UNIVERSIDADE POSITIVO

Erica Damasceno de Almeida

Michele Fonsaca

CRIAÇÃO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL DIDÁTICO PARA CÁLCULO DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS VIA MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM FORMULAÇÃO MATRICIAL (CERBERUS)

Curitiba

2018

Erica Damasceno de Almeida

Michele Fonsaca

CRIAÇÃO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL DIDÁTICO PARA CÁLCULO DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS VIA MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM FORMULAÇÃO MATRICIAL (CERBERUS)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Positivo como requisito parcial à obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: MSc. Juliano Jorge Scremin

Curitiba

2018

RESUMO

Para projetar uma estrutura, é necessário estabelecer as forças internas e deslocamentos em todos os pontos da estrutura, produzidos pelas cargas de projetos. Devido à complexidade desta análise, foi inserido dentro do contexto do cálculo estrutural, o uso de computadores, que se adaptaram facilmente à função devido a utilização de formas matriciais em suas linguagens. Então, é apresentado neste trabalho, o Método da Rigidez Direta em termos da sua formulação matricial e sua implementação computacional para estruturas reticuladas planas e espaciais, com o objetivo de elaborar uma rotina computacional, em linguagem de programação Python, para fins didáticos. Para estabelecer a proposta didática, o software fornece como saída de resultados um relatório que apresenta todas as etapas da análise da estrutura em estudo, como as matrizes de rigidez e vetores de cargas elementares bem como todos os passos de cálculo efetuados para obtenção dos resultados. Por fim, para garantir a confiabilidade do software, vários exemplos foram resolvidos e tiveram seus resultados comparados a outra ferramenta de cálculo consagrada no mercado.

Palavras-chave: Estruturas reticuladas; análise estrutural; método da rigidez.

ABSTRACT

When projecting a structure, it is necessary to stablish a structural the internal forces and displacement in every point, produced by the project loads. Due to the complexity of this analysis it was inserted inside of the context of structural calculus the use of computers, and since they use matrixial forms as their languages, they handle it pretty easily. So, it is shown in this project, The Direct Stiffness Method in terms of its matrixial formulation and its computer implementation for flat and special reticulated structures, as objective, to elaborate a computational routine, using the Python as programming language, for educational purposes. To establish the educational proposal, the software has a result output a report of all the steps taken in the analysis of the structure in study, just as the matrixes of rigidity and the vectors of elementary loads, and all other steps calculated to reach the results. Lastly, to ensure the reliability of the software, various examples were resolved and had their results compared to another prestigious software available on the market.

Keywords: Reticulated structure; Structural analysis; method of stiffness.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Os quatro níveis de abstração 7
Figura 2 - Barra orientada em um eixo espacial 7
Figura 3 - Equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra e direções positivas adotadas para cargas distribuídas e esforços internos. 8
Figura 4 - Superposição de soluções básicas do Método das Forças 7
Figura 5 - Sistema de referência Global 7
Figura 6 - Eixos locais e globais de uma barra 8
Figura 7 - Membro vertical de uma treliça espacial 7
Figura 8 - Rotação de eixos em três dimensões 8
Figura 9 - Sistema de numeração para um pórtico espacial. 7
Figura 10 - Representação de deslocamentos e giros positivos 9
Figura 11 - Superposição dos efeitos 7
Figura 12 - Pórtico plano 7
Figura 13 - Forças nodais equivalentes 8
Figura 14 - Fluxograma do código 10
Figura 15 - Esquema para entrada de dados 8
Figura 16 - Esquema de montagem das matrizes de rotação dos membros da estrutura 8
Figura 17 - Esquema de montagem da matriz de rigidez local 8
Figura 18 - Composição do vetor de cargas nodais ..... **Erro! Indicador não definido.**
Figura 19 - Barra isolada, perfeitamente engastada e com carregamento qualquer 9
Figura 20 - (a) Estrutura Isostática Auxiliar. (b)(c)(d) Casos básicos 8
Figura 21 - Esquema de composição do vetor de ações nodais 8
Figura 22 - Pórtico com barras inclinadas e carregamento nodal 8
Figura 23 - Reações de apoio CERBERUS - exemplo 1. ..... **Erro! Indicador não definido.**
Figura 24 - Reações de apoio SAP 2000 ..... **Erro! Indicador não definido.**
Figura 25 - Comparação da deformada - exemplo 1 9
Figura 26 - Pórtico com barras inclinadas e carregamento no plano xy. 10
Figura 27 - Reações de apoio CERBERUS - exemplo 2 ..... **Erro! Indicador não definido.**
Figura 28 - Reações de apoio SAP2000 - exemplo 2 ..... **Erro! Indicador não definido.**
Figura 29 - Comparação da deformada - exemplo 2 12
Figura 30 - Pórtico com barras inclinadas e carregamentos pontuais.. 13
Figura 31 - Reações de apoio CERBERUS - exemplo 3 ..... **Erro! Indicador não definido.**
Figura 32 - Reações de apoio SAP 2000 – exemplo 3 ..... **Erro! Indicador não definido.**
Figura 33 - Comparação da deformada - exemplo 3 8

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados de reações de apoio (forças) – exemplo 01 8
Tabela 2 - Resultados de reações de apoio (momentos) - exemplo 01. 8
Tabela 3 - Resultados de deslocamentos - exemplo 01 8
Tabela 4 - Resultados de rotações - exemplo 01..... 8
Tabela 5 - Resultados de reações de apoio (forças) - exemplo 02 10
Tabela 6 - Resultados de reações de apoio (momentos) - exemplo 02 11
Tabela 7 - Resultados de deslocamentos - exemplo 02 11
Tabela 8 - Resultados de rotações - exemplo 02..... 11
Tabela 9 - Resultados de reações de apoio (forças) - exemplo 03 8
Tabela 10 - Resultados de reações de apoio (momentos) - exemplo 03 8
Tabela 11 - Resultados de deslocamentos - exemplo 03. 8
Tabela 12 - Resultados de rotações - exemplo 03..... 8

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO 7

1.1.OBJETIVO 8

1.1.1.Objetivo geral 8

1.1.2.Objetivos específicos 8

1.2.JUSTIFICATIVA 8

1.3.ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO 8

1.4.DELIMITAÇÕES DO TRABALHO 8

2.REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 8

3.FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 7

3.1.ENGENHARIA ESTRUTURAL E ANÁLISE ESTRUTURAL 7

3.2.SISTEMAS ESTRUTURAIS 7

3.3.DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA 7

3.4.EQUILÍBRIO DA ESTRUTURA ..... **Erro! Indicador não definido.**

3.5.LEI DE HOOKE; MÓDULO DE ELASTICIDADE 7

3.6.DIAGRAMAS DE ESTADOS SOLICITANTES 7

3.7.RELAÇÃO ENTRE CARGAS, ESFORÇOS CORTANTES E MOMENTOS FLETORES 7

3.9.LIGAÇÕES INTERNAS E LIBERAÇÕES DE CONTINUIDADE 7

3.10.CONDIÇÕES BÁSICAS DA ANÁLISE ESTRUTURAL 7

3.10.1.Condições de equilíbrio 7

3.10.2.Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações 7

3.10.3.Leis constitutivas dos materiais 7

3.11.MÉTODOS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS 7

3.11.1.Método das forças 7

3.11.2.Método da Rigidez 7

3.12.LINGUAGEM PYTHON 8

4.PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 9

4.1.METODOLOGIA DO TRABALHO 9
4.2.METODOLOGIA DO CÓDIGO 8
4.2.1.Fluxograma do código 10
4.2.2.Entrada de dados da estrutura 10
4.2.3.Rotina de renumeração dos graus de liberdade 9
4.2.4.Montagem das matrizes de rotação dos membros da estrutura..... 9
4.2.5.Montagem das matrizes de rigidez local..... 8
4.2.6.Definição do vetor de cargas nodais..... 8
4.2.7.Descontinuidades (Axial, Cisalhante e rotação)..... 8
4.2.8.Montagem da matriz de rigidez global 8
4.2.9.Vetor de Deslocamentos 8
4.2.10.Deslocamentos desconhecidos e reações de apoio 8
5.VALIDAÇÃO DO SOFTWARE 8
5.1.Pórtico com barras inclinadas e carregamento nodal em z..... 10
5.2.Pórtico com barras inclinadas e carregamento distribuído no plano xy local 9
5.3.Pórtico com barras inclinadas, carregamentos distribuídos no eixo xz e liberações de continuidades.....12
6.CONCLUSÃO 9
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 10

1. INTRODUÇÃO

A estrutura é a parte resistente de uma construção, e pode ser definida como uma composição de uma ou mais peças, ligadas entre si e ao meio exterior de forma a compor um sistema em equilíbrio. Logo, a estrutura é um conjunto capaz de receber solicitações externas, absorvê-las internamente e transmiti-las até os seus apoios ou vínculos. Então, visando dimensionar elementos estruturais com a melhor relação custo-benefício e sem comprometer a integridade e a durabilidade do conjunto, é fundamental o desenvolvimento detalhado e crítico do cálculo estrutural destes elementos (MARTHA, 2010).

Para projetar uma estrutura, é necessário estabelecer as forças internas e deslocamentos em todos os pontos da estrutura, produzidos pelas cargas de projetos. Um problema decorrente disso é que, ao se aumentar o grau de complexidade da estrutura, aumenta-se também a complexidade e a grandeza dos cálculos a serem realizados. Então, para mitigar este problema foi inserido, dentro do contexto do cálculo estrutural, o uso de computadores que se adaptaram facilmente à função devido a utilização de formas matriciais em suas linguagens, formas também vistas na análise estrutural, como é o caso dos métodos de análise de flexibilidade e rigidez (MCCORMAC, 2009).

Um projeto estrutural completo parte de uma concepção geral da estrutura e termina com a documentação que possibilita a sua construção. Parte deste projeto envolve o cálculo estrutural, que é o foco principal deste trabalho. Realizar o cálculo de uma estrutura requer a elaboração de um modelo estrutural, que é a idealização do comportamento da estrutura real. Uma possibilidade é a modelagem utilizando um pórtico espacial, cujo domínio geométrico compreende a estrutura como um todo. Definido o modelo estrutural, parte se para o modelo discreto, onde é definido o método de análise e discretizado a estrutura. Criado o modelo discreto, normalmente feito em barras, pode-se fazer uma implementação para se obter um modelo computacional (MARTHA, 2010).

Impulsionados pelo advento da tecnologia e pela disponibilidade de uma gama de ferramentas que possibilitam ao usuário automatizar os processos de cálculo e análise de estruturas, foram desenvolvidos diversos softwares voltados para análise estrutural, como o TQS, Cypecad, Ftool, Ansys, Sap 2000, entre outros. Esses

softwares diminuíram o tempo e os erros decorrentes do processo manual, obtendo assim resultados numéricos e gráficos que jamais seriam possíveis se não houvesse a disponibilidade de uso do computador (MARTHA, 2010).

Dentre as os métodos de análise existentes para o desenvolvimento destes programas, está o método dos deslocamentos, que será utilizado no presente trabalho, e foi também empregado para a composição do Ftool. Outro método bastante utilizado, é o método dos elementos finitos, onde o modelo discreto é obtido através da subdivisão do domínio da estrutura em subdomínios, que é utilizado pelo programa SAP 2000, entre outros (SORIANO, 2005).

Atualmente através da disponibilidade de computadores pessoais, houve uma mudança na forma com que as estruturas são analisadas e projetadas, e em praticamente todas as graduações e escritórios os computadores são utilizados para a resolução de problemas estruturais. Portanto, é de extrema importância que os engenheiros estruturais desenvolvam uma compreensão do comportamento estrutural para que, com alguns cálculos, possam verificar se os resultados da análise feita pelo computador correspondem ao que se espera da estrutura. (LEET; UANG e GILBERT; 2009).

Os conceitos de Engenharia evoluíram e continuam sendo aprimorados, porém, o que mais avançou nesses últimos anos foi a forma como esses conceitos são aplicados no dia-a-dia de um engenheiro. É exatamente nesse contexto que entra em cena o computador, com ele, cálculos inviáveis há algum tempo passaram a ser resolvidos com grande rapidez e eficiência nos dias de hoje. (ALIO KIMURA, 2015).

Diante deste panorama que acaba de ser descrito, torna-se então cada vez mais evidente a necessidade de ensinar e preparar os alunos de Engenharia Civil a manipular corretamente um sistema computacional destinado a estruturas, onde o Engenheiro deve estar apto a utilizá-lo de forma responsável, sabendo distinguir quais são seus benefícios e as suas limitações. E sobretudo, colocar o conhecimento de Engenharia sempre como sua meta principal. Logo, para deixar visível os processos e cálculos realizados pelo programa, foi desenvolvido um relatório com a função de detalhar os procedimentos de cálculo, para assim auxiliar didaticamente, expondo assim a metodologia utilizada para a obtenção dos resultados.

1.1. OBJETIVO

1.1.1. Objetivo geral

Criação de uma ferramenta computacional capaz de calcular esforços e deformações em estruturas reticuladas planas e espaciais, compostas somente de barras retilíneas (treliças, pórticos e grelhas) empregando a vertente matricial do Método da Rigidez (Método dos Deslocamentos) em conjunto com o Método das Forças (Método da Flexibilidade), utilizando para tal a linguagem de programação Python.

1.1.2. Objetivos específicos

- O software desenvolvido se propõe a fornecer como saída de resultados os deslocamentos e esforços nodais dos modelos estruturais bem como as respectivas equações de esforços cortantes, momentos fletores, momentos torçores, rotações e deslocamentos de translação ao longo das barras mediante os carregamentos aplicados;
- Como parte da proposta didática o software fornece como saída de resultados as matrizes de rigidez e vetores de cargas elementares (em coordenadas globais e locais) bem como todos os passos de cálculo efetuados para obtenção dos resultados;

1.2. JUSTIFICATIVA

A revolução tecnológica teve um papel importante na Engenharia de Estruturas, influenciando na maneira como os projetos estruturais são hoje elaborados. Diante deste panorama, torna-se cada vez mais necessário ensinar e preparar os alunos de Engenharia Civil a manipular corretamente um sistema computacional destinado à elaboração de projetos estruturais. No mercado atual de Engenharia Civil, encontram-se os mais diversos e variados softwares voltados para o cálculo estrutural, possuindo como objetivo apenas apresentar o resultado final, sem demonstrar em momento

algum os métodos utilizados no processo de cálculo ou mesmo dizer em qual metodologia eles foram baseados. Pode-se citar como um dos poucos exemplos de programa educacional para análise estrutural no Brasil o programa FTOOL [Martha 2002], para estruturas reticuladas planas (ALIO KIMURA, 2015).

Portanto, esse trabalho tem como justificativa a necessidade de um software que exponha os detalhes de cálculo com o objetivo de auxiliar didaticamente e de forma gratuita, via disponibilização do programa no site de apoio do professor orientador, a todos que têm interesse em aprender ou queiram se aprofundar no método matricial dos deslocamentos voltado às estruturas.

1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é composto por seis capítulos. O primeiro capítulo é a introdução, onde é destacada a importância do tema abordado e os motivos que estimularam a realização do trabalho, para assim motivar pesquisas posteriores.

O segundo capítulo apresenta um resumo dos principais trabalhos correlatos pesquisados, constituindo uma revisão da literatura.

Os conceitos e ferramentas utilizados neste trabalho estão expostos no terceiro capítulo, que é responsável pela fundamentação teórica. Logo, neste capítulo é feita a apresentação de definições e fundamentos da engenharia e da análise estrutural, assim como também descreve os métodos de rigidez e das forças, e por último também apresenta a análise matricial das estruturas.

No quarto capítulo se destaca a metodologia para a implementação computacional dos métodos de rigidez e das forças. Neste capitulo é detalhado o conjunto de técnicas e processos empregados para a formulação e produção do programa, em que são detalhados os sistemas de coordenadas, a matriz de rotação, a matriz de rigidez, as ações nodais, as vinculações nas extremidades das barras, as reações de apoio, os deslocamentos prescritos e a organização do programa.

No quinto capítulo são resolvidos exemplos para os tipos de estrutura que o programa propõe resolver, como pórticos planos e espaciais, treliças planas e espaciais e grelhas, podendo assim comparar os resultados com os softwares SAP

2000 e Ftool. Neste capítulo também se apresentam as discussões dos resultados obtidos, com o objetivo de validar o trabalho.

No sexto capítulo, mostram-se as conclusões obtidas com a execução deste trabalho são discutidas sugestões para trabalhos futuros.

1.4. DELIMITAÇÕES DO TRABALHO

Para o correto funcionamento do aplicativo deve-se considerar as seguintes condições:

- Todas as cargas serão perpendiculares ou paralelas ao eixo da barra;
- Serão admitidos apenas carregamentos distribuídos ao longo das barras, os carregamentos concentrados vão ser dispostos somente nos nós, ou seja, para inserção do carregamento concentrado será necessário subdividir a barra;
- As barras serão compostas por materiais homogêneos e isotrópicos;
- As cargas e as deformações da estrutura apresentarão proporcionalidade, ou seja, os materiais que compõem a estrutura obedecem a Lei de Hooke;
- Não haverá mudanças na geometria da seção dos elementos ao longo do seu eixo longitudinal;
- As deformações serão de menor magnitude em relação às dimensões reais da estrutura.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A seguir será exposto um resumo dos principais trabalhos correlatos, que serviram de insumo para a produção do presente trabalho. Os primeiros trabalhos destacados ressaltam a importância de ferramentas educacionais.

SANDRO CÉSAR (2006), destaca em seu artigo a relevância de softwares educativos, o uso do computador e de programas para a aprendizagem, já que possibilitam o desenvolvimento fundamentado em uma teoria de aprendizagem de forma autônoma.

ALIO KIMURA (2015), afirma que diante do panorama atual, torna-se cada vez mais evidente a necessidade de ensinar e preparar os alunos de Engenharia Civil a manipular corretamente um sistema computacional, pois o futuro Engenheiro deve estar apto a utilizá-lo de forma responsável, sabendo distinguir quais os seus benefícios e as suas limitações. E sobretudo, colocar o conhecimento em Engenharia sempre como sua meta principal.

