UNIVERSIDADE POSITIVO

ADRIANO DA CONCEIÇÃO MACHADO

WYLLER SILVEIRA FERNANDES

DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA ON-LINE EDUCACIONAL PARA CÁLCULO DE ESTRUTURAS RETICULADAS VIA MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM FORMULAÇÃO MATRICIAL IMPLEMENTADA EM LINGUAGEM JAVASCRIPT (JAWS)

CURITIBA
2018

ADRIANO DA CONCEIÇÃO MACHADO

WYLLER SILVEIRA FERNANDES

DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTA ON-LINE EDUCACIONAL PARA CÁLCULO DE ESTRUTURAS RETICULADAS VIA MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM FORMULAÇÃO MATRICIAL IMPLEMENTADA EM LINGUAGEM JAVASCRIPT (JAWS)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Positivo como requisito parcial para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso do curso de Engenharia Civil da Universidade Positivo

Professor Orientador: Juliano Jorge Scremin

CURITIBA
2018

RESUMO

Este trabalho expõe o desenvolvimento de um programa de análise estrutural educacional com a finalidade se ser uma ferramenta online de ajuda para estudantes de engenharia, capaz de calcular vigas, treliças e pórticos planos (Estruturas reticuladas). O método usado para o cálculo das estruturas é baseado no método dos deslocamentos, mas aplicado na forma matricial. O programa foi desenvolvido na linguagem *JavaScript*. A escolha dessa linguagem se deu pelo fato da disponibilidade em diversos dispositivos como computadores, *notebook*, *tablet*, *smartphone* entre outros. O software desenvolvido possui uma interface responsável por desenhar a estrutura e seus carregamentos, após a entrada de dados pelo usuário o programa pode iniciar a resolução da estrutura apresentando como resultado, os diagramas de cada barra e as reações de apoio, além de gerar um relatório de dados que condensa diversas informações pertinentes, como as equações de momento fletor e deslocamentos de cada barra da estrutura.

Palavras-chave: **Análise estrutural, *Software* Educacional, JavaScript**.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Reações de engaste perfeito com carga distribuída constante 17

Figura 2 - Reações de engaste perfeito com carga distribuída lineares 17

Figura 3 – Exemplo proposto por Martha (2017) 18

Figura 4 - Superposição de configurações deformadas elementares 20

Figura 5 – Coeficientes de Rigidez 21

Figura 6 - Representações das deslocabilidades 23

Figura 7 – Lógica de resolução 34

Figura 8 - Exemplo de identificação dos nós 37

Figura 9 - Exemplo proposto de uma viga com vinculações internas do tipo engaste/ rótula 41

Figura 10 - Matriz de rigidez da barra orientada no eixo global 45

Figura 11 - Matriz de rigidez global da estrutura organizada 46

Figura 12 - Exemplo de divisão da matriz global 47

Figura 13 - Nomenclatura da divisão matricial 47

Figura 14 – Página inicial do software 51

Figura 15 – Menu de entrada de dados 51

Figura 16 – Exemplo de estrutura plotada no JAWS 52

Figura 17 – Parte do relatório do exemplo da figura 17 52

Figura 18 – A Viga Proposta 54

Figura 19 - A Treliça Proposta 56

Figura 20 - O pórtico Proposto 58

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Reações de Apoio da Viga 54
Tabela 2 - Deslocamentos da Viga.....55
Tabela 3 - Esforços internos da Viga.....55
Tabela 4 - Reações de Apoio da Treliça 56
Tabela 5 - Deslocamentos da Treliça 57
Tabela 6 - Esforços internos da Treliça 57
Tabela 7 - Reações de apoio do Pórtico 59
Tabela 8 - Deslocamentos do Pórtico.....59
Tabela 9 - Esforços internos do Pórtico.....60

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 5

1.1 Objetivo Geral 7

1.2 Justificativa 7

1.3 Delimitação do tema 8

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 9

2.1 Classificação das estruturas reticuladas 9

2.1.1 Vigas 9

2.1.2 Treliças planas 10

2.1.3 Pórticos planos 10

2.2 Determinação do equilíbrio estático 10

2.3 Requisito básico para análise estrutural 11

2.3.1 Condições de equilíbrio 11

2.3.2 Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações 12

2.3.3 Leis constitutivas dos materiais 12

2.4 Método das forças (flexibilidade) 13

2.5 Método dos deslocamentos (rigidez) 14

2.6 Método da rigidez direta 15

2.6.1 Discretização no método 15

2.6.2 Condições de apoio e Ligações internas 15

2.6.3 Representação dos carregamentos 16

2.6.4 Sistemas de coordenadas generalizadas 19

2.6.5 Matriz de Rigidez e Vetor de forças locais 19

2.6.6 Liberação dos graus de liberdade 25

2.6.7 Matriz de Rigidez e Vetor de forças globais da estrutura 27

2.6.8 Determinação das reações de apoio e esforços internos 29

2.7 Ftool 31

2.8 JavaScript 32

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 33

3.1 Etapas do programa 34

3.2 Entrada de dados 35

3.2.1 Nós 35

3.2.2 Incidência de barras 35

3.2.3 Propriedades e geometria 35

3.2.4 Vinculações da barra 35

3.2.5 Apoios 36

3.2.6 Cargas Nodais 36

3.2.7 Cargas distribuídas 36

3.2.8 Deslocamentos prescritos 36

3.3 Cálculos Iniciais 36

3.4 Matriz de rigidez de engaste perfeito (E.P) 38

3.5 Carregamento distribuído nodal e Vetor de forças Local 39

3.6 Algoritmo de liberação dos graus de liberdade 40

3.7 Matriz de rotação 44

3.8 Espalhamento de matrizes e vetores 45

3.9 Matriz de Rigidez e Vetor de forças global 46

3.9.1 Separação da matriz global e do vetor de Forças 47

3.10 Vetor de deslocamentos 48

3.11 Vetor de reações de apoio 48

3.12 Esforços nodais 49

3.13 Equações de esforços e deslocamentos 49

3.14 Relatório de dados 50

3.15 Interface com o Usuário 50

4 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO 53

4.1 Viga 54

4.2 Treliça plana 56

4.3 Pórtico 58

5 CONCLUÇÕES 61

Referências Bibliográficas 62

6 Anexo 1 63

1 INTRODUÇÃO

Conforme Hibbler (2013), o termo estrutura diz respeito a um sistema de elementos conectados, destinados a suportar carregamentos. Como exemplos de estruturas relacionadas à engenharia civil figuram os edifícios, pontes, torres entre outros. O projeto de tais estruturas deve contemplar a segurança, a estética e a usabilidade enquanto leva em consideração restrições de ordem econômica e ambiental.

O estudo dessas estruturas é comumente chamado de análise estrutural e tem por objetivo entender o comportamento das mesmas em diversas situações de carregamentos e vinculações, podendo assim determinar soluções que se aproximem da realidade. Martha (2017), fala que o fundamento básico da análise de estruturas está na representação do comportamento contínuo, analítico e matemático de um modelo estrutural em função de uma quantidade finita de parâmetros. Consequentemente, a solução desse modelo é alcançada através da determinação dos parâmetros que retratam o comportamento do modelo estrutural de forma discreta. A análise estrutural parte da determinação de um modelo estrutural inspirado na estrutura real, porém, com uma série de hipóteses simplificadoras.

Estruturas reticuladas são usadas para diversas aplicações na engenharia e, por consequência, na análise estrutural. De acordo com Gere e Weaver (1987), estruturas reticuladas são constituídas por elementos que são longos em comparação com o tamanho da seção transversal chamados de barras. A extremidade de cada barra é denominada por nó e estes podem possuir interseções, pontos de apoio ou extremidades livres. Comumente, estas estruturas são divididas em seis categorias: vigas, treliças planas, treliças espaciais, pórticos planos, grelhas e pórticos espaciais.

O método de cálculo empregado é definido a partir do grau estático da estrutura. Estruturas reais, na grande maioria das vezes, possuem vínculos superabundantes e tal característica impossibilita o uso do método de equilíbrio de forças para resolvê-las. Na engenharia civil, no entanto, tais problemas são resolvidos através de diversas formas, sendo o método das forças e dos deslocamentos os principais métodos estudados na graduação.

Com o avanço da computação, foi possível o desenvolvimento de ferramentas que ajudam e agilizam o processo de cálculo manual, visto que os métodos empregados

já foram implementados em diversos programas de computador. Martha (2017), destaca que a implementação computacional, para a resolução de estruturas hiperestáticas (vínculos superabundantes), é mais adequada para o método dos deslocamentos, já que este possui cálculos repetitivos com implementação computacional simples. Isso explica a popularidade do método em diversos programas de computador. A vertente matricial desse método pode ser chamada de método da rigidez direta.

No mercado, existem diversos programas de cálculo estrutural, a grande maioria apresenta apenas o resultado final da análise, já que geralmente são usados no âmbito comercial. As ferramentas educacionais de análise de estruturas, no entanto, possuem a ideia de serem usados em sala de aula ou no estudo particular, mostrando não apenas o resultado, mas o processo que o envolve, e a partir disso ser uma fonte de comparação entre os resultados e os conceitos vistos em sala de aula. (Valente,1998).

O uso de computadores facilitou o processo de cálculo estrutural, no entanto esses programas não são acessíveis a todos, pois possuem a necessidade de uma infraestrutura mínima para sua utilização, dificultando o uso de todos os alunos em uma sala de aula (Valente,1998).

Com o passar dos anos, o surgimento de dispositivos móveis e novas tecnologias possibilitam o emprego de programas técnicos, antes limitados a computadores domésticos, para outros equipamentos. Dariva (2013), fala sobre a popularidade dos dispositivos moveis e a substituição dos computadores de mesa para essa nova modalidade. A despeito desse crescimento, os demais dispositivos não deixam de ser relevantes, no entanto, essa popularidade mostra a importância da implementação de programas em tal plataforma. A situação ideal, para uma ferramenta educacional, seria a utilização de uma linguagem compatível com todos os dispositivos existentes.

Uma linguagem que atenda o requisito mencionado anteriormente, em muitos dos casos é complicada, como afirma Dariva (2013). Ele menciona que essa dificuldade ocorre pela variedade de plataformas existentes. No entanto com a intensificação do uso da internet e, consequentemente, a necessidade de navegadores padronizados, desenvolveu-se uma linguagem compatível com a maioria dos dispositivos de diversas plataformas, sendo esse o *JavaScript*. Flanagan (2011), menciona que a maioria dos

sites modernos usa essa linguagem e pontua também que a mesma é a mais onipresente da história, por se encontrar na maioria dos dispositivos vendidos comercialmente, através do navegador de internet.

1.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma ferramenta educacional *on-line* possível de ser utilizada em qualquer dispositivo que possua um navegador de internet instalado e que seja capaz de calcular estruturas reticuladas planas, fornecendo as informações pertinentes do processo de cálculo via método da rigidez matricial, bem como as equações de esforços internos e deslocamentos das barras a plotagens dos respectivos diagramas.

1.2 Justificativa

Conforme Valente (1998), os computadores podem ser usados como ferramentas educacionais, porém, não apenas como uma ferramenta que ensina o aprendiz, mas sim, como um instrumento com o qual o aluno desenvolve algo, sendo o aprendizado então efetuado pela execução de uma tarefa e não pelo mero uso do dispositivo eletrônico em si.

O mesmo autor ilustra que estas tarefas podem variar desde a elaboração de textos, pesquisa em bancos de dados existentes, criação de bancos de dados e resolução de problemas diversos por meio da aplicação de linguagens de programação.

Neste contexto, o aprendizado da análise estrutural implica na realização de uma grande quantidade de passos de cálculo, onde facilmente, erros podem ser cometidos e a compreensão dos métodos estudados acaba sendo prejudicada. Ferramentas computacionais que possam validar resultados intermediários do processo de cálculo podem solucionar essa dificuldade. O uso em sala de aula pode ajudar a ilustrar conceitos recém apresentados, além de abrir a possibilidade do uso como ferramenta em problemas multidisciplinares.

A escolha de deixar o código aberto, ou seja, disponibilizar todos os arquivos que compõe o programa, tem a ideia de incentivar o aluno a se aprofundar em outros temas, além da análise estrutural, como a programação. Ainda que Valente (1998) tenha destacado as vantagens de se realizar o próprio código no aprendizado de conceitos, o programa desenvolvido abre a possibilidade do aprendiz estudar a solução abordada no código.

A partir da afirmação de Dariva (2013), onde ele diz que os dispositivos móveis estão substituindo os computadores pessoais, entende-se que a implementação de um programa não deve ser pensada apenas em computadores de mesa, mas também nos mais populares, sendo este o *smartphone*. A escolha da linguagem *JavaScript* não apenas possibilita o uso do programa desenvolvido em computadores de mesa, mas também em *smartphones*, *tablets* e outros dispositivos com um navegador de internet. Essa acessibilidade facilita o uso do programa em diversos ambientes como por exemplo uma sala de aula.

1.3 Delimitação do tema

No presente trabalho serão feitas as seguintes simplificações

- Não serão considerados efeitos térmicos na estrutura
- A ferramenta é destinada somente ao cálculo de efeitos de 1ª ordem em análise estática plana.
- Não será contemplada a possibilidade de inserção de barras infinitamente rígidas ou de rigidez axial infinita.
- Na composição das matrizes de rigidez e dos vetores de carregamento serão considerados somente os efeitos de esforço axial e flexão, sendo a rigidez relativa ao efeito de cisalhamento desprezada, conforme versa a teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, será apresentada uma breve revisão dos métodos empregados para o cálculo de estruturas reticuladas, com o foco no método de rigidez direta. Após a exposição dos métodos da análise estrutural, são apresentados também um breve relato sobre o programa Ftool (usado para a validação do código) e sobre a Linguagem JavaScript (usada para a implementação do programa).

2.1 Classificação das estruturas reticuladas

Martha (2017), menciona que as estruturas reticuladas são estruturas formadas por barras. Os tópicos a seguir apresentarão as definições dos principais elementos e suas classificações.

Gere e Weaver (1987), explicam que estruturas reticuladas podem ser analisadas em um plano ou tridimensionalmente, o escopo deste trabalho se limita a estruturas planas.

2.1.1 Vigas

Martha (2017), define viga como um modelo estrutural cujas barras estão dispostas no mesmo eixo, ou seja, são elementos estruturais unifilares que possuem um eixo bem definido

Soriano (2010), complementa a definição de viga, em um plano, dizendo que tais barras estão sujeitas a carregamentos no plano vertical e estas forças desenvolvem na estrutura algumas combinações de esforços internos, como momento fletor, esforço cortante e, eventualmente o esforço normal.

2.1.2 Treliças planas

Soriano (2010) define treliças planas como sendo um conjunto de barras retas rotuladas nas extremidades e com forças externas aplicadas apenas nas rótulas, de maneira a se ter apenas o esforço normal nas barras

Esse elemento estrutural é frequentemente usado para o suporte de pontes e tetos de diversas edificações. (HIBBELER, 2013)

2.1.3 Pórticos planos

Um pórtico plano é uma composição de barras retas ou curvilíneas situadas em um plano. Esses elementos, geralmente, são solicitados por carregamentos que geram na estrutura todos os esforços internos, ou uma combinação entre eles. (Soriano, 2010)

2.2 Determinação do equilíbrio estático

Soriano e Lima (2004) chamam de grau de indeterminação estática, o número de reações de apoio e esforços solicitantes adicionais, para o equilíbrio de uma determinada estrutura.

