UNIVERSIDADE POSITIVO

CHARLES HENRIQUE FERREIRA

JEFFERSON FORTES DA CRUZ

RAFAEL ORTENCIO FERREIRA

DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE PARA CÁLCULO DOS PARÂMETROS MODAIS DE TRELIÇAS ESPACIAIS

.

Curitiba

2019

CHARLES HENRIQUE FERREIRA

JEFFERSON FORTES DA CRUZ

RAFAEL ORTENCIO FERREIRA

DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE PARA CÁLCULO DOS PARÂMETROS MODAIS DE TRELIÇAS ESPACIAIS.

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para a graduação no curso de Engenharia Civil da Universidade Positivo.

Orientador: Prof. Juliano J. Scremin

Curitiba

2019

Este trabalho é dedicado aos nossos familiares!

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus por nos agraciar com saúde, sabedoria e força para jamais fraquejar diante dos obstáculos impostos a nós nestes últimos 5 anos, e assim concluirmos mais uma etapa em nossas vidas, que se direcionará a novos patamares.

À Universidade Positivo por oferecer um ambiente confortável, amigável e com instalações modernas que nos propuseram um ótimo ensino superior de qualidade e nos deixar mais preparados para novos desafios

Aos coordenadores, funcionários em gerais por nos auxiliarem sempre que preciso e a todos os professores que nos presentearam com seus conhecimentos e propuseram excelentes momentos.

Em especial ao grande Mestre, professor, orientador e amigo Juliano J. Scremin, pelo conhecimento técnico, experiência e sabedoria de vida compartilhado. Obrigado por acreditar em nossa capacidade e nos deixar fazer parte deste grande projeto e pela paciência que teve conosco durante a elaboração deste trabalho de conclusão que muito nos orgulha.

Os agradecimentos individuais:

- Charles Henrique Ferreira: Agradeço aos meus pais Carlos e Rose e a minha esposa Nicolli Sperança por me incentivarem a ser alguém melhor e estarem ao meu lado durante a realização deste trabalho. Aos professores Charles Jaster, Juliano Scremin e Mara Detsch por serem exemplos dentro e fora da instituição sempre exigindo dedicação e responsabilidade de todos. Aos meus colegas Jefferson e Rafael por serem exemplos de dedicação e esforço, sem eles o trabalho não seria concluído.
- Jefferson Fortes da Cruz: Agradeço a Deus, minha esposa Juliana Sayuri, meus familiares e meus colegas que estiveram ao meu lado me apoiando e incentivando no decorrer da graduação até o fim do desenvolvimento deste projeto.
- Rafael Ortencio Ferreira: Agradeço em especial meu pai Moises por sempre me apoiar e acreditar que eu poderia ser alguém melhor na vida. A minha Tia Miriam, que sempre cuidou de mim como uma mãe.

A minha namorada Aline pelo apoio e suporte nesta etapa final. Aos colegas Charles e Jefferson por me convidar a fazer parte desta equipe e aos amigos João e Karla por me ajudarem com os estudos nestes 5 anos de graduação. E aos vizinhos e amigos de vida Daniel, Margarete, Claudião, Alexandre, Camila, Fernando e etc. Muito obrigado!

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Os quatro níveis de abstração 21

Figura 2 - Cobertura em sistema joist de treliças espaciais. 22

Figura 3 - Estrutura de treliça espacial. 23

Figura 4 - Associação de nós com grau de liberdade 24

Figura 5 - Sistema de referência global 25

Figura 6 - Eixos locais e globais. 25

Figura 7 - Membro vertical espacial 26

Figura 8 - Rotação de eixos em três dimensões 26

Figura 9 - Esforço axial em barra rotulada 30

Figura 10 - Sistema massa mola, 1 grau de liberdade. 33

Figura 11 – Sistema massa mola, 1 grau de liberdade. 34

Figura 12 – Diagrama de corpo livre (DCL). 35

Figura 13 – Modos de vibração de uma torre de telecomunicação. 40

Figura 14 – Contraventamento diagonal com amortecedor viscoso fluído. 41

Figura 15 – Ponte do Tacoma, Washington (EUA). 42

Figura 16- Fluxograma computacional. 50

Figura 17 – Torre treliçada (dimensões). 58

Figura 18 – Torre treliçada SAP2000. 58

Figura 19 – Torre treliçada SHOF Tools. 59

Figura 20 – Deslocamentos torre treliçada SHOF x SAP2000. 59

Figura 21 – viga joist (dimensões). 61

Figura 22 – viga joist SAP2000. 61

Figura 23 – viga joist SHOF Tools. 62

Figura 24 – Deslocamentos viga joist SHOF x SAP2000. 62

Figura 25 – Domo (dimensões). 64

Figura 26 – Domo SAP2000. 64

Figura 27 – Domo SHOF Tools. 65

Figura 28 – Deslocamentos domo SHOF x SAP2000. 65

Figura 29 – Modelo estrutural simplificado: Pórtico de dois pavimentos. 71

Figura 30 – 1º modo de vibração. 74

Figura 31 – 2º modo de vibração. 75

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Temas abordados nas publicações acadêmicas 20

Quadro 2 – resultados das frequências naturais. 60

Quadro 3 - resultados das frequências naturais.. 63

Quadro 4 - resultados das frequências naturais. 66

Quadro 5 - 1º Modo de Vibração da torre treliçada 103

Quadro 6 - 2º Modo de Vibração da torre treliçada 103

Quadro 7 - 3º Modo de Vibração da torre treliçada 104

Quadro 8 - 4º Modo de Vibração da torre treliçada 104

Quadro 9 - 5º Modo de Vibração da torre treliçada 105

Quadro 10 - 6º Modo de Vibração da torre treliçada 105

Quadro 11 - 7º Modo de Vibração da torre treliçada 106

Quadro 12 - 8º Modo de Vibração da torre treliçada 106

Quadro 13 - 9º Modo de Vibração da torre treliçada 107

Quadro 14 - 10º Modo de Vibração da torre treliçada 107

Quadro 15 - 1º Modo de Vibração da viga joist 108

Quadro 16 - 2º Modo de Vibração da viga joist 108

Quadro 17 - 3º Modo de Vibração da viga joist 109

Quadro 18 - 4º Modo de Vibração da viga joist 109

Quadro 19 - 5º Modo de Vibração da viga joist 110

Quadro 20 - 6º Modo de Vibração da viga joist 110

Quadro 21 - 7º Modo de Vibração da viga joist 111

Quadro 22 - 8º Modo de Vibração da viga joist 111

Quadro 23 - 9º Modo de Vibração da viga joist 112

Quadro 24 - 10º Modo de Vibração da viga joist 112

Quadro 25 - 1º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial 113
Quadro 26 - 2º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial 113
Quadro 27 - 3º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial 113
Quadro 28 - 4º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial 114
Quadro 29 - 5º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial 114
Quadro 30 - 6º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial 114
Quadro 31 - 7º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial 115
Quadro 32 - 8º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial 115
Quadro 33 - 9º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial 115
Quadro 34 - 10º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial 116

LISTA DE SÍMBOLOS

λ – autovalor de uma matriz

$|T|$ – matriz de rotação das barras paralelas

β – ângulo de giro de uma matriz

γ – ângulo de giro de uma matriz

$|R|$ – matriz de rotação

m' – massa linear

L – comprimento da barra

m – massa de um elemento

k – rigidez de um elemento

E – módulo de elasticidade da barra

A – área da seção transversal da barra

ke – matriz de rigidez elementar

$|k_{mass}|$ – matriz de rigidez global

$|R.T|$ – matriz transposta

f – força

$\ddot{u}$ – aceleração da massa;

k – constante da mola;

u – deslocamento dinâmico;

(t) – variação do tempo.