A seguir será exposto os principais trabalhos que retratam a criação de softwares voltados para o cálculo de estruturas.

PAIZ, VANZELLA E GOMES (2007), desenvolveram um código computacional para o cálculo didático de estruturas planas via métodos dos deslocamentos em formulação matricial, com o objetivo de disponibilizar o programa gratuitamente, para auxiliar didaticamente. O software elaborado além de fornecer as reações de apoios, os esforços internos e deformações de estruturas bidimensionais, esboça os diagramas e disponibiliza as equações dos esforços em cada barra, além de apresentar um memorial de cálculo com os passos intermediários do procedimento de cálculo.

DRUMMONT (2012), desenvolveu um artigo que trata da criação de um software para análise de esforços e deslocamentos de estruturas planas ou espaciais formadas por elementos de barras, com o objetivo de melhorar a interação entre o usuário e o programa através da elaboração de uma interface gráfica que otimiza a entrada de dados e permite a alteração ou ampliação de uma estrutura previamente analisada com maior agilidade e controle para o cálculo de estruturas reticuladas espaciais, utilizando a linguagem de programação C++

TEODORO (2014), também desenvolveu um trabalho com o objetivo de construir um software baseado nas relações do Método da Rigidez, para resolução de estruturas de barras de eixo reto contidas no plano e no espaço.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1. ENGENHARIA ESTRUTURAL E ANÁLISE ESTRUTURAL

Quando uma estrutura é projetada para servir uma função especifica, o engenheiro tem que garantir segurança, estética e funcionalidade ao sistema, e ao mesmo tempo assegurar economia e respeitar restrições ambientais. Todos esses requisitos normalmente exigem vários estudos independentes com diversas soluções até garantir uma forma estrutural mais apropriada. Esses procedimentos de projeto normalmente demandam criatividade e conhecimentos técnicos, como o entendimento das propriedades dos materiais e das leis da mecânica (HIBBELER, 2013).

O projeto Estrutural é constituído da disposição e o dimensionamento de estruturas e de suas partes de modo que elas resistam os agentes externos de modo satisfatório. Ou seja, ele envolve o arranjo geral do sistema, as análises preliminares, os estudos de alternativas existentes para a estrutura, as considerações sobre os carregamentos, a seleção de uma solução e a análise e o projeto final da estrutura (MCCORMAC, 2009).

A parte da mecânica que estuda as estruturas é chamada de Análise Estrutural, e consiste na determinação dos esforços e das deformações que elas ficam submetidas quando solicitadas por agentes externos, essa fase do projeto estrutural consiste em uma idealização do desempenho da estrutura (SÜSSEKIND, 1973).

A análise estrutural trabalha com quatro níveis de abstração com relação à estrutura que está sendo analisada (figura 1). Os níveis de abstração possuem o propósito de mostrar como uma estrutura de barras real é transformada no modelo computacional. A figura apresenta como o primeiro nível de abstração a estrutura real, ou seja, é a representação de como ela é construída. Já o modelo estrutural é o segundo nível de abstração, e pode ser chamado também de modelo matemático, e ele é uma idealização do desempenho da estrutura real considerando várias simplificações sobre a geometria do modelo, as condições de suporte e o comportamento dos materiais. O modelo discreto é o terceiro nível de abstração, e é concebido seguindo as metodologias de cálculo escolhida para a sua análise (Método das Forças ou Método dos Deslocamentos). O quarto nível de discretização é o

modelo computacional, que pode ser obtido através de uma formalização do método dos deslocamentos direcionada a uma implementação computacional, e esse método é chamado de *método da rigidez direta* (MARTHA, 2010).

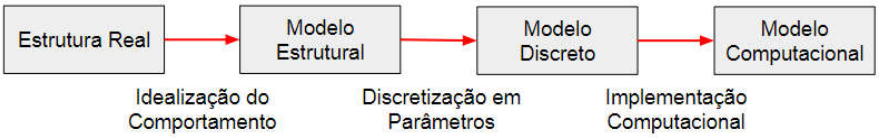


Figura 1 - Os quatro níveis de abstração.
Fonte: Martha, 2010, p. 3

3.2. SISTEMAS ESTRUTURAIS

Os sistemas estruturais sãos constituídos de componentes, que são reunidos de modo a formar sistemas estruturais. Neste trabalho, trataremos de estruturas reticuladas, ou seja, estruturas compostas por elementos com uma dimensão predominantemente maior que as outras duas dimensões, sendo esses elementos chamados de barras (SORIANO E LIMA, 2004).

Uma treliça é um tipo especial de estrutura reticulada, pois é composta totalmente por escoras e tirantes, e isso significa que todos os seus componentes estão sujeitos apenas a forças axiais. As treliças podem ser planas ou espaciais e as forças externas que agem sobre elas são admitidas atuando nas conexões do sistema, logo os componentes não sofrem flexão (MCCORMAC, 2009).

Outro exemplo de estrutura reticulada são os pórticos, que são frequentemente utilizados em edifícios e são concebidos pela combinação de barras com ligações fixas ou de pinos. Assim como as treliças, os pórticos estendem-se em duas ou três dimensões. Esse tipo de estrutura pode receber cargas tanto concentradas quanto distribuídas, podendo ainda ser em qualquer parte e ângulo, assim como momentos fletores e torçores aplicados (HIBBELER, 2013).

As grelhas são modelos estruturais reticulados constituídos por barras retas ou curvas, situadas em um mesmo plano, onde as cargas externas somente solicitam transversalmente. As barras se interceptam ou se cruzam mutuamente, e como a carga ocorre na direção perpendicular ao plano e todos os binários têm seus vetores

no plano da grelha, a estrutura pode sofrer tanto torção como flexão em alguns de seus membros (SORIANO, 2005).

3.3. DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA

Ao se analisar uma estrutura, a primeira coisa a se fazer é decompô-la em estruturas mais simplificadas. Pela visão do método da rigidez, a simplificação ocorre na transformação das barras que compõem a estrutura em elementos que são compostos por dois nós, denominados nó inicial e nó final, que são representados por coordenadas no sistema global da estrutura de forma a reproduzirem a mesma inclinação e comprimento da barra real (GERE E WEAVER, 1981).

Como parte da discretização, são atribuídas a cada barra suas respectivas propriedades (materiais e geométricas das seções), como o módulo de elasticidade longitudinal e dimensões da seção transversal, que serão necessárias para determinação das inércias dos eixos principais da seção transversal da barra (MARTHA, 2010).

Feito isso, a próxima parte da discretização consiste em atribuir a cada barra o carregamento axial, cortante e de flexão aplicado na estrutura em estudo. O carregamento pode ser tanto posicionado em algum dos nós da barra, ser distribuído por toda sua extensão ou se concentrar em algum ponto pertencente à barra, escolhendo-se a distribuição que mais se assemelha com o que deve ocorrer na estrutura real (GERE E WEAVER, 1981).

Para finalizar, o último passo a ser seguido é a determinação e locação dos apoios da estrutura e a numeração dos nós e barras. Os apoios regem onde a estrutura será impossibilitada de se deslocar ou rotacionar e a numeração será utilizada para uma melhor organização e procedimento do cálculo matricial (MARTHA, 2010).

3.4. LEI DE HOOKE; MÓDULO DE ELASTICIDADE

Para determinar o diagrama tensão-deformação de um material que compõe a estrutura é realizado um ensaio de tração em uma amostra do material. Esse

diagrama varia muito de material para material, e, para o mesmo material pode ocorrer variações no diagrama tensão-deformação (BEER E JOHNSTON, 1995).

Os diagramas de tensão-deformação da maioria dos materiais apresentam uma região inicial de comportamento elástico linear, onde a tensão é diretamente proporcional à deformação específica, ou seja, esse material obedece a Lei de Hooke ($\boldsymbol{\sigma = E\varepsilon}$). Onde o E representa o coeficiente angular da parte linear do diagrama tensão-deformação, chamado de módulo de elasticidade do material, ou módulo de Yung (BEER E JOHNSTON, 1995).

Quando um elemento estrutural é solicitado por uma tração, vai ocorrer um alongamento no componente, que será acompanhado por uma contração lateral. A correlação entre as deformações transversal e longitudinal é constante em materiais elásticos, e é chamada de relação de Poisson. A através do coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade é possível se obter o coeficiente de cisalhamento (G), também conhecido por módulo de rigidez ou módulo de torção, é definido como a razão entre a tensão de cisalhamento aplicada ao corpo e a sua deformação específica (TIMOSHENKO E GERE, 1992).

3.5. PROPRIEDADES GEOMETRICAS

O momento de inercia é uma propriedade essencial para determinar a rigidez de um componente estrutural, e expressa o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação. Logo, para se obter os coeficientes de rigidez locais é necessário se conhecer as propriedades geométricas do seção transversal do componente, que podem ser, a área da seção (A), momento de inercia polar (I_x), momento de inercia em torno do eixo y (I_y) e o momento de inercia em torno do eixo z (I_z) (MARTHA, 2010).

3.6. DIAGRAMAS DE ESTADOS SOLICITANTES

Os diagramas mostram, em cada ponto, as solicitações (força normal, força cortante, momento de flexão e momento de torção) que agem em uma estrutura. Consideramos uma barra orientada em um sistema de eixos espacial ($x, y\ e\ z$), onde a origem se encontra no centro de gravidade da seção, ilustrado na figura 2. De acordo

com a figura, a barra está solicitada pela força normal (N), pelas forças cortantes (Vy e Vx), pelos momentos fletores (My e Mz) e pelo momento torçor (Mx) (MARGARIDO, 2001).

Os diagramas de estados ($N,\ V\ e\ M$) são muito importantes para o dimensionamento das barras, eles consistem em gráficos no qual um dos eixos é o próprio eixo da barra e o outro (normal a este) é onde se marca a somatória de $N,\ V$ e M. Então para determinar as dimensões de uma estrutura, de modo que ela não rompa nem se deforme acima de certos valores limites, é preciso determinar esses diagramas, e para isso é preciso primeiramente de suas equações (MARGARIDO, 2001).

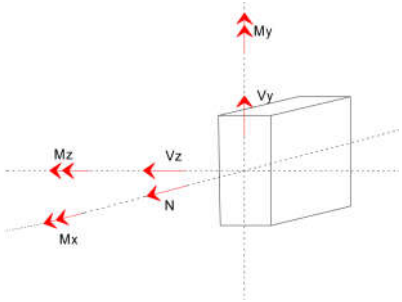


Figura 2 - Barra orientada em um eixo espacial.
Fonte: Aluízio Fontana, 2001, p. 42.

3.7. RELAÇÃO ENTRE CARGAS, ESFORÇOS CORTANTES E MOMENTOS FLETORES

Para poder representar os diagramas, pode-se desenvolver equações que permitem fazer o traçado dos mesmos, além de existir relações matemáticas que vinculam as cargas, os esforções cortantes e os momentos fletores em uma barra, de modo a facilitar o desenvolvimento de diagramas (MCCORMAC, 2009).

Para essa análise, considera-se um elemento com uma carga q qualquer, e que a barra esteja em equilíbrio, assim como qualquer elemento seu, como representado na figura 3 (a). Então, considerando o elemento dx infinitesimal,e, admitida a carga como constante, agem no elemento as ações demonstradas pela figura 3 (b) (MARGARIDO, 2001).

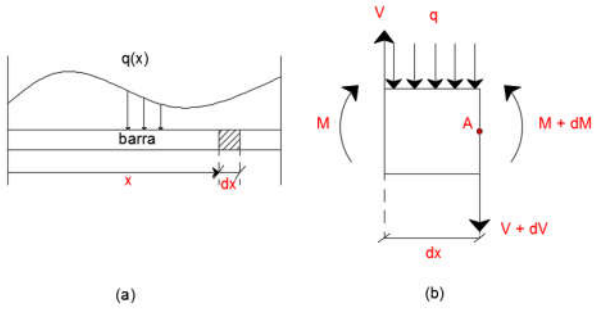


Figura 3 - Equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra e direções positivas adotadas para cargas distribuídas e esforços internos.
Fonte: Martha, 2010, p. 60.

Através do equilíbrio das forças verticais, podemos desenvolver:

$$V - qdx - (V + dV) = 0 \tag{1}$$

$$-qdx - dV = 0 \tag{2}$$

$$V = -\int q\,dx \tag{3}$$

E, através do equilíbrio do momento no ponto A, podemos obter:

$$M + Vdx - qdx\frac{dx}{2} - (M - dM) = 0 \tag{4}$$

$$Vdx - q\frac{dx^2}{2} - dM = 0 \tag{5}$$

$$M = \int V\,dx \tag{6}$$

3.8. DEFLEXÃO DOS ELEMENTOS DA ESTRUTURA

As cargas transversais atuantes em um elemento da estrutura causam deformações em seu eixo longitudinal, então nasce a necessidade de determinar estas deformações que acontecem ao decorrer da estrutura em estudo, o interesse de calcular estas deformações está no fato de existir especificações que admitem um valor máximo para a deflexão (BEER E JOHNSTON, 1995).

Para determinar as equações de deslocamentos em elementos estaticamente indeterminados, pode ser aplicado a solução da equação diferencial da linha elástica. O processo consiste em estabelecer a equação diferencial, achar uma solução geral

e analisando as condições limites, determinar as constantes de integração (TIMOSHENKO E GERE, 1992).

3.9. LIGAÇÕES INTERNAS E LIBERAÇÕES DE CONTINUIDADE

As barras de uma estrutura podem ser ligadas entre si ou com o meio exterior, de modo a permitir deslocamentos relativos entre as extremidades. Essas liberações de deslocamento são chamadas de articulações, e podem ser internas a estrutura, quando a ligação é entre barras, e externas quando a ligação é entre a barra e o meio externo (SORIANO, 2005).

A liberação de deslocamentos em uma estrutura indica a incapacidade de uma barra em transmitir, seja para um apoio ou um nó, um ou mais tipos de esforços. Então, serão introduzidos símbolos que indicam essa liberação de continuidade, que irá indicar a falta de vínculos correspondentes aos esforços não transmitidos (ALEBÍADES, 1986).

3.10. CONDIÇÕES BÁSICAS DA ANÁLISE ESTRUTURAL

Para que o modelo estrutural represente de maneira correta o funcionamento da estrutura, é preciso considerar algumas condições matemáticas, que são a base para a análise estrutural, são as condições de equilíbrio, as condições de compatibilidade entre deslocamentos e as condições sobre o comportamento dos materiais que compõem a estrutura. Alguns sistemas de equilíbrios indeterminados podem ser solucionados através dos três tipos de condições (MARTHA, 2010).

3.10.1. Condições de equilíbrio

O equilíbrio estático de uma estrutura ou de um dos seus componentes independentes é garantida quando é mantido um equilíbrio entre as forças e os momentos que atuam no sistema. Em geral, isso requer que as equações de equilíbrio de força e de momento sejam satisfeitas ao longo de três eixos independentes. Essa condição só é válida quando os deslocamentos da estrutura são mínimos em relação

a dimensão total da estrutura. A análise das estruturas sobre essa condição é denominada análise de primeira ordem (HIBBELER, 2013).

3.10.2. Condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações

Essas condições são as que garantem a continuidade da estrutura ao se deformar, e são expressas por relações geométricas concebidas para garantir a continuidade do modelo estrutural. As condições de compatibilidade podem se referir aos vínculos externos da estrutura, ou podem ser internos. Os vínculos externos da estrutura garantem que os deslocamentos e as deformações sejam compatíveis com as hipóteses adotadas com respeito aos suportes ou ligações com outras estruturas. Já os vínculos internos garantem que a estrutura permaneça contínua no interior das barras e nas fronteiras entre elementos, ou seja, garante que as barras permaneçam ligadas pelos nós que as conectam (MARTHA, 2010).

3.10.3. Leis constitutivas dos materiais

Neste trabalho serão considerados materiais idealizados no regime elástico-linear, isto é, quando o material é descarregado, a deformação sofrida durante o carregamento desaparecerá completamente. A capacidade que o material possui de retornar à forma original, é denominada elasticidade. Quando um material se comporta elasticamente e apresenta também, uma relação linear entre a tensão e a deformação, é chamado de material linear elástico (TIMOSHENKO E GERE, 1992).

3.11. MÉTODOS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

Estruturas estaticamente indeterminadas possuem mais forças desconhecidas do que equações de equilíbrio estático, logo, elas não podem ser analisadas utilizando apenas as equações de equilíbrio estático, então são necessárias equações adicionais. São usados dois métodos gerais para a resolução de uma estrutura hiperestática: Método das Forças e Método da Rigidez (MCCORMAC, 2009).

3.11.1. Método das forças

O Método das Forças, também chamado de método da flexibilidade, é um método clássico para a análise de estruturas hiperestáticas lineares e elásticas, onde se determina um conjunto de reações e/ou esforços superabundantes ao equilíbrio estático da estrutura hiperestática, permitindo que as outras reações e/ou esforços sejam determinados através das equações de equilíbrio (SORIANO, 2005).

No método das forças idealizamos uma estrutura estável, determinada através da remoção de forças além das necessárias para manter a estrutura estável (redundantes). Essa estrutura isostática é chamada de sistema principal e os elementos derivados da eliminação dos vínculos são as incógnitas do problema. O número de vínculos retirado da estrutura é igual ao grau de indeterminação. As cargas de projeto, que já são especificadas, e as redundantes, que nesse estágio ainda são desconhecidas, são aplicadas na estrutura liberada através de soluções básicas. As soluções básicas não satisfazem isoladamente todas as condições de compatibilidade, mas essas condições são restabelecidas depois da superposição dos casos básicos (LEET; UANG e GILBERT; 2009).

Para facilitar o entendimento, toma-se como exemplo a treliça da figura 4(a), onde a configuração deformada, representada pela linha tracejada, é mostrada de forma exagerada apenas para fins didáticos. Para analisar a estrutura com respeito às condições de equilíbrio, toma-se da mecânica clássica as equações de equilíbrio da estática (MARTHA, 2010).