Quando o modelo estrutural apresenta algum grau de indeterminação estática, ou seja, maiores do que zero, Soriano e Lima (2004) mencionam que os métodos usados partem do método das forças ou dos deslocamentos, estes baseados no princípio dos trabalhos virtuais. Isso se faz necessário pois o método de equilíbrio de forças não se aplica para esse tipo de estrutura, pelo simples fato da mesma sempre apresentar uma variável adicional em relação ao número de equações de equilíbrio existentes.

Soriano (2010) explica que o equilíbrio estático de uma estrutura reticulada pode ser uma estrutura hipostática, isostática ou hiperestática. Essas nomenclaturas

relacionam o equilíbrio gerado na estrutura a partir das vinculações definidas no modelo estrutural escolhido.

A estrutura hipostática é definida quando os vínculos externos e/ou vínculos internos forem insuficientes para o equilíbrio estático da estrutura ou de suas partes, sob quaisquer ações externas (Soriano, 2010)

Para o caso de uma estrutura isostática os vínculos mencionados anteriormente são exatamente os necessários para se manter o equilíbrio estático global e de suas diversas partes. A estrutura hiperestática, no entanto, possuí vínculos superabundantes a esse equilíbrio. (Soriano, 2010)

Ao classificar uma estrutura como sendo hiperestática define-se consequentemente o grau de indeterminação estática da mesma. (Soriano, 2010)

2.3 Requisito básico para análise estrutural

A essência da análise estrutural é determinar os esforços internos, reações de apoio, rotações, deslocamentos, tensões e deformações. Os mecanismos de cálculo são modelos matemáticos que representam as hipóteses adotadas em um modelo estrutural. Isso posto, o modelo de análise pode ser definido por um conjunto de equações matemáticas que satisfazem todas as hipóteses adotadas. (MARTHA, 2017)

Os tópicos 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 apresentam as condições matemáticas as quais o modelo estrutural deve satisfazer, para assim representar adequadamente o comportamento de uma estrutura real. Essa divisão e os textos que se seguem são propostos por Martha (2017).

2.3.1 Condições de equilíbrio

As condições de equilíbrio aqui mencionadas são aquelas que garantem o equilíbrio estático, de qualquer parte, porção ou da estrutura como um todo, ou seja, o

equilíbrio da estrutura deve ser mantido globalmente (Martha, 2017). Como apresentado no tópico 2.2.

O conceito de equilíbrio parte, da equação proposta por Isaque Newton em sua segunda lei, ou seja, a força resultante que atua sobre um corpo é fruto do produto da massa do corpo por sua aceleração. Martha (2017) explica, a partir desse conceito, que a condição para o equilíbrio de uma estrutura é dada quando as resultantes de forças e momentos, englobando cargas externas e reações de apoio são nulas.

2.3.2 Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações

As condições de compatibilidade são impostas para garantir que a estrutura, ao se deformar, permaneça contínua e compatível com seus vínculos. Tais condições podem ser divididas em dois grupos:

- *Condições de compatibilidade externa:* garantem que os deslocamentos e as deformações sejam compatíveis com as condições externas, como as ligações e com outras estruturas ou suportes;
- *Condições de compatibilidade interna:* garantem que mesmo com a deformação dos elementos estruturais as mesmas continuarão mantendo a ligação entre os nós que as conectam.

2.3.3 Leis constitutivas dos materiais

Martha (2017) define leis constitutivas dos materiais como sendo um modelo matemático que expressa o comportamento dos materiais, em nível macroscópico, a partir de relações entre as tensões e deformações do material em análise.

A teoria da elasticidade determina que as relações da lei constitutiva são equações lineares com parâmetros constantes. Para esse caso pode-se afirmar que o material trabalhará em um regime elástico-linear. A lei constitutiva que relaciona tensões normais e deformações normais é denominada Lei de Hooke.

O escopo deste trabalho tem por objetivo tratar dos métodos básicos da análise estrutural, dessa forma a consideração de leis constitutivas não lineares ampliará o tema, fugindo do escopo principal. Assim sendo, o software irá considerar materiais dentro do regime elástico-linear.

2.4 Método das forças (flexibilidade)

Soriano e Lima (2004) introduzem o conceito desse método dizendo que o objetivo do método das forças é determinar um conjunto de reações ou esforços internos superabundantes ao equilíbrio de uma determinada estrutura hiperestática, permitido, com o final do processo, usar as equações da estática para a obtenção das demais reações desconhecidas.

A base do método é identificar forças redundantes desconhecidas e a partir disso definir equações de compatibilização da estrutura. Isso pode ser feito ao se expressar os deslocamentos em termos de cargas, através das relações de força-deslocamentos, encontrando com isso as resultantes que produzem as reações redundantes. (HIBBELER, 2013)

Isso posto, o resumo do método é a obtenção dos coeficientes de flexibilidade (relação de forças-deslocamento) dos vínculos externos superabundantes, ou seja, encontrar o deslocamento necessário para a ocorrência de uma força unitária.

As etapas são iniciadas ao se dividir a estrutura real em vários casos, a quantidade de casos dependerá do grau estático do modelo estrutural. A estrutura com os carregamentos reais sem o vínculo externo superabundante é chamada de caso 0, os demais casos, são compostos pela geometria do caso 0, mas com a força ou momento unitário no local do vínculo externo retirado. Após a obtenção dos deslocamentos para cada um dos casos, aplicam-se as condições de compatibilidade, que têm por finalidade relacionar os deslocamentos da estrutura real com os deslocamentos causados pelas forças unitárias e assim encontrar as reações de apoio para aquele vínculo antes retirado. (HIBBELER, 2013)

Martha (2017) fala que o método dos deslocamentos é o método mais usado em programas de análise estrutural, isto ocorre pelo fato do método das forças possuir a necessidade de intervenção humana no processo, já que a escolha de vínculos externos superabundantes por forças unitárias pode transformar os casos analisados em estruturas hipostáticas. Isso torna a implementação mais complexa em comparação com o método dos deslocamentos.

Soriano (2010) explica que o método das forças e o método dos deslocamentos são opostos, pois enquanto o primeiro libera os vínculos restringidos da estrutura formando casos isostáticos para então resolvê-los o método dos deslocamentos trava todos as vinculações não restringidas criando casos hiperestáticos para então resolvê-los. Cabe mencionar que existe a necessidade da aplicação do método das forças para a resolução de cada caso gerado no método dos deslocamentos. No tópico 2.6.3 são explicados os pontos os quais foi-se necessário a aplicação do método das forças.

2.5 Método dos deslocamentos (rigidez)

Soriano e Lima (2004) explicam que no método dos deslocamentos as incógnitas principais são os deslocamentos em determinados nós da estrutura e que são obtidos através de um sistema de equações de equilíbrio.

Martha (2017) explica que as principais variáveis do problema são os deslocamentos e rotações, sendo que todas as outras incógnitas são escritas em função das variáveis principais. Estes parâmetros são substituídos em equações de equilíbrio, que posteriormente são resolvidas. O resumo do método é realizar a soma de uma série de soluções básicas divididas em casos, da mesma forma como no método das forças, no entanto aqui, os coeficientes encontrados são relacionados à força necessária para realizar um deslocamento unitário, chamados de coeficientes de rigidez. Após a obtenção das forças nas deslocabilidades (deslocamentos restringidos pela aplicação de vinculações adicionais em nós não originalmente restringidos), essas séries de soluções podem ser usadas para estabelecer o equilíbrio da estrutura real ao realizar a superposição dos efeitos individuais de cada caso virtual.

2.6 Método da rigidez direta

A partir desse ponto serão apresentadas e demonstradas as principais etapas de resolução de uma estrutura reticulada através do método dos deslocamentos com o viés computacional, conhecido também como método da rigidez direta. (MARTHA, 2017)

Cabe mencionar que este trabalho se muniu de outros conceitos adicionais a fim de facilitar a implementação desse método, no entanto, apesar de pequenas modificações, a essência do método se manteve.

2.6.1 Discretização no método

As variáveis do método são as componentes de deslocamentos e rotações livres dos nós, do modelo estrutural adotado, que não são restringidas por apoios. Os nós da estrutura são os pontos de encontro das barras ou extremidades em balanço. São chamadas de deslocabilidades as componentes de deslocamentos e rotações nodais livres. Essas deslocabilidades são as variáveis que definem o comportamento cinemático do modelo, ou seja, elas determinam a deformada da estrutura. Isto posto as deslocabilidades são as incógnitas do método dos deslocamentos. MARTHA (2017)

2.6.2 Condições de apoio e Ligações internas

Para a definição das condições de apoio, Soriano (2010) explica que cada seção transversal de uma barra plana pode ter dois deslocamentos e uma rotação em torno dos eixos cartesianos. Tais deslocamentos e rotação são definidos de modo geral como deslocamentos, que podem ou não, serem restringidos por vínculos externos conhecidos como apoios.

Soriano (2010) continua dizendo que tais apoios podem ser, mais comumente, classificados como apoios móveis (que permitem deslocamentos lineares), apoios fixos

rotulados (que não permitem deslocamentos lineares) e apoios de engastamento (que impedem todos os deslocamentos)

As conexões entre as barras subdividem em dois termos:

Ligações rígidas: São duas barras que se ligam em um nó e possuem deslocamentos e rotações compatíveis na ligação, ou seja, o nó é capaz de transmitir os três esforços internos.

Ligações articuladas: São conhecidas por rótulas. Este elemento, no modelo estrutural, tem por definição liberar a continuidade de rotação no interior de uma estrutura. MARTHA (2017)

Soriano (2010) explica que a existência de uma rótula na extremidade de uma barra tira a capacidade daquele ponto transmitir o momento fletor para o restante da estrutura. Com essa informação conclui-se que os esforços internos transmitidos por uma rótula são os esforços normais e cortantes.

2.6.3 Representação dos carregamentos

Antes de apresentar o tema deste tópico, há a necessidade de se definir alguns parâmetros importantes.

Martha (2017) explica que o método dos deslocamentos faz uma discretização do comportamento contínuo de uma estrutura que resulta em uma superposição de soluções. Tais soluções partem dos parâmetros de deformação da estrutura. A ideia do método é isolar um determinado efeito que representa o comportamento deformado da estrutura. Dessa forma, cada configuração deformada elementar é composta de configurações deformadas das suas barras. As configurações deformadas elementares de barras isoladas são as soluções fundamentais para tal método.

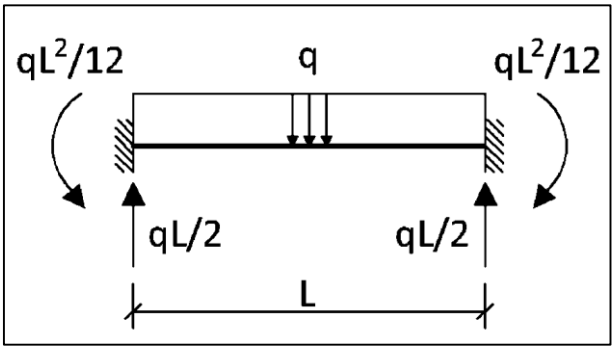
Martha (2017) explica dois tipos de soluções fundamentais.

A primeira solução fundamental é conhecida como coeficiente de rigidez local, que corresponde a forças e/ou momentos que devem ocorrer nas extremidades de uma barra para equilibrá-la quando são aplicados deslocamentos ou rotações unitárias nas suas extremidades.

A segunda solução fundamental são reações de engaste perfeito de uma barra isolada provocadas por solicitações externas, ou seja, na aplicação de uma solicitação externa, as resultantes dessa aplicação em uma barra com extremidades engastadas geram tais reações de apoio. Essas solicitações podem ser forças e/ou momentos concentrados e/ou cargas distribuídas.

A determinação das reações de engastamento perfeito (segunda solução fundamental) de uma barra prismática sem articulação solicitada por um carregamento transversal qualquer são possíveis através da aplicação do método das forças. A figura 2 mostra as reações encontradas após a aplicação do método explicado no tópico 2.4.

Figura 1 – Reações de engaste perfeito com carga distribuída constante

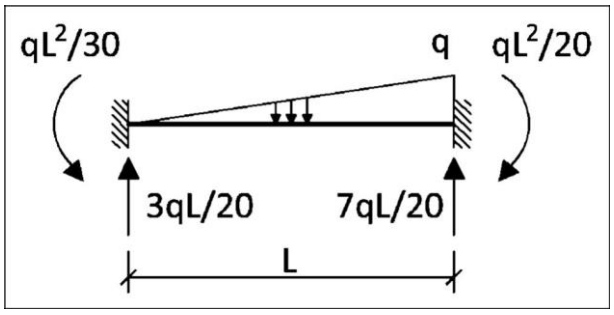


Fonte: modificado de LEET (2009)

Onde: q → *Carga distribuída* ; L → *Comprimento da barra*

Da mesma forma pode-se aplicar o método das forças usando, porém , uma carga distribuída com variação linear, apresentada na figura 3.

Figura 2 - Reações de engaste perfeito com carga distribuída lineares



Fonte: modificado de LEET (2009)

O propósito de conhecer a solução de uma barra bi engastada com um carregamento distribuído constante ou com variação linear, tem o intuito de proporcionar uma solução mecanizada. Os casos apresentados a seguir mostram como transformar

um carregamento de uma barra bi engastada em cargas concentradas que se equivalem a uma carga distribuída em uma estrutura de múltiplas barras.

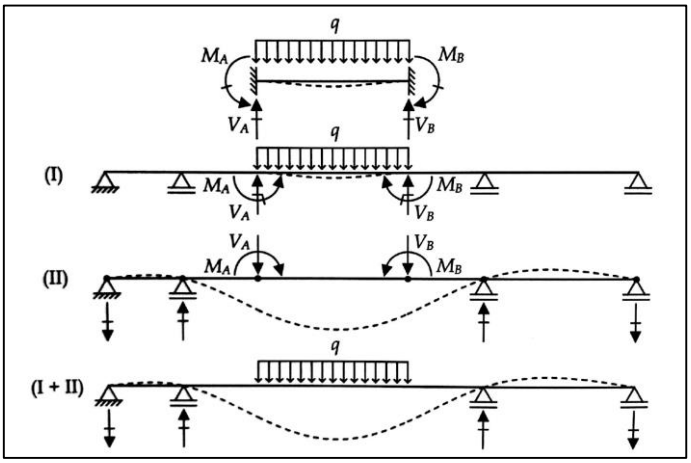
A metodologia apresentada a seguir é desenvolvida por Martha (2017).

Caso I: Estrutura com carga uniformemente distribuída e reações de engaste perfeito do elemento de barra central isolado, atuando nas suas extremidades.

Caso II: Estrutura submetida a forças e momentos concentrados que são idênticas às reações de engastamento perfeito do caso 1, no entanto com sentidos invertidos nos nós das extremidades do elemento de barra carregado.

A figura 4 mostra a superposição de efeitos para discretização do comportamento de uma viga contínua pelo método dos deslocamentos, mostrando também os casos I e II mencionados anteriormente.

Figura 3 – Exemplo proposto por Martha (2017)



Fonte: Martha (2017)

A ideia da decomposição nos casos 1 e 2 mostra que o objetivo é isolar o efeito local da carga do caso 1 que atua no interior da barra. O efeito local é relacionado a uma situação de engastamento perfeito. Para o caso 2 considera-se o efeito global da carga, que é transformada em forças e momentos concentrados iguais às reações do caso 1, porém com o sinal contrário. MARTHA (2017).

2.6.4 Sistemas de coordenadas generalizadas

Sobre o sistema de coordenadas do método dos deslocamentos, Martha (2017) fala que uma das características mais marcantes desse método é a soma de contribuições de coeficientes de rigidez locais das barras individuais para compor os coeficientes de rigidez globais da estrutura.