f – frequência própria

f_{crit} – frequência crítica

q_j – função harmônica

ω_n – frequência angular

ω_{n_j} – autovalor da frequência natural

T_n – período natural

ϕ_N – autovetor do modo de vibração

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14

1.1 OBJETIVO 15

1.2 JUSTIFICATIVA 15

2 ESTADO DA ARTE 17

2.1 PUBLICAÇÕES ACADÊMICAS 17

2.2 CLASSIFICAÇÃO DOS ASSUNTOS ABORDADOS 19

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 21

3.1 ANÁLISE ESTRUTURAL DE UM SISTEMA 21

3.2 ESTRUTURA TRELIÇADA ESPACIAL 22

3.3 ANALISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS 24

3.3.1 Sistema de Referência Global e Local 24

3.3.2 Matriz de rotação 26

3.3.3 Matriz de massa 28

3.3.4 Matriz de rigidez 30

3.4 VISÃO GERAL DE ANÁLISE DINÂMICA 32

3.4.1 Conceito de vibrações 32

3.4.2 Equações diferenciais de 2ª ordem 33

3.4.3 Parâmetros modais 36

3.4.4 Frequências naturais 36

3.4.5 Modos de vibração 39

3.4.6 Fatores de amortecimento 40

3.4.7 Ressonância 41

3.5 AUTOVALORES E AUTOVETORES 42

3.5.1 Método da equação característica 42

3.5.2 Método de Jacobi 43

3.6 NORMALIZAÇÃO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO 45

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 48

4.1 METODOLOGIA DO TRABALHO 48

4.2 METODOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO 49

4.2.1 Fluxograma Computacional 50

4.2.2 Entrada de dados 51

4.2.2.1 Nós 51

4.2.2.2 Barras 51

4.2.2.3 Propriedades Geométricas e Físicas 51

4.2.2.4 Vinculação 51

4.2.2.5 Apoios 52

4.2.3 Cálculos Iniciais 52

4.2.3.1 Numeração dos graus de liberdade 52

4.2.3.2 Geometria das barras 52

4.2.3.3 Matriz de rigidez local 52

4.2.3.4 Matriz de massa local 53

4.2.3.5 Matriz de rotação 53

4.2.3.6 Espalhamento de matrizes 53

4.2.3.7 Determinante |K-λM| 54

4.2.4 Saída de dados 54

4.2.5 Gerenciamento de arquivos 54

4.2.6 Arquivo executável 54

4.2.7 Tutorial 55

5 VALIDAÇÕES 56

5.1 METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO 56

5.1.1 Torre treliçada 57

5.1.1.1 Resultados da Torre Treliçada 59

5.1.2 Viga Joist 60

5.1.2.1 Resultados da Viga Joist 62

5.1.3 Domo de estrutura espacial 63

5.1.3.1 Resultados do domo de estrutura espacial 65

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 67

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 68

8 ANEXO A 71

9 ANEXO B 77

10 ANEXO C 92

11 ANEXO D 103

1 INTRODUÇÃO

A construção civil é o maior consumidor de aço do mundo, segundo Bellei (1998), as primeiras obras em aço surgiram em 1780 na França, na escadaria do *Louvre* e no Teatro do *Palais Royal*, porém teve seu marco no ano de 1880 no Estados Unidos com o início das obras de edifícios em estruturas metálicas. Em 1941 foi fundada a Companhia Siderúrgica Nacional (CSN), que no ano de 1953 criou um departamento chamado Fábrica de Estruturas Metálicas (FEM) com o propósito de difundir a utilização do aço em suas construções.

Junto com a evolução e o constante crescimento do consumo de aço, surgem necessidades de se aprimorar as estruturas para que estas possam vencer grandes vãos e suportar altos carregamentos, o que desta forma, segundo Makowski (1984), um recurso estrutural muito utilizado nas construções são os elementos treliçados espaciais que apresentam boa flexibilidade, excelente relação entre peso próprio e vão, fácil transporte e beleza arquitetônica.

Ao estudar o comportamento destas estruturas, observou-se que as mesmas apresentam como característica os parâmetros modais, que são as frequências naturais, modos de vibração e o amortecimento. (BRASIL E SILVA, 2013)

As frequências naturais de uma estrutura devem ser encontradas, com finalidade de avaliar a integridade do elemento estrutural, pois caso a estrutura seja excitada com a mesma amplitude da frequência natural o sistema entrará em ressonância, gerando grandes amplitudes de vibração, tensão e ruídos. (NASCIMENTO, 2002)

Ainda com o objetivo de avaliar a estrutura, Brasil e Silva (2013), esclarece que os modos de vibração estão diretamente relacionados com as possibilidades de deslocamentos dos nós, portanto haverá *n* frequências conforme o número de graus de liberdade do sistema, resultando em *n* modos de vibração.

Vibração é uma resposta diretamente relacionada à frequência natural, para cada forma de vibração há um comportamento diferente do sistema, denominado modo de vibração. (RAO, 2008)

O capítulo 1 deste trabalho trata-se de uma introdução com a finalidade de mostrar os temas que serão abordados posteriormente, assim como o objetivo e a justificativa para escolha do tema proposto.

O próximo capítulo apresenta uma breve revisão de literatura, mostrando os recentes publicações e teses voltada ao tema deste trabalho.

O capítulo 3 está segmentado em: análise geral de estruturas espaciais treliçadas, apresentando a montagem das matrizes de cálculo; os conceitos sobre vibrações e os métodos de cálculo para identificação dos parâmetros modais.

O capítulo seguinte apresenta a metodologia computacional, onde foi adotado o recurso computacional *Python*, com utilização de bibliotecas voltadas a cálculos matriciais.

O capítulo 5 apresenta a validação dos resultados apresentados pelo desenvolvimento deste estudo.

1.1 OBJETIVO

Desenvolver um software para cálculo dos parâmetros modais, ou seja, os modos de vibração e correspondentes frequências naturais de estruturas treliçadas espaciais, considerando um sistema livre de amortecimento, para que o dimensionamento de estruturas atenda às recomendações da NBR 8800:2008 - Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios (ABNT, 2008), que define as frequências mínimas ou críticas.

1.2 JUSTIFICATIVA

O estudo dos parâmetros modais é um tema da dinâmica das estruturas, o qual baseia-se na identificação das características relacionadas as vibrações excessivas que geram desconforto ao usuário, fadiga do material e o colapso das estruturas. (QUEIROZ, 2010)

A norma brasileira de estruturas em aço, dispõem de alguns limites e classificações de análise através da NBR 8800:2008 (ABNT, 2008), no Anexo L (Vibrações em pisos expõem alguns limites, referente as mínimas frequências críticas naturais aceitáveis para se considerar nos projetos estruturais:

- Qualquer piso = 3 Hertz;
- Pisos onde pessoas caminham normalmente = 4 Hertz;
- Pisos de academia, salões de festas, ginásios e estádios = 6 Hertz;
- Caso as atividades acima sejam repetitivas = 8 Hertz.

Portanto, justifica-se a necessidade de implementar um software que calcule a frequência natural e os modos de vibração de estruturas, para que o usuário tenha condições de avaliar se o sistema estrutural se encontra dentro das recomendações prescritas na norma.

2 ESTADO DA ARTE

Neste capítulo serão tratados alguns estudos relacionados aos temas de interesse deste trabalho. O estado da arte apresentado não se restringe apenas a publicações baseadas em estruturas treliçadas espaciais, mas sim às análises dinâmicas que buscam a obtenção de resultados das frequências naturais e modos de vibração (parâmetros modais).

2.1 PUBLICAÇÕES ACADÊMICAS

O desenvolvimento do trabalho foi realizado com base em publicações acadêmicas, artigos e teses de mestrado, de modo que os mesmos possam contribuir como material científico para ressaltar a importância de se analisar os parâmetros modais de uma estrutura, sendo assim evidenciam-se os seguintes trabalhos e publicações:

Nascimento (2002) introduz uma abordagem bem específica relacionada as ações estáticas e dinâmicas causadas pelo vento em torres treliçadas autoportantes, utilizadas na área de telecomunicações. Com o entendimento destas análises, o autor procede com o dimensionamento de uma torre, com o intuito de demostrar aos calculistas a real necessidade de uma análise dinâmica nestas estruturas.

Rodrigues *et al* (2004) segue uma linha de estudo em seu artigo voltada as funcionalidades gráficas a partir de uma análise não linear de pórticos planos sujeito a cargas dinâmicas e/ou estáticas, cuja os resultados apresentados no ambiente gráfico compreendem à análise dinâmica da estrutura, fornecendo como resultado as frequências naturais e modos de vibração.

Arndt (2009) introduz uma abordagem bem abrangente em sua tese de doutorado junto a Universidade Federal do Paraná (UFPR), através do trabalho: O método dos elementos finitos (MEF) generalizados aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas. Um trabalho que mesmo indo além das delimitações do tema aqui exposto, como MEF, trata de uma análise de vibrações em treliças planas.

Espada (2010) apresenta em sua tese de mestrado, um estudo relacionado ao desenvolvimento de modelos matemáticos para análise dinâmica de estruturas e sobre sua aplicação em barragens de concreto armado. Um estudo que toma como princípio a obtenção de resultados a partir da determinação de domínio e frequência, assim como ensaios de vibração ambiental.

Queiroz (2010), aborda em sua dissertação de mestrado o estudo da análise dinâmica em estruturas reticuladas, sendo elas treliças planas, espaciais, pórticos planos, espaciais entre outros. Contando com o desenvolvimento de um ambiente de simulação em Java, que possibilita a determinação de frequências naturais e modo viração, estre trabalho não se limita somente a estes parâmetros mas sim nos aspectos do acoplamento solo-estrutura para pórtico espacial.

Bolina *et al* (2014), em seu artigo junto ao Congresso Nacional da Indústria (CNMAI), apresentado pelo título Vibrações: As frequências naturais estimada e experimental de uma estrutura, abordando assuntos diretamente relacionados as frequências naturais e modos de vibração, mediante o desenvolvimento modelos matemáticos que possibilitam visualizar o comportamento dinâmico das estruturas.

Gonçalves e Pires (2016) introduzem uma abordagem bem contemporânea pensando na aplicabilidade de estruturas treliçadas espaciais, que surgiram devido a constante demanda por comunicação, monitoramento territorial e previsão climática. Em seu estudo são realizadas simulações em uma treliça espacial de 99 graus de liberdade o que correspondem à 99 frequências naturais e 99 modos de vibração.