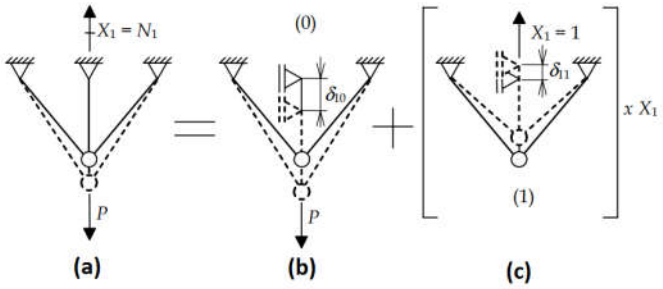


Figura 4 - Superposição de soluções básicas do Método das Forças.
Fonte: Martha, 2010, p. 31

Conforme mencionado, a solução do problema hiperestático pelo Método das Forças é feita pela superposição de soluções básicas isostáticas, então, cria-se uma

estrutura isostática auxiliar, chamada de caso 0, que é mostrada na figura 4(b). São eliminados os vínculos externos da estrutura original, onde são implantadas as incógnitas chamadas de redundantes hiperestáticas. A escolha do caso 0 é arbitrária, desde que seja estável estaticamente. Em seguida, é feita a resolução do caso 0 através do princípio dos trabalhos virtuais. Dele, obtém-se os termos de carga (δ_{i0}), nas direções dos vínculos eliminados para a criação do caso 0 (MARTHA, 2010).

Para cada redundante, será criado um caso básico, que é a representação da estrutura do caso 0, mas apenas com um valor unitário de carregamento aplicado no local da redundante, como é mostrado o caso 1 na figura 4(c). Como a redundante faz relação a restrição de uma força ou de um momento, a unidade de medida será equivalente ao deslocamento ou rotação restringido. A esses coeficientes gerados se dá o nome de coeficientes de flexibilidade (δ_{ij}). A partir dos resultados obtidos nos casos apresentados, pode-se utilizar superposição de efeitos para restabelecer as condições de compatibilidade violadas na criação do caso 0, gerando a expressão (7) (MARTHA, 2010).

$$\delta_{10} + \delta_{11} * X_1 = 0 \tag{7}$$

A solução deste sistema resulta nos valores das reações de apoio, que podem ser usadas para o cálculo dos esforços internos da estrutura original através da multiplicação dos valores das redundantes pelos seus respectivos valores de diagrama dos casos básicos, por exemplo, os momentos fletores finais (M) podem ser obtidos pela superposição dos diagramas (expressão 8) (MARTHA, 2010).

$$M = M_0 + M_1 * X_1 \tag{8}$$

3.11.2. Método da Rigidez

O Método da Rigidez, também conhecido como método dos deslocamentos, consiste na determinação de um sistema de equações de equilíbrio, em que a matriz dos coeficientes é chamada de matriz de rigidez e o vetor das forças independentes é denominado vetor das forças nodais. Identifica-se então o significado físico de seus coeficientes e revela-se que esse sistema pode ser obtido a partir dos sistemas de

equação de equilíbrio das diversas barras da estrutura consideradas isoladamente. Em sequência, aplicam-se as condições geométricas de contorno (SORIANO, 2005).

Neste método são levados em conta os três grupos de condições básicas da análise estrutural: condições de equilíbrio, condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações e condições impostas pelas leis constitutivas dos materiais. A metodologia de análise consiste em somar uma série de soluções básicas (chamadas de casos básicos), que satisfazem as condições de compatibilidade, mas não satisfazem as condições de equilíbrio da estrutura original, condição essa que só é alcançada após haver a superposição dos efeitos de todos os casos básicos envolvidos na análise (MARTHA, 2010).

No Método da Rigidez, as equações de equilíbrio são escritas em termos de deslocamentos de nó desconhecidos, ou seja, os deslocamentos dos nós ou das juntas são utilizados nas equações no lugar das forças redundantes utilizadas no método das forças. Logo, os deslocamentos dos nós são tratados como incógnitas, e as equações de equilíbrio são escritas para cada nó por meio das cargas aplicadas, das propriedades dos elementos estruturais e dos deslocamentos desconhecidos dos nós. Com isso, forma-se um conjunto de equações algébricas lineares que ao serem resolvidas fornecem os deslocamentos dos nós (MCCORMAC, 2009).

Uma vez que os deslocamentos tenham sido determinados, as cargas desconhecidas são determinadas a partir das equações de compatibilidade usando as relações força-deslocamentos. Todo o método de deslocamento segue esse raciocínio (HIBBELER, 2013).

A partir da estrutura com o seu carregamento original, obtém-se um caso básico denominado caso 0, onde todas as deslocabilidades possíveis da estrutura são restringidas (rotação, translação vertical e translação horizontal). No local onde as deslocabilidades foram restringidas, surgem forças referentes a cada movimentação que foi eliminada. Os valores destas forças compõem o vetor das forças nodais. Para os demais casos, nos locais onde as deslocabilidades foram restringidas, aplicam-se deslocamentos unitários (um caso para cada deslocabilidade), que criam esforços chamados de “reações de apoio fictícias”, oriundos da rigidez da barra. Assim, através da superposição dos efeitos gerados na estrutura, são obtidos os esforços que compõem a matriz de coeficientes, conhecida como matriz de rigidez elementar de cada barra. (MARTHA, 2010

Verifica-se ser mais simples obter o sistema de equações de cada barra em um referencial próprio a ela, com o eixo de coordenadas surgindo na extremidade de cada uma das barras, com o eixo x percorrendo-as longitudinalmente. Posteriormente, obtida a matriz de rigidez elementar de cada barra, necessita ser feita uma transformação das coordenadas locais em coordenadas globais da estrutura, através de uma matriz de rotação de coordenadas. Com isso, a matriz de rigidez passa a ser não singular e a resolução do sistema de equações resultante fornece os deslocamentos nodais não restringidos. A partir desses deslocamentos podem ser determinados os esforços internos nas extremidades das barras e as reações de apoio da estrutura hiperestática (SORIANO, 2010).

O sistema de equações de equilíbrio é calculado pela multiplicação da matriz de rigidez global pelo vetor global dos deslocamentos nodais, o que resulta no vetor global das forças nodais. O vetor dos deslocamentos globais é dividido em dois, as primeiras posições do vetor são ocupadas pelos deslocamentos nodais livres e posteriormente seguem os deslocamentos restringidos, que quase sempre são nulos devido estarem relacionados aos apoios da estrutura (SORIANO, 2005).

3.11.2.1. Sistema de Referência Global e Local das Estruturas

No método da rigidez, a geometria e o comportamento geral da estrutura são referenciados através de um sistema de coordenadas cartesianas. Esse sistema pode ser escolhido de maneira arbitrária, mas, para facilitar as seguintes explicações, será fixado o sistema de referência global exemplificado pela figura 5 (KASSIMALI, 2015).

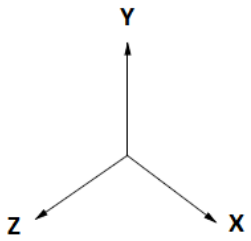


Figura 5 - Sistema de referência Global.
Fonte: os autores.

Para simplificar alguns resultados como o carregamento externo e esforços internos em membros da estrutura, é imprescindível a adoção de um sistema local de referência. Então, cada barra da estrutura apresentará um sistema de eixos locais, para que os esforços e os carregamentos sejam orientados de forma simplificada (MCCORMAC, 2009).

O sistema de coordenadas locais é estabelecido definindo primeiramente o eixo x ao longo do eixo da barra. Uma vez que o eixo x já tenha sido definido, resta unicamente estabelecer as direções para os eixos y *e* z. Como são possíveis muitas escolhas para as direções, o que convém é tomar o eixo z como sendo horizontal, isto é, existente no plano X-Z. E com isso, pode-se concluir que o eixo y se encontra em um plano vertical que passa pelos eixos x *e* Y, como mostra a figura 6 (GERE E WEAVER, 1981).

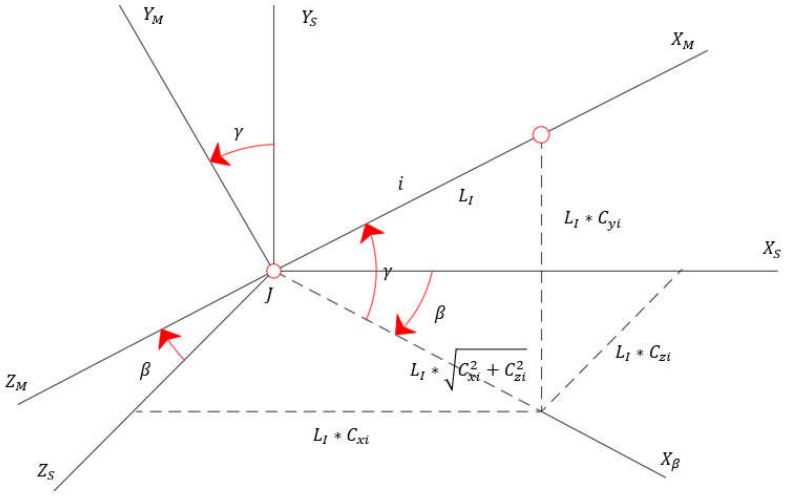


Figura 6 - Eixos locais e globais de uma barra.
Fonte: Gere e Weaver, 1981, p. 263

Quando os eixos locais são considerados da forma especificada acima, não há ambiguidade em relação a suas orientações, exceto em relação a uma barra vertical. Quando existe uma barra vertical na estrutura, como é o caso dos membros da figura 7(a) e 7(b), a posição do eixo z não fica definida no plano, logo, quando ocorre essa situação o eixo z é tomado sempre ao longo do eixo Z. Com todas as direções e os sentidos dos eixos do sistema local, os carregamentos e esforços ficam orientados a partir deste sistema (GERE E WEAVER, 1981).

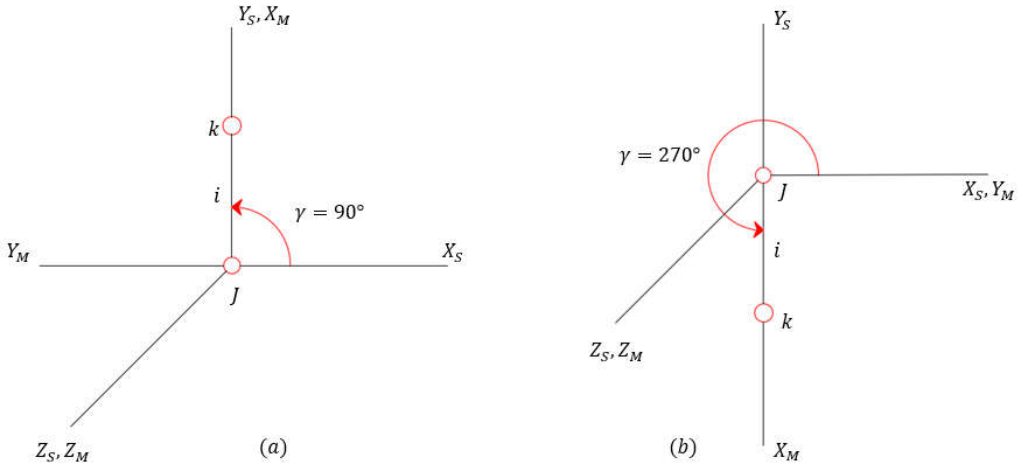


Figura 7 - Membro vertical de uma treliça espacial.
Fonte: Fonte: Gere e Weaver, 1981, p. 263

3.11.2.2. Matriz de rotação espacial

Quando os elementos de uma estrutura estão orientados em direções diferentes, é essencial transformar as relações de rigidez para cada elemento do sistema de coordenadas locais para um sistema comum de coordenadas globais, então torna-se necessário a utilização de uma matriz de rotação de eixos (KASSIMALI, 2016).

Considere a ação A mostrada na figura 8 em um eixo de coordenadas locais e globais. A ação A, orientada ao longo do eixo XM, possui determinados ângulos em relação aos eixos XS, YS e ZS, portanto, podemos considerar $\lambda_{11}, \lambda_{12}$ e λ_{13} como sendo os cossenos diretores do eixo x_M em relação a esses eixos, $\lambda_{21}, \lambda_{22}$ e λ_{23}, seguindo a mesma linha, mas considerando ao eixo y_M, e , $\lambda_{31}, \lambda_{32}$ e λ_{33} para o eixo z_M (GERE E WEAVER, 1981).

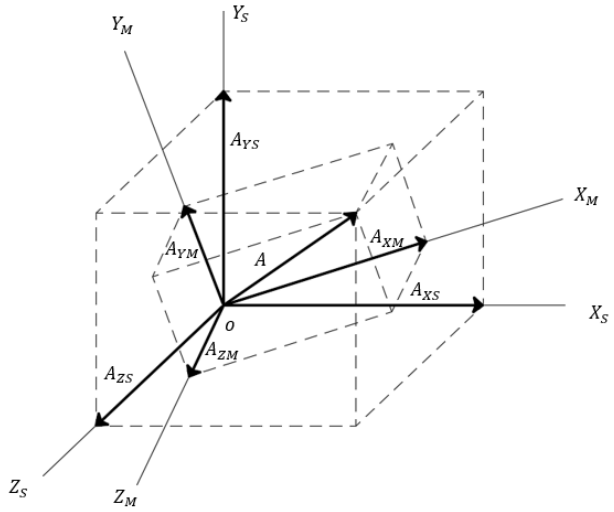


Figura 8 - Rotação de eixos em três dimensões.
Fonte: Gere e Weaver, 1981, p. 240

A ação pode ser decomposta em relação aos seus eixos locais, o que resulta nas seguintes relações:

$$A_M = \begin{bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \\ A_{ZM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{32} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \\ A_{ZM} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Se uma matriz de rotação $\boldsymbol{R}$ tridimensional é definida como se segue,

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{32} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Então a equação 11 pode ser escrita na forma:

$$A_M = RA_S \tag{11}$$

Partindo disso, é possível transformar as componentes da ação A em função dos eixos globais através da seguinte relação:

$$A_S = \begin{bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \\ A_{ZS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{32} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \\ A_{ZM} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Que pode ser escrita como:

$$A_S = R'A_M \tag{13}$$

A primeira linha de componentes pode ser obtida dividindo-se o comprimento da barra pela componente na direção da qual ser quer o cosseno. Para as duas linhas

seguintes, pode-se realizar rotações sucessivas de eixos para encontrar o cosseno desejado. A primeira rotação se trata do giro de um ângulo β a partir do eixo *XS*, em torno do eixo YS, criando um eixo x_β. Este eixo x_β ficará na interseção entre os planos x_M e Y_S, o que acaba por rotacionar também o eixo *zM*. Para a nova posição dos eixos e considerando o eixo x_β, tem-se a matriz $\boldsymbol{R}$ (14) em relação ao eixo global da estrutura (GERE E WEAVER, 1981).

$$\boldsymbol{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & sen\,\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\,\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{14}$$

Por observação geométrica da figura 6, pode-se concluir que:

$$\cos\beta = \frac{Cx}{\sqrt{C^2x+C^2z}} \text{ e } \operatorname{sen}\beta = \frac{Cz}{\sqrt{C^2x+C^2z}} \tag{15}$$

Onde *Cx, Cy e Cz* correspondem, respectivamente, aos cossenos diretores nas direções *XS, YS e ZS.*

$$\boldsymbol{R}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{Cx}{\sqrt{C^2x+C^2z}} & 0 & \frac{Cz}{\sqrt{C^2x+C^2z}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{Cz}{\sqrt{C^2x+C^2z}} & 0 & \frac{Cx}{\sqrt{C^2x+C^2z}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

O segundo giro ocorre em torno do eixo *zM*, com um ângulo γ. O processo é similar ao mostrado anteriormente, gerando uma matriz $\boldsymbol{R}_\gamma$:

$$\boldsymbol{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \sqrt{C^2x+C^2z} & Cy & 0 \\ -Cy & \sqrt{C^2x+C^2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Por fim, o produto das matrizes 16 e 17 gera a matriz de rotação final $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} Cx & Cy & Cz \\ \frac{-CxCy}{\sqrt{C^2x+C^2z}} & \sqrt{C^2x+C^2z} & \frac{-CxCy}{\sqrt{C^2x+C^2z}} \\ \frac{-Cz}{\sqrt{C^2x+C^2z}} & 0 & \frac{-Cx}{\sqrt{C^2x+C^2z}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Essa matriz é matriz de rotação $\boldsymbol{R}$ de uma treliça espacial. Caso a barra seja paralela ao eixo YS, surgem ambiguidades em relação ao sentido da ação e fica-se impossibilitada a utilização da matriz de rotação $\boldsymbol{R}$, já que as componentes $Cx\ e\ Cy$ serão nulas, criando uma divisão por zero. Neste caso, a matriz de rotação para barras paralelas ao eixo YS toma a forma da expressão 19 (GERE E WEAVER, 1981).

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & Cy & 0 \\ -Cy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

3.11.2.3. Graus de Liberdade

Os graus de liberdade de uma estrutura são deslocamentos independentes dos nós (translações e rotações) que são essenciais para determinar a curva elástica da estrutura quando submetida a uma carga arbitrária (KASSIMALI, 2015).

Visto que tanto as deformações axiais como as de flexão serão tomadas em consideração na análise de pórticos espaciais, existe a possibilidade de que haja seis deslocamentos independentes em cada nó. Esses deslocamentos são tomados como as translações e os giros do nó nas direções $X,\ Y\ e\ Z$. Em pórticos planos, há a possibilidade de haver três deslocamentos por nó, que são o giro na direção Z e as translações nas direções $X\ e\ Y$ (GERE E WEAVER, 1981).

No caso de treliças planas, cada nó tem apenas dois graus de liberdade, sendo as translações nas direções $X\ e\ Y$, já que as barras são rotuladas em ambas as extremidades e não há a transmissão de momento fletores, e, por consequência, a rotação do nó. Já as treliças espaciais possuem três graus de liberdade por nó, sendo as translações nas direções $X,\ Y\ e\ Z$. Não há giro do nó pelo mesmo motivo do caso da treliça plana. Já a estrutura de grelha possui três deslocamentos possíveis, sendo uma

rotação, que ocorre em torno do' eixo Z, e duas translações, relacionadas aos eixos X e Y (MARTHA, 2010).