O autor menciona essa informação para salientar a ideia de que esses coeficientes possuem um sistema de eixo local, necessitando assim projeta-los em um eixo único (em geral, para o sistema de eixos global).

Martha (2017) explica que é conveniente definir sistemas de coordenadas responsáveis por indicar as direções dos coeficientes de rigidez da barra ou da estrutura. Ele divide essas coordenadas generalizadas em globais e locais sendo que as coordenadas globais tratam os graus de liberdade da estrutura e as coordenadas locais tratam das deslocabilidades da barra isolada.

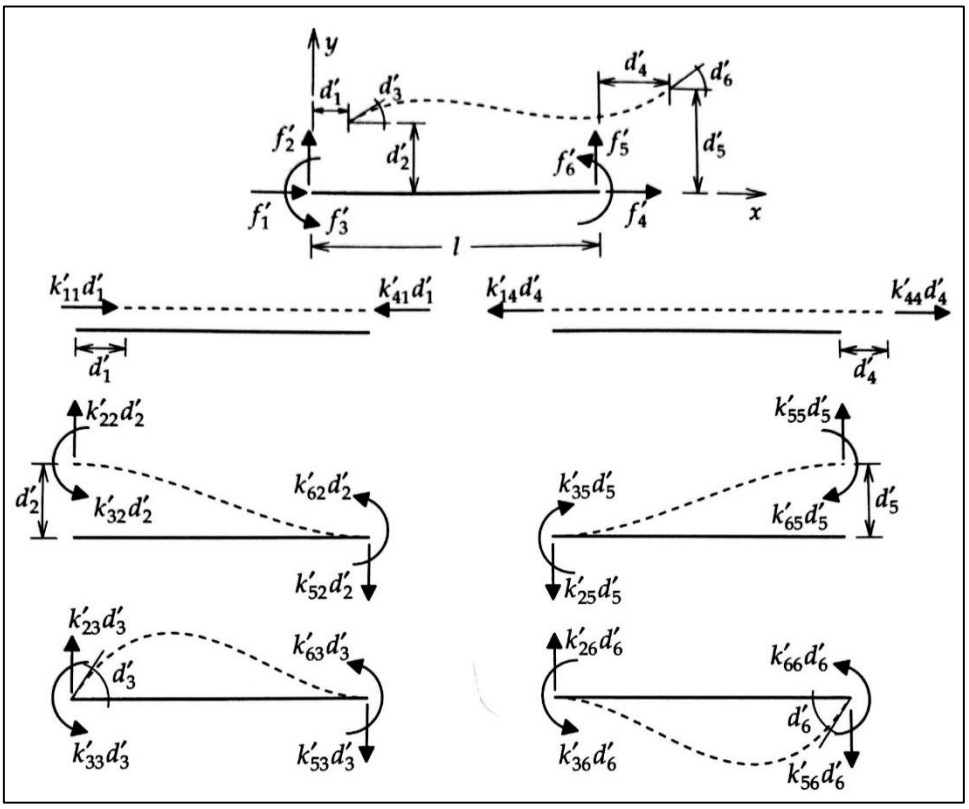
Essas diferenciações de coordenadas serão de extrema importância para etapas futuras.

2.6.5 Matriz de Rigidez e Vetor de forças locais

No tópico 2.6.3 são mostradas duas soluções fundamentais para barras isoladas, sendo que a primeira solução é chamada de coeficientes de rigidez locais (ou de barras). Martha (2017) explica que o coeficiente de rigidez são forças e momentos que devem atuar nas extremidades da barra isolada, paralelamente aos seus eixos locais, para equilibrá-la quando uma rotação ou deslocamento de valor igual a 1 é imposto em uma das suas extremidades, ou seja, A rigidez da barra é definida como a força necessária para que ocorra um deslocamento unitário em uma das extremidades da barra.

A figura 5 tem a intenção mostrar a superposição de configurações deformadas elementares para compor a elástica final de uma barra de pórtico plano isolado.

Figura 4 - Superposição de configurações deformadas elementares



Fonte: Martha (2017, p.279)

Martha (2017) apresenta o seguinte:

k'_{ij} → Coeficiente de rigidez local: Força ou momento que deve atuar em uma extremidade de uma barra isolada, na direção da deslocabilidade (d'_i), para equilibrá-la quando a deslocabilidade unitária ($d'_j = 1$) é imposta, isoladamente, em uma das extremidades.

f'_i → Força generalizada local: força ou momento que atua na direção da deslocabilidade (d'_i) de uma barra para equilibrá-la quando isolada.

Martha (2017) diz que a superposição de configurações deformadas elementares, mostrada na figura 4, resulta em uma relação entre cada força nodal generalizada (f'_i) e as deslocabilidades da barra. Ele continua e explica usando, como exemplo, a força nodal generalizada 2 (f'_2) mostrando que esta é obtida pela soma das forças transversais na extremidade inicial da barra, resultando em ($f'_2 = k'_{22}d'_2 + k'_{23}d'_3 + k'_{25}d'_5 + k'_{26}d'_6$)

A superposição das configurações deformadas elementares da figura 4, definida por Martha (2017), resulta na relação matricial para todas as forças e momentos atuantes nas extremidades da barra. Esta relação é apresenta a seguir na equação 2. 1:

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & 0 & 0 & k'_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{22} & k'_{23} & 0 & k'_{25} & k'_{26} \\ 0 & k'_{32} & k'_{33} & 0 & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{41} & 0 & 0 & k'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{52} & k'_{53} & 0 & k'_{55} & k'_{56} \\ 0 & k'_{62} & k'_{63} & 0 & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad (2.\ 1)$$

Pode-se mostrar a equação 2. 1 na forma condensada a seguir:

$$\{f'\} = [k'] \cdot \{d'\} \quad (2.\ 2)$$

Sendo:

$\{f'\}$ → *Vetor das forças generalizadas da barra no sistema local*

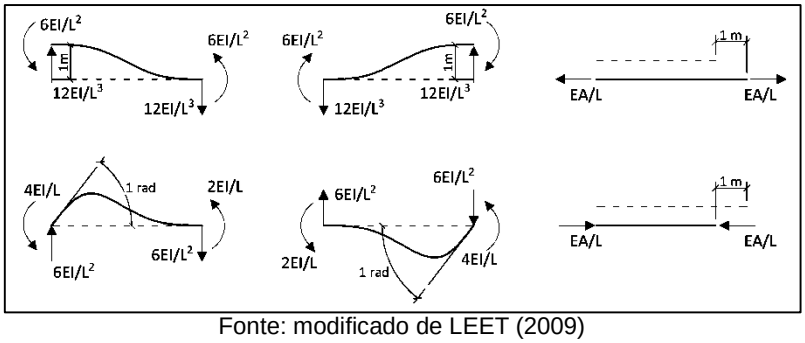
$[k']$ → *Matriz de rigidez da barra no sistema local*

$\{d'\}$ → Vetor das deslocabilidades da barra no sistema local

A obtenção dos coeficientes de rigidez locais mostrada na figura 4, da barra em análise, parte do método PDV (princípios de deslocamentos virtuais), como demostrado por Martha (2017) Ele menciona haver outras maneiras de se obter estes parâmetros, no entanto a PDV provê a maneira mais geral. Sobre o método PDV Soriano e Lima (2004) enunciam o princípio do método dizendo que uma estrutura em equilíbrio estático o trabalho virtual das forças externas é igual ao trabalho das forças internas, supondo um campo de deslocamentos virtuais.

A partir desse método pode-se chegar os coeficientes de rigidez axiais e à flexão de uma barra prismática sem articulações. Os valores desses coeficientes são mostrados na figura 6.

Figura 5 – Coeficientes de Rigidez



Fonte: modificado de LEET (2009)

Isso posto, substituindo os coeficientes$[k'_{ij}]$ (Figura 5) pelos seus respectivos valores apresentados na Figura 6, usando a superposição mencionada anteriormente, pode-se obter a matriz de engaste perfeito apresentada na equação 2. 3.

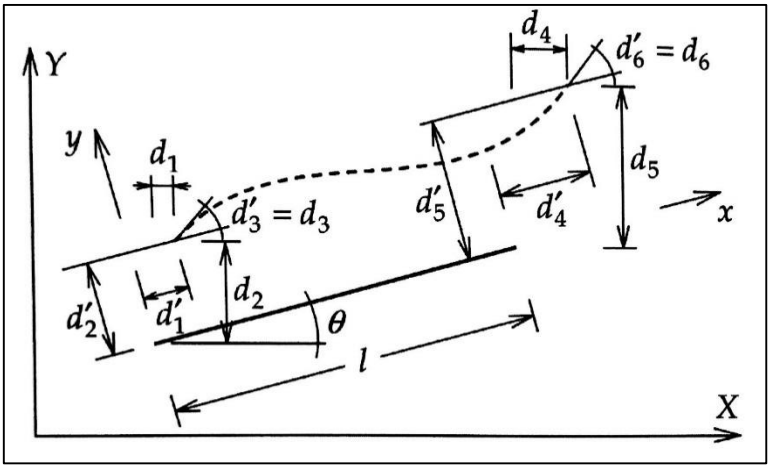
$$\begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12\,EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12\,EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12\,EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12\,EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EA/L \end{bmatrix} \quad (2.\ 3)$$

Cabe mencionar que a matriz de rigidez da barra no sistema local$[k']$ leva em consideração uma barra biengastada, ou seja, de engaste perfeito. Dessa forma, para vínculos internos diferentes, os procedimentos acima mencionados deverão ser novamente realizados, para cada uma das vinculações. Estes novos casos são: engaste-rótula, rótula-engaste e rótula-rótula. Soriano (2005), no entanto, apresenta um algoritmo baseado no método de redução de Guyan que facilita a obtenção das demais matrizes de rigidez. A ideia da aplicação desse algoritmo é usar apenas a matriz de engaste perfeito para os cálculos, caso o modelo possua uma vinculação diferente o método realizará a liberação do grau de liberdade dessa vinculação. O método e o algoritmo são apresentados no tópico 2.6.6.

Algo que se deve notar também é que tal formulação está levando em consideração uma barra com o sistema de coordenadas locais, ou seja, um sistema perpendicular e paralelo ao eixo, no entanto as barras podem possuir inclinações, caso o observador veja o eixo global. Para isso Martha (2017) explica que a transformação da matriz de rigidez local para a matriz de rigidez global pode ser feita ao se relacionar as deslocabilidades da barra do sistema local com o sistema global.

A figura 7 mostra representações das deslocabilidades de uma barra no sistema local e no sistema global. As variáveis d'_i relacionam os deslocamentos no eixo local, sendo que as variáveis d_i relacionam os deslocamentos no eixo global.

Figura 6 - Representações das deslocabilidades



Fonte: Martha (2017, p.434)

A partir da figura 6, pode-se encontrar as deslocabilidades locais em função das globais, partindo de relações trigonométricas, sendo estas apresentadas a seguir:

$$d'_1 = +d_1 \cdot \cos\theta + d_2 \cdot \operatorname{sen}\theta \qquad d'_4 = +d_4 \cdot \cos\theta + d_5 \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$d'_2 = -d_1 \cdot \operatorname{sen}\theta + d_2 \cdot \cos\theta \qquad d'_5 = -d_4 \cdot \operatorname{sen}\theta + d_5 \cdot \cos\theta$$

$$d'_3 = d_3 \qquad d'_6 = d_6$$

Tais relações podem ser representadas, simplificadamente, como mostra a equação 2.4:

$$\{d'\} = [R] \cdot \{d\} \tag{2. 4}$$

Sendo:

$\{d'\}$ → Vetor das deslocabilidades da barra no sistema local

$\{d\}$ → Vetor das deslocabilidades da barra no sistema global

$[R]$ → Matriz de rotação, equação 2.5.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Entende-se que a matriz de transformação por rotação é ortogonal, dessa forma sua inversa é igual a sua transposta. Com isso posto, pode-se obter as

deslocabilidades no sistema global em função das deslocabilidades no sistema local a partir da transposta da matriz $[R]$. Essa transformação é expressa na equação 2.6:

$$\{d\} = [R]^T \cdot \{d'\} \tag{2.6}$$

Sendo:

$[R]^T \rightarrow$ Matriz de rotação transposta

Após a obtenção das deslocabilidade das barras no sistema global, de maneira semelhante, pode-se obter as forças generalizadas da barra no sistema global em função das forças generalizadas no sistema local. A equação 2.7 e 2.8 expressam isso.

$$\{f\} = [R]^T \cdot \{f'\} \tag{2.7}$$

$$\{f'\} = [R] \cdot \{f\} \tag{2.8}$$

$\{f'\} \rightarrow$ Vetor de forças da barra no sistema local

$\{f\} \rightarrow$ Vetor de forças da barra no sistema global

A determinação da matriz de rigidez da barra isolada no sistema global, é iniciada a partir da equação 2.1:

$$\{f'\} = [k'] \cdot \{d'\}$$

Substituindo $\{d'\}$ pela equação 2.6 e pré-multiplicando a mesma por $[R]^T$, encontra-se:

$$[R]^T \cdot \{f'\} = [R]^T \cdot [k'] \cdot [R] \cdot \{d\}$$

Com base na equação 2.1, porém referenciada em termos globais, chega-se a equação 2.9 a seguir:

$$[k] = [R]^T \cdot [k'] \cdot [R] \tag{2.9}$$

$[k] \rightarrow$ *Matriz de rigidez da barra no sistema global*

2.6.6 Liberação dos graus de liberdade

A ideia apresentada por Soriano (2005) pode ser nomeada como condensação estática ou Redução de Guyan.

Gonçalves (2016) explica que o método proposto por Robert J. Guyan em 1960, é um dos métodos pioneiros para a redução de matrizes de rigidez. Seu desenvolvimento foi concebido tanto para problemas dinâmicos, ou seja, dinâmica estrutural e vibrações mecânicas de estruturas, como para estruturas estáticas. O método relaciona os graus livres de carregamento com os graus de liberdade que possuem cargas aplicadas. A seguir o método será deduzido.

O conceito básico parte da equação de equilíbrio estático

$$\{R\} = [K]\{q\} + \{R_0\} \tag{2.10}$$

Sendo:

K → Matriz de rigidez local

R → Vetor de forças equivalente

q → Vetor dos graus de liberdade

R_0 → Vetor de forças local

Abrindo a expressão matricial 2.10 se obtem:

$$\begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{0i} \\ R_{0j} \end{Bmatrix}$$

Após operações necessárias observa-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} R_i = K_{ii} \cdot q_i + K_{ij} \cdot q_j + R_{0i} & (1) \\ R_j = K_{ji} \cdot q_i + K_{jj} \cdot q_j + R_{0j} & (2) \end{cases}$$

Aplicando $R_j = 0$ em (2) mostra que deseja-se liberar o grau de liberdade q_j, ou seja, a força equivalente que participava desse equilíbrio se torna zero. Dessa forma, a força antes resistida por esse grau de liberdade, necessita ser distribuída para as demais partes resistentes, afim de se manter o equilíbrio.

Ao definir a força equivalente $R_j = 0$ o grau de liberdade q_j pode ser isolado com a finalidade de substituir a equação (1) com esse termo.

$$q_j = -{K_{jj}}^{-1} \cdot (K_{ji} \cdot q_i + R_{0j})$$

Substituindo q_j em (1) encontra-se:

$$R_i = \quad (K_{ii} + K_{ij} \cdot \left[-{K_{jj}}^{-1}\right] \cdot K_{ji}) q_i \quad + \quad (K_{ij} \cdot \left[-{K_{jj}}^{-1}\right] \cdot R_{0j} + R_{0i})$$

O primeiro termo da soma diz respeito a parcela referente a matriz de rigidez e o segundo ao vetor de forças.