Castro (2018) expõem em sua dissertação de mestrado um estudo voltado a modelagem matemática e computacional que tem por objetivo a otimização para o problema de maximização da frequência natural de estruturas lineares elásticas.

Martinelli (2019) desenvolve um estudo em sua dissertação de pós-graduação que envolve otimização de estruturas, cuja o tema se dá pelo título: Otimização de estruturas treliçadas geometricamente não lineares submetidas a carregamento dinâmico. Uma abordagem coerente com o tema aqui presente,

no quesito de análise das vibrações em treliças planas e espaciais, além de verificadas através de um programa computacional propriamente desenvolvido.

Carvalho (2019) desenvolveu um estudo em sua dissertação de mestrado que também trata da otimização de estruturas reticuladas planas e espaciais, partindo das condições de verificação das frequências naturais e modos de vibração.

Pinto *et al* (2019) realizaram um estudo voltado à análise dinâmica em uma igreja no Ceará. Um assunto que não trata de análise em treliças, mas sim um estudo preventivo, mediante a seguinte abordagem: Realização de uma macromodelagem de toda alvenaria da edificação, caracterizando em um elemento único tridimensional. Fazendo uso do programa Ansys, foram extraídos as frequências naturais e modos de vibração da estrutura, com o objetivo de mapear os locais onde existem um comportamento vulnerável da estrutura, visando assim a preservação do patrimônio histórico na região.

Ribeiro *et al* (2019) expõem em seu artigo um estudo que descreve a avaliação experimental dos efeitos dinâmicos induzidos pelo veto em treliças espaciais, mais especificamente em torres de telecomunicações com elevada altura. Os resultados obtidos de forma experimental puderam identificar a presença de eventos críticos na estrutura em alguns períodos devido a ação do vento, no logo dos 3 meses de análise.

2.2 CLASSIFICAÇÃO DOS ASSUNTOS ABORDADOS

A seguir, no Quadro 1, para situar o contexto das literaturas tomadas como referência, será apresentado uma síntese entre os assuntos presentes nas publicações, classificando-os com os principais temas tratados neste trabalho.

Referências	Freq. natural de vibração	Modos de vibração	Treliça espacial	Desenv. de software
Nascimento, F (2002)	☑	☑	☐	☐
Rodrigues *et al* (2004)	☑	☑	☐	☑
Arndt, M (2009)	☑	☑	☑	☐
Espada, M (2010)	☑	☑	☐	☑
Queiroz, P (2010)	☑	☑	☑	☑
Bolina *et al* (2014)	☑	☑	☐	☐
Gonçalves e Pires (2016)	☑	☑	☑	☐
Castro, A (2018)	☑	☑	☑	☑
Martinelli, L (2019)	☑	☑	☑	☑
Carvalho, J (2019)	☑	☑	☑	☐
Pinto *et al* (2019)	☑	☑	☐	☐
Ribeiro *et al* (2019)	☑	☑	☑	☐

Quadro 1 – Temas abordados nas publicações acadêmicas
Fonte: Os autores (2019).

É importante ressaltar que dos 12 trabalhos presentes na revisão de literatura, apenas 3 permitem que sejam obtidas as frequências naturais e modos de vibração em treliças espaciais com o uso de uma plataforma desenvolvida no mesmo estudo, sendo assim como já descrito no objetivo, adiante serão tratados sobre estes temas em paralelo com a programação e desenvolvimento do software.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 ANÁLISE ESTRUTURAL DE UM SISTEMA

Segundo Martha (2010), a análise de estruturas é a etapa do projeto onde há o comprometimento do profissional em prever o comportamento da estrutura, de modo a usufruir dos conceitos matemáticos e práticas da engenharia para elaboração da análise estrutural do sistema. A divisão da estrutura analisada pode ser observada a partir de quatro níveis de abstração, conforme Figura 1, partindo das características reais da estrutura até uma modelagem computacional compatível para com o objetivo do estudo.

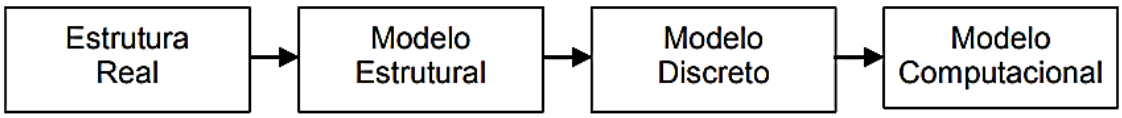


Figura 1 - Os quatro níveis de abstração
Fonte: MARTHA (2010).

O modelo de abstração dos quatro níveis, exposto por Martha (2010) na Figura 1 resume-se em:

- Modelo estrutural: Modelo analítico que possibilita a representação matemática do comportamento da estrutura em função das solicitações;
- Modelo discreto: Solução analítica que permite a associação de um conjunto de variáveis ou parâmetros que serão adotados para representação da estrutura em um modelo discreto.
- Modelo computacional: A análise do comportamento da estrutura através de simulações computacionais mais ágeis que cálculos manuais.

O modelo exposto acima é identificado na análise dinâmica das estruturas, apresento por Chopra (2012), onde aborda o tema enfatizando que o estudo não é especificamente voltado para regiões propensas a terremotos, pois o conhecimento da dinâmica estrutural é essencial para a engenharia moderna.

Os carregamentos móveis geram vibrações nas estruturas que variam em função do tempo, sendo assim a análise estática não se faz suficiente para representação dos esforços envolvidos, pois em uma análise dinâmica são considerados além das propriedades geométricas e físicas (plano ou espacial),

a aceleração e variação no espaço em função do tempo. (ALMEIDA, 1990)

3.2 ESTRUTURA TRELIÇADA ESPACIAL

O desenvolvimento da solução computacional para um problema de análise dinâmica aplicado em estruturas treliçadas espaciais exige a compreensão do modelo estrutural, sistema de eixos referencial e distribuição dos esforços, sendo assim, para compreensão dos benefícios e aplicabilidade deste sistema estrutural, Makowski (1984) esclarece que o emprego de elementos de treliças espaciais apresenta as seguintes vantagens:

- Peso próprio reduzido e grande rigidez;
- Boa redistribuição de esforços devido ao seu comportamento tridimensional e seu elevado grau de hiperestaticidade;

Hanaor *et al.* (1989), complementa as afirmações acima, dizendo que dois importantes fatores que influenciam o comportamento das estruturas espaciais são a ductilidade e distribuição de esforços entre seus elementos.

As Figura 2 e Figura 3, mostram exemplos da aplicação de treliças espaciais na construção civil.



Figura 2 - Cobertura em sistema joist de treliças espaciais.
Fonte: Os autores (2019).



Figura 3 - Estrutura de treliça espacial.
Fonte: Os autores (2019).

Segundo Martha (2017), a resolução dos problemas que envolvem estrutura espacial treliçada utiliza o método dos deslocamentos também chamado de método da rigidez.

Com isso, para obtenção dos deslocamentos do modelo estrutural utiliza-se: matriz de rigidez e um vetor de forças nodais. Aplica-se uma equação de equilíbrio nas diversas barras da estrutura e encontra-se os deslocamentos nodais e as reações de apoios, conforme referencial global e local adotado. (SORIANO,2005)

As equações de equilíbrio são escritas em torno das deslocabilidades desconhecidas (nós livres) e reações de apoio, para os deslocamentos o equilíbrio utiliza o vetor de forças nodais e o inverso da matriz de rigidez de cada elemento estrutural, para as reações de apoio realiza-se o processo inverso, logo o produto da matriz de rigidez pelo deslocamento nodal resulta em cargas nodais. (MCCORMAC, 2009)

Seguindo esta linha de desenvolvimento, Soriano (2014) afirma que a análise de treliças espaciais, é realizada mediante o procedimento de transformação do sistema para o referencial adotado na estrutura, denominado como matriz de rotação a partir de um sistema de referência global e local.

3.3 ANALISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS

Segundo Gere e Weaver (1981) com base em equações e formulações matemáticas baseadas e desenvolvidas no campo da álgebra matricial, nasceu a análise matricial de estruturas.

Com a finalidade de ordenar matricialmente as ações mecânicas (forças e momentos), deslocamentos (lineares ou angulares) e dinâmicas (frequência natural e modos de vibração) existentes em uma estrutura, separa-se em nós e impõe-se que seja fixado um sistema de coordenadas local e global. (MOREIRA, 1977)

Moreira (1977) ainda associa os nós da estrutura treliçada ao grau de liberdade que cada nó estará sujeito, conforme a Figura 4.

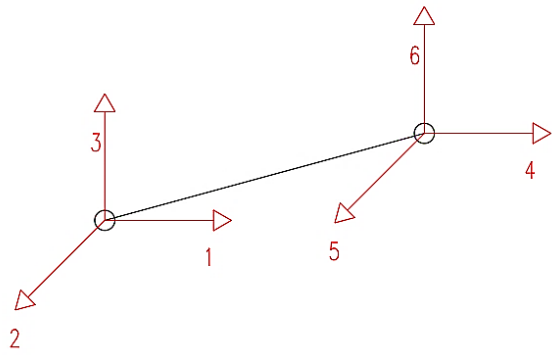


Figura 4 - Associação de nós com grau de liberdade
Fonte: Os autores (2019).