Em posse da numeração dos nós e barras, realizados na discretização da estrutura, é necessário registrar os dois números de nó que estão associados ao início e fim de cada barra, a fim de criar o vetor de incidências de cada barra e assegurar que serão definidos corretamente quais os elementos da matriz de rigidez e do vetor de cargas que irão receber as contribuições de cada membro (GERE E WEAVER, 1981).

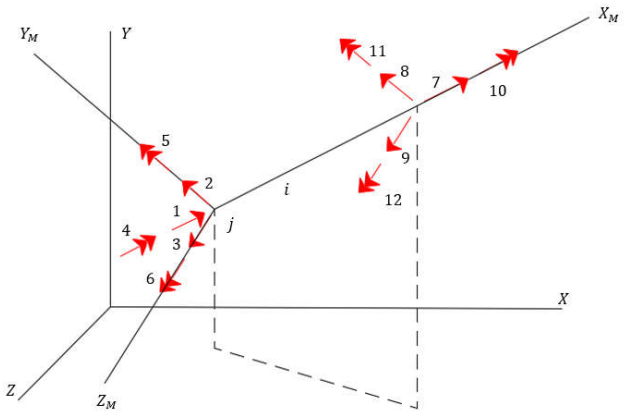


Figura 9 - Sistema de numeração para um pórtico espacial.
Fonte: Gere e Weaver, 1981, p. 270

Depois de numerar os membros e os nós, a etapa seguinte na análise é identificar todos os possíveis deslocamentos nodais e graus de liberdade. Os possíveis deslocamentos nodais serão numerados pela mesma ordem que os nós, desta forma, em um pórtico espacial, que é o caso mais completo em questão de rotações e translações, a translação na direção de X será o deslocamento número 1, a translação na direção de Y será o deslocamento número 2, a translação na direção de Z será o deslocamento número 3, o giro em torno do eixo X será o deslocamento número 4, e assim sucessivamente, até que sejam numeradas todas as deslocabilidades de todos os nós, assim como se pode observar na figura 9. Em outros modelos estruturais que não possuam todas as deslocabilidades livres, a numeração segue o mesmo padrão, pulando os deslocamentos restringidos. A fim de organizar melhor as matrizes, costumam-se numerar primeiro os nós não restringidos, deixando

por último os nós que possuem deslocabilidades restringidas (GERE E WEAVER, 1981).

3.11.2.4. Hipóteses simplificadoras

Para simplificar o processo de cálculo estrutural, na concepção do modelo estrutural são adotadas hipóteses que permitem desenvolver os cálculos de forma relativamente simples, sendo chamadas de hipóteses simplificadoras. As hipóteses estão relacionadas quanto a geometria, condição de suporte, comportamento dos materiais e solicitações que atuam sobre a estrutura (MARTHA, 2010).

As estruturas podem ter comportamento físico linear ou não linear, assim como o comportamento geométrico, que pode ou não ser linear. Entende-se por comportamento físico linear quando os materiais que constituem a barra possuem diagrama tensão-deformação linear, onde as deformações aumentam linearmente conforme é aumentada a tensão atuante sobre o elemento, e, depois de cessada a solicitação, o material volta ao tamanho original, sem possuir deformações residuais (SORIANO, 2005).

Caso a deformação não ocorra de forma linear, diz- se que o material possui um comportamento físico não linear. Em relação ao comportamento geométrico, ele será linear quando as equações de equilíbrio podem ser escritas na configuração não deformada da estrutura, ou seja, na fase anterior à aplicação das ações externas, apesar de já se supor que estas ações estejam atuando, criando assim uma análise com pequeno deslocamento onde a tangente do ângulo de rotação é tomada igual ao próprio ângulo em radiano, caso contrário, o material terá um comportamento geométrico não linear (SORIANO, 2005).

Considerando que o material possua linearidade física e geométrica, pode-se considerar o princípio da superposição dos efeitos, ilustrado na imagem 10. Este princípio afirma que os carregamentos atuantes na estrutura podem ser decompostos em vários carregamentos e que os esforços desses carregamentos decompostos podem ser somados ao final, gerando o mesmo resultado que seria obtido caso os carregamentos não fossem decompostos (KASSIMALI, 2015).

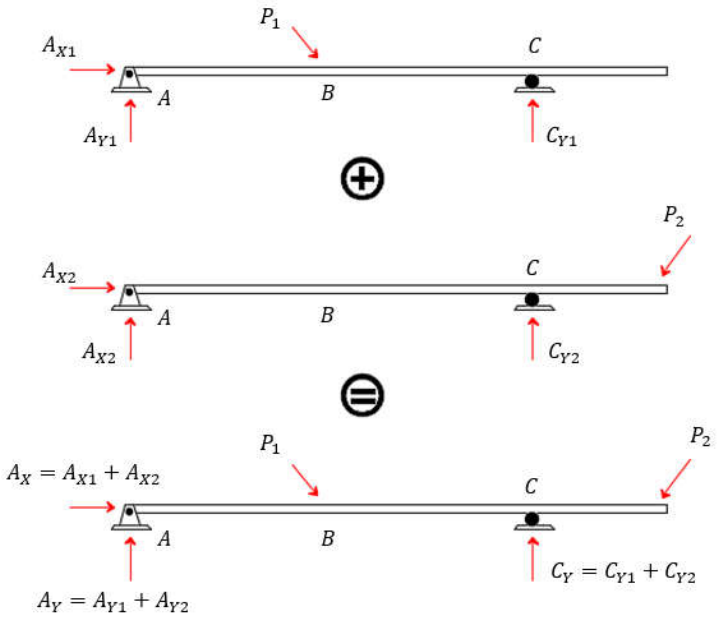


Figura 10 - Superposição dos efeitos.
Fonte: Kassimali, 2015, p.76

3.11.2.5. Sistema de equações de equilíbrio

Para apresentar o sistema de equações de equilíbrio do método dos deslocamentos, toma-se o pórtico da imagem 11(a) e 11(b), em que se têm três barras e quatro pontos nodais, com as barras numeradas e deslocamentos numerados (SORIANO, 2005).

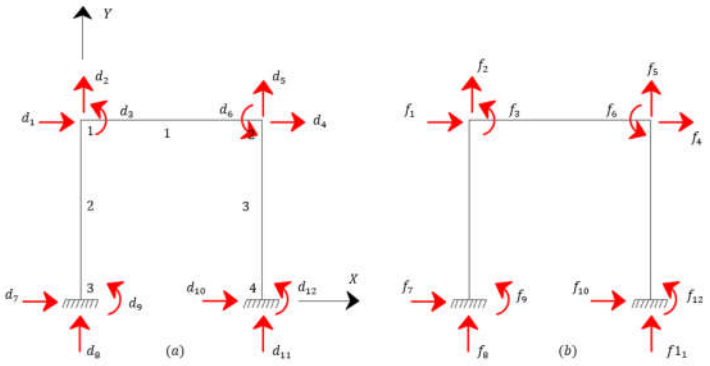


Figura 11 - Pórtico plano.
Fonte: Soriano, 2005, p.5

Em uma estrutura adequadamente vinculada e com comportamento linear, há proporcionalidade entre as forças aplicadas e seus respectivos deslocamentos, assim, ao aplicar uma força f_1, têm-se no pórtico o deslocamento $d_1 = \delta_{11} * f_1$, onde δ_{11} é um coeficiente de flexibilidade, que é influenciado pela geometria da estrutura, suas condições de apoio e suas propriedades elásticas. Considerando um pórtico espacial, e, seguindo nessa linha de aplicação de forças de maneira sucessiva em todos os nós e relacionando-as com os deslocamentos gerados no primeiro grau de liberdade, escreve-se o deslocamento total (20) (SORIANO, 2005).

$$\sum_{q=1}^{12} \delta_{11} f_q \tag{20}$$

Repetindo o procedimento anterior de aplicação de forças e os deslocamentos causados em cada um dos graus de liberdade, obtém-se o sistema de equações que relaciona as forças com os deslocamentos (21) (SORIANO, 2005).

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} & \delta_{1,4} & \delta_{1,5} & \delta_{1,6} & \delta_{1,7} & \delta_{1,8} & \delta_{1,9} & \delta_{1,10} & \delta_{1,11} & \delta_{1,12} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} & \delta_{2,4} & \delta_{2,5} & \delta_{2,6} & \delta_{2,7} & \delta_{2,8} & \delta_{2,9} & \delta_{2,10} & \delta_{2,11} & \delta_{2,12} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} & \delta_{3,4} & \delta_{3,5} & \delta_{3,6} & \delta_{3,7} & \delta_{3,8} & \delta_{3,9} & \delta_{3,10} & \delta_{3,11} & \delta_{3,12} \\ \delta_{4,1} & \delta_{4,2} & \delta_{4,3} & \delta_{4,4} & \delta_{4,5} & \delta_{4,6} & \delta_{4,7} & \delta_{4,8} & \delta_{4,9} & \delta_{4,10} & \delta_{4,11} & \delta_{4,12} \\ \delta_{5,1} & \delta_{5,2} & \delta_{5,3} & \delta_{5,4} & \delta_{5,5} & \delta_{5,6} & \delta_{5,7} & \delta_{5,8} & \delta_{5,9} & \delta_{5,10} & \delta_{5,11} & \delta_{5,12} \\ \delta_{6,1} & \delta_{6,2} & \delta_{6,3} & \delta_{6,4} & \delta_{6,5} & \delta_{6,6} & \delta_{6,7} & \delta_{6,8} & \delta_{6,9} & \delta_{6,10} & \delta_{6,11} & \delta_{6,12} \\ \delta_{7,1} & \delta_{7,2} & \delta_{7,3} & \delta_{7,4} & \delta_{7,5} & \delta_{7,6} & \delta_{7,7} & \delta_{7,8} & \delta_{7,9} & \delta_{7,10} & \delta_{7,11} & \delta_{7,12} \\ \delta_{8,1} & \delta_{8,2} & \delta_{8,3} & \delta_{8,4} & \delta_{8,5} & \delta_{8,6} & \delta_{8,7} & \delta_{8,8} & \delta_{8,9} & \delta_{8,10} & \delta_{8,11} & \delta_{8,12} \\ \delta_{9,1} & \delta_{9,2} & \delta_{9,3} & \delta_{9,4} & \delta_{9,5} & \delta_{9,6} & \delta_{9,7} & \delta_{9,8} & \delta_{9,9} & \delta_{9,10} & \delta_{9,11} & \delta_{9,12} \\ \delta_{10,1} & \delta_{10,2} & \delta_{10,3} & \delta_{10,4} & \delta_{10,5} & \delta_{10,6} & \delta_{10,7} & \delta_{10,8} & \delta_{10,9} & \delta_{10,10} & \delta_{10,11} & \delta_{10,12} \\ \delta_{11,1} & \delta_{11,2} & \delta_{11,3} & \delta_{11,4} & \delta_{11,5} & \delta_{11,6} & \delta_{11,7} & \delta_{11,8} & \delta_{11,9} & \delta_{11,10} & \delta_{11,11} & \delta_{11,12} \\ \delta_{12,1} & \delta_{12,2} & \delta_{12,3} & \delta_{12,4} & \delta_{12,5} & \delta_{12,6} & \delta_{12,7} & \delta_{12,8} & \delta_{12,9} & \delta_{12,10} & \delta_{12,11} & \delta_{12,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{12} \end{Bmatrix} \tag{21}$$

Em fórmula compacta, esse sistema se escreve:

$$\Delta_{\sim ll}\, f_{\sim l} = d_{\sim l} \tag{22}$$

Onde $\Delta_{\sim ll}$ é uma matriz de flexibilidade, $f_{\sim l}$ é o vetor das forças nodais externas e $d_{\sim l}$ é o vetor dos deslocamentos nodais. Como a matriz de flexibilidade não é singular, a partir da equação anterior obtém-se a expressão 23 (SORIANO, 2005).

$$\Delta_{\sim ll}^{-1}\, d_{\sim l} = f_{\sim l} \tag{23}$$

Adotando a notação

$$\mathrm{K}_{\sim ll} = \Delta_{\sim ll}^{-1} \tag{24}$$

A equação anterior toma a forma:

$$\mathrm{K}_{\sim ll} d_{\sim l} = \mathrm{f}_{\sim l} \tag{25}$$

Onde $\mathrm{K}_{\sim ll}$ é denominada matriz de rigidez restringida, por ter sido obtida considerando os efeitos dos deslocamentos restringidos. Assim, o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}_{1,1} & \mathrm{K}_{1,2} & \mathrm{K}_{1,3} & \mathrm{K}_{1,4} & \mathrm{K}_{1,5} & \mathrm{K}_{1,6} & \mathrm{K}_{1,7} & \mathrm{K}_{1,8} & \mathrm{K}_{1,9} & \mathrm{K}_{1,10} & \mathrm{K}_{1,11} & \mathrm{K}_{1,12} \\ \mathrm{K}_{2,1} & \mathrm{K}_{2,2} & \mathrm{K}_{2,3} & \mathrm{K}_{2,4} & \mathrm{K}_{2,5} & \mathrm{K}_{2,6} & \mathrm{K}_{2,7} & \mathrm{K}_{2,8} & \mathrm{K}_{2,9} & \mathrm{K}_{2,10} & \mathrm{K}_{2,11} & \mathrm{K}_{2,12} \\ \mathrm{K}_{3,1} & \mathrm{K}_{3,2} & \mathrm{K}_{3,3} & \mathrm{K}_{3,4} & \mathrm{K}_{3,5} & \mathrm{K}_{3,6} & \mathrm{K}_{3,7} & \mathrm{K}_{3,8} & \mathrm{K}_{3,9} & \mathrm{K}_{3,10} & \mathrm{K}_{3,11} & \mathrm{K}_{3,12} \\ \mathrm{K}_{4,1} & \mathrm{K}_{4,2} & \mathrm{K}_{4,3} & \mathrm{K}_{4,4} & \mathrm{K}_{4,5} & \mathrm{K}_{4,6} & \mathrm{K}_{4,7} & \mathrm{K}_{4,8} & \mathrm{K}_{4,9} & \mathrm{K}_{4,10} & \mathrm{K}_{4,11} & \mathrm{K}_{4,12} \\ \mathrm{K}_{5,1} & \mathrm{K}_{5,2} & \mathrm{K}_{5,3} & \mathrm{K}_{5,4} & \mathrm{K}_{5,5} & \mathrm{K}_{5,6} & \mathrm{K}_{5,7} & \mathrm{K}_{5,8} & \mathrm{K}_{5,9} & \mathrm{K}_{5,10} & \mathrm{K}_{5,11} & \mathrm{K}_{5,12} \\ \mathrm{K}_{6,1} & \mathrm{K}_{6,2} & \mathrm{K}_{6,3} & \mathrm{K}_{6,4} & \mathrm{K}_{6,5} & \mathrm{K}_{6,6} & \mathrm{K}_{6,7} & \mathrm{K}_{6,8} & \mathrm{K}_{6,9} & \mathrm{K}_{6,10} & \mathrm{K}_{6,11} & \mathrm{K}_{6,12} \\ \mathrm{K}_{7,1} & \mathrm{K}_{7,2} & \mathrm{K}_{7,3} & \mathrm{K}_{7,4} & \mathrm{K}_{7,5} & \mathrm{K}_{7,6} & \mathrm{K}_{7,7} & \mathrm{K}_{7,8} & \mathrm{K}_{7,9} & \mathrm{K}_{7,10} & \mathrm{K}_{7,11} & \mathrm{K}_{7,12} \\ \mathrm{K}_{8,1} & \mathrm{K}_{8,2} & \mathrm{K}_{8,3} & \mathrm{K}_{8,4} & \mathrm{K}_{8,5} & \mathrm{K}_{8,6} & \mathrm{K}_{8,7} & \mathrm{K}_{8,8} & \mathrm{K}_{8,9} & \mathrm{K}_{8,10} & \mathrm{K}_{8,11} & \mathrm{K}_{8,12} \\ \mathrm{K}_{9,1} & \mathrm{K}_{9,2} & \mathrm{K}_{9,3} & \mathrm{K}_{9,4} & \mathrm{K}_{9,5} & \mathrm{K}_{9,6} & \mathrm{K}_{9,7} & \mathrm{K}_{9,8} & \mathrm{K}_{9,9} & \mathrm{K}_{9,10} & \mathrm{K}_{9,11} & \mathrm{K}_{9,12} \\ \mathrm{K}_{10,1} & \mathrm{K}_{10,2} & \mathrm{K}_{10,3} & \mathrm{K}_{10,4} & \mathrm{K}_{10,5} & \mathrm{K}_{10,6} & \mathrm{K}_{10,7} & \mathrm{K}_{10,8} & \mathrm{K}_{10,9} & \mathrm{K}_{10,10} & \mathrm{K}_{10,11} & \mathrm{K}_{10,12} \\ \mathrm{K}_{11,1} & \mathrm{K}_{11,2} & \mathrm{K}_{11,3} & \mathrm{K}_{11,4} & \mathrm{K}_{11,5} & \mathrm{K}_{11,6} & \mathrm{K}_{11,7} & \mathrm{K}_{11,8} & \mathrm{K}_{11,9} & \mathrm{K}_{11,10} & \mathrm{K}_{11,11} & \mathrm{K}_{11,12} \\ \mathrm{K}_{12,1} & \mathrm{K}_{12,2} & \mathrm{K}_{12,3} & \mathrm{K}_{12,4} & \mathrm{K}_{12,5} & \mathrm{K}_{12,6} & \mathrm{K}_{12,7} & \mathrm{K}_{12,8} & \mathrm{K}_{12,9} & \mathrm{K}_{12,10} & \mathrm{K}_{12,11} & \mathrm{K}_{12,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \end{Bmatrix} \tag{26}$$