Isolando apenas as parcelas dos graus de liberdade que representam a fator de correção da rigidez e da força, encontra-se:

$$\begin{cases} {K_{ij}}' = K_{ij} - K_{ir} \cdot \frac{1}{K_{rr}} \cdot K_{rj} & p/ \;\; i \neq r \;\; e \;\; p/ \;\; j \neq r \\ {K_{ij}}' = 0 & p/ \;\; i = r \;\; e \;\; p/ \;\; j = r \end{cases}$$

$$\begin{cases} {R_{0i}}' = R_{0i} - K_{ir} \cdot \frac{1}{K_{rr}} \cdot R_{0j} & p/ \;\; i \neq r \\ {R_{0i}}' = 0 & p/ \;\; i = r \end{cases}$$

Sendo:

r → Linha e coluna eliminada ; i → índice da linha em análise

j → Índice da coluna em análise

A partir desses conceitos pôde-se entender a origem do algoritmo apresentado a seguir.

A montagem da matriz de rigidez da barra no sistema local é influenciada pelos vínculos internos da barra, como já visto anteriormente. Sabendo disso, existe a necessidade de se determinar matrizes locais para cada tipo de vínculo interno. Sobre esse assunto, Soriano (2005) menciona que em procedimentos automatizados é mais prático modificar a matriz de rigidez e o vetor dos esforços de engastamento perfeito de uma barra biengastada em seu referencial local, isso é interessante pela variedade de combinações de vínculos que podem ocorrer em uma mesma barra.

Soriano (2005) apresenta o algoritmo, a seguir, de liberação dos graus de liberdade e explica:

$j = 1 \text{ até } 6$

$\quad Se\ j \neq l$

$\quad\quad m = k_{jl}/k_{ll}$

$\quad\quad k = 1 \text{ até } 6$

$\quad\quad k_{ji} = k_{ji} - m * k_{li}$

$\quad\quad a_j = a_j - m * a_l$

$k = 1 \text{ até } 6$

$k_{li} = 0$

$a_j = 0$

Sendo:

j, i → Termos da coluna e linha respectivamente

k → Matriz de rigidez local

a → Vetor de forças

l → Termo o qual deseja liberar ; m → Coeficiente de ponderação

Soriano (2005) explica o seguinte:

> " Fez-se, assim, uma simples substituição do deslocamento liberado nas demais equações de equilíbrio da barra, como em resolução de sistema de equações algébricas pelo método de eliminação de Gauss, impondo a condição de ser nulo o esforço na direção desse deslocamento. Com isso, a partir do modelo de barra biengastada, obtêm-se $\boldsymbol{k_{ji}}$ e $\boldsymbol{a_j}$ que são, respectivamente, os coeficientes genéricos da matriz de rigidez $\boldsymbol{k}$ e do vetor dos esforços de engastamento perfeito $\boldsymbol{a}$, da barra com a referida liberação. p.144 "

2.6.7 Matriz de Rigidez e Vetor de forças globais da estrutura

No tópico 2.6.5 foram demonstrados os processos de transformação das matrizes locais para as matrizes globais da barra.

Os coeficientes da matriz de rigidez $[k]$ de uma barra contribuem apenas para os termos da matriz de rigidez global $[K]$ associados às coordenadas das barras no eixo globais a partir do nó inicial e final da barra.(MARTHA, 2017)

A montagem da matriz de rigidez global é feita através da equação 2.11. Essa equação soma coeficientes da matriz de rigidez de cada barra, que possuam o mesmo grau de liberdade. Esta soma é inserida na matriz de rigidez global da estrutura. Este processo de montagem da matriz de rigidez global é chamado de espalhamento. Tendo em vista ordenar os elementos dessa matriz conforme a numeração dos graus de liberdade antes definidos.

$$[K] = \sum_{barras} [k]_{barra} \tag{2.11}$$

Sendo:

$[K]$ → *Matriz de rigidez global da estrutura*

O vetor de forças globais é definido a partir das forças incidentes, na estrutura global, e de cargas internas, como o carregamento distribuído. O espalhamento do vetor de forças locais no vetor de forças globais é semelhante ao da matriz de rigidez, porém existe o acréscimo das cargas incidentes globais (cargas nodais). A equação 2.12 mostra isso:

$$\{F\} = \sum_{barras} \{fe\}_{barras} + \{P\} \tag{2.12}$$

Sendo:

$\{F\}$ → *Vetor das forças global da estrutura*

$\{fe\}$ → *Vetor de cargas equivalentes nodais de uma barra no sistema global*

$\{P\}$ → Vetor das cargas nodais propriamente ditas no sistema global

O vetor $\{fe\}$ é um conjunto de forças e momentos que atua nos nós adjacentes a uma barra, resultante do transporte do carregamento que atua no interior da barra. As cargas equivalentes nodais correspondem a reações de engastamento perfeito da barra carregada transportadas para os nós, com sentidos invertidos vistos no tópico (2.6.3) (MARTHA, 2017).

O Vetor $\{P\}$ é o conjunto de forças e momentos externos que atua diretamente sobre os nós. Considerando todos os graus de liberdade do modelo, inclusive os que têm restrição de apoio, a dimensão desse vetor é igual à dimensão do vetor das forças nodais generalizadas. (MARTHA, 2017).

Sobre a numeração dos graus de liberdade nas barras Martha (2017) explica que existem várias formas para se numerar os graus de liberdade, isso dependerá da técnica usada para resolver o sistema de equações globais.

O tópico 3.3 irá apresentar a ideia usada neste trabalho para a numeração dos graus de liberdade.

2.6.8 Determinação das reações de apoio e esforços internos

Com a matriz de rigidez $[K]$ e o vetor de forças $\{F\}$ da estrutura global já formados, pode-se iniciar os cálculos a partir da equação 2.13 ,apresentada por HIBBELER (2013)

$$\{F\} = [K] \cdot \{D\} \tag{2.13}$$

Sendo:

$\{F\}$ → *Vetor das forças global da estrutura*

$[K]$ → *Matriz de rigidez global da estrutura*

$\{D\}$ → Vetor das deslocabilidades *globais da estrutura*

Antes de prosseguir com a determinação Martha (2017) explica a equação (2.13) dizendo que o equilíbrio da estrutura global só pode ser alcançado se todos os nós isolados estiverem em equilíbrio. A ideia de equilíbrio dos nós isolados é a ideia base do método da rigidez direta.

Hibbeler (2013) mostra na equação 2.14 a divisão realizada na matriz de rigidez e nos vetores de força e deslocamento, separando-os pelos graus de liberdade restringidos e não restringidos. Essa divisão será exemplificada no tópico 3.9:

$$\left\{\begin{array}{c} F_k \\ \hline F_u \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right] \cdot \left\{\begin{array}{c} D_u \\ \hline D_k \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

Sendo:

F_k, D_k → *Cargas externas e deslocamentos conhecidos.*

F_u, D_u → *Cargas e deslocamentos desconhecidos.*

K → *Matriz de rigidez da estrutura.*

Em outras palavras, pode-se entender as cargas e deslocamentos como:

F_k → *Cargas nos nós da estrutura global.*

D_k → *Deslocamentos dos apoios.*

F_u → *Reações de apoio.*

D_u → *Deslocamentos nodais.*

Expandindo a equação 2.14 pode-se obter:

$$F_k = K_{11}D_u + K_{12}D_k \tag{2.15}$$

$$F_u = K_{21}D_u + K_{22}D_k \tag{2.16}$$

Rearranjando a equação 2.6.8.3 encontra-se os deslocamentos:

$$D_u = [K_{11}]^{-1} * (F_k - K_{12}D_k)$$

Antes de apresentar a formulação para obtenção dos esforços internos o conceito envolvido é expresso por Martha (2017, p.24) da seguinte maneira:

> " Esforços internos em uma estrutura reticulada representam as forças e momentos de ligação entre partes separadas por um corte em uma seção transversal da estrutura. Esforços internos também são integrais de tensões ao longo de uma seção transversal de uma barra. "

A nomenclatura destes esforços é dada a seguir:

N → *Esforço normal (esforço interno axial ou longitudinal)*

Q → *Esforço cortante (esforço interno transversal)*

M → *Momento fletor (esforço interno de flexão)*

Martha (2017) explica que os esforços internos finais em uma barra descarregada são obtidos utilizando somente os resultados da análise discreta do caso 2 (ver tópico 2.6.3). Ele continua dizendo que os esforços internos dependem apenas das deformações que a barra sofre e estas são definidas pelas deslocabilidades locais.

A partir dessas informações pode-se chegar a equação 2.17 que expressa os esforços internos para cada barra da estrutura.

$$\{E_i\} = [R] \cdot [k] \cdot \{D_n\} + [R] \cdot \{Q_d\} \quad (2.17)$$

Sendo:

$\{E_i\}$ → *Vetor de esforços internos da barra*

$[R]$ → *Vetor de rotação*

$[k]$ → *Matriz de rigidez da barra no sistema global*

$\{D_n\}$ → *Deslocamentos nos nós da barra*

$\{Q_d\}$ → *Carga distribuída nodal (ver tópico 2.6.3)*

2.7 Ftool

As informações citadas neste tópico foram retiradas do site de apoio do próprio programa Ftool, podendo ser encontradas no seguinte site:

https://www.ftool.com.br/Ftool/site/about

O *software* Ftool é um programa usado para análise de estruturas de pórticos planos, criado pelo professor Luiz Fernando Martha do departamento de engenharia Civil da PUC-Rio. A ideia inicial desse projeto possuía um enfoque educacional, mas com o passar do tempo se tornou uma ferramenta usada para projetos profissionais.

A utilização desse software, neste trabalho, é de extrema valia, pois ele será usado para a validação do código realizado. Após isso o *software* desenvolvido estará habilitado a ser uma ferramenta para o usuário.

Dos muitos recursos apresentados no Ftool os principais são:

- Apresentação dos diagramas de esforços internos, deformadas e os valores das reações de apoio.
- Possibilidade de definir diversos tipos de seções transversais.
- Cargas térmicas entre outros.

Este software foi escolhido pela variedade de ferramentas apresentadas e disponibilidade do mesmo por possuir uma versão gratuita.

2.8 JavaScript

É uma linguagem de programação criada pela empresa Netscape em 1995 cujo principal objetivo era tornar os sistemas Web mais interativos. Com esta linguagem os programas podem, por exemplo, validar os valores inseridos pelo usuário no navegador do cliente, sem a necessidade de efetuar uma requisição ao servidor [GOODMAN, 2001].

Flanagan (2011). Destaca a versatilidade desta linguagem de programação:

> "A ampla maioria dos sites modernos usa JavaScript e todos os navegadores modernos – em computadores de mesa, consoles de jogos, tablets e smartphones – incluem interpretadores JavaScript, tornando-a a linguagem de programação mais onipresente da história. JavaScript faz parte da tríade de tecnologias que todos os desenvolvedores Web devem conhecer: HTML, para especificar o conteúdo de páginas Web; CSS, para especificar a apresentação dessas páginas e JavaScript, para determinar o comportamento delas. p,1"

As principais características do JavaScript são:

- É uma linguagem de alto nível utilização uma vez que possui tipagem dinâmica, ou seja, não existe a necessidade de declarar os tipos das variáveis previamente.
- O seu código fonte não precisa ser compilado para código de máquina por se tratar de uma linguagem interpretada que possui o seu interpretador rodando nativamente em todos os navegadores modernos.
- Os programas desenvolvidos são executados diretamente no navegador do cliente.

Segundo Morrison (2008), o JavaScript permite manipular tudo que é renderizado por um navegador. Ele é capaz de capturar praticamente todas as ações do usuário em uma página web. Por ser considerado um "meio de comunicação" entre o usuário e a página, o JavaScript é lido, renderizado e executado dentro do navegador. Ou seja, ele trabalha do lado do cliente na maioria de suas utilizações. Isso pode ser considerada uma vantagem do ponto de vista de que a comunicação se torna mais rápida, por estar do lado do cliente.

Neste projeto, será utilizada a linguagem JavaScript devido a sua característica de permitir que o algoritmo desenvolvido para o cálculo dos esforços em estruturas planas seja utilizado em praticamente qualquer dispositivo com acesso à internet.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Como todo produto, houve a ideia de batizar o programa desenvolvido com um nome que o pudesse representar. O nome escolhido foi JAWS, a ideia por trás desse nome, era unir a primeira letra do nome de cada integrante do projeto, desde o orientador aos alunos, a última letra corresponde ao nome Estrutura, porém na língua inglesa ”*Structure*”.

A etapa que se segue tem por finalidade descrever os procedimentos usados para a solução deste projeto.

O método da rigidez direta com a liberação dos graus de liberdade foi o método usado, pois, este facilita a programação, visto que o mesmo impõe a necessidade de implementação de apenas uma matriz de rigidez e um vetor de forças para cada barra, sendo esta a de engaste perfeito (tópico 2.6.5).

O código foi escrito em JavaScript, o que é uma linguagem de alto nível, facilitando o processo, já que a mesma dispõe de muitas bibliotecas. Foram usadas bibliotecas matemáticas e de interface gráfica, no entanto por se tratar de um programa especifico e incomum nessa linguagem, algumas funções tiveram que ser realizadas de forma manual, criando com isso bibliotecas próprias.

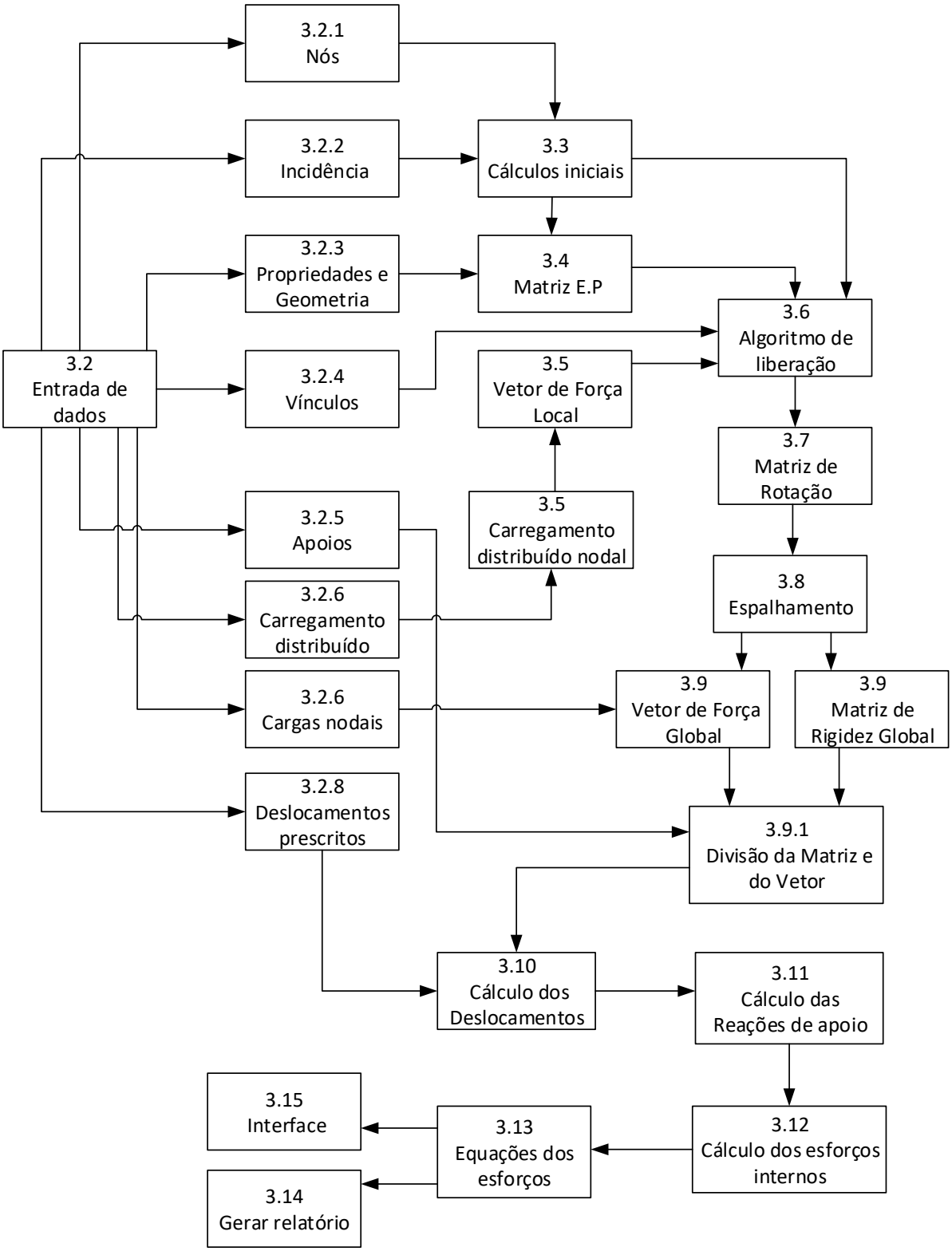
Após a implementação do código houve a necessidade de se comparar os resultados obtidos com um software reconhecido no meio acadêmico e comercial. A validação foi realizada em três partes, cada parte compara os resultados de um tipo de estrutura com diversos carregamentos e vinculações.