3.3.1 Sistema de Referência Global e Local

A partir de um eixo tridimensional, possuindo abscissa representada pelo eixo X, ordenada pelo eixo Z e cota pelo eixo Y. Este sistema pode ser arbitrado de qualquer forma, porém para facilitar as fórmulas a seguir, utilizaremos o formato da Figura 5. (KASSIMALI,2015)

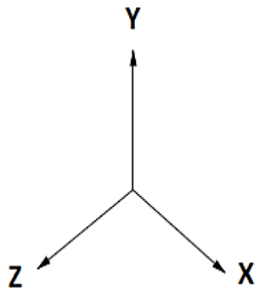


Figura 5 - Sistema de referência global
Fonte: Os autores (2019).

O sistema de coordenadas locais se estabelece no eixo X, ao longo do eixo da barra, então se estabelece as direções para os eixos Y e Z. Por possuir várias interpretações, convém-se arbitrar o eixo Z como sentido horizontal, assim determina-se o plano X-Z. Com isso conclui-se que o eixo Y encontra-se em um plano vertical aos eixos X-Z conforme Figura 6. (GERE E WEAVER, 1981)

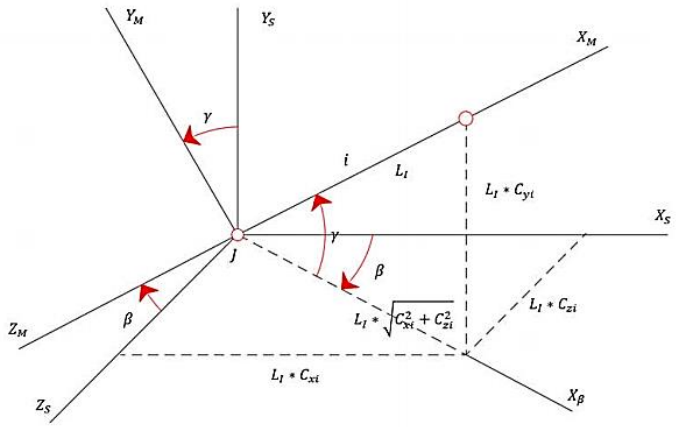


Figura 6 - Eixos locais e globais.
Fonte: GERE E WEAVER (1981).

Quando os eixos, são considerados da forma especificada na Figura 6, não há ambiguidade em relação aos eixos, exceto quando há uma barra vertical, assim como exemplificado na Figura 7, pois quando existe uma barra vertical posicionada na estrutura, a posição deste eixo para esta situação do eixo Z não fica definida no plano, portanto desconsidera-se o plano X-Z e torna-se o plano X-Y o referencial deste novo sistema. (GERE E WEAVER, 1981)

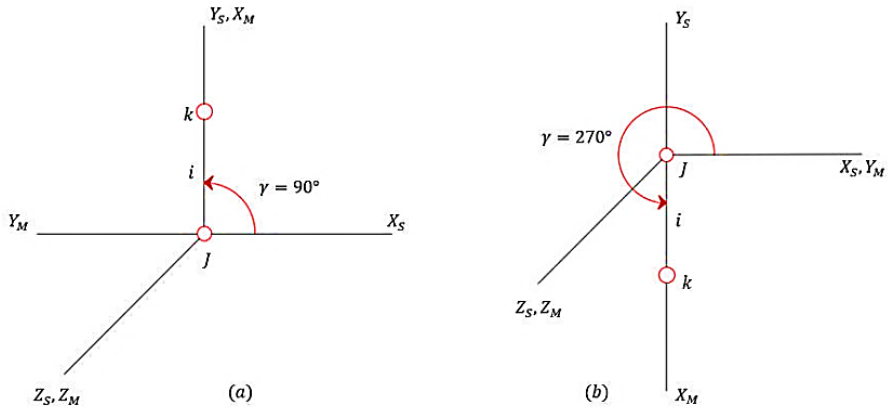


Figura 7 - Membro vertical espacial
Fonte: GERE E WEAVER (1981).

3.3.2 Matriz de rotação

Quando os elementos de uma estrutura são considerados conforme Figura 6, em um eixo de coordenadas locais e globais, o vetor A, possui determinados ângulos em relação aos eixos Xs,Ys e Zs (eixo global), e as imagens desse vetor nos planos podem ser denominadas XM,YM e ZM, podemos considerar λ_{11}, λ_{12} e λ_{13} como os cossenos diretores[1] da projeção do eixo XM, λ_{21}, λ_{22} e λ_{23} como os cossenos diretores da projeção do eixo YM, e λ_{31}, λ_{32} e λ_{33} para o eixo ZM conforme Figura 8. (GERE E WEAVER, 1981)

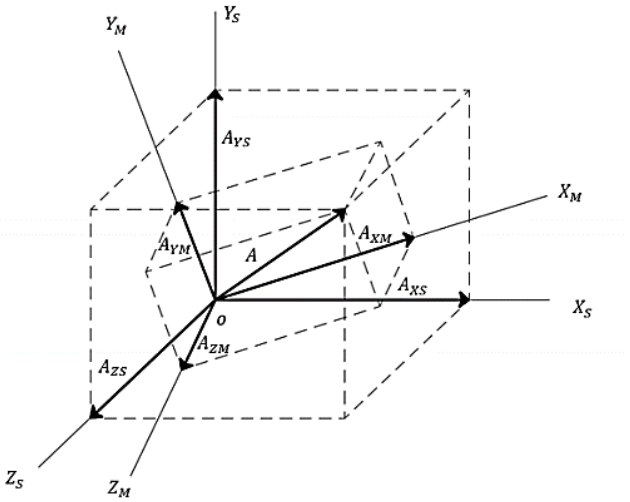


Figura 8 - Rotação de eixos em três dimensões
Fonte: GERE E WEAVER (1981).

[1] Segundo Soriano (2014) os cossenos diretores são definidos como os cossenos dos ângulos que o eixo local forma com o eixo global, sendo: $\lambda x=\cos \theta x$, $\lambda y=\cos \theta y$, $\lambda z=\cos \theta z$.

A matriz de rotação pode ser expressada conforme equação 1.

$$|R'| = \begin{vmatrix} \lambda 11 & \lambda 12 & \lambda 13 \\ \lambda 21 & \lambda 22 & \lambda 23 \\ \lambda 31 & \lambda 32 & \lambda 33 \end{vmatrix} \quad (1)$$

A primeira linha pode ser obtida dividindo-se o comprimento da barra pela componente na direção da qual se quer o cosseno diretor. A segunda linha trata-se do giro de um ângulo β a partir do eixo Xs, em torno do eixo Ys. Para a nova posição dos eixos, tem-se a matriz Rβ (equação 2) em relação ao eixo global da estrutura (GERE E WEAVER, 1981).

$$|\mathrm{R}\beta| = \begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & \mathrm{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{vmatrix} \quad (2)$$

Observando a Figura 6, pode-se afirmar que:

$$\mathrm{sen}\beta = \frac{Cz}{\sqrt{C^2x + C^2z}} \text{ e } \cos\beta = \frac{Cx}{\sqrt{C^2x + C^2z}} \quad (3)$$

Onde Cx, Cy e Cz correspondem, respectivamente, aos cossenos diretores nas direções Xs, Ys e Zs na equação 3.

A segunda linha trata do giro que ocorre em torno do eixo ZM, com um ângulo γ. O processo é similar ao mostrado anteriormente, gerando uma matriz Rγ (equação 4):

$$|R\gamma| = \begin{vmatrix} \sqrt{C^2x + C^2z} & \mathrm{Cy} & 0 \\ -\mathrm{Cy} & \sqrt{C^2x + C^2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

O produto das matrizes Rγ (equação 4) e Rβ (equação 2) resultam na matriz *R'*, apresentada anteriormente e definida a seguir (equação 5):

$$|R'| = \begin{vmatrix} Cx & Cy & Cz \\ \frac{-Cx.Cy}{\sqrt{C^2x + C^2z}} & \sqrt{C^2x + C^2z} & \frac{-Cz.Cy}{\sqrt{C^2x + C^2z}} \\ \frac{-Cz}{\sqrt{C^2x + C^2z}} & 0 & \frac{-Cz}{\sqrt{C^2x + C^2z}} \end{vmatrix} \quad (5)$$

A matriz *R'* acima é válida para todas as posições quando a barra não está orientada inteiramente no eixo Ys, onde surgem ambiguidades em relação ao sentido do vetor e torna-se impossibilitada a utilização da matriz de rotação apresentada acima, já que as componentes Cx e Cy serão nulas criando uma divisão por zero. Neste caso, a matriz de rotação para barras paralelas ao eixo Ys segue a definição proposta por GERE E WEAVER (1981), (equação 6):

$$|R'| = \begin{vmatrix} 0 & -Cy & 0 \\ Cy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

A matriz para treliças espaciais deverá ser espalhada em uma matriz 6x6 conforme equação 7.

$$|R| = \begin{vmatrix} R' & 0 \\ 0 & R' \end{vmatrix} \quad (7)$$

3.3.3 Matriz de massa

A Matriz de massa de uma estrutura é feita a partir de uma representação discreta da distribuição de massa de forma contínua, de modo que esta possa ser analisada a partir de duas definições, consistente ou concentrada. (SORIANO, 2014)

- Matriz de massa consistente

Segundo Chopra (2012) para definir a matriz de massa consistente é preciso fazer o uso de funções que permitam a discretização da estrutura em

elementos finitos, de tal forma que a apresentação dos resultados possa ser obtida com uma maior precisão e por um processo iterativo de solução mais rápido.