3.11.2.6. Matriz de rigidez elementar e vetor de cargas local

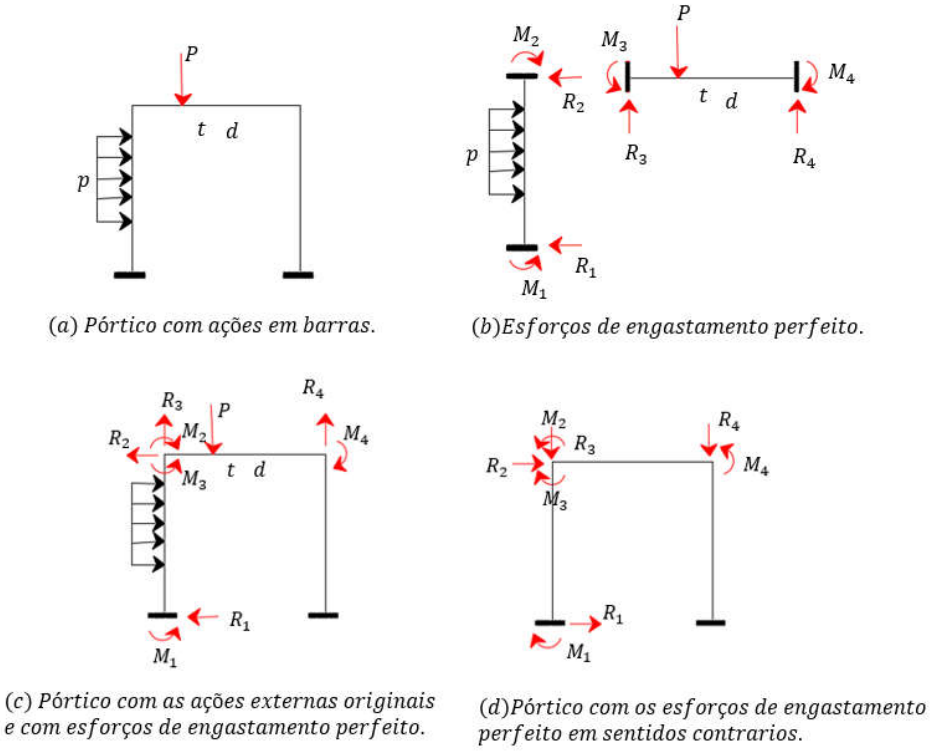
Como descrito no tópico 3.9.2.1, é mais fácil para a resolução dos cálculos a adoção de um sistema de referência local para cada barra. Isso implica na geração de matrizes de rigidez elementares. Cada coeficiente é associado a um número de grau de liberdade, o que facilitará o seu espalhamento na matriz de rigidez global que posteriormente será calculada. Para uma barra espacial que possui engaste perfeito, ou seja, possui todas as deslocabilidades restringidas, a matriz de rigidez fica com o formato representado na equação 27 (GERE E WEAVER, 1981).

$$[Ke] = \begin{bmatrix} \frac{EA_X}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_X}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_X}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_X}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_Z}{L} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_Z}{L} \\ -\frac{EA_X}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_X}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_X}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_X}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_Z}{L} & 0 & -\frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_Z}{L} \end{bmatrix} \quad (27)$$

O vetor de cargas local pode ser montado através dos esforços nodais calculados através do método das forças. Faz-se a distribuição esforços segundo a numeração dos graus de liberdade atribuídos a cada deslocabilidade. No caso de uma viga perfeitamente engastada, haverá valores de coeficiente em todas as deslocabilidades (GERE E WEAVER, 1981).

3.11.2.7. Liberação de matrizes de graus de liberdade

Para a obtenção das matrizes de rigidez de barras que não sejam perfeitamente engastadas, bem como o vetor de forças locais, dado à diversidade de tipos de combinações e liberações de deslocamentos que podem ocorrer em uma mesma barra, é mais prático modificar a matriz de rigidez e o vetor de esforços de engastamento perfeito de barra em seu referencial local a partir do princípio das forças nodais equivalentes, apresentada através da imagem 12 (SORIANO, 2009).



(a) Pórtico com ações em barras.

(b)Esforços de engastamento perfeito.

(c) Pórtico com as ações externas originais e com esforços de engastamento perfeito.

(d)Pórtico com os esforços de engastamento perfeito em sentidos contrarios.

Figura 12 - Forças nodais equivalentes.
Fonte: Soriano,2009, p. 117

Considerando que o método dos deslocamentos se baseia em um sistema de equações de equilíbrio considerando coordenadas globais, quando uma estrutura é solicitada externamente, os efeitos gerados dessas ações devem ser transformados em efeitos de forças nodais. A figura 12 busca exemplificar esse procedimento, onde é representado um pórtico (a) que está sendo solicitado pelas forças P e p, e sobre uma variação de temperatura t e uma deformação d. Na 12(b) cada barra do pórtico é representada isoladamente, juntamente com a representação das reações de apoio (esforços de engastamento perfeito). Na 12(c) o pórtico é representado juntamente com os esforços de engastamento perfeito e as solicitações externas. Na parte (d) da figura é representado as forças nodais equivalentes (esforços de engastamento perfeito em sentidos contrários). Logo, as reações da imagem 12(a) da figura podem ser obtidas pela soma das reações de apoio das partes 12(c) e 12(d), bem como os esforços internos. A partir disso surge a expressão (28) (SORIANO, 2009).

$$a^i_{\sim LF} = k^i_{\sim L}\ u^i_{\sim L}\ a^i_{\sim LS} \tag{28}$$

Onde $a^i_{\sim LF}$ corresponde aos esforços internos finais nas extremidades das barras, $k^i_{\sim L}$ indica a matriz de rigidez da barra no referencial local, $u^i_{\sim L}$ é o vetor de deslocamentos nodais no referencial local e $a^i_{\sim LS}$ são os esforços de engastamento perfeito em seu referencial local (SORIANO, 2009).

A j-ésima equação desse sistema tem a forma:

$$\boldsymbol{a^i_j} = \sum_{k=1}^{2g} k^i_{jk} u^i_k + a^i_j \tag{29}$$

Em que $\boldsymbol{a^i_j}$, a^i_j e u^i_k são, respectivamente, os coeficientes genéricos os vetores $a^i_{\sim LF}$, $a^i_{\sim LS}$, e de $u^i_{\sim L}$; k^i_{jk} é o coeficiente genérico da matriz $k^i_{\sim L}$ e 2g é o número de deslocamentos nodais da barra (SORIANO, 2009).

Considerando l a ordem de um deslocamento na numeração local de barra que se deseja liberar, a equação anterior pode er escrita sob a forma:

$$0 = \sum_{k=1}^{l-1} k^i_{lk}\ u^i_k\ + k^i_{ll}\ u^i_l + \sum_{k=l+1}^{2g} k^i_{jk}\ u^i_k\ + a^i_l \tag{30}$$

Onde a^i_l foi feito nulo na direção a ser liberada. Isolando nessa equação o deslocamento u^i_l, obtém-se:

$$u_l^i = -\frac{1}{k_{ll}^i}\left(\sum_{k=1}^{l-1} k_{lk}^i\ u_k^i\ + \sum_{k=l+1}^{2g} k_{jk}^i\ u_k^i\ + a_l^i\right) \tag{31}$$

Substituindo esse deslocamento na equação 35, chega-se, para $j \neq l$, à equação:

$$a_j^i = \sum_{k=1}^{l-1} k_{jk}^{i\prime}\ u_k^i\ + \sum_{k=l+1}^{2g} k_{jk}^{i'}\ u_k^i\ + a_l^i \tag{32}$$

Onde anotam-se as notações:

$$\begin{cases} k_{jk}^{i'} = k_{jk}^i - \dfrac{k_{jl}^i}{k_{ll}^i} k_{lk}^i \\ a_j^{i'} = a_j^i - \dfrac{k_{jl}^i}{k_{ll}^i} a_l^i \end{cases} \tag{33}$$

Assim, pode-se fazer uma substituição do deslocamento liberado nas demais equações de equilíbrio da barra. Quando j e l são iguais, significa que aquele coeficiente relacionado ao deslocamento foi liberado, substituindo o valor pelo número 0. Com essas notações, cria-se as matrizes de rigidez locais e o vetor de força local para qualquer configuração de barra que não seja bi-engastada (SORIANO, 2009).

3.11.2.8. Matriz de rigidez e vetor de forças global e cálculo de deslocamentos e forças

Se uma estrutura é composta por várias barras, e essas barras estão localizadas no mesmo eixo de coordenadas globais, então a matriz de rigidez da estrutura pode ser gerada pela combinação das matrizes de rigidez das barras individuais já rotacionadas. Ou seja, a matriz de rigidez global surge da sobreposição das matrizes elementares de cada barra, e assim como as matrizes elementares, ela independe dos carregamentos que atuam sobre a estrutura (LEET; UANG e GILBERT; 2009).

O espalhamento dos coeficientes rotacionados na matriz de rigidez global segue a ordem que o coeficiente ocupava na matriz de rigidez local, em relação ao seu grau de liberdade. Se lá a posição correspondia, por exemplo, ao grau de liberdade dois em uma referida linha e ao grau de liberdade três em uma referida

coluna, na matriz de rigidez global a posição do elemento será linha dois, coluna três (LEET; UANG e GILBERT; 2009).

A mesma linha de raciocínio seguirá a montagem do vetor global de cargas, com a diferença que, se houverem cargas nodais na estrutura, elas entrarão neste vetor, alocados nas respectivas colunas correspondentes ao número do grau de liberdade em que está alocado o carregamento nodal que se deseja ser adicionado (SORIANO, 2009).

Como visto na equação (3), as forças dos apoios restringidos surgem da multiplicação da matriz de rigidez pelo vetor de deslocamentos, isto em coordenadas locais. Para fazer a transformação para coordenadas globais, usa-se a matriz de rotação $\boldsymbol{R}$ obtida na equação 18 (GERE E WEAVER, 1981).

$$[\mathbf{R}^{\boldsymbol{T}}] * [\mathrm{f}_{\sim l}] = [F] \tag{34}$$

Onde F é o vetor de forças em coordenadas globais e $\mathbf{R}^{\boldsymbol{T}}$ será a matriz de rotação transposta a fim de se adequar as dimensões necessárias para multiplicações de matrizes. Isto é possível porque a transposta da matriz $\mathbf{R}$ é igual ao seu inverso. Da mesma forma, podemos obter o vetor de deslocamentos globais D, pela expressão (35) (GERE E WEAVER, 1981).

$$[\mathbf{R}] * [d_{\sim l}] = [D] \tag{35}$$

Substituindo as equações 33 e 34 em 18, obtém-se:

$$[F] = [\mathbf{R}^{\boldsymbol{T}}] * [K_{\sim ll}] * [\mathbf{R}] * [D] \tag{36}$$

Ou seja, a matriz de rigidez global K corresponde a:

$$[K] = [\mathbf{R}^{\boldsymbol{T}}] * [K_{\sim ll}] * [\mathbf{R}] \tag{37}$$

Portanto:

$$[F] = [K] * [D] \tag{38}$$

Montada a matriz de rigidez e o vetor de carga global, pode-se proceder o cálculo dos deslocamentos dos apoios não restringidos e das reações de apoio. Para que isso seja possível, é necessário dividir a matriz e o vetor de foças para evitar cair em uma solução impossível de se calcular devido a possibilidade da matriz de rigidez ser singular, já que o deslocamento referente aos graus de liberdade restringidos equivale a 0. Portanto, é conveniente dividir a equação 31 entre os graus de liberdade

restringidos e os não restringidos, formando as submatrizes *K11, K12, K21, K22* (39) (GERE E WEAVER, 1981).

$$K = \left[\frac{[K_{11}]}{[K_{21}]} | \frac{[K_{12}]}{[K_{22}]}\right] \tag{39}$$

A submatriz *K11* representa os graus de liberdade restringidos, enquanto as restantes dizem respeito aos graus de liberdade livres. Da mesma forma, fica dividido o vetor de forças e deslocamentos, de forma que:

$$\left[\frac{Fk}{Fu}\right] = \left[\frac{[K_{11}]}{[K_{21}]} | \frac{[K_{12}]}{[K_{22}]}\right] * \left[\frac{Du}{Dk}\right] \tag{40}$$

Onde *Fk* e *Dk* correspondem as forças e deslocamentos conhecidos, respectivamente, assim como *Fu* e *Du* correspondem as forças e deslocamentos desconhecidos (GERE E WEAVER, 1981).

Divindindo e isolando as incógnitas, tem-se:

$$\{\mathrm{Du}\} = [K_{11}]^{-1} * (\{\mathrm{Fk}\} - [K_{12}] * \{\mathrm{Dk}\}) \tag{41}$$

$$\{\mathrm{Fu}\} = [K_{21}] * \{\mathrm{Du}\} + [K_{22}] * \{\mathrm{Dk}\} \tag{42}$$

Com isso, é possível obter as reações de apoio e deslocamentos dos graus de liberdade livres em coordenadas globais (GERE E WEAVER, 1981).

3.12. LINGUAGEM PYTHON

O Python é uma linguagem dinâmica que engloba variadas estruturas (listas, dicionários, data / hora e outras) e uma abrangente coleção de módulos prontos para uso. É uma linguagem altamente poderosa, já que possui uma biblioteca de funções que comporta tarefas diversificadas, o que permite o desenvolvimento de grandes projetos. O python é uma linguagem que possui código aberto, dispondo de multiplataformas e comportando a orientação a objeto, já que tudo dentro do python é um objeto, desde a mais simples variável. (MENEZES, 2010).

Dentre os ambientes de desenvolvimento integrado (IDE) para Python, o Spyder é um dos que mais e destaca quando se trata da linguagem Python. Ele oferece uma combinação de recursos de edição, análise, depuração e criação de perfil de uma ferramenta, com um ambiente de desenvolvimento interativo, permitindo a execução de comandos diretamente no terminal e depuração, além de possuir recursos de introspecção, que permitem a análise do tipo e as propriedades de um

objeto (variável, função ou estrutura de dados) em tempo de execução (MENEZES, 2010).

Para o desenvolvimento de uma interface pode ser utilizado o PyQt, que é um kit de ferramentas de widgets da GUI. O PyQt é uma interface Python para o Qt, é uma mistura de linguagem de programação Python e da biblioteca Qt. Já o Matplotlib é uma biblioteca de plotagem do Python que produz uma variedade de formatos impressos e ambientes interativos entre plataformas (BORGES, 2010).

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1. METODOLOGIA DO TRABALHO

Para o desenvolvimento do trabalho, primeiramente foi elaborada a revisão bibliográfica referente à análise estrutural, seguida do estabelecimento do método e da linguagem a ser empregue para a composição do trabalho e do código. Logo, através da revisão dos conceitos básicos da análise estrutural e dos métodos básicos de resolução de estruturas hiperestáticas, foi estabelecido o método das forças e dos deslocamentos (rigidez e matricial), como métodos necessários para a composição do software.

O Método dos Deslocamentos foi adotado, devido a sua adaptação para os métodos matriciais, proporcionando assim uma linguagem matemática conveniente para manipulação por meio de computadores. O Método das Forças, apesar de não ser convencional o seu uso para a manipulação por computadores, foi utilizado para determinar as ações nodais, com o objetivo de possibilitar a transferência de qualquer tipo de função de carregamento atuante para as extremidades da barra. A linguagem Python foi escolhida pois promove os recursos necessários para a execução do software, como bibliotecas com ferramentas de cálculo possibilitando a execução de limites, diferenciais e integrais, além de também proporcionar simplicidade e eficiência.

Inicialmente, o foco foi compreender o funcionamento de um código capaz de resolver estruturas planas (treliças e pórticos), para depois evoluir na aplicação do código e dos conceitos para elementos espaciais. Posteriormente foi elaborado o código computacional, tendo como base as etapas da análise matricial de estruturas reticuladas espaciais.

Para elaborar o código, primeiramente foram definidos os sistemas de coordenadas globais, para possibilitar a consumação da ordem dos graus de liberdades. Posteriormente foram determinados os sistemas de coordenadas locais, para possibilitar a obtenção das matrizes de rigidez locais e matrizes de rotação. Depois foram determinados os métodos de obtenção dos vetores tanto de força como o de deslocamento. Então, possuindo todos esses dados, foi possível a transformação de coordenadas locais para globais, e a obtenção da matriz de rigidez global.

Depois de todos os passos descritos anteriormente, foi possível a resolução da estrutura, obtendo reações de apoios, esforços internos e deformações. Todos os resultados obtidos com estruturas planas, foram comparados com o Ftool, já os resultados obtidos com o código para estruturas espaciais foram comparados com o SAP 2000.

Com o código de cálculo pronto, o próximo passo foi desenvolver uma interface gráfica, para possibilitar uma entrada de dados de forma clara e simples. A interface gráfica foi desenvolvida através das bibliotecas Matplotlib, responsável por gerar o canvas onde é representado a estrutura, e o PyQT4, biblioteca voltada para a criação da interface gráfica do programa, em um objeto diferente do código de cálculo.

4.2. METODOLOGIA DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

4.2.1. Convenção de sinais

É imprescindível adotar uma convenção de sinais para as forças e deslocamentos, para garantir os resultados certos e esperados, além de facilitar o entendimento e a comunicação entre os engenheiros. A escolha da convenção a ser utilizada é indiferente, pois, desde que seja seguida corretamente, irá trazer os mesmos resultados assim como qualquer outra que tenha seu uso de forma correta (MCCORMAC, 2009).

A convenção de Green, determina como positivos os deslocamentos com direção horizontal e sentido para a direita e os deslocamentos com direção vertical e sentido para cima. No caso do eixo z, que está perpendicular ao plano x-y, será considerado como positivo aqueles deslocamentos que estiverem saindo do plano da tela. Para os momentos, serão considerados como positivos aqueles que tiverem giro anti-horário em relação ao eixo analisado. A figura 10 representa graficamente a convenção descrita (MARTHA, 2010).

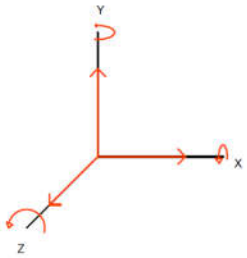


Figura 13 - Representação de deslocamentos e giros positivos.
Fonte: os autores.