Os tópicos que se seguem mostram de forma detalhada a lógica do programa desenvolvido.

3.1 Etapas do programa

A figura 8 ilustra a resolução do problema proposto.

Figura 7 – Lógica de resolução



(Fonte: os autores)

3.2 Entrada de dados

Para a solução de qualquer problema proposto pelo usuário, é necessário definir todos os dados constantes ou conhecidos, sendo assim, o programa em foco possui as seguintes entradas:

3.2.1 Nós

Podendo ser chamada de coordenadas dos pontos no plano de desenho, essa entrada possibilita o usuário definir os nós de conexão das barras. O usuário deverá definir a localização do ponto em termos das coordenadas cartesianas X e Y.

3.2.2 Incidência de barras

Para essa entrada o usuário definirá o início e o final das barras. Ele poderá fazer isso indicando ao programa qual nó é o inicial e qual nó é o final.

3.2.3 Propriedades e geometria

As propriedades de cada barra são definidas por sua geometria e material. As seções mais comuns são do tipo I, L, H, U entre outras. Os materiais mais comuns são o concreto, aço e madeira. O conhecimento prévio das propriedades mecânicas e físicas de uma determinada seção agiliza o processo de aplicação do modelo estrutural no *software*, sendo assim, o usuário apresentará tais valores na entrada dos dados

Com essa ideia em mente, o usuário definirá as seguintes propriedades, momento de inércia, módulo de elasticidade e área da seção transversal de cada barra.

3.2.4 Vinculações da barra

Esse parâmetro define se a barra possui rótulas ou engaste em suas extremidades.

3.2.5 Apoios

O usuário pode definir a vinculação externa da estrutura global, podendo restringir todos ou apenas um grau de liberdade de um determinado nó.

3.2.6 Cargas Nodais

As cargas aplicadas nos nós, podem ser definidas pelo usuário como uma força horizontal, vertical, momento concentrado ou um arranjo desses três.

3.2.7 Cargas distribuídas

As cargas distribuídas ao longo do comprimento da barra podem ser constantes ou com variação linear. O usuário poderá definir isso ao escolher o valor inicial e final da carga. O eixo o qual essa carga irá respeitar será definido pelo usuário. Os eixos poderão ser definidos como global ou local.

3.2.8 Deslocamentos prescritos

Estas entradas possibilitam definir deslocamentos conhecidos nos apoios.

Cada entrada de dado pode ser melhor compreendida no manual do usuário, este é apresentado no anexo.

3.3 Cálculos Iniciais

Com o término da entrada dos dados, o programa inicia a sequência de cálculo, identificando e numerando os nós. Cria-se um vetor de zeros, com um certo intervalo. Esse intervalo de números é definido pela quantidade de nós.

Sabe-se que cada nó pode restringir três graus de liberdade, ou seja, uma barra simples, bi engasgada em um plano, poderá possuir um vetor de no máximo seis números, que representarão a soma dos três graus de liberdade de cada nó.

Para que a aplicação do método da rigidez direta, os primeiros números crescentes, que se iniciam no zero, devem ser reservados a nós sem restrição. Por consequência, os últimos, dessa série de números crescentes, são para os que possuem tais restrições. Vale ressaltar que exemplo da barra biengastada mostra que a mesma não possui nenhum vínculo interno, para esse caso os nós da barra não possuirão deslocamentos.

Para uma barra com engaste no lado esquerdo e um apoio do tipo 1 no lado direito (figura 9), o primeiro número do vetor será reservado para o grau de liberdade horizontal e segundo para o momento.

O algoritmo sempre inicia a verificação dos nós com a vinculação externa horizontal seguido da vertical, terminando com o momento. Isso é uma definição do método adotado.

Figura 8 - Exemplo de identificação dos nós



(Fonte: Os autores)

A ideia desse algoritmo é analisar toda a estrutura, vendo, em cada nó, quais os graus de liberdade estão restringidos. O programa insere no vetor, criado anteriormente, o valor de “1” caso este grau de liberdade esteja restringido, caso não, o valor dele será “0”.

Após essa etapa, o mesmo reanalisa a estrutura substituindo os valores iguais a zero do vetor, por valores crescentes que começam em zero e vão até um valor máximo de graus de liberdade não restringidos. Com o término desse processo, os graus de liberdade restantes são numerados de forma crescente.

Essa numeração começa com o valor máximo de graus de liberdade não restringidos e termina com o total de nós multiplicado por três menos um. Essa subtração

deve ser levada em consideração pois, a linguagem de programação, em geral, inicia a contagem do zero.

Após a identificação dos nós o programa inicia a segunda etapa de cálculo.

A partir dos dados do usuário como, os nós e a as incidências, que são caracterizadas pelo início e final dos nós, o programa pode iniciar os cálculos trigonométricos das barras, tendo por resultado suas inclinações e comprimentos.

A formulação para a obtenção destes resultados é expressa nas equações 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3

$$L = \sqrt{\left(X_j - X_i\right)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \tag{3.3.1}$$

$$\lambda_x = \cos\theta = \frac{X_j - X_i}{L} \tag{3.3.2}$$

$$\lambda_y = \operatorname{sen}\theta = \frac{Y_j - Y_i}{L} \tag{3.3.3}$$

Sendo:

X_i → *Coordenada no eixo horizontal global no início da barra*

X_j → *Coordenada no eixo horizontal global no final da barra*

Y_i → *Coordenada no eixo vertical global no início da barra*

Y_j → *Coordenada no eixo vertical global no final da barra*

L → *Comprimento da barra*

λ_x → *Coeficiente de inclinação da barra no eixo horizontal global*

λ_y → *Coeficiente de inclinação da barra no eixo vertical global*

Com a obtenção desses dados pode-se obter a matriz de engaste perfeito.

3.4 Matriz de rigidez de engaste perfeito (E.P)

Com o método descrito na fundamentação teórica (tópico 2.6.5) é possível definir a matriz de rigidez local de cada barra considerando que a mesma possui um

engaste perfeito em ambas extremidades, com o intuito de realizar, posteriormente, a liberação desses graus de liberdade de acordo com a vinculação interna definida pelo usuário.

Para uma barra bi engastada a matriz de rigidez é apresenta na equação 2.3, repetida a seguir:

$$\begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12\,EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12\,EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12\,EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12\,EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EA/L \end{bmatrix}$$

3.5 Carregamento distribuído nodal e Vetor de forças Local

O cálculo do carregamento distribuído se inicia com o parâmetro de disposição das cargas, ou seja, de acordo com a escolha do usuário, o programa calculará o carregamento distribuído no eixo global ou local.

Após a escolha do eixo, o programa inicia o processo de cálculo com o intuito de transformar a carga distribuída ao longo do eixo em cargas nodais, sendo que este processo é demostrado abaixo.

A partir dos coeficientes de carga para uma barra biengastada com um carregamento distribuído constante e linear ao longo do seu comprimento, como descritos no tópico 2.6.3, pôde-se definir um sistema misto, ou seja, um carregamento trapezoidal. Esse carregamento misto nada mais é do que a soma das duas situações mencionadas acima. Isto posto, as cargas nodais para uma barra bi engastada com carregamento trapezoidal é expressa pelos conjuntos de equações: 3.1 a 3.6.

$$Hi = \left(\left(L * \frac{vxq}{6}\right) + \left(L * \frac{qxi}{2}\right)\right) \tag{3.1}$$

$$Vi = \left(\frac{3*vyq*L}{20}\right) + \left(\frac{qyi*L}{2}\right) \tag{3.2}$$

$$Mi = \left(vyq * \frac{L^2}{30}\right) + \left(qyi * \frac{L^2}{12}\right) \tag{3.3}$$

$$Hf = \left(L * \frac{vxq}{3}\right) + \left(L * \frac{qxi}{2}\right) \quad (3.4)$$

$$Vf = \left(\left(7 * vyq * \frac{L}{20}\right) + \left(qyi * \frac{L}{2}\right)\right) \quad (3.5)$$

$$Mf = -\left(\left(vyq * \frac{L^2}{20}\right) + \left(qyi * \frac{L^2}{12}\right)\right) \quad (3.6)$$

Sendo:

O índice "i" o nó inicial e "f" o nó final.

H, V, M; Carga horizontal, vertical e momento nodal respectivamente.

qxf ; carga distribuída em x.

qyf ; carga distribuída em y.

$vxq = qxf - qxi \;\; ; \;\; vyq = qyf - qyi$

Após esse processo de transformação, a carga horizontal, vertical e momento nodal são dispostos no vetor de forças local.

3.6 Algoritmo de liberação dos graus de liberdade

Conhecendo a matriz de rigidez local e o vetor de força local, para o caso de apoios engastados, o programa pode iniciar o processo de liberação de graus de liberdade.

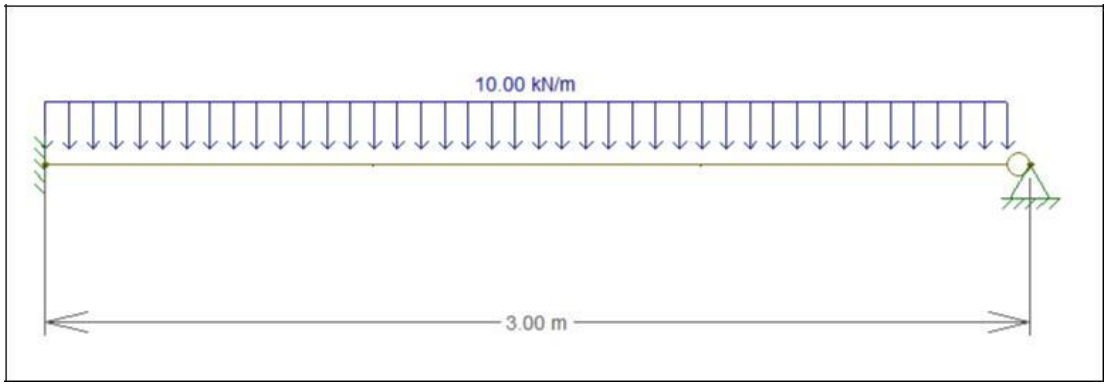
Como explicado no tópico 2.7.6, o algoritmo proposto por Soriano (2005) realiza correções matemáticas para modificar as vinculações internas de cada barra, liberando assim, um grau de liberdade para cada laço de repetição realizado, ou seja, caso o usuário tenha definido, na entrada de dados, uma barra bi rotulada, o programa irá realizar dois laços de repetição, com o propósito de liberar um grau de liberdade por laço.

O exemplo a seguir tem a intenção de demostrar esse processo de liberação.

Exemplo 3.1: Dada a área da seção transversal (A[m²]) igual a 0.09 m², momento de inércia (I[m⁴]) igual a 0.0015188 m⁴, módulo de elasticidade (E[KPa]) igual

a 25E6 e carga distribuída ao longo da barra com o valor de -10 kN/m. Encontrar a matriz de rigidez, para a barra apresentada na figura 10.

Figura 9 - Exemplo proposto de uma viga com vinculações internas do tipo engaste/ rótula



(Fonte: Ftool - 2018)

O primeiro passo do método é definir que todas as vinculações internas da estrutura são do tipo engaste, consequentemente, a matriz de rigidez da barra no eixo local será dada pela equação 2.3.

$$\begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12\,EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12\,EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12\,EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12\,EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EA/L \end{bmatrix}$$

Após a substituição e resolução de cada termo da matriz, se obtém os seguintes resultados:

$$\begin{bmatrix} 7{,}5e5 & 0 & 0 & -7{,}5e5 & 0 & 0 \\ 0 & 16875 & 25313 & 0 & -16875 & 25313 \\ 0 & 25313 & 50625 & 0 & -25313 & 25313 \\ -7{,}5e5 & 0 & 0 & 7{,}5e5 & 0 & 0 \\ 0 & -16875 & -25313 & 0 & 16875 & -25313 \\ 0 & 25313 & 25313 & 0 & -25313 & 50625 \end{bmatrix}$$

Para o vetor de forças, as equações usadas são apresentadas no tópico 2.7.6 na figura 1, ou nas equações 3.1 a 3.6.

Após a substituição dos valores estipulados nas respectivas equações 3.1 a 3.6, pôde-se encontrar o seguinte vetor de forças:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} Hi \\ Vi \\ Mi \\ Hf \\ Vf \\ Mf \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ -7{,}5 \\ 0 \\ -15 \\ 7{,}5 \end{Bmatrix}$$

Com a obtenção da matriz de rigidez e vetor de forças local, pode-se iniciar o método de liberação.

A seguir é reapresentado o algoritmo visto no tópico 2.6.6.

$j = 1\ até\ 6$
  $Se\ j \neq l$
    $m = k_{jl}/k_{ll}$
      $k = 1\ até\ 6$
      $k_{ji} = k_{ji} - m * k_{li}$
    $a_j = a_j - m * a_l$
$k = 1\ até\ 6$
$k_{li} = 0$
$a_j = 0$

Para melhor compreensão da aplicação desse algoritmo, iniciou-se o processo nomeando cada termo da matriz de rigidez e do vetor de forças da forma apresentada a seguir:

$$[k'] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad ; \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

O subscrito de cada termo tem a ideia de definir sua posição na matriz, através da numeração da linha (j) e da coluna (i).

Antes de iniciar o processo deve-se destacar que barras em um plano, possuem matrizes 6x6 por definição (caso geral). Portanto o laço de repetição "j" terá seis repetições.

O processo começa definindo a posição da rótula. O número 3 é dado para rótula que se encontra ao lado esquerdo da barra, sendo o número 6 o direito. Esses números se referem as posições dos momentos na matriz de rigidez dessa barra o qual se deseja liberar. Neste caso a rótula se encontra ao lado direito da figura 9, ou seja, a variável "l" terá o valor de 6.