Soriano (2014), apresenta a matriz de massa de uma barra espacial treliçada pelo posicionamento das mesmas em seus nós, definindo, portanto, uma matriz de massa linear conforme equação 8.

$$|Km| = \frac{m'L}{6}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Onde:

m' – Massa linear;

L – Comprimento da barra.

- Matriz de massa concentrada

A matriz de massa concentrada, segundo Nascimento (2002) é definida a partir da consideração de que a massa esteja aglomeradas nos pontos onde os deslocamentos sejam conhecidos, ou seja, os nós, podendo este ser determinado pela estática.

A massa total concentrada é estabelecida a partir de uma somatória da contribuição de cada um dos segmentos da estrutura, fixados nos nós. Sendo assim, Martinelli (2019) ressalta que para um elemento em treliça espacial, a matriz de massa concentrada é dada a partir da equação 8.

$$|Km| = \frac{m'L}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Onde:

m' – Massa linear;

L – Comprimento da barra.

Logo a matriz de massa global de uma treliça espacial é o produto da matriz de rotação transposta, matriz de massa elementar e matriz de rotação, conforme equação 9.

$$|Kmass| = |R.T|.|Km|.|R| \quad (9)$$

3.3.4 Matriz de rigidez

Soriano (2014) define treliças como sendo um conjunto de barras retas rotuladas nas extremidades e com forças externas aplicadas apenas nas rótulas, de maneira a se ter apenas o esforço normal nas barras (Figura 9).

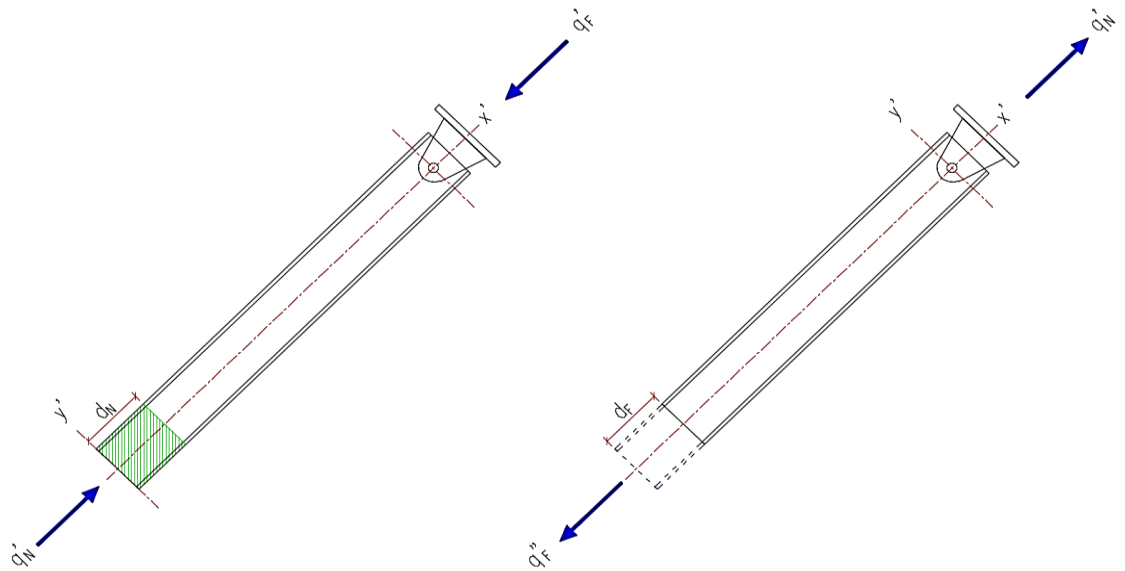


Figura 9 - Esforço axial em barra rotulada
Fonte: Os autores (2019).

Conforme Gere e Weaver (1981) deduzem que o sistema axialmente solicitado está sujeito apenas a sua rigidez axial, composta pela área, módulo de elasticidade e comprimento da barra, conforme equações 10 e 11 a seguir:

$$qn = \frac{E.A}{L}\ dn - \frac{E.A}{L}\ df$$

$$e \tag{10}$$

$$qf = -\frac{E.A}{L}\ dn + \frac{E.A}{L}\ df$$

Possuindo a seguinte representação matricial:

$$\begin{Bmatrix} qn \\ qf \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{E.A}{L} & -\frac{E.A}{L} \\ -\frac{E.A}{L} & \frac{E.A}{L} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} dn \\ df \end{Bmatrix}$$

$$ou \tag{11}$$

$$\begin{Bmatrix} qn \\ qf \end{Bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} dn \\ df \end{Bmatrix}$$

Soriano (2014), define a matriz de rigidez elementar de uma barra espacial treliçada conforme equação 12.

$$|Ke| = \frac{E.A}{L} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{12}$$

Onde:

E – Módulo de elasticidade da barra;

A – Área da seção transversal da barra;

L – Comprimento da barra.

Logo a matriz de rigidez global de uma treliça espacial é o produto da matriz de rotação transposta, matriz de rigidez elementar e matriz de rotação, conforme equação 13.

$$|K| = |R.T|.|Ke|.|R| \tag{13}$$

3.4 VISÃO GERAL DE ANÁLISE DINÂMICA

Segundo Chopra (2012), uma estrutura treliçada espacial demanda a compreensão e interpretação do modelo estrutural para um modelo matemático, a seguir neste capítulo serão abordados definições e conceitos pertinentes à análise de vibrações.

Para Lima e Santos (2008), dinâmica das estruturas tem a finalidade de estabelecer os deslocamentos, velocidades e acelerações das estruturas devido aos carregamentos dinâmicos.

Soriano (2014), define que dinâmica das estruturas são ações que variam com o tempo e ocorrem por consequência das atividades naturais (excitações decorrentes de sismo, vento, ondas marítimas, neve, etc.) e humanas (são causadas pelo peso de pessoas e objetos móveis, equipamentos que transmitam vibrações, pontes rolantes, veículos, entre outros). Estas ações geram vibrações na estrutura que podem danifica-las e gerar fadiga nos materiais, comprometendo sua utilidade e conforto.

Com o desenvolvimento tecnológico dos materiais e sistemas construtivos na engenharia civil, os projetos apresentam aumento na demanda por estruturas esbeltas e que possuam grandes vãos livres, que são mais suscetíveis a vibrações e possuem menor capacidade de dissipação de energia. (RAO, 2008)

Análise dinâmica é o estudo que descreve matematicamente as ações dinâmicas a fim de determinar os parâmetros modais da estrutura, que é a identificação das frequências naturais e modos de vibrações. Esta análise é fundamental para o dimensionamento das estruturas. (CHOPRA, 2012)

3.4.1 Conceito de vibrações

Vibração ou oscilação é a repetição de movimento durante um intervalo de tempo. A teoria de vibração é a análise dos movimentos oscilatórios das estruturas e as forças associadas ao sistema. (RAO, 2008)

As vibrações são classificadas em:

- Vibração forçada;

- Vibração livre amortecida;
- Vibração livre não amortecida.

Vibração forçada é decorrente a uma excitação dinâmica externa com variação no tempo que são causadas por uma força, deslocamento ou aceleração do sistema. Estas vibrações são classificadas em excitação harmônica (variação em seno e cosseno) e excitação arbitrária no tempo. (LIMA e SANTOS, 2008)

Segundo Soriano (2014), vibração livre amortecida é quando o sistema oscila devido a uma condição inicial de deslocamento ou velocidade no instante inicial t=0, excluso de uma excitação dinâmica. O amortecedor é um sistema que tem o objetivo de dissipar a energia, a incorporação desse dispositivo faz com que o sistema passe a ser não conservativo, denominado oscilador simples amortecido. (SORIANO, 2014)

Para Chopra (2012), vibração livre sem amortecimento é um sistema conservativo, ocasionada pelo seu equilíbrio estático ou por uma condição inicial de deslocamento ou velocidade no instante t=0, excluso de excitações dinâmicas. Este sistema também é conhecido como oscilador harmônico simples que resulta em uma estrutura de um grau de liberdade, sistema massa-mola (Figura 10), que é descrito matematicamente pela equação do movimento (equação diferencial de 2ª ordem) com força externa nula, exemplificada no capítulo a seguir.

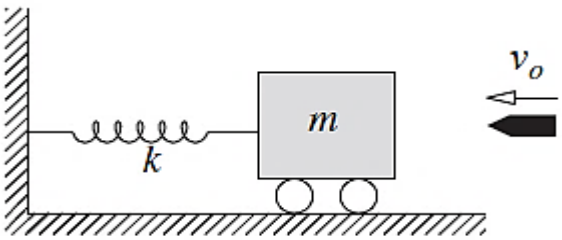


Figura 10 - Sistema massa mola, 1 grau de liberdade.
Fonte: CHOPRA (2012).