Outra convenção a ser adotada é a convenção que rege o traçado dos diagramas de esforços internos das barras. Para isso, toma-se a barra, orientada em seu eixo de coordenadas locais e analisa-se onde se encontra a posição da fibra inferior da barra, que estará situada na parte de baixo da barra se o sistema analisado for o destrógeno, definido pela locação dos nós da barra e sua incidência. Quando o ponto inicial da barra se situar a esquerda do ponto final tem-se um sistema destrógeno, caso contrário, será um sistema levógeno, neste caso a fibra inferior da barra estará situada na sua parte superior (MARTHA, 2010).

4.2.2. Fluxograma do código

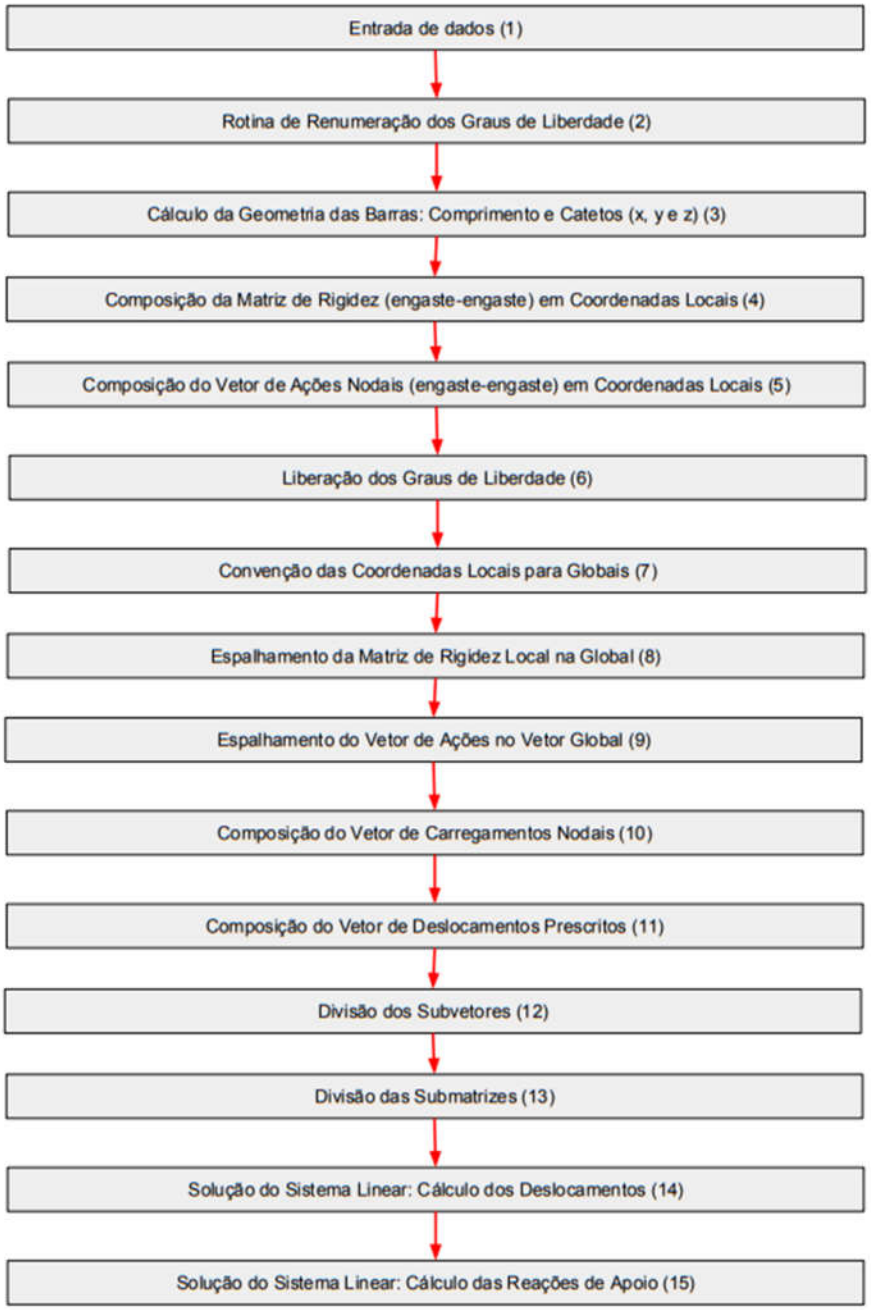


Figura 14 - Fluxograma do código.
Fonte: os autores.

4.2.3. Entrada de dados da estrutura

A entrada de dados (nível 1 do fluxograma – figura 14) compreende o fornecimento de informações para o software promover a análise da estrutura. Essas

informações serão promovidas pelo usuário do programa, para que posteriormente possam ser codificados de modo conveniente.

A localização de cada nó pertencente à estrutura será especificada por meio de coordenadas geométricas, e a partir dos nós identificados, é possível indicar as condições de apoio. A localização de dois nós pode permitir a locação de uma barra, e deverão ser informadas obrigatoriamente as propriedades geométricas (Área da seção, momento de inercia polar, momento de inercia do eixo y e momento de inercia do eixo z) das seções e propriedades mecânicas do material (módulo de elasticidade e coeficiente de poisson). Outra informação necessária é a identificação de descontinuidades ao longo dos elementos da estrutura. O esquema da entrada de dados está exemplificado na figura 15.

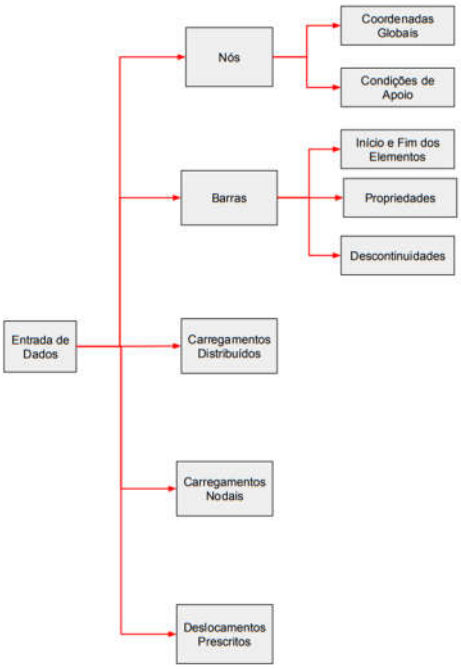


Figura 15 - Esquema para entrada de dados.
Fonte: os autores.

A informação dos carregamentos distribuídos, pode ser feita através das intensidades aplicadas em cada extremidade da barra, ou também por meio de equações de carregamento.

4.2.4. Rotina de renumeração dos graus de liberdade

Para a aplicação da análise matricial, como mencionado na revisão bibliográfica, é preciso que os pontos extremos dos elementos discretos (barras), sejam identificados, ou seja, o primeiro passo para uma aplicação matricial é a identificação dos seus nós. Em uma estrutura espacial cada nó apresentara seis graus de liberdade, que devem ser identificados através de números. Essa numeração dos graus de liberdade permite dividir a matriz de rigidez da estrutura, pois possibilita identificar de forma mais direta a localização dos graus de liberdades restringidos.

No software, para auxiliar a composição da matriz de rigidez e do vetor de carregamento, foi gerado um vetor para os graus de liberdade de cada barra, onde os graus de liberdade não restringidos são as variáveis primárias e são identificados com os primeiros números do vetor, já os restringidos foram nomeados com os últimos números.

Na entrada de dados é possível que o usuário informe os nós de forma aleatória, ou seja, não necessariamente respeitando a ordem dos graus de liberdade, logo, o programa precisa corrigir essa sequência (nível 2 do fluxograma – figura 14), e para isso foi desenvolvido uma rotina de renumeração dos graus de liberdade, que funciona através de dois laços que percorrem os nós da estrutura, sendo possível assim renumerar os graus de liberdade da maneira imposta pela analise matricial.

4.2.5. Montagem das matrizes de rotação dos membros da estrutura

Quando os elementos de uma estrutura estão orientados em direções diferentes, torna-se necessário realizar as transformações de eixos, como foi visto na revisão bibliográfica, e para isso foi imprescindível a matriz de rotação R.

Para determinar a matriz de rotação de cada membro da estrutura foi necessário definir os cossenos diretores, que são os cossenos dos ângulos que o eixo local forma com o eixo global. A definição dos cossenos diretores e a posterior montagem da matriz de rotação dos membros da estrutura, foi feito conforme o esquema de montagem mostrado na figura 16.

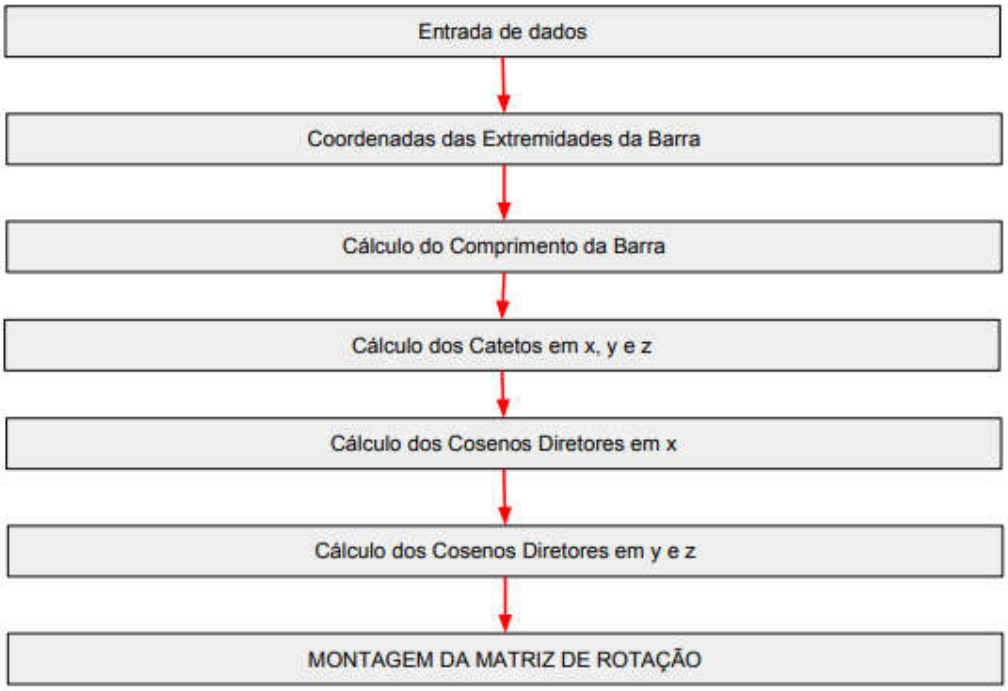


Figura 16 - Esquema de montagem das matrizes de rotação dos membros da estrutura.
Fonte: os autores.

As etapas para composição da matriz de rotação, apresentada no esquema, ocorre de maneira individual para cada barra existente na estrutura. Os passos se iniciam com a entrada de dados, que possibilita o cálculo do comprimento das barras e também dos catetos para cada eixo ($x, y\ e\ z$). Contendo os catetos e o comprimento de cada membro da estrutura, é possível calcular agora os cossenos diretores, conforme apresentado na Fundamentação Teórica, na seção 3.11.2.2, e assim promover a composição da matriz de rotação (nível 3 do fluxograma– figura 14).

4.2.6. Montagem das matrizes de rigidez local

A matriz de rigidez de um elemento da estrutura expressa as forças na nas extremidades do componente como função dos deslocamentos, estes elementos podem ser conectados entre si de maneira a permitir ou não os deslocamentos, de modo que os esforços seccionais correspondentes a esses deslocamentos fiquem nulos. É a partir destes vínculos que é definido qual matriz de rigidez local será

admitida para cada caso. Existem quatro tipos de matriz de rigidez local, sendo engaste-engaste, engaste-rótula, rótula-engaste e rótula-rótula.

No software, primeiramente foi utilizada somente a matriz de rigidez de engaste-engaste (nível 4 do fluxograma – figura 14), para posteriormente, através de um procedimento automático de liberação dos graus de liberdade, ser gerado a matriz de rigidez correta para cada caso de vinculo. Logo, na primeira etapa, onde será definida a matriz de rigidez local, considerando todas as barras como engaste-engaste, os coeficientes de rigidez serão determinados a partir do comprimento e das propriedades da barra. Então, a partir do modelo de matriz de rigidez engaste-engate, determinado na seção 3.11.2.6. da revisão bibliográfica, e da entrada de dados, será estabelecida a matriz de rigidez engaste-engaste para cada barra. O processo é ilustrado na figura 17.



Figura 17 - Esquema de montagem da matriz de rigidez local.
Fonte: os autores.

4.2.7. Definição do vetor de cargas nodais

A composição do vetor de cargas nodais é realizada através da sobreposição dos efeitos das cargas nodais e das ações nodais. As cargas nodais são informadas pelo usuário na entrada de dados, e compreendem os carregamentos nodais na estrutura. As ações nodais são geradas devido aos carregamentos distribuídos, através da transferência deste para as extremidades da barra.

4.2.7.1. Ações nodais

Na aplicação da análise matricial, para possibilitar a definição das ações nodais e assim compor o vetor de cargas, devem ser transferidos os carregamentos atuantes ao longo da barra para suas extremidades (nível 5 do fluxograma – figura 14). Então, foi considerada cada barra isoladamente, e através do Método das Forças foi determinado as reações de apoio de cada barra, considerando primeiramente todos os componentes como perfeitamente engastados, assim como a barra da figura 18.

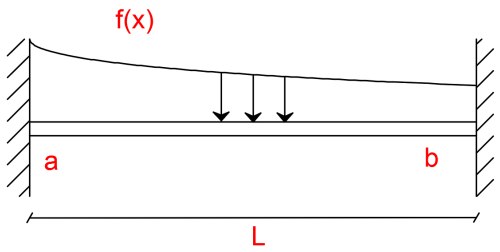


Figura 18 - Barra isolada, perfeitamente engastada e com carregamento qualquer.
Fonte: os autores.

Os carregamentos distribuídos e as descontinuidades foram especificados na entrada de dados, logo, foi necessária uma ferramenta capaz de calcular as reações de apoio de cada barra isoladamente. Os valores dos carregamentos são orientados através do sistema de coordenadas locais, então além do programa ter que corrigir as descontinuidades das barras – por que elas serão consideradas como totalmente engastadas – será preciso também converter os valores para o sistema de coordenadas global.

O método das forças foi utilizado para determinar as ações nodais, e com a intenção de efetivar as integrais que esse método impõe, foi preciso fazer uso da biblioteca Sympy, que através da ferramenta de cálculo (possibilita a execução de limites, diferenciais e integrais) foi possível realizar as integrais necessárias para o emprego do método.

Para estabelecer as reações de apoio de cada barra isoladamente, foi utilizado os passos apresentados na seção 3.11.1 da revisão bibliográfica. Primeiramente foi criado a estrutura isostática auxiliar (sistema principal), obtida através da eliminação de vínculos excedentes, ilustrada na figura 20 (a). Na figura 20(b) foram eliminados dois vínculos externos (hiperestáticos), a rotação em B (MB) e a translação em B (VB), e mantido o carregamento distribuído, formando o caso básico zero. Depois para determinar os valores de MB e VB foi gerado mais dois casos básicos (b) e (c), que isolaram os efeitos dos hiperestáticos. Dessa forma, geramos carregamentos distintos

sobre uma mesma geometria simplificada e isostática, que somados novamente determinaram as reações superabundantes.

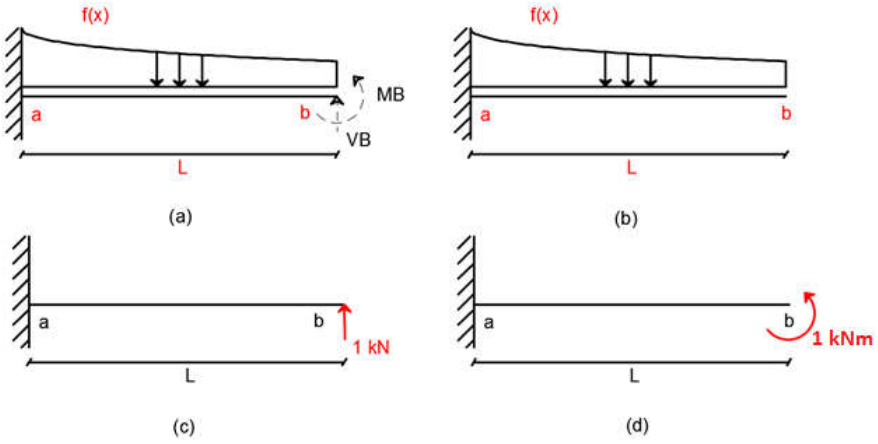


Figura 19 - (a) Estrutura Isostática Auxiliar. (b)(c)(d) Casos básicos.
Fonte: os autores.

Através desta divisão da estrutura, foi estabelecido equações de momentos fletores para os três casos. Usufruindo do método da força unitária, e considerando apenas os efeitos dos momentos fletores, foi possível definir os deslocamentos do caso zero e os coeficiente de flexibilidade dos casos um e dois.

$$fij = \delta ij = \int \frac{Mi * Mj}{EI} dx \tag{43}$$

Dispondo das reações superabundantes as outras reações podem ser determinadas através das equações de equilíbrio. O esquema seguido pelo código para o cálculo das reações de apoio superabundantes, seguiu o esquema demonstrado pela figura 20.

Os carregamentos axiais foram determinados isoladamente, pois o carregamento axial distribuído não interfere nas reações de apoio verticais e de momentos. Logo, com a intenção de compor os casos básicos, foi considerado a reação NB como superabundante. E paralelamente com a determinação dos demais casos foi determinado NB através da equação 8, e NA foi definido através das equações de equilíbrio. Para definir os deslocamentos do caso zero e o coeficiente de flexibilidade do caso um, foi utilizada a equação 44.

$$fij = \delta ij = \int \frac{Ni * Nj}{EA} dx \tag{44}$$

Os carregamentos distribuídos e as descontinuidades foram especificados na entrada de dados, logo, o código é capaz de definir a equação adequada para cada caso, e com isso calcular as reações de apoio. Os valores do carregamento nas extremidades para os elementos são calculados no sistema de coordenadas local, então, antes de ser adicionado ao vetor de cargas nodais é feito a sua conversão para o sistema global. No código essa conversão e a posterior alimentação do vetor de cargas com os valores das ações nodais, são realizados após a adição dos efeitos da descontinuidade.