A seguir será exemplificado o algoritmo a partir do segundo laço de repetição da variável "j" e também da variável "i". Desse modo o algoritmo apresentará, para esses casos, os termos a seguir:

$$
\begin{array}{l}
j = 2 \\
\quad Se\ j \neq 6 \\
\quad\quad m = k_{26}/k_{66} \\
\quad\quad\quad i = 2 \\
\quad\quad\quad k_{22} = k_{22} - m * k_{61} \\
\quad\quad a_2 = a_2 - m * a_6 \\
\quad i = 2 \\
\quad k_{62} = 0 \\
\quad a_6 = 0
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{l}
j = 2 \\
\quad Se\ j \neq 6 \\
\quad\quad m = 25313/50625 \\
\quad\quad\quad i = 2 \\
\quad\quad\quad k_{22} = 16875 - m * 25313 \\
\quad\quad a_2 = (-15) - m * 7{,}5 \\
\quad i = 2 \\
\quad k_{62} = 0 \\
\quad a_6 = 0
\end{array}
$$

O laço de repetição responsável pelas linhas (j) ocorrerá seis vezes. Como cada linha possui seis colunas o laço de repetição "i" dentro do laço "j" ocorrerá também seis vezes. No total, serão 36 substituições. A matriz de rigidez e o vetor de forças apresentados a seguir já possuem todas as substituições mencionadas. Os valores em negritos são os encontrados quando a variável "j" e "i" são respectivamente iguais a "2".

$$
[k'] = \begin{bmatrix}
7{,}5e5 & 0 & 0 & -7{,}5e5 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{4218,7} & 12656 & 0 & -4218{,}7 & 0 \\
0 & 12656 & 37969 & 0 & -25313 & 0 \\
-7{,}5e5 & 0 & 0 & 7{,}5e5 & 0 & 0 \\
0 & -4218{,}7 & -12656 & 0 & 4218{,}7 & 0 \\
0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} ; \quad \{f'\} = \begin{Bmatrix}
0 \\ \mathbf{-18,75} \\ -11{,}25 \\ 0 \\ -11{,}25 \\ \mathbf{0}
\end{Bmatrix}
$$

Pode-se notar que a matriz[k'] e o vetor {f'} apresentados, possuem valores nulos para todos os termos que possuem o índice ”6”, isso ocorre, pelo fato do algoritmo eliminar a influência da rotação do vínculo interno da barra, acrescentando essa influência nos demais termos da matriz. À vista disso a matriz deixa de ser biengastada e passa a ser engaste – rótula.

3.7 Matriz de rotação

Seguindo a linha lógica do método apresentado ao longo do tópico 2.6.5, existe a necessidade de rotacionar a matriz de rigidez local corrigida, apresentada no tópico 3.6, a fim de realizar a transferência do posicionamento local para o global, preparando-a para a espalhamento. A seguir, pode-se ver a matriz mencionada.

Sabe-se que:

$$\lambda_y = \operatorname{sen}\theta \ ; \ \lambda_x = \cos\theta$$

Logo a equação 2.5 pode ser rescrita da seguinte forma:

$$[R] = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da equação 2.9, pode-se obter a matriz de rigidez da barra em termos globais.

$$[k] = [R]^T \cdot [k'] \cdot [R]$$

3.8 Espalhamento de matrizes e vetores

Com o término do processo exibido no tópico 3.7, o programa pode realizar o espalhamento da matriz de rigidez da barra em coordenadas globais para a matriz de rigidez da estrutura global. Sabe-se que cada barra possuirá uma matriz local, logo, o espalhamento consiste em somar os termos de cada uma dessas matrizes a fim de gerar uma matriz única. Porém, a soma ocorre apenas para termos que possuem o mesmo índice matricial. Esse índice é gerado na identificação dos graus de liberdade demostrados no tópico 3.3

Tendo o exemplo 3.1 como base, pode-se notar o índice matricial na matriz de rigidez da barra no eixo global apresentada na figura 11. Os números que estão dispostos tanto na parte superior quanto na lateral direita da figura estão se referindo a numeração dada anteriormente pela identificação das deslocabilidades da estrutura. Os números de 1 a 3 estão referenciando o nó da esquerda da barra e os números restantes o nó da direita.

Figura 10 - Matriz de rigidez da barra orientada no eixo global

1	2	3	4	5	0	
7,50E+05	0	0	-7,5E+05	0	0	**1**
0	4218,7	12656	0	-4218,7	0	**2**
0	12656	37969	0	-12656	0	**3**
-7,50E+05	0	0	7,50E+05	0	0	**4**
0	-4218,7	-12656	0	4218,7	0	**5**
0	0	0	0	0	0	**0**

(fonte: Os autores)

Neste caso, o exemplo apresenta apenas uma barra, isso implica em uma matriz global da estrutura com o mesmo tamanho da anterior. Na figura 11 é possível vê-la.

Figura 11 - Matriz de rigidez global da estrutura organizada

0	1	2	3	4	5	
0	0	0	0	0	0	**0**
0	7,50E+05	0	0	-7,5E+05		**1**
0	0	4218,7	12656	0	-4218,7	**2**
0	0	12656	37969	0	-12656	**3**
0	-7,50E+05	0	0	7,50E+05	0	**4**
0	0	-4218,7	-12656	0	4218,7	**5**

(fonte: os autores)

A diferença aqui é o índice matricial, pois aqui ele se encontra em ordem crescente.

Cabe relembrar que o índice matricial da barra é definido através da identificação dos graus de liberdade. Para satisfazer o método da rigidez direta o índice matricial da matriz global deve ser em ordem crescente, como apresentado na figura 11. Para o vetor de forças ocorre o mesmo procedimento.

3.9 Matriz de Rigidez e Vetor de forças global

Após o espalhamento das matrizes e vetores existe a necessidade da criação de submatrizes da matriz global, para que então, se possa prosseguir com a resolução do método.

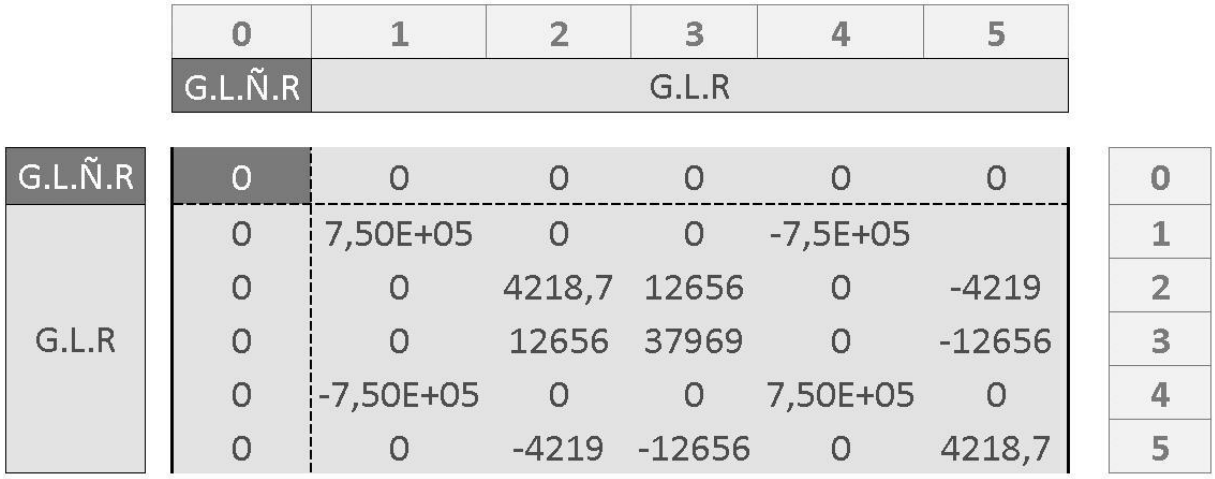
O tópico que se segue tem o intuito de mostrar essa separação usando como demonstração o exemplo 3.1 (tópico 3.6).

3.9.1 Separação da matriz global e do vetor de Forças

Neste passo o programa cria blocos pré-determinados pela quantidade de vínculos externos restringidos.

A figura 12 mostra a divisão da matriz global a partir do exemplo 1.

Figura 12 - Exemplo de divisão da matriz global



(fonte: os autores)

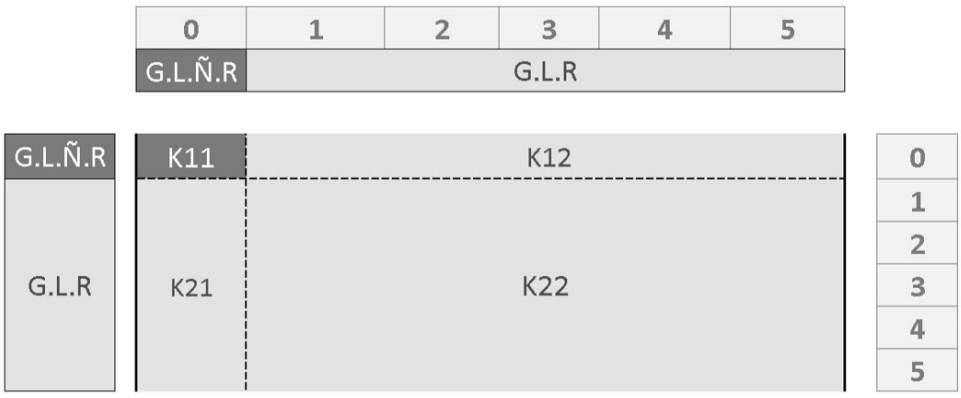
Sendo:

G.L.Ñ.R → *Graus de liberdade não restringidos*

G.L.R → *Graus de liberdade restringidos*

É possível ver na figura 12 quatro divisões. Neste trabalho essas divisões são nomeadas por K11, K12, K21, K22. Como apresentado na figura 13.

Figura 13 - Nomenclatura da divisão matricial



(fonte: os autores)

Essa divisão se faz necessária, pois possibilita a multiplicação entre o vetor de força com a matriz de rigidez, de forma a ter o vetor de deslocamentos como incógnitas, essa relação foi apresentada no tópico 2.6.8.

Para o vetor de forças global essa divisão também ocorre, no entanto, a divisão é realizada apenas em duas partes. A parte com os graus de liberdade não restringidos e a outra com os restringidos.

3.10 Vetor de deslocamentos

O vetor de deslocamento global da estrutura é definido a partir da equação 2.15.

$$F_k = K_{11}D_u + K_{12}D_k$$

Sendo:

$\{F_k\}$ – Vetor de carga

$\{D_u\}$ – Vetor de deslocamentos

$\{D_k\}$ – Vetor de dos deslocamentos prescritos

O deslocamento é função dos blocos K11 e K12, vetores de carga e deslocamentos prescritos. A seguir é demostrado a formulação redesenhada para atender o problema proposto.

$$D_u = [K_{11}]^{-1} * (F_k - K_{12}D_k)$$

3.11 Vetor de reações de apoio

Para o cálculo das reações de apoio a equação 2.16 não necessita ser arranjada, podendo ser calculada de forma direta como visto no tópico 2.6.8. O vetor de

reações de apoio é função dos blocos K21 e K22, dos deslocamentos da estrutura e dos deslocamentos prescritos.

$$\{F_u\} = [k21] * \{D_u\} + [k22] * \{D_k\}$$

Sendo:

$\{F_u\}$ – Vetor de reações de apoio

3.12 Esforços nodais

O cálculo dos esforços nodais na extremidade de cada barra pode ser calculado a partir da equação 2.6.8.5.

$$\{E_i\} = [R] * [k] * \{D_n\} + [R] * \{Q_d\}$$

Sendo:

$\{E_i\}$ – *Vetor de esforços internos da barra*

$\{R\}$ – *Matriz de rotação*

$\{k\}$ – *Matriz de rigidez da barra no sistema global*

$\{D_n\}$ – *Deslocamentos nos nós da barra*

$\{Q_d\}$ – *Carga distribuída nodal (rever tópico 2.6.3)*

Deve-se salientar que este cálculo é feito, de forma isolada, para cada barra. O programa utiliza-se dos valores das cargas distribuídas e dos deslocamentos nodais calculados anteriormente.

3.13 Equações de esforços e deslocamentos

Para a obtenção das equações de cada uma das barras, foram desenvolvidos algoritmos que pudessem integrar equações a partir das cargas previamente estabelecidas, ou seja, após a determinação da carga pelo usuário o algoritmo cria a

equação do carregamento integrando-a até a obtenção da equação dos deslocamentos dessa barra. Cabe mencionar que o processo para a obtenção das equações dos deslocamentos leva em consideração condições de contornos encontradas pelo método da rigidez, consequentemente as equações dos esforços internos, a saber, momento fletor, esforço cortante, esforço axial e rotações são encontradas da mesma forma.

3.14 Relatório de dados

O relatório dos dados é gerado após o término dos cálculos e expressa diversos resultados da estrutura definida pelo usuário. Estes resultados podem ser usados posteriormente como ferramenta de consulta.

Em seguida são listados os dados apresentados no relatório.

- Vetor das reações de apoio
- Deslocamentos nodais de cada barra
- Esforços internos nodais de cada barra
- Equações dos esforços internos
- Equações dos deslocamentos

3.15 Interface com o Usuário

A ideia da interface é facilitar a entrada de dados e possibilitar o usuário observar a estrutura, com os carregamentos e vínculos, definida por ele mesmo. Vale ressaltar que o usuário terá a possibilidade de não gerar o desenho da estrutura. Isso será viável a usuários que possuem um nível maior de conhecimento do método apresentado neste trabalho ou do próprio programa. Essa possibilidade pode agilizar o processo de obtenção dos resultados.

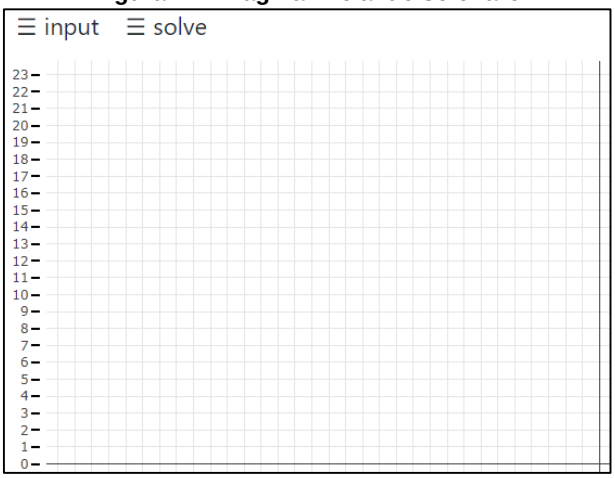
Um dos objetivos do trabalho proposto foi entregar ao usuário um *software* compatível com a maioria dos dispositivos, no entanto, como mencionado no tópico 1.3,

a limitação dos dispositivos encontrados no mercado são os smartphones. Apesar da interface ser, em grande parte, pensada para dispositivos móveis a mesma não deixou de ser compatível em outros dispositivos.

No decorrer dos tópicos a frente será visível que apesar dessa limitação o programa desenvolvido possui uma interface simples, porém coerente, não apenas para dispositivos móveis, mas também para os demais dispositivos.

As figuras apresentadas a seguir irão mostrar a interface proposta.