3.4.2 Equações diferenciais de 2ª ordem

De acordo com Chopra (2012), a o movimento oscilatório é descrito por meio de uma equação diferencial de 2ª ordem obtida com base na *2ª lei de*

Newton ou no *princípio de d 'Alembert*, que estabelece o equilíbrio dinâmico de um sistema.

Para obtenção da equação, considera-se um sistema de vibração livre sem amortecimento, com um corpo de massa *m* pendurado em uma mola de coeficiente *K* com peso desprezível e força externa nula, que se desloca em um determinado período de tempo, conforme Figura 11. (SORIANO, 2014)

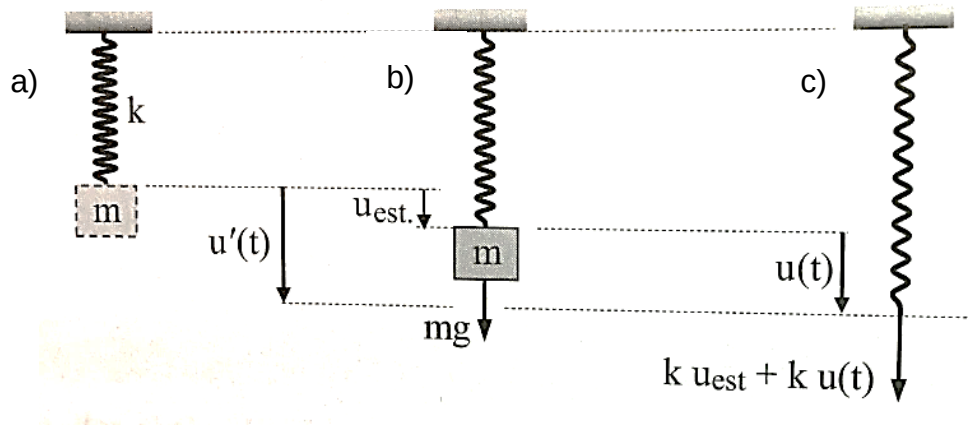


Figura 11 – Sistema massa mola, 1 grau de liberdade.
Fonte: SORIANO (2014).

Na Figura 11 (a) é possível observar que a mesma representa uma configuração neutra entre o bloco e a mola, após a plicar uma força *f*(*t*) de peso (*mg*), a mola sofre um deslocamento em função do tempo (*t*), chamado de deslocamento dinâmico $u(t)$, como mostra na Figura 11 (b).

Soriano (2014) define que ao aplicar a força de inércia $m\ddot{u}(t)$ em sentido contrário à aceleração temos o diagrama de corpo livre (Figura 12), de onde pode-se compor a equação 14.

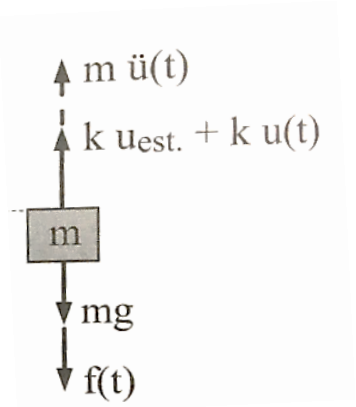


Figura 12 – Diagrama de corpo livre (DCL).
Fonte: SORIANO (2014).

Onde:

$m\ddot{u}(t)$ – Força de inércia;

K – Configuração de tração na mola;

mg – Translação da massa.

$$m\ddot{u}(t) + k\left(u_{est} + u(t)\right) = mg + f(t) \tag{14}$$

De maneira simplificada tem-se:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f(t) \tag{15}$$

Reescrevendo a equação 15, apresentada pelo autor Soriano (2014), o qual define que para o sistema de oscilação livre, onde temos a exclusão de força externa, obtemos a equação do movimento ou diferencial de 2ª ordem (equação 16) de forma simplificada para o sistema de vibração livre sem amortecimento:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \tag{16}$$

Onde:

m – Massa do sistema;

$\ddot{u}$ – Representa a aceleração da massa;

k – Constante da mola;

u – Deslocamento dinâmico;

(t) – Variação do tempo.

A função harmônica que representa a equação 16 tem a seguinte forma (equação 17):

$$q_j(t) = A_j \cos\left(\omega_{n_j} t\right) + B_j \sin\left(\omega_{n_j} t\right) \quad (17)$$

Sendo:

q_j – Função harmônica em função do tempo t.

A_j e B_j – Constantes de integração determinadas a partir da condição inicial do movimento;

ω_n – Frequência natural angular.

3.4.3 Parâmetros modais

De acordo com Rao (2008), quando uma estrutura recebe uma excitação (deslocamento, força, vibração) inicial, ela tem como espectro de resposta alterações na amplitude de seus parâmetros modais, sendo assim o propósito da identificação dos parâmetros modais consiste na identificação:

- Das frequências naturais de vibração;
- Dos modos de vibração;
- Dos fatores de amortecimento.

O objetivo da análise modal é quantificar as frequências naturais da estrutura de modo a evitar que as frequências dos carregamentos possam se aproximar destas, o que levaria a ocorrência do fenômeno da ressonância. (RAO,2008)

3.4.4 Frequências naturais

BOLINA (2014), define que a frequência natural de um sistema é a taxa de vibração livre que possui uma estrutura depois de cessada a excitação inicial que promoveu seu movimento.

Para Queiroz (2010), uma estrutura possui inúmeras frequências naturais, porém as mais preocupantes são as primeiras (frequências mais

baixas), pois em uma situação de projeto a frequência que normalmente merece maior atenção é a primeira, de tal forma que esta seja evitada a se equiparar com a vibração do sistema.

As primeiras frequências naturais são fundamentais para prever o comportamento do modelo estrutural mediante as ações externas (vento, movimentação de pessoas, veículos, objetos e etc.). A aproximação das frequências naturais do sistema com as frequências das ações externas pode danificar a estrutura e causar desconforto aos usuários. (SORIANO, 2014)

Segundo a NBR 6118:2014 (ABNT,2014) no item 23.3 (Estado limite de vibrações excessivas), quando a ação crítica é originada de uma máquina, a frequência crítica passa a ser a da operação da máquina, na falta de valores experimentais as frequências mínimas natural devem adotar os valores abaixo:

- Ginásio de esportes = 8 Hertz;
- Sala de danças ou de concerto sem cadeiras fixas = 7 Hertz;
- Escritórios = 3 a 4 Hertz;
- Salas de concerto com cadeiras fixas = 3.4 Hertz;
- Passarelas de pedestres ou ciclistas = 1.6 a 4.5 Hertz.

A NBR 8800:2008 (ABNT, 2008) menciona no Anexo L (Vibrações em pisos) a mínimas frequências críticas naturais aceitáveis para se considerar nos projetos estruturais:

- Qualquer piso = 3 Hertz;
- Pisos onde pessoas caminham normalmente = 4 Hertz;
- Pisos de academia, salões de festas, ginásios e estádios = 6 Hertz;
- Caso as atividades acima sejam repetitivas = 8 Hertz.

No Anexo M (Vibrações devidas ao vento) da NBR 8800:2008 (ABNT,2008) orienta a consulta a NBR 6123:1988 - Forças devidas ao vento em edificações (ABNT, 1988), onde no subitem 9.2.2 (Características dinâmicas da estrutura) e na tabela 19 cita que as frequências fundamentais das estruturas está associado a sua altura, conforme segue abaixo (sendo h a altura da estrutura em metros):

- Edifícios com estrutura aporticada de concreto, sem cortinas = 1/(0.05*h + 0.015*h) Hertz;

- Edifícios com estrutura de concreto, com cortinas = 1/(0.05*h + 0.012*h) Hertz;
- Torres e chaminés de concreto, seção variável = 1/0.02*h Hertz;
- Torres, mastros e chaminés de concreto, seção uniforme = 1/0.015*h Hertz;
- Edifícios com estrutura de aço soldada = 1/(0.29*h^(1/2)-0.4).

Conforme Lima e Santos (2008), para determinação da frequência natural, é possível utilizar a expressão diferencial de 2ª ordem (equação 16), onde o deslocamento dinâmico (u) é representado pela equação 18:

$$u = \phi_j q_j(t) \tag{18}$$

Em que:

ϕ_j – vetor constante que representa a deformada;
q_j – função harmônica em função do tempo t.

A frequência natural angular (ω) é uma característica dinâmica do oscilador simples (equação 19), sendo função direta da raiz quadrada da rigidez (*k*) pela massa (*m*) da estrutura.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{19}$$

Substituindo a equação (17) na equação na (18):

$$u = \phi_j \left[A_j \cos\left(\omega_{n_j} t\right) + B_j \sin\left(\omega_{n_j} t\right)\right] \tag{20}$$

Combinando a equação 20 com a equação 16, obtém-se:

$$\left(-\omega_{n_j}^2 M\phi_j + K\phi_j\right) q_j(t) = 0 \qquad (21)$$

K e M são as matrizes de rigidez e massa do modelo estrutural.