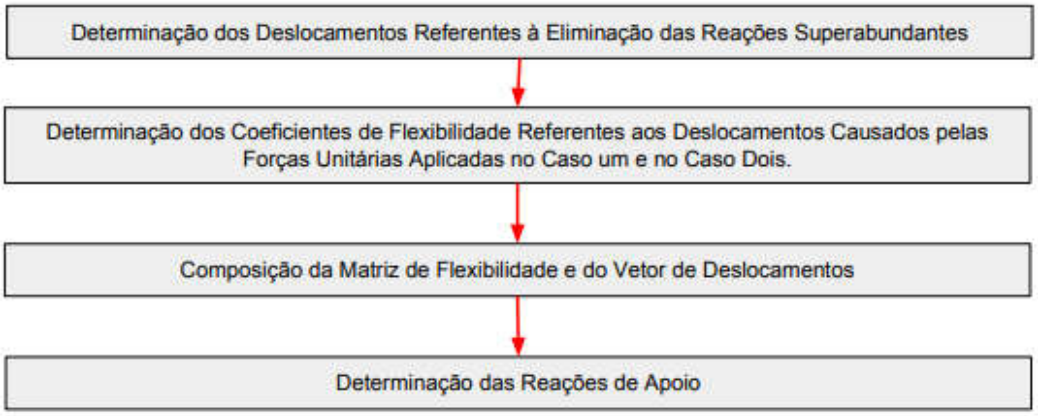


Figura 20 - Esquema de composição do vetor de ações nodais.
Fonte: os autores.

4.2.7.2. Forças nodais

Na entrada de dados foi informado as cargas nodais, e a partir da renumeração dos graus de liberdade, foi composto a lista de graus de liberdade, com isso foi possível compor o vetor com as cargas nodais na posição dos graus de liberdade (nível 10 do fluxograma – figura 14).

4.2.8. Descontinuidades (Axial, Cisalhante e rotação)

A ferramenta empregada para admitir o efeito das descontinuidades (nível 6 do fluxograma – figura 14) é a alteração das matrizes locais e do vetor de cargas, anulando-se a rigidez na direção do grau de liberdade em que se encontra a

descontinuidade, e também anulando a força que iria surgir nessa direção, devido aos deslocamentos (SORIANO, 2005).

4.2.9. Montagem da matriz de rigidez global

A matriz de rigidez global é obtida através do espalhamento da matriz de rigidez local na global (nível 8 do fluxograma – figura 14), esse espalhamento é o posicionamento dos coeficientes de rigidez na matriz de rigidez global, a partir dos respectivos graus de liberdade.

4.2.10. Vetor de Deslocamentos

Na entrada de dados é informado os deslocamentos que ocorrem nos nós da estrutura, através destes deslocamentos e da lista de graus de liberdade é definido o vetor de deslocamentos das estruturas (nível 11 do fluxograma – figura 14). Primeiramente no código é formado um vetor vazio com um número de linhas igual ao número de graus de liberdade. Em seguida, o código posiciona os deslocamentos prescritos (se houver).

4.2.11. Deslocamentos desconhecidos e reações de apoio

Como mencionado na seção 3.11.2.8. da revisão bibliográfica, montando um sistema de equações com o vetor de carga global, a matriz de rigidez global e o vetor de deslocamentos, com a numeração adequada dos graus de liberdade, é possível fazer um recorte no sistema de equações (nível 12 e 13 do fluxograma – figura 14), de forma a calcular os deslocamentos dos graus de liberdades livres e as reações de apoio (nível 14 e 15 do fluxograma – figura 14).

4.2.12. Notação do programa

Para facilitar o entendimento do programa pelo usuário, foi desenvolvido uma interface que busca idealizar a estrutura da uma forma mais simples, representando

as características da estrutura em estudo, para uma melhor visualização. A primeira plotagem que o programa permite é a dos nós da estrutura, que pode ser identificado por números na cor vermelha, e se o usuário preferir pode desabilitar a identificação dos pontos. Depois ao informar os componentes da estrutura, pode-se visualiza-los e identifica-los (números de cor azul).

Para representar as restrições dos nós, ao se clicar no botão plotar elas serão representadas nos respectivos nós. O programa representa as restrições de translação como linhas, e as rotações como círculos. A cor verde está relacionada com o eixo x, vermelho com o y e azul com z. Depois de especificado as liberações nas extremidades das barras, ao se clicar no botão plotar elas serão representadas nas respectivas extremidades das barras. O programa permite a liberação somente de rotação, onde os três primeiros campos se referem as rotações no início da barra, e os últimos ao ponto final da barra. O programa representa a liberação como anel. A cor verde está relacionada com o eixo x, vermelho com o y e azul com z. A figura 21 representa um exemplo de plotagem no CERBERUS, sem os carregamentos.

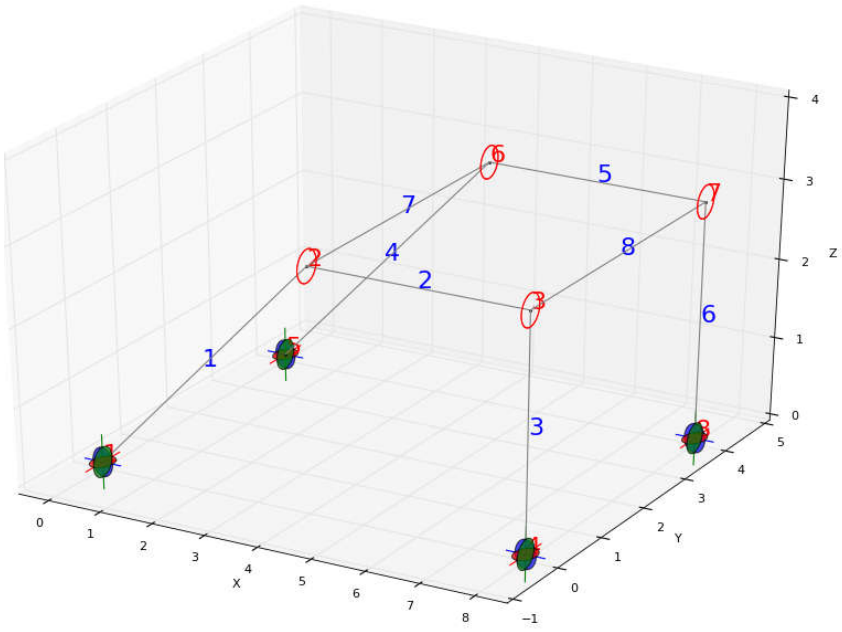


Figura 21 - Exemplo de plotagem no CERBERUS, sem carregamentos.
Fonte: os autores

Para representar os carregamentos nodais a convenção adotada pelo programa está representado na figura 22. Depois de especificado os carregamentos nodais, ao se clicar no botão plotar eles serão representados, onde os carregamentos

de forças estão representados na cor magenta, e os carregamentos de momentos estão representados na cor ciano.

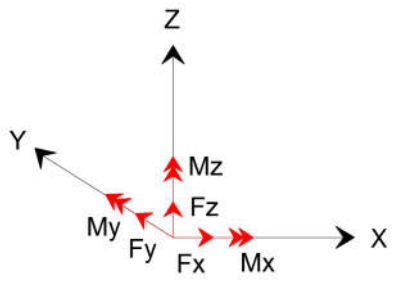


Figura 22 - Convenção carregamentos nodais.
Fonte: os autores

A entrada de carregamentos distribuídos é feita seguindo o eixo de coordenadas, onde cada barra poderá conter carregamentos no plano xy, xz e axial. Os carregamentos podem ser indicados através da intercidade nas duas extremidades da barra (carregamento linear) ou através de uma função (carregamento qualquer). Para dar entrada em um carregamento em forma de função, o usuário devera selecionar o campo f(x) e indicar a carregamento, respeitando as indicações de operações (x(*), ^(**), +(+) e –(-)). Os carregamentos distribuídos são orientados através do eixo de coordenada local. Ao se clicar no botão plotar os carregamentos distribuídos serão representados. Os deslocamentos prescritos são representados todos pela cor preta, respeitando a convenção representada pela figura 23.

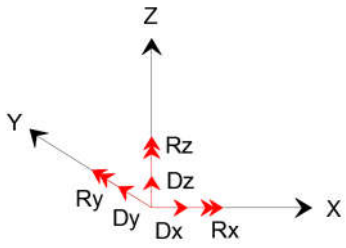


Figura 23 - Convenção deslocamentos prescritos.
Fonte: os autores

Após finalizar a entrada de dados da estrutura ela poderá ser calculada, clicando no botão calcular. Ao clicar no botão, poderá ser visualizado as reações de apoio na estrutura e executar a visualização de diagramas. Depois disto pode-se visualizar os diagramas de esforços cortantes (plano xy e xz), o diagrama de axial, os diagramas de momentos e a deformada da estrutura.

Depois de calculada a estrutura, pode-se gerar o relatório, onde é apresentado os resultados dos esforços solicitantes e dos deslocamentos da estrutura em estudo, além de detalhar o procedimento de cálculo. O relatório em PDF apresenta a entrada de dados em forma de tabelas, seguido de determinações das propriedades geométricas das seções transversais e a identificação dos graus de liberdade da estrutura. Em seguida, para cada barra é apresentado o cálculo do comprimento, dos cossenos diretores, montagem da matriz de rotação, matriz de rigidez elementar, determinação das cargas nodais devido carregamento distribuído e o cálculo das equações de esforços internos e deslocamentos. Como as matrizes utilizadas pelo método são extensas, todas são apresentadas em um arquivo TXT. Um exemplo de relatório será apresentado no anexo B.

Para possibilitar a compreensão de todas as notações adotadas pelo CERBERUS é possível gerar o manual do usuário, que detalha todo o procedimento de entrada de dados, e será apresentado no anexo A.

5. VALIDAÇÃO DO SOFTWARE

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos pela análise de estruturas reticuladas. Estão apresentados também os resultados, para as mesmas estruturas, resolvidas pelo SAP 2000 com o objetivo de validar o código.

5.1. PÓRTICOS RETICULADOS PLANOS

5.1.1. Pórtico com barras inclinadas e carregamentos distribuídos

Para validar o pórtico apresentado na figura 24, foram determinadas reações de apoio e deslocamentos, pelo código e pelo Ftool, seguindo as numerações de nós apresentados na figura 24. O pórtico apresenta quatro nós e três barras, sendo duas inclinadas, e as forças externas atuantes são distribuídas em todas as barras. Os nós 1 e 4 são vinculados externamente através de engastes. Através desse exemplo foi possível validar a matriz de rotação, carregamento distribuído em barras inclinadas e carregamento distribuído axial.

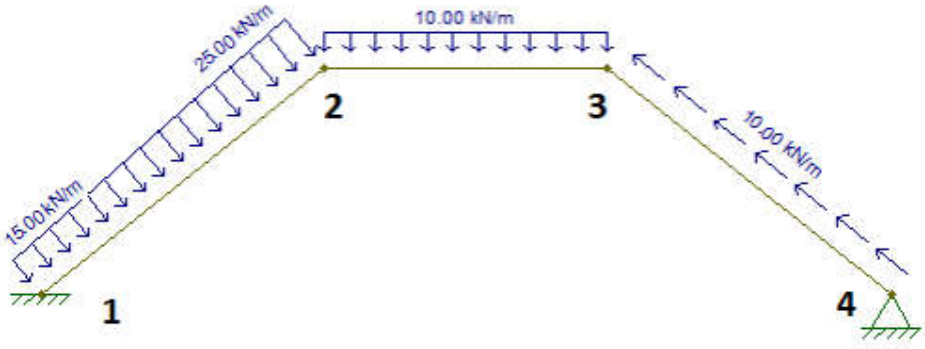


Figura 24 - Pórtico com barras inclinadas e carregamentos distribuídos
Fonte: os autores

Para a estrutura, foram estabelecidas as propriedades dos materiais (Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson), e as propriedades geométricas da barra (Área da seção, Momento de Inercia no Eixo x, Momento de Inercia no Eixo y e Momento de Inércia no Eixo z) seguintes:

- $E = 250$ GPa
- $\nu = 0{,}2$
- $A = 600\ cm$
- $I_x = 34386\ cm^4$
- $I_y = 80000\ cm^4$
- $I_z = 11250\ cm^4$

Os resultados obtidos pelo CERBERUS e pelo SAP 2000 estão representados nas tabelas 1 e 2, relativas as reações de apoio, e nas tabelas 3 e 4, relativas aos deslocamentos dos nós não restringidos.

REAÇÕES DE APOIO									
	F1 (kN) (Eixo x)			F2 (kN) (Eixo z)			M1 (kN.m) (Eixo y)		
NÓ	FTOOL	CERBERUS	ERRO	FTOOL	CERBERUS	ERRO	FTOOL	CERBERUS	ERRO
1	- 6,900	-6,900	0%	105,100	105.100	0%	145,60	145,60	0%
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-23,100	-23,100	0%	4,900	4,900	0%	-	-	-

Tabela 1 - Resultados de reações de apoio - Exemplo 2D
Fonte: os autores

DESLOCAMENTOS									
	D1 (kN) (Eixo x)			D2 (kN) (Eixo Z)			Θ1 (rad) (Eixo y)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,0122	0,0122	0 %	-0,0156	-0,0156	0%	0,0036	0,0036	0%
3	0,0119	0,0119	0%	0,0146	0,0146	0%	0,0043	0,0043	0%
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 2 - Resultados de deslocamentos - Exemplo 2D
Fonte: os autores.

5.2. PÓRTICOS RETICULADOS ESPACIAIS

5.2.1. Pórtico com barras inclinadas e carregamento nodal em z

Para validar o pórtico apresentado na figura 25, foram determinadas reações de apoio e deslocamentos, pelo código e pelo SAP 2000, seguindo as numerações de barras e nós apresentados na figura 25. O pórtico apresenta quatro nós e três barras, sendo duas inclinadas, e a força externa atuante é pontual incidindo no nó 2, com intensidade de 200 kN, na direção de z negativo. Os nós 1, 3 e 4 são vinculados externamente através de engastes. Através desse exemplo foi possível validar a matriz de rotação e carregamentos nodais para pórticos reticulados espaciais.

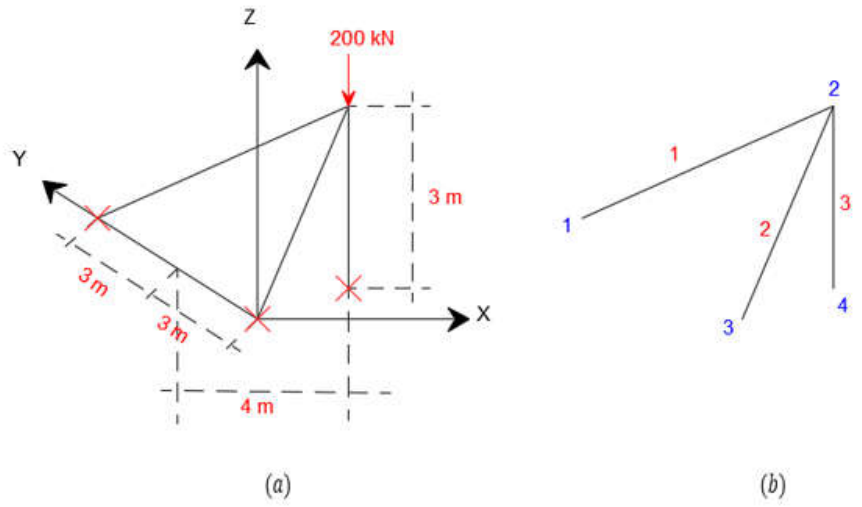


Figura 25 - Pórtico com barras inclinadas e carregamento nodal.
Fonte: os autores.

Para a estrutura, foram estabelecidas as propriedades dos materiais (Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson), e as propriedades geométricas da barra (Área da seção, Momento de Inercia no Eixo x, Momento de Inercia no Eixo y e Momento de Inércia no Eixo z) seguintes:

- $E = 200$ GPa
- $\nu = 0{,}2$
- $A = 600\ cm$
- $I_x = 34386\ cm^4$
- $I_y = 80000\ cm^4$
- $I_z = 11250\ cm^4$

Os resultados obtidos pelo CERBERUS e pelo SAP 2000 estão representados nas tabelas 3 e 4, relativas as reações de apoio, e nas tabelas 5 e 6, relativas aos deslocamentos dos nós não restringidos.

FORÇAS									
	F1 (kN) (Eixo x)			F2 (kN) (Eixo y)			F3 (kN) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	0,046	0,046	0%	0,048	0,048	0%	0,211	0,211	0%

2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-0,046	-0,046	0%	0,048	0,048	0%	0,211	0,211	0%
4	0,000	0,000	0%	-0,097	-0,097	0%	199,577	199,577	0%

Tabela 3 - Resultados de reações de apoio (forças) – exemplo 01.
Fonte: os autores.

MOMENTOS									
	M1 (kN.m) (Eixo x)			M2 (kN.m) (Eixo y)			M3 (kN.m) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	0,704	0,704	0%	-0,449	-0,449	0%	-0,015	-0,015	0%
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	0,704	0,704	0%	0,449	0,449	0%	0,015	0,015	0%
4	0,283	0,283	0%	0,000	0,000	0%	0,000	0,000	0%

Tabela 4 - Resultados de reações de apoio (momentos) - exemplo 01
Fonte: os autores.