Figura 14 – Página inicial do software

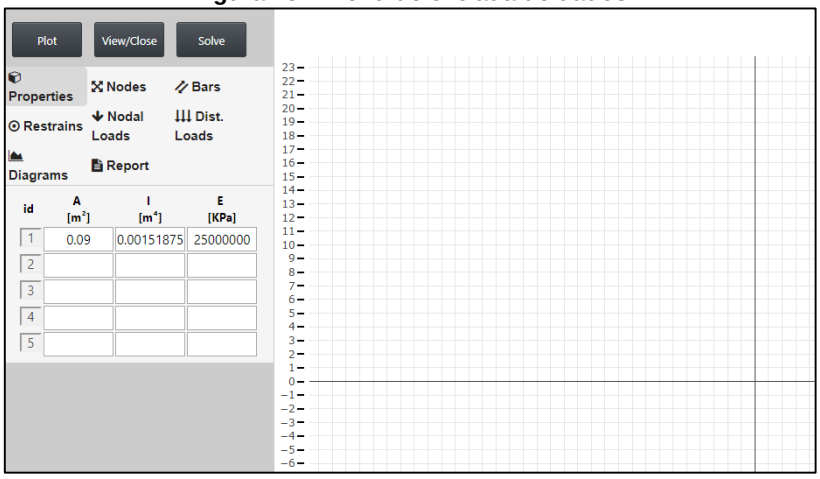


(fonte: os autores)

A figura 14 mostra o primeiro contato que o usuário terá ao abrir o programa pela primeira vez.

Na figura 14 pode-se notar alguns botões sendo o *“input”* o responsável em abrir o menu da entrada de dados.

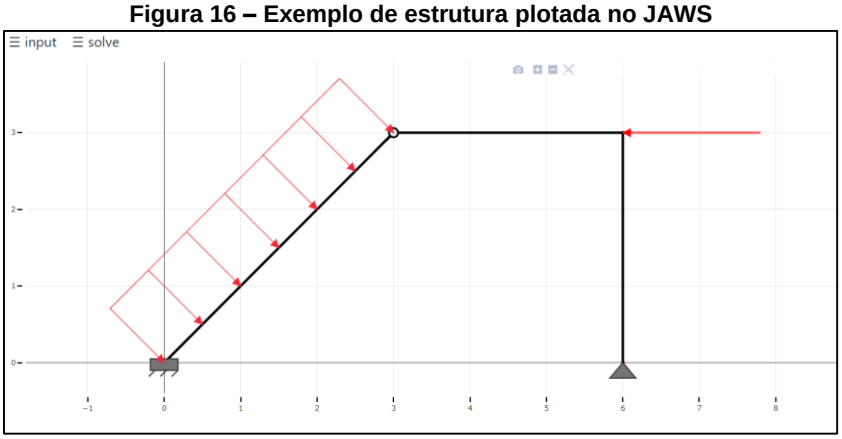
Figura 15 – Menu de entrada de dados



(fonte: os autores)

A figura 15 mostra o menu de entrada de dados e nele pode-se notar algumas abas, sendo estas responsáveis por cada etapa do cálculo. A primeira aba (*Properties*) trata das propriedades no material e geométricas da seção transversal, A segunda (*Nodes*) possibilita o usuário definir os nós da estrutura e assim cada aba tem a responsabilidade de permitir o usuário moldar seu modelo estrutural. As abas e funcionalidades se encontram no MANUAL DO USUARIO no apêndice deste trabalho.

Figura 16 – Exemplo de estrutura plotada no JAWS



(fonte: os autores)

A figura 16 mostra a forma do modelo estrutural maldado na entrada de dados

Figura 17 – Parte do relatório do exemplo da figura 17

EQUACIONAMENTO DA BARRA 1

Função Carregamento Vertical

10.000

Equação Esforço Axial

-3.5355

Equação Esforços Cortantes

$-10.000x + 38.891$

Equação Momentos Fletores

$-5.0000x^2 + 38.891x - 75.000$

Equação das Rotações

$-0.000043896x^3 + 0.00051214x^2 - 0.0019753x$

Equação Deslocamentos Verticais

$-0.000010974x^4 + 0.00017071x^3 - 0.00098765x^2$

Equação Deslocamentos Horizontais

$-0.0000015713x$

(Fonte: os autores)

Após a interação do usuário com o botão “*Solve*” o programa apresenta os resultados, a figura 17 mostra uma parte dos resultados apresentados da estrutura realizada respectivamente. A aplicação detalhada de uma estrutura é apresentada no MANUAL DO USUÁRIO exposto no apêndice desse trabalho.

4 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

Para a validação do código deste projeto, foi necessário se fazer uso de programas reconhecidos no meio acadêmico, sendo que o mais simples e de fácil acesso, foi o Ftool, tópico 2.7.

Para o teste do programa JAWS, foi determinado um modelo estrutural que pudesse ser a base de comparação dos resultados apresentados no programa Ftool e o próprio JAWS. Dessa forma todas as estruturas modeladas apresentarão elementos como: cargas distribuídas e nodais, rótulas e vinculações externas diferenciadas entre outros elementos.

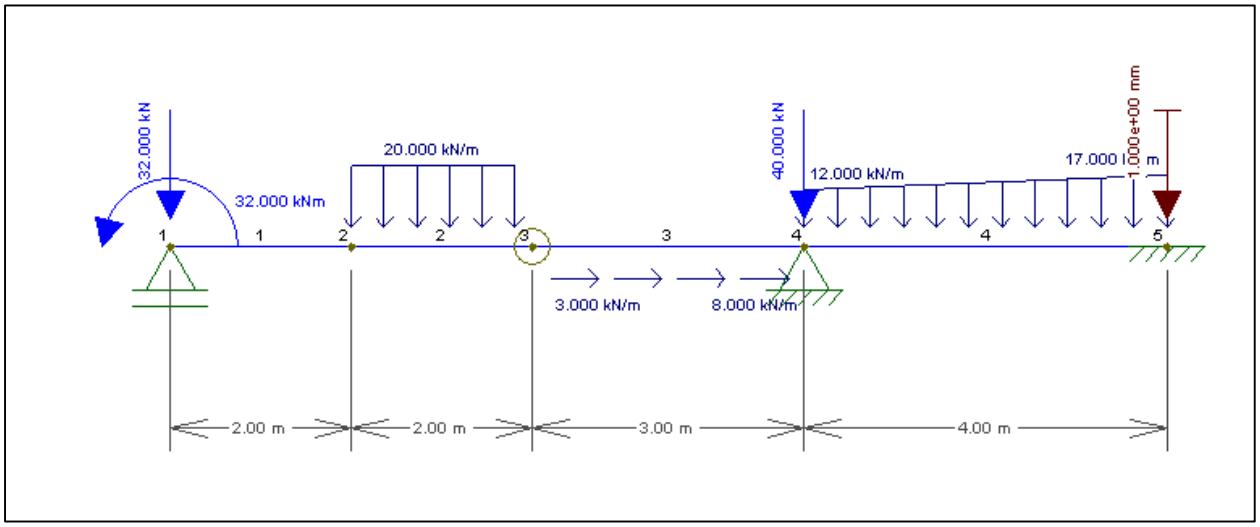
O escopo do trabalho é resolver vigas, treliças e pórticos. Dessa forma, os tópicos a seguir apresentarão, respectivamente, um exemplo de cada uma dessas estruturas. Os seguintes resultados foram encontrados: reações de apoio, deslocamentos nodais e esforços internos nodais. Sendo respectivamente a ordem das tabelas apresentadas em cada tópico.

A ideia da validação é encontrar discrepâncias dos valores obtidos no *software* reconhecido, Ftool, para provar que o programa realizado neste trabalho não possui erros de programação ou conceituais. Dessa forma, após a validação do projeto, o programa estará habilitado para o uso no meio educacional.

4.1 Viga

Para o caso da viga, criou-se o problema apresentado abaixo.

Figura 18 – A Viga Proposta



(fonte: Ftool - 2018)

As reações de apoio, deslocamentos e esforços internos dessa estrutura são apresentadas na tabela abaixo:

Tabela 1 - Reações de Apoio da Viga

Viga			
Nós (j)	Reações		
	Ftool	JAWS	
V1	50	50	kN
H3	-16,5	-16,5	kN
V3	108,53	108,53	kN
H5	0	0	KN
V5	11,47	11,47	kN
M5	10,786	10,786	kN.m

(fonte: Os autores)

Sendo:

V : Reação Vertical
H : Reação Horizontal
M : Momento
j : Respectivos números dos nós apresentados pela figura exemplificada.

Tabela 2 - Deslocamentos da Viga

		Deslocamentos		
Nós (j)		Ftool	JAWS	
1	X	0,00933	0,00933	mm
	R	-1,4480	-1,4482	E-03 rad
2	X	0,00933	0,00933	mm
	Y	-3,95	-3,95	mm
	R	-2,18600	-2,18570	E-03 rad
3	X	0,00933	0,00933	mm
	Y	-7,830	-7,8297	mm
	R	0	0	mm
4	R	0,8716	0,87164	E-03 rad

(fonte: Os autores)

Sendo:

X : Deslocamentos Horizontal
Y : Deslocamentos Vertical
R : Rotação
j : Respectivos números dos nós apresentados pela figura exemplificada

Tabela 3 - Esforços internos da Viga

Esforços internos nas extremidades das Barras (Convenção de Green)							
Barras		Ftool	JAWS		Ftool	JAWS	
1	Ni	0	0	Nf	0	0	kN
	Vi	18	18	Vf	-18	-18	kN
	Mi	32	32	Mf	4	4	kN.m
2	Ni	0	0	Nf	0	0	kN
	Vi	18	18	Vf	22	22	kN
	Mi	-4	-4	Mf	0	0	kN.m
3	Ni	0	0	Nf	-16,5	-16,5	kN
	Vi	-22	-22	Vf	22	22	kN
	Mi	0	0	Mf	-66	-66	kN.m
4	Ni	0	0	Nf	0	0	kN
	Vi	46,53	46,53	Vf	11,47	11,47	kN
	Mi	66	66	Mf	10,786	10,786	kN.m

(fonte: Os autores)

Sendo:

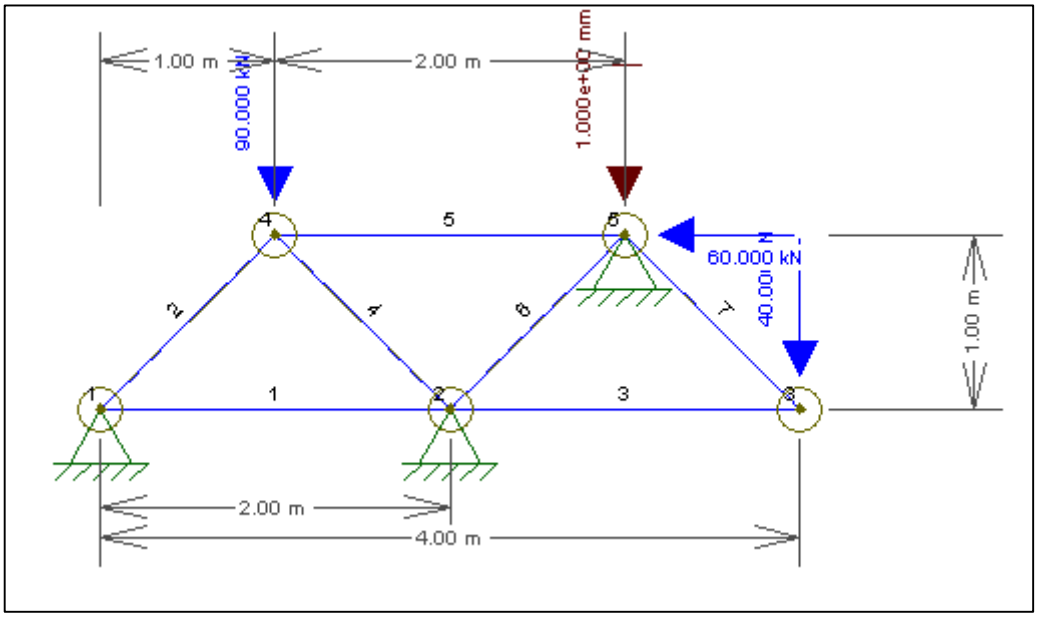
N : Força normal; V : Esforço cortante; M : Momento
i : ponto inicial; f : ponto final

Ao observar os resultados, pôde-se concluir que não houve variação dos valores encontrados em comparação com o Ftool.

4.2 Treliça plana

Para o caso da Treliça criou-se o problema apresentado abaixo.

Figura 19 - A Treliça Proposta



(fonte: Ftool - 2018)

Tabela 4 - Reações de Apoio da Treliça

Treliça			
Nós (j)	Reações		
	Ftool	JAWS	
H1	45	45	kN
V1	45	45	kN
H2	790,495	790,5	kN
V2	840,495	840,5	KN
H5	-775,495	-775,5	kN
V5	-665,495	-665,5	kN

(fonte: Os autores)

Sendo:

V : Reação Vertical

H : Reação Horizontal

M : Momento

j : Respectivos números dos nós apresentados pela figura exemplificada.

Tabela 5 - Deslocamentos da Treliça

		Deslocamentos		
Nós (j)		Ftool	JAWS	
1	R	0	0	E-03 rad
2	R	0	0	E-03 rad
3	X	-0,03556	-0,03556	mm
	Y	-1,086	-1,0858	mm
	R	0	0	E-03 rad
4	X	0	0	mm
	Y	-0,05657	-0,05657	mm
	R	0	0	E-03 rad
5	R	0	0	E-03 rad

(fonte: Os autores)

Sendo:

X : Deslocamentos Horizontal
Y : Deslocamentos Vertical; R = Rotação
j : Respectivos números dos nós apresentados pela figura exemplificada.