Ao igualar a 0 o termo entre parênteses da equação (21), tem-se a determinação dos valores de ω_{n_j} e ϕ_j:

$$\left(K - \omega_{n_j}^2 M\right) \phi_j = 0 \qquad (22)$$

Para determinar a frequência natural calcula-se o determinante (det) da matriz da equação 22

$$det|K - \lambda M| = 0 \qquad (23)$$

O resultado da equação (23) é um polinômio de grau *n*[2], sendo as raízes desse polinômio as frequências naturais do sistema. Este polinômio é chamado de equação característica (equação 22).

$$a\lambda^n + b\lambda^{n-1} + \cdots + c = 0 \qquad (24)$$

As raízes $\lambda = {\omega_{n_j}}^2$ fornecidas são os autovalores que representam as *n* frequências naturais.

Onde ω_{n_j} é a frequência natural com unidade de medida em radianos/segundo (rad/s).

Os autovalores são utilizados para determinação dos autovetores (*modos de vibração*).

3.4.5 Modos de vibração

SORIANO (2014), estabelece que os modos de vibração de uma estrutura são a forma com que a mesma oscila em cada uma das frequências naturais, ou seja, para cada frequência natural existe um modo de vibração.

[2] *n* é o grau de liberdade da estrutura (CHOPRA, 2012).

A Figura 13 é um exemplo que ilustra os diferentes modos de vibração de uma torre de telecomunicação para cada frequência natural, sendo (T_n) o período natural de vibração medida em segundos (*s*) (equação 25).

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{25}$$

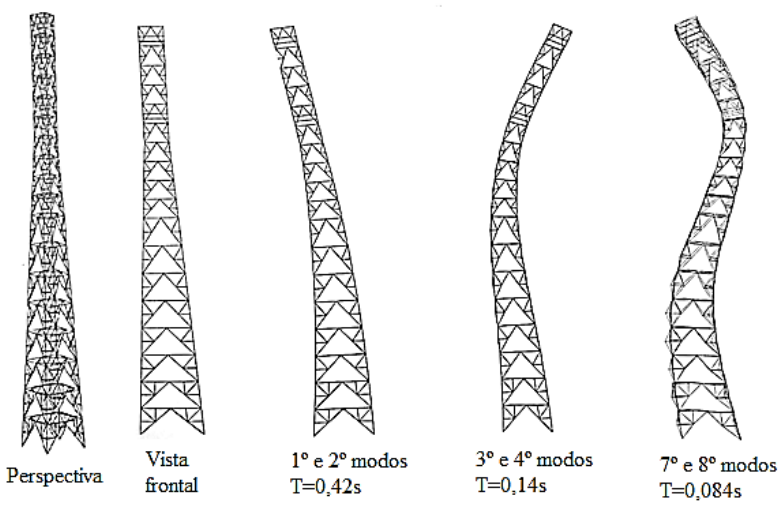


Figura 13 – Modos de vibração de uma torre de telecomunicação.
Fonte: SORIANO (2014).

De acordo com Lima e Santos (2008), a determinação dos modos de vibração de uma estrutura, é um problema de autovetores. Um problema que pode ser solucionado através da equação característica ou pelo método de Jacobi. (SORIANO, 2014) ambos representados a seguir no capítulo 3.5

3.4.6 Fatores de amortecimento

Para Lima e Santos (2008), fatores de amortecimento são dispositivos que tem finalidade de dissipar a energia, dessa maneira a estrutura passa a ser um sistema não conservativo.

Os sistemas de amortecimento podem ser classificados em:

- Amortecimento viscoso – ocorre em meio fluído;
- Amortecimento de Coulomb – dissipação de energia por atrito;
- Amortecimento de Histerese – quando o sistema possui tensões contrárias ao carregamento da estrutura.

A finalidade da aplicação de um fator de amortecimento na estrutura é de diminuir as vibrações do sistema (Figura 14).



Figura 14 – Contraventamento diagonal com amortecedor viscoso fluído.
Fonte: CHOPRA (2012).

3.4.7 Ressonância

Segundo Rao (2008), ressonância é um fenômeno que ocorre quando as frequências naturais da estrutura se igualam as frequências ocasionadas pelas ações externas, que resultam em vibrações excessivas (de grande amplitude) fazendo com que estrutura entre em colapso.

Na engenharia existem diversos casos de estruturas danificadas por conta da ressonância, um dos mais famosos é o ocorrido na ponte do Tacoma em Washington (EUA), onde a estrutura teve suas frequências naturais combinadas com as frequências do vento, fazendo com que ela oscilasse por aproximadamente 10 horas, até entrar em colapso em 1940 (Figura 15). (RAO, 2008)

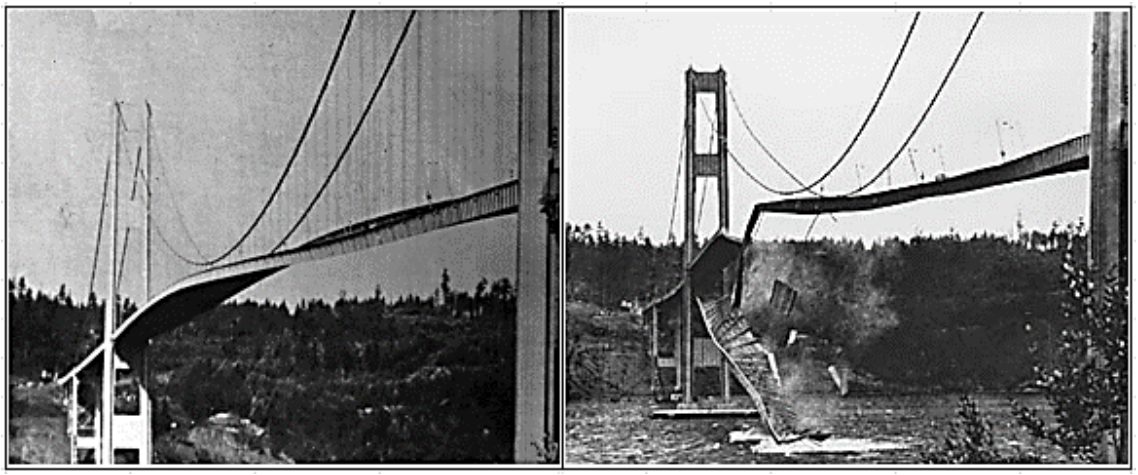


Figura 15 – Ponte do Tacoma, Washington (EUA).
Fonte: RAO (2008).

3.5 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Conforme Steinbruch (1997), autovalores e autovetores são soluções triviais da álgebra linear que promovem soluções para diversos problemas aplicados da engenharia de estruturas, tais como cálculo dos parâmetros modais (frequências naturais e modos de vibração).

Soriano (2014) apresenta mais de uma forma para se determinar os autovetores e autovalores, a seguir serão abordadas duas delas, a determinação a partir das Equações diferenciais de segunda ordem e pelo método de Jacobi.

3.5.1 Método da equação característica

Segundo Chopra (2012), para obtenção dos autovetores, antes é necessário possuir os autovalores, que correspondem as frequências naturais, através dos polinômios característicos gerados na equação 24 Com a identificação das frequências basta substituir os autovalores encontrado na matriz da equação 23 encontrando, portanto, os modos de vibração:

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & & \phi_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_N \end{bmatrix} \lambda_n \right) \times \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \vdots \\ \phi_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (26)$$

O resultado da equação 26 será um sistema linear de grau *n*, de onde obtém-se os autovetores dos modos de vibração ϕ_j, este cálculo deverá ser feito para cada uma das frequências naturais encontradas na equação 27.

$$\phi_1 \begin{vmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \vdots \\ \phi_{1N} \end{vmatrix} \quad \phi_2 \begin{vmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{2N} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \phi_N \begin{vmatrix} \phi_{N1} \\ \phi_{N2} \\ \vdots \\ \phi_{NN} \end{vmatrix} \tag{27}$$

3.5.2 Método de Jacobi

O método de Jacobi, considerado um dos mais antigos para cálculo de autovalores e autovetores foi apresentado no ano de 1846. (FEÓ, 2005) Um método cujo o objetivo é a extração dos autovetores, de tal forma que uma matriz original seja transformada para a forma diagonal por uma sucessão de transformações de ordem infinita, sendo elas ortogonais similares. (SORIANO, 2014)

Soriano (2014) ainda afirma que estas transformações não devem ser realizadas em ordem “infinita”, pois ao estabelecer um limite cuja a convergência possibilite uma variação quase nula o processo de iteração deve ser encerrado, com a finalidade de não onerar a iteração do método.