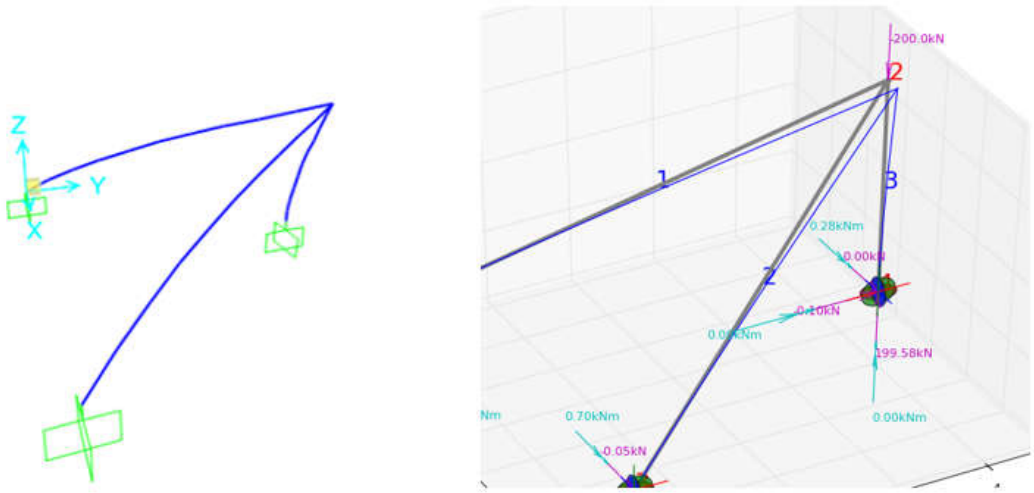
DESLOCAMENTOS									
	D1 (kN) (Eixo x)			D2 (kN) (Eixo y)			D3 (kN) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,000	0,000	0 %	0,000	0,000	0%	0,000	0,000	0%
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 5 - Resultados de deslocamentos - exemplo 01
Fonte: os autores.

ROTAÇÕES									
	Θ1 (rad) (Eixo x)			Θ2 (rad) (Eixo y)			Θ3 (rad) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,000	0,000	0 %	0,000	0,000	0%	0,000	0,000	0%
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 6 - Resultados de rotações - exemplo 01
Fonte: os autores.

Para validar os diagramas do software, a seguir será apresentada as deformadas para o exemplo gerado pelo CERBERUS e pelo SAP2000.



(a) (b)

Figura 26 - Comparação da deformada - exemplo 1
Fonte: os autores

5.2.2. Pórtico com barras inclinadas e carregamento distribuído no plano xy local

Para validar o pórtico apresentado na figura 27, foram determinadas reações de apoio e deslocamentos, pelo código e pelo SAP 2000, seguindo as numerações de barras e nós apresentados na figura 27. O pórtico apresenta cinco nós e quatro barras, sendo duas inclinadas, e um carregamento distribuído carregado no plano xy, com intensidade de 30 Kn/m. Os nós 1 e 2 são vinculados externamente liberando as rotações e o nó 5 é perfeitamente engastado. Através desse exemplo foi possível validar o carregamento distribuído no plano xy local.

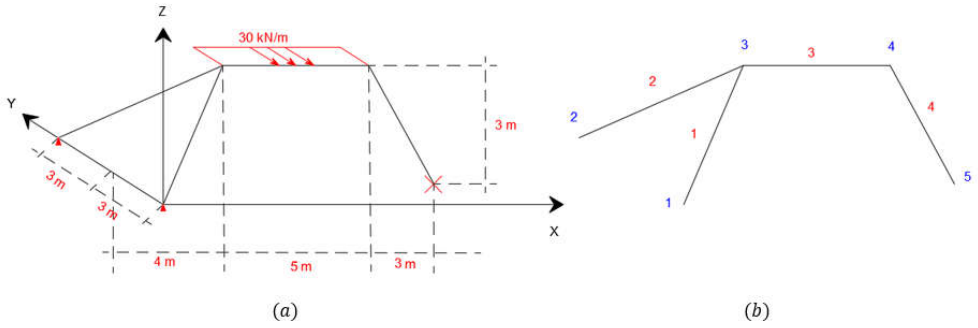


Figura 27 - Pórtico com barras inclinadas e carregamento no plano xy.
Fonte: os autores.

Para a estrutura foram estabelecidas as propriedades dos materiais (Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson), e as propriedades geométricas da barra (Área da seção, Momento de Inercia no Eixo x, Momento de Inercia no Eixo y e Momento de Inercia no Eixo z) seguintes:

- $E = 200$ GPa
- $\nu = 0{,}2$
- $A = 600\ cm$
- $I_x = 34386\ cm^4$
- $I_y = 80000\ cm^4$
- $I_z = 11250\ cm^4$

Os resultados obtidos pelo CERBERUS e pelo SAP 2000 estão representados nas tabelas 7 e 8, relativas as reações de apoio, e nas tabelas 9 e 10, relativas aos deslocamentos dos nós não restringidos.

FORÇAS									
	F1 (kN) (Eixo x)			F2 (kN) (Eixo y)			F3 (kN) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	88,159	88,159	0%	53,268	53,268	0%	58,831	58,831	0%
2	-88,159	-88,159	0%	53,268	53,268	0%	-58,831	-58,831	0%
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	0,000	0,000	0%	43,464	43,464	0%	0,000	0,000	0%

Tabela 7 - Resultados de reações de apoio (forças) - exemplo 02
Fonte: os autores.

MOMENTOS									
	M1 (kN.m) (Eixo x)			M2 (kN.m) (Eixo y)			M3 (kN.m) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-97,013	-97,013	0%	0,000	0,000	0%	-75,516	-75,516	0%

Tabela 8 - Resultados de reações de apoio (momentos) - exemplo 02
Fonte: os autores.

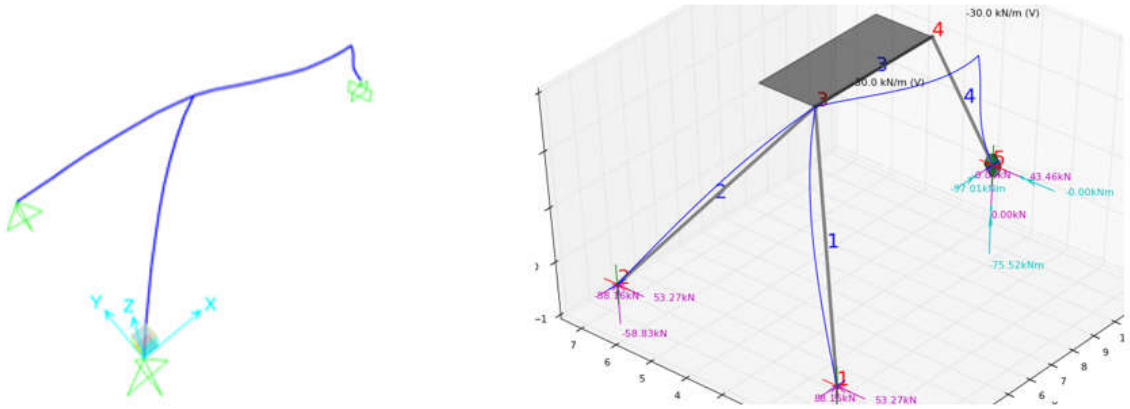
DESLOCAMENTOS									
	D1 (kN) (Eixo x)			D2 (kN) (Eixo y)			D3 (kN) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	0,000	0,000	0%	-0,001	-0,001	0%	0,000	0,000	0%
4	0,000	0,000	0%	-0,240	-0,240	0%	0,000	0,000	0%
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 9 - Resultados de deslocamentos - exemplo 02
Fonte: os autores

ROTAÇÕES									
	Θ1 (rad) (Eixo x)			Θ2 (rad) (Eixo y)			Θ3 (rad) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	-0,033	-0,033	0%	-0,026	-0,026	0%	-0,005	-0,005	0%
2	-0,033	-0,033	0%	0,026	0,026	0%	0,005	0,005	0%
3	-0,003	-0,003	0%	0,000	0,000	0%	-0,062	-0,062	0%
4	0,056	0,056	0%	0,000	0,000	0%	0,024	0,024	0%
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 10 - Resultados de rotações - exemplo 02
Fonte: os autores

Para validar os esforços internos, a seguir será apresentada as deformadas para o exemplo gerado pelo CERBERUS e pelo SAP2000.



(a) (b)

Figura 28 - Comparação da deformada - exemplo 2
Fonte: os autores

5.2.3. Pórtico com barras inclinadas, carregamentos distribuídos no eixo xz e liberações de continuidades

Para validar o pórtico apresentado na figura 29, foram determinadas reações de apoio e deslocamentos, pelo código e pelo SAP 2000, seguindo as numerações de barras e nós apresentados na figura 29. O pórtico apresenta oito nós e oito barras, sendo duas inclinadas, e a força externa atuante é uniformemente distribuída na barra 2 e 5, com intensidade de 30 kN/m, no eixo xz local e na barra 1 uma força distribuída de 10 kN/m no eixo xz local. Os nós 1, 4, 5 e 8 são vinculados externamente através de engastes, e as barras 2 e 5 apresentam liberações de momentos em torno de y. Através desse exemplo foi possível validar a liberação nas extremidades das barras e carregamento distribuído em uma barra inclinada.

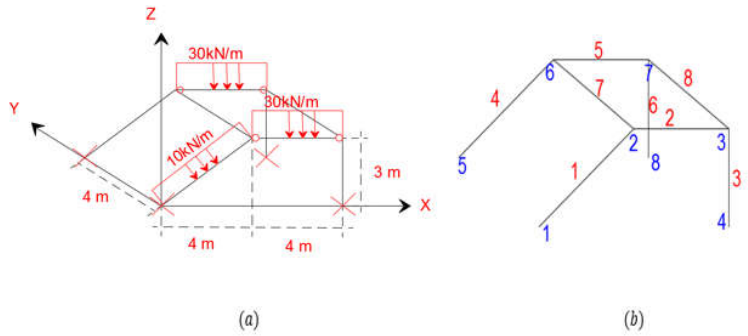


Figura 29 - Pórtico com barras inclinadas e carregamentos pontuais.
Fonte: os autores.

Para a estrutura foram estabelecidas as propriedades dos materiais (Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson), e as propriedades geométricas da barra (Área da seção, Momento de Inercia no Eixo x, Momento de Inercia no Eixo y e Momento de Inercia no Eixo z) seguintes:

- $E = 200$ GPa
- $\nu = 0{,}2$
- $A = 600\ cm$
- $I_x = 34386\ cm^4$
- $I_y = 80000\ cm^4$
- $I_z = 11250\ cm^4$

Os resultados obtidos pelo CERBERUS e pelo SAP 2000 estão representados nas tabelas 11 e 12, relativas as reações de apoio, e nas tabelas 13 e 14, relativas aos deslocamentos dos nós não restringidos.

FORÇAS									
	F1 (kN) (Eixo x)			F2 (kN) (Eixo y)			F3 (kN) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	39,087	39,087	0%	0,419	0,419	0%	98,859	98,859	0%
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-66,930	-66,930	0%	-0,419	-0,419	0%	60,483	60,483	0%
5	49,966	49,808	0,3%	0,419	0,419	0%	61,141	61,141	0%

6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	-51,966	-51,966	0%	-0,409	-0,409	0%	59,517	59,517	0%

Tabela 11 - Resultados de reações de apoio (forças) - exemplo 03
Fonte: os autores.

MOMENTOS									
	M1 (kN.m) (Eixo x)			M2 (kN.m) (Eixo y)			M3 (kN.m) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	-1,914	-1,914	0%	-151,908	-151,908	0%	0,157	0,157	0%
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	0,597	0,597	0%	-198,413	-198,413	0%	-1,124	-1,124	0%
5	-1,914	-1,914	0%	-96,405	-96,405	0%	0,157	0,157	0%
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	0,597	0,597	0%	-158,27	-158,27	0%	-1,124	-1,124	0%

Tabela 12 - Resultados de reações de apoio (momentos) - exemplo 03
Fonte: os autores.

DESLOCAMENTOS									
	D1 (kN) (Eixo x)			D2 (kN) (Eixo y)			D3 (kN) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,037	0,037	0%	-0,003	-0,003	0%	-0,050	-0,050	0%
3	0,037	0,037	0%	0,000	0,000	0%	0,000	0,000	0%
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	0,030	0,030	0%	-0,003	-0,003	0%	-0,040	-0,040	0%
7	0,030	0,030	0%	0,000	0,000	0%	0,000	0,000	0%
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-

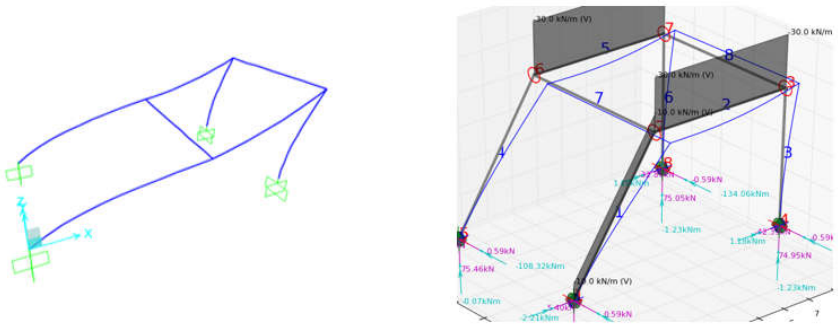
Tabela 13 - Resultados de deslocamentos - exemplo 03
Fonte: os autores.

ROTAÇÕES									
	Θ1 (rad) (Eixo x)			Θ2 (rad) (Eixo y)			Θ3 (rad) (Eixo z)		
NÓ	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO	SAP2000	CERBERUS	ERRO
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,002	0,002	0%	0,017	0,017	0%	0,001	0,001	0%
3	0,000	0,000	0%	0,018	0,018	0%	0,001	0,001	0%
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-

5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	0,002	0,002	0%	0,015	0,015	0%	0,001	0,001	0%
7	0,000	0,000	0%	0,015	0,015	0%	0,001	0,001	0%
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 14 - Resultados de rotações - exemplo 03
Fonte: os autores.

Para validar os esforços internos, a seguir será apresentada as deformadas para o exemplo gerado pelo CERBERUS e pelo SAP2000.



(a) (b)

Figura 30 - Comparação da deformada - exemplo 3
Fonte: os autores

6. CONCLUSÃO

Devido existência de vários métodos de análise estrutural, a adoção do método dos deslocamentos, possibilitou a concepção de uma ferramenta capaz de idealizar o comportamento de um sistema estrutural reticulado espacial e suas condições de equilíbrio interno e externo. O método das forças se mostrou eficiente para determinar as ações nodais, possibilitando a transferência de qualquer tipo de função de carregamento atuante para as extremidades da barra. Para tanto, o emprego da linguagem Python foi indispensável para prover os recursos necessários para a execução do software, por meio de bibliotecas com ferramentas de cálculo possibilitando a execução de limites, diferenciais e integrais, além de também proporcionar simplicidade e eficiência.

Para garantir maior confiabilidade no CERBERUS, foram realizados quatro exemplos, de maneira a validar todas as características de estruturas reticuladas espaciais que o software contempla. E diante dos resultados obtidos pode-se garantir a aplicabilidade do software, pois este não apresentou erros significativos em relação ao programa SAP2000.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEBIADES V., **Teoria das estruturas**, ED. UFMG, 1986.

ALIO K., **Informática aplicada em estruturas de concreto armado** – Cálculo de edifícios com o uso de sistemas computacionais. Ed. PINI, 2015.

ALMEIDA, M. C. F., **Estruturas Isostáticas**, Oficina de Textos, 2011.

BEER; PIERRE, F., **Resistencia dos materiais.** McGraw-Hill Ltda 1992.

BORGES, L. E., **Python para Desenvolvedores.** 2ª Ed. Rio de Janeiro: Edição do autor, 2010.

DOWNEY, A., **Think Python**: How to Think Like a Computer Scientist. Massachusetts: Green Tea Press, 2012.

DRUMONT, F. P.; SILVA, A. R., **Desenvolvimento de um software para análise estrutural de sistemas reticulados espaciais usando o método dos deslocamentos**. Disponível em < https://www4.uninove.br/ojs/index.php/exacta/article/viewFile/3927/2389 >

GERE, J. M.; WEAVER, W. J., **Análise de estruturas reticuladas.** Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1987.

HIBBELER, R. C., **Análise das estruturas**. Tradutor: Jorge Ritter. Revisor Técnico: Pedro Viana.8ª Ed. São Paulo: Person Education do Brasil, 2013.

JESUS, R. T., **Proposição de ferramenta computacional para análise e tratamento de estruturas planas e espaciais constituídas por barras retas – desenvolvimento e aplicação**. São Leopoldo: 2014.

KASSIMALI, A., **Análise estrutural**. 1ª. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

LEET, K. M.; UANG, C. M., **Fundamentos da anlise estrutural.** São Paulo: Editora McGraw Ltda 2009

MARGARIDO, F. A., **Fundamentos de estruturas – um programa para arquitetos e engenheiras que se iniciam no estudo das estruturas**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 2010.

MARTHA, L. F., **Análise de estruturas**: Conceitos e Métodos Básicos. 1a Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MCCORMAC, J. C., **Análise estrutural**: Usando métodos clássicos e métodos matriciais. 4ª Ed. São Paulo: Gen, 2009.

MENEZES, N. N. C., **Introdução à programação com Python.** São Paulo: Novatec Editora, 2014.

PAIZ, A. F. M.; VENZELLA, D.; GOMES, L. J. P., **Criação de código computacional para cálculo didático de estruturas reticuladas planas via método dos deslocamentos em formulação matricial**. Disponível em < remin.com/aulas/tcc/2017-Alysson_Diogo_Lucas-texto.pdf

SOARES, S. M. B., **Análise matricial de estruturas de barras pelo método da rigidez**. Disponível em: <http://www.feng.pucrs.br/professores/soares>. Acesso em 15 de março 2018.

SORIANO, H. L., **Análise de estruturas – formulação matricial e implementação computacional**. 1a Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 2005.

SORIANO, H.L. e Lima, **Análise de Estruturas em Computadores: Estruturas Reticuladas**, Vol. I, 2a ed., Cadernos Didáticos UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**. Rio de Janeiro: Globo, 1981. v.1: Estruturas Isostáticas, v. 2: Deformações em estruturas, Método das Forças.

TIMOSHENKO, S.; GERE, J. M. **Mecânica dos sólidos**. v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 1