Tabela 6 - Esforços internos da Treliça

Esforços internos nas extremidades das Barras (Convenção de Green)							
Barras		Ftool	JAWS		Ftool	JAWS	
1	Ni	0	0	Nf	0	0	kN
	Vi	0	0	Vf	0	0	kN
	Mi	0	0	Mf	0	0	kN.m
2	Ni	63,64	63,64	Nf	-63,64	-63,64	kN
	Vi	0	0	Vf	0	0	kN
	Mi	0	0	Mf	0	0	kN.m
3	Ni	40	40	Nf	40	40	kN
	Vi	0	0	Vf	0	0	kN
	Mi	0	0	Mf	0	0	kN.m
4	Ni	63,64	63,64	Nf	-63,64	-63,64	kN
	Vi	0	0	Vf	0	0	kN
	Mi	0	0	Mf	0	0	kN.m
5	Ni	0	0	Nf	0	0	kN
	Vi	0	0	Vf	0	0	kN
	Mi	0	0	Mf	0	0	kN.m
6	Ni	1125	1125	Nf	-1125	-1125	kN
	Vi	0	0	Vf	0	0	kN
	Mi	0	0	Mf	0	0	kN.m
7	Ni	-56,569	-56,569	Nf	56,569	56,569	kN
	Vi	0	0	Vf	0	0	kN
	Mi	0	0	Mf	0	0	kN.m

(fonte: Os autores)

Sendo:

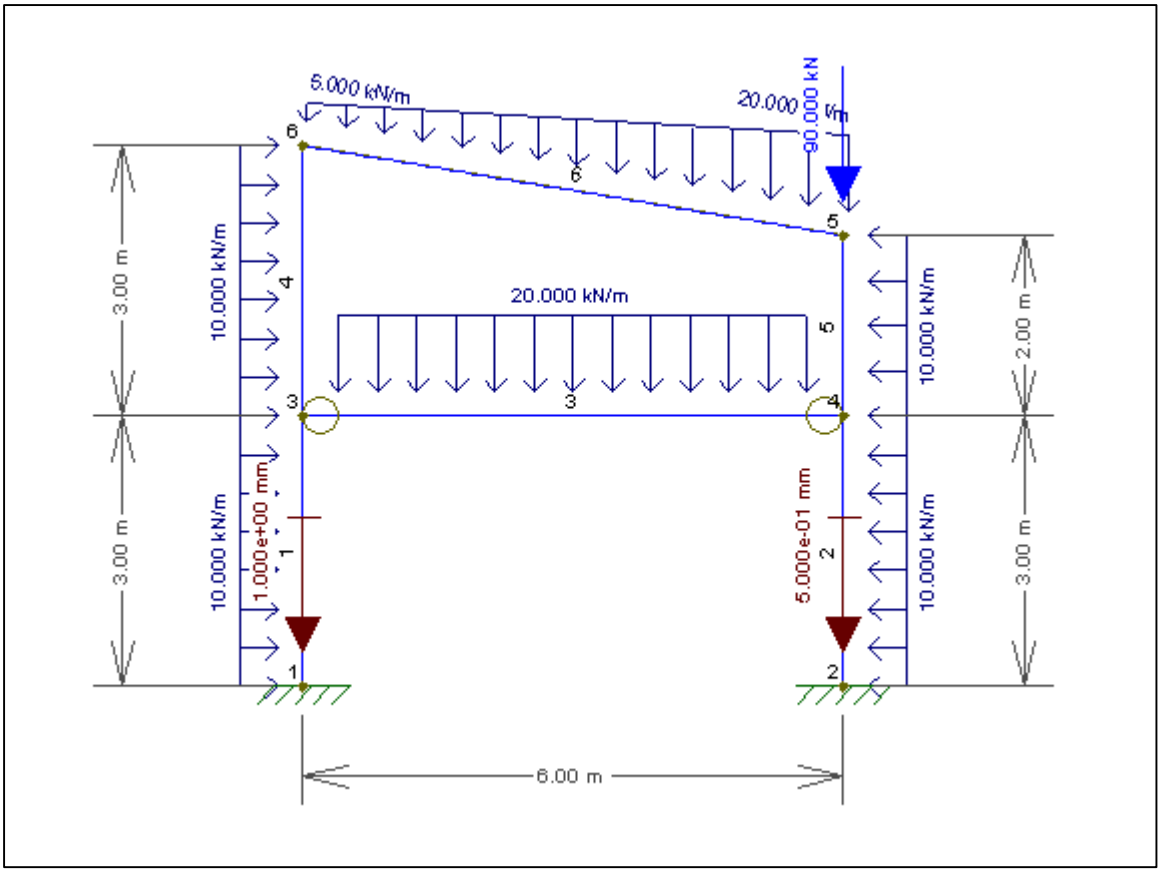
N : Força normal
V : Esforço cortante
M : Momento
i : ponto inicial
f :ponto final

Ao observar os resultados pode-se concluir que não houve variação dos valores encontrados em comparação com o Ftool.

4.3 Pórtico

Para o caso do pórtico criou-se o problema apresentado abaixo.

Figura 20 - O pórtico Proposto



(fonte: Ftool - 2018)

Tabela 7 - Reações de apoio do Pórtico

Treliça			
Nós (j)	Reações		
	Ftool	JAWS	
H1	-23,807	-23,807	kN
V1	84,727	84,727	kN
M1	21,864	21,863	kN
H2	13,807	13,807	KN
V2	201,307	201,31	kN
M2	-0,983	-0,98311	kN.m

(fonte: Os autores)

Sendo:

V : Reação Vertical
H : Reação Horizontal
M : Momento
j : Respectivos números dos nós apresentados pela figura exemplificada.

Tabela 8 - Deslocamentos do Pórtico

		Deslocamentos		
Nós (j)		Ftool	JAWS	
3	X	0,6586	0,65856	mm
	Y	-1,113	-1,113	mm
	R	-0,09113	-0,091121	E-03 rad
4	X	0,631	0,63095	mm
	Y	-0,7684	-0,76841	mm
	R	-0,3735	-0,37349	E-03 rad
5	X	0,757	0,75701	mm
	Y	-0,894	-0,89402	mm
	R	0,5255	0,52551	E-03 rad
6	X	0,7875	0,78744	mm
	Y	-1,146	-1,1459	mm
	R	-0,423	-0,42295	E-03 rad

(fonte: Os autores)

Sendo:

X : Deslocamentos Horizontal
Y : Deslocamentos Vertical
R : Rotação
j : Respectivos números dos nós apresentados pela figura exemplificada.

Tabela 9 - Esforços internos do Pórtico

Esforços internos nas extremidades das Barras (Convenção de Green)							
Barras		Ftool	JAWS		Ftool	JAWS	
1	Ni	84,727	84,727	Nf	-84,727	-84,727	kN
	Vi	23,807	23,807	Vf	6,193	6,1933	kN
	Mi	21,864	21,863	Mf	4,557	4,5568	kN.m
2	Ni	201,307	201,31	Nf	-201,307	-201,307	kN
	Vi	-13,807	-13,807	Vf	-16,193	-16,193	kN
	Mi	-0,983	-0,98311	Mf	4,563	4,5629	kN.m
3	Ni	10,356	10,356	Nf	-10,356	-10,356	kN
	Vi	60	60	Vf	60	60	kN
	Mi	0	-0,000091121	Mf	0	-0,0003749	kN.m
4	Ni	24,727	24,727	Nf	-24,727	-24,727	kN
	Vi	4,162	4,1624	Vf	25,838	25,838	kN
	Mi	-4,557	-4,5567	Mf	-27,956	-27,956	kN.m
5	Ni	141,307	141,307	Nf	-141,307	-141,307	kN
	Vi	5,838	5,8376	Vf	-25,838	-25,838	kN
	Mi	-4,563	-4,5626	Mf	36,238	36,238	kN.m
6	Ni	21,421	21,421	Nf	-33,921	-33,921	kN
	Vi	28,638	28,639	Vf	46,362	46,361	kN
	Mi	27,956	27,956	Mf	-36,238	-36,238	kN.m

(fonte: Os autores)

Sendo:

N : Força normal
V : Esforço cortante
M : Momento
i : ponto inicial
f :ponto final

Ao observar os resultados pode-se concluir que não houve variação dos valores encontrados em comparação com o Ftool.

Com os valores apresentados em todos os exemplos, pode-se afirmar que o programa deste trabalho está apresentando valores coerentes e confiáveis.

5 CONCLUÇÕES

A implementação do método da rigidez direta na linguagem JavaScript se demostrou satisfatória, dado que foram realizados todos os objetivos propostos neste trabalho. Houve dificuldades na implementação gráfica da deformada na estrutura e de outros elementos da interface, gerando horas adicionais de estudo.

O desenvolvimento do relatório de dados superou as expectativas iniciais do projeto por mostrar-se um recurso de extrema valia, ao passo de apresentar não apenas os resultados usuais, mas as equações dos esforços internos de cada barra de forma clara e definida.

Notou-se que a escolha da linguagem JavaScript gerou uma grande mobilidade do programa desenvolvido. Essa mobilidade possibilita aos alunos usarem seus smartphones ou qualquer aparelho que possua um navegador para o uso do programa (JAWS) em aulas de exercício sem a necessidade de uma infraestrutura elétrica, no caso de smartphones.

O tópico 1.3 apresenta alguns itens não aplicados nesse projeto, no entanto esses itens podem ser implementados em trabalhos futuros, já que o código deste programa é aberto para todos.

Com novas atualizações e o uso frequente de professores e alunos em sala de aula o projeto, hoje iniciado, pode se tornar uma ferramenta educacional cada vez melhor para novos alunos da graduação de engenharia civil.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFONSO, P. Ana; LIMA, R. Jorge; COTA, P. Manuel. A Avaliação da Usabilidade de Interfaces Web, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/317888629

DIMES, T., JavaScript: Um Guia para Aprender a Linguagem de Programação. Tradutor: Paulo Alexandre Fernandes. 1ª Ed. Babelcube Books; Edição, 2015.

FLANAGAN, David. JavaScript: O Guia Definitivo. Tradutor: João Eduardo Nóbrega Tirtello. Revisor Técnico: Luciana Nedel.6ª Ed. Rio grande do Sul: Bookman editora, 2013.

GOODMAN, Danny. JavaScript Bible Gold. Ed Gold. Hungry Minds. 2001.

GONÇALVES, Daniel Ferreira. Introdução aos métodos de redução de modelos adaptados a sistemas mecânicos com características não lineares. 86 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização), Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, 2016.

HIBBELER, R. C., Análise das estruturas. Tradutor: Jorge Ritter. Revisor Técnico: Pedro Viana.8ª Ed. São Paulo: Person Education do Brasil, 2013.

LEET, K. M. Fundamentos da análise estrutural. 3. ed. McGraw Hill, 2009. ISBN 978-85-7726-059-1.

MARTHA, L. F., Análise de estruturas: Conceitos e Métodos Básicos. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017.

MORRISON, M. Use a cabeça: JavaScript. Alta Books, 2008. (Use a cabeça!). ISBN 9788576082132. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=oKZtPgAACAAJ

SORIANO, H. L., Estática das estruturas. 2a Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 2010

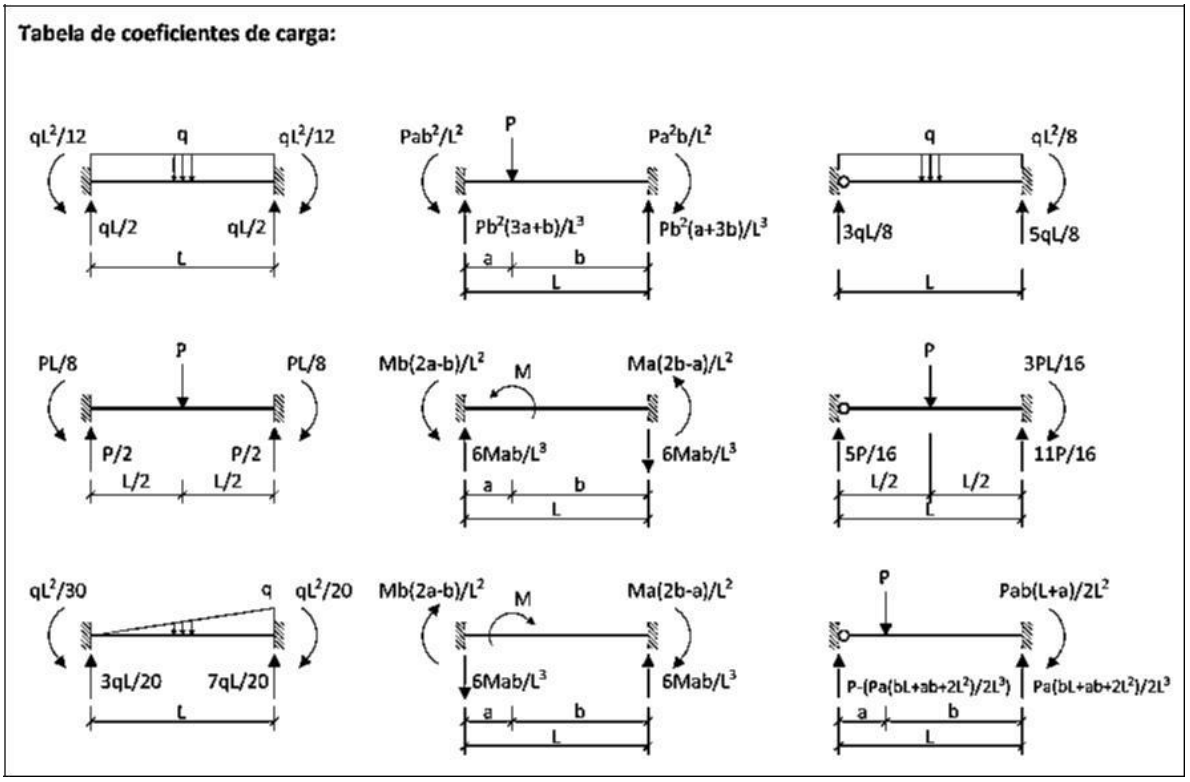
SORIANO, H. L., Análise de estruturas: formulação matricial e implementação computacional. 1a Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 2005

SORIANO, H. L., LIMA, S. S., Análise de estruturas – método das forças e método dos

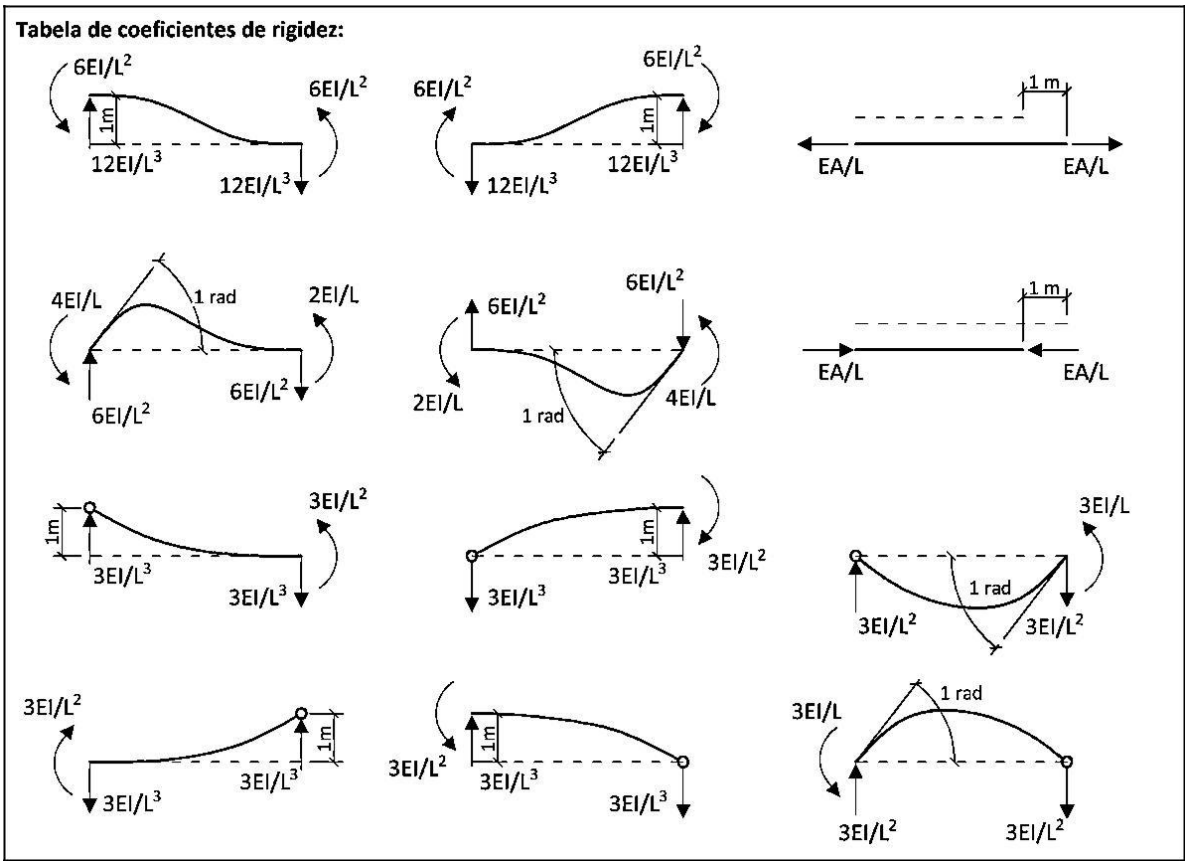
deslocamentos. 1a Ed. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna Ltda. 2004.

VALENTE, J. A. (org.). Computadores e conhecimento: repensando a Educação. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 2ª edição, 1998.

6 ANEXO 1



Fonte: modificado de LEET(2009)



Fonte: modificado de LEET(2009)