot, Bxs_tot, Ks_tot = Interpola(Msd_tot)
            Msd_total.append(Mrs_tot)
            curvatura.append(Ks_tot)
        if i == 1:
            y.append(a[i-1]-(((delta_x/10)**2)/2)*curvatura[i-1])
            a.append(a[i-1]-(a[i-1]-y[i]))
            Msd_tot = Msd_ELU + Nsd_ELU* a[i] + n*Nsd_ELU * ecc
            Mrs_tot, Nrs_tot, Bxs_tot, Ks_tot = Interpola(Msd_tot)
            Msd_total.append(Mrs_tot)
            curvatura.append(Ks_tot)
        else:
            if i>=2 and i<=nsec_long-2:
                y.append(2*a[i-1]-a[i-2]-((delta_x/10)**2)*curvatura[i-1])
                a.append(a[i-1]-(a[i-1]-y[i]))
                Msd_tot = Msd_ELU + Nsd_ELU * a[i]+n*Nsd_ELU * ecc
                Mrs_tot, Nrs_tot, Bxs_tot, Ks_tot = Interpola(Msd_tot)
                Msd_total.append(Mrs_tot)
                curvatura.append(Ks_tot)
```

```
            if i==nsec_long-1:
                y.append(2*a[i-1]-a[i-2]-((delta_x/10)**2)*curvatura[i-1])
                a.append(a[i-1]-(a[i-1]-y[i]))
                Msd_tot = Msd_ELU + Nsd_ELU * a[i]
                Mrs_tot, Nrs_tot, Bxs_tot, Ks_tot = Interpola(Msd_tot)
                curvatura.append(Ks_tot)
                Msd_total.append(Mrs_tot)
                if Msd_total[i]>Msd_ELU:
                    a0 = a0-((Msd_total[i]-Msd_ELU)/Nsd_ELU)
                if Msd_total[i]<=(Msd_ELU+tol):
                        a0=a0+(Msd_ELU-Msd_total[i])/Nsd_ELU
                if Msd_ELU<=Msd_total[i]<=(Msd_ELU+tol):
                    tol=1
                else:
                    None
print 'Msdtot, Msd2, Curvatura(k), Deslocamento(w) e Fator de Segurança'
if tipo_apoio == 2:
    for i in range(nsec_long):
        j=nsec_long-i-1
        if j==nsec_long-1:
            print 'Msd_top =%10.5f, k %6.3f, w %7.5f, F.S %4.3f'%(
                gama_f3*Msd_total[j], curvatura[j]*10.**5, (a[0]-a[j]),
                Mrmax/Msd_total[j])
        if j<=nsec_long-2 and j>=1:
            print 'Msd_int =%10.5f, k %6.3f, w %7.5f, F.S %4.3f'%(
                gama_f3*Msd_total[j], curvatura[j]*10.**5, (a[0]-a[j]),
                Mrmax/Msd_total[j])
        if j==0:
```

```
            print 'Msd_bas =%10.5f, k %6.3f, w %7.5f, F.S %4.3f'%(
                  gama_f3*Msd_total[j], curvatura[j]*10.**5, (a[0]-a[j]),
                  Mrmax/Msd_total[j])
        else:
            None
elif tipo_apoio == 1:
    for i in range(nsec_long):
        j=nsec_long-i-1
        if j==nsec_long-1:
            print 'Msd_top =%10.5f, k %6.3f, w %7.5f,  F.S %4.3f'%(
                  gama_f3*Msd_total[j], curvatura[j]*10.**5, (a[0]-a[i]),
                  Mrmax/Msd_total[j])
        if j<=nsec_long-2 and j>=1:
            print 'Msd_int =%10.5f, k %6.3f, w %7.5f,  F.S %4.3f'%(
                  gama_f3*Msd_total[j], curvatura[j]*10.**5, (a[0]-a[i]),
                  Mrmax/Msd_total[j])
        if j==0:
            print 'Msd_med =%10.5f, k %6.3f, w %7.5f,  F.S %4.3f'%(
                  gama_f3*Msd_total[j], curvatura[j]*10.**5, (a[0]-a[i]),
                  Mrmax/Msd_total[j])
        else:
            None
    for i in range(nsec_long):
        if i>=1 and i<=(nsec_long-2):
            print 'Msd_int =%10.5f, k %6.3f, w %7.5f,  F.S %4.3f'%(
                  gama_f3*Msd_total[i], curvatura[i]*10.**5, (a[0]-a[j-i-1]),
                  Mrmax/Msd_total[i])
        if i==(nsec_long-1):
```

```
            print 'Msd_bas =%10.5f, k %6.3f, w %7.5f,  F.S %4.3f'%(
                gama_f3*Msd_total[i],curvatura[i]*10.**5, (a[0]-a[j]),
                Mrmax/Msd_total[i])




# CÓDIGO PRINCIPAL ------------------------------------------------------------

verifica = []
Combinacoes()

#verificações 1
verifica.append(Dimens_minima())
verifica.append(lim_esbeltez())
verifica.append(Dimens_maxima())
verifica.append(limite_bitola())
verifica.append(momento_minimo())
verifica.append(lim_fck())

# equacionamento da geometria do problema
calc_coord_fibras()
calc_coord_barras()

#verificações 2
verifica.append(taxa_arm())
verifica.append(comp_max())
```

```
if verifica == [1,1,1,1,1,1,1,1]:
    # cálculo do máximo momento resistente
    Mrmax, Nr, Bxmax, Kmax = MaximosResistentes(Nsd_ELU, K=None)
    print 'Máximo Resistente :'
    print 'Mmax= %10.5f, Nr= %10.5f, Bxmax= %10.9f, Kmax= %10.9f'%(Mrmax, Nr, Bxmax,Kmax)

    # cálculo da curvatura em função de Nsd e Msd dados
    Msd_tot = Msd_ELU
    mom, cur = KfuncMrNr(Kmax)

    [ecc] = fluencia()
    efe_2_ordem(comprimento,ecc)
else:
    print "Calculo não realizado!!!"
```