O procedimento de cálculo segundo Soriano (2014), consiste na transformação ortogonal similar de uma matriz simétrica de ordem (n x n) dada como A^{-1}=A, de modo que a sucessão de matrizes na condição de (k=1,2,3...n) satisfaça a equação 28 abaixo:

$$T^{*(k)} = T^{(1)}.T^{(2)} \dots T^{(n)} \tag{28}$$

Considerando que para validade do uso deste método, a matriz deve ser essencialmente simétrica, sendo assim, dadas as condições iniciais, Soriano (2014) afirma que a matriz $T^{(k)}$ é definida como uma matriz ortogonal de rotação, onde a transformação segue através da equação 29:

$$T^{(k)} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & \text{coluna i} & & & \text{coluna j} & & \\ & & & \downarrow & & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & \cos\theta & . & -\sin\theta & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \sin\theta & . & \cos\theta & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & . & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{linha i} \\ \\ \leftarrow \text{linha j} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (29)$$

Soriano (2014) ressalta que o ângulo θ deve ser considerado na medida que as posições entre as linhas e colunas representadas na equação 29 atendam as condições de que se $aii = ajj$ então $\theta = \pi/4$ e quando $aii \neq ajj$ então $\theta = arctg\left(\frac{2aij}{(aii-ajj)}\right).0{,}5$.

Sendo assim, com base nas definições expostas acima, o autor Franco (2011) complementa e exemplifica dizendo que uma vez conhecidas as matrizes denominadas como A_o = matriz real simétrica, A_n = matriz simétrica, onde *n* varia de acordo com o número de interações, V*n* = matriz de rotação dada pela equação 29, o processo de iteração segue a partir das equações 30 e 31 abaixo:

$$A_n = V^T . A_{(n-1)} . V_n \quad (30)$$

$$U_n = U . V_n \quad (31)$$

Desta forma, para obtenção dos autovalores considerando *n* como a quantidade de iterações, basta realizar a multiplicação da matriz transposta de V com a matriz A e a matriz V, em seguida os resultados dos autovetores serão representados pela equação 31, uma vez que U*n* = autovetor, onde *n* varia de acordo com o número de interações e U = vetor unitário considerado na primeira iteração, e $U_{(n-1)}$ a partir da segunda. (FRANCO, 2011).

Desta forma, é possível notar que o processo é essencialmente iterativo e que o objetivo é fazer com que o resultado apresente uma variação de aproximadamente zero, através de um processo de rotação. (SORIANO, 2014)

3.6 NORMALIZAÇÃO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO

Conforme citado no capítulo 3.5, normalização é o processo matemático que tem a finalidade de escalonar os resultados dos autovetores (modos de vibração), transformando-os em autovetores unitários. Desta forma haverá a padronização dos deslocamentos resultantes da análise modal, permitindo uma melhor representação gráfica dos modos de vibração decorrentes de cada uma das frequências naturais. (CHOPRA, 2012)

Para Chopra (2012) e Soriano (2014), existem diferentes maneiras de normalizar os autovetores, entre os mais conhecidos tem-se:

- Normalização pelo máximo autovetor – Consiste em dividir todos autovalores pelo maior autovalor encontrado, transformando o maior deslocamento num vetor unitário

$$\phi_n = \frac{\hat{\phi}_i}{\hat{\phi}_{imax}} \tag{32}$$

Sendo:

ϕ_n – Modo de vibração normalizado;

$\hat{\phi}_i$ – Modo de vibração calculado;

$\hat{\phi}_{imax}$ – Maior modo de vibração calculado.

- Normalização pela matriz de Rigidez – Escalona os modos de vibração através da Matriz de rigidez K_n, através da equação:

$$\hat{\phi}_N \begin{vmatrix} \hat{\phi}_{N1} \\ \hat{\phi}_{N2} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{NN} \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{\phi}_N^T \begin{vmatrix} \hat{\phi}_{N1} & \hat{\phi}_{N2} & \dots & \hat{\phi}_{NN} \end{vmatrix} \tag{33}$$

Substituindo equação (32) na (33)

$$K_n = \hat{\phi}_n^T k \hat{\phi}_n$$

ou

$$K_n = \left|\hat{\phi}_{N1} \quad \hat{\phi}_{N2} \quad \dots \quad \hat{\phi}_{NN}\right| \times \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{11} \\ \hat{\phi}_{12} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{1N} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Para obter o modo de vibração normalizado, utiliza-se a equação 35:

$$\phi_N = \frac{1}{\sqrt[2]{K_n}} \times \hat{\phi}_n \tag{35}$$

Sendo:

K_n – Fator de escala para normalização pela matriz de rigidez K;

$\hat{\phi}_n^T$ – Matriz transposta do modo de vibração calculado;

$\hat{\phi}_i$ – Matriz do modo de vibração calculado;

ϕ_n – Matriz do modo de vibração normalizado;

- Normalização pela matriz de Massa – Reduz a escala dos modos de vibração a partir da Matriz de massa M_n, por meio da expressão:

Substituindo equação (32) na (33)

$$M_n = \hat{\phi}_n^T m \hat{\phi}_n \tag{36}$$

ou

$$M_n = \left|\hat{\phi}_{N1} \quad \hat{\phi}_{N2} \quad \dots \quad \hat{\phi}_{NN}\right| \times \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{11} \\ \hat{\phi}_{12} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{1N} \end{bmatrix}$$

Para determinar o modo de vibração normalizado, utiliza-se a equação 35:

$$\phi_N = \frac{1}{\sqrt[2]{M_n}} \times \hat{\phi}_n \tag{37}$$

Segundo Soriano (2014), o método de normalização mais favorável em analise dinâmica é através do método da matriz de massa (equação 36 e 37).

De acordo com o tutorial do programa SAP2000, sua ferramenta de análise modal também utiliza a expressão (36 e 37) para normalização e determinação dos modos de vibração. (CSI, 2019)

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos seguidos para o desenvolvido do trabalho resultam na seguinte ordem:

- Revisão bibliográfica:
  - Análise estrutural espacial;
  - Parâmetros modais;
  - Equações lineares de segunda ordem;
  - Autovalores e Autovetores;
  - Normalização de Autovetores.
- Desenvolvimento do código computacional:
  - Cálculo dos parâmetros modais para estruturas reticuladas tridimensionais;
  - Implementação de uma rotina para cálculo dos autovalores e autovetores pelo método de Jacobi.
  - Implementação de uma rotina para normalização dos autovetores;
- Desenvolvimento de interface gráfica:
  - Plotagem dos modos de vibração e apresentação das frequências naturais de vibração;
  - Estruturação da interface para entrada de dados;
  - Estruturação da interface para saída de dados, abrir, salvar, salvar como;
- Desenvolvimento de executável do programa:
  - Gerar arquivo .exe para execução do programa.

4.1 METODOLOGIA DO TRABALHO

A revisão bibliográfica seguiu os passos citados acima, primeiramente a análise de estruturas reticuladas espaciais que leva em consideração apenas os efeitos axiais que ocorrem em todo o sistema, seguida pelos parâmetros modais que necessitam das equações descritas no item 3.5, citadas anteriormente. A seguir no desenvolvimento do código computacional, optou-se

por desenvolver a própria rotina de cálculo dos Autovalores e Autovetores pelo método de Jacobi conforme o capítulo 3.5.2, porém devido a enorme demanda de processamento de dados, causada pelos vários processos de iterações, optou-se por utilizar a biblioteca disponível pelo *numpy,* para cálculo dos Autovalores e Autovetores.

É importante ressaltar que o presente trabalho, considera sistema de vibração livre não amortecida, portanto as verificações quanto ao amortecimento e vibrações forçadas serão desconsideradas.

Verificando os trabalhos acadêmicos adotados como referência e as duas possíveis representações da massa do sistema exemplificadas no capítulo 3.3.3, optou-se por utilizar como método de solução a matriz de massa concentrada, por ser o mais empregado nestas bibliografias e pela matriz resultante ser diagonal, não necessitando ser rotacionada, proporcionando assim uma vantagem computacional e necessitar um menor espaço de armazenamento e processamento de dados.

Durante o desenvolvimento do código computacional, optou-se por desenvolver a própria rotina de cálculo para normalização dos Autovetores conforme o capítulo 3.6.

4.2 METODOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO DO CÓDIGO

O código computacional utiliza a linguagem *Python*, possuindo bibliotecas com ferramentas que possibilitam a interpretação de resultados de forma rápida e prática.

Considerando apenas efeitos de rigidez axial, o método da rigidez direta com a liberação dos graus de liberdade foi o método usado para montagem da matriz de rigidez, sendo assim implantado um código capaz de resolver treliças planas para compreensão da linguagem *Python*. Para o entendimento dos parâmetros modais, utilizou-se inicialmente modelos de pórticos que possuem rigidez flexural como propriedade predominante e uma matriz de massa nodal, com a resolução de problemas de autovalores e autovetores obtém-se por fim os parâmetros modais pela programação.

Optou-se por desenvolver da maioria dos códigos de forma manual, conforme Anexo C, com objetivo de no decorrer do desenvolvimento obter um maior entendimento da programação, utilizando bibliotecas apenas quando o processamento computacional se tornou inviável, deixando o processo de cálculo lento. Após a implementação do código houve a necessidade de se comparar os resultados obtidos com um software reconhecido no meio acadêmico e comercial.

4.2.1 Fluxograma Computacional

Para desenvolvimento da programação o fluxograma (Figura 16) demonstra os passos para obtenção final dos parâmetros modais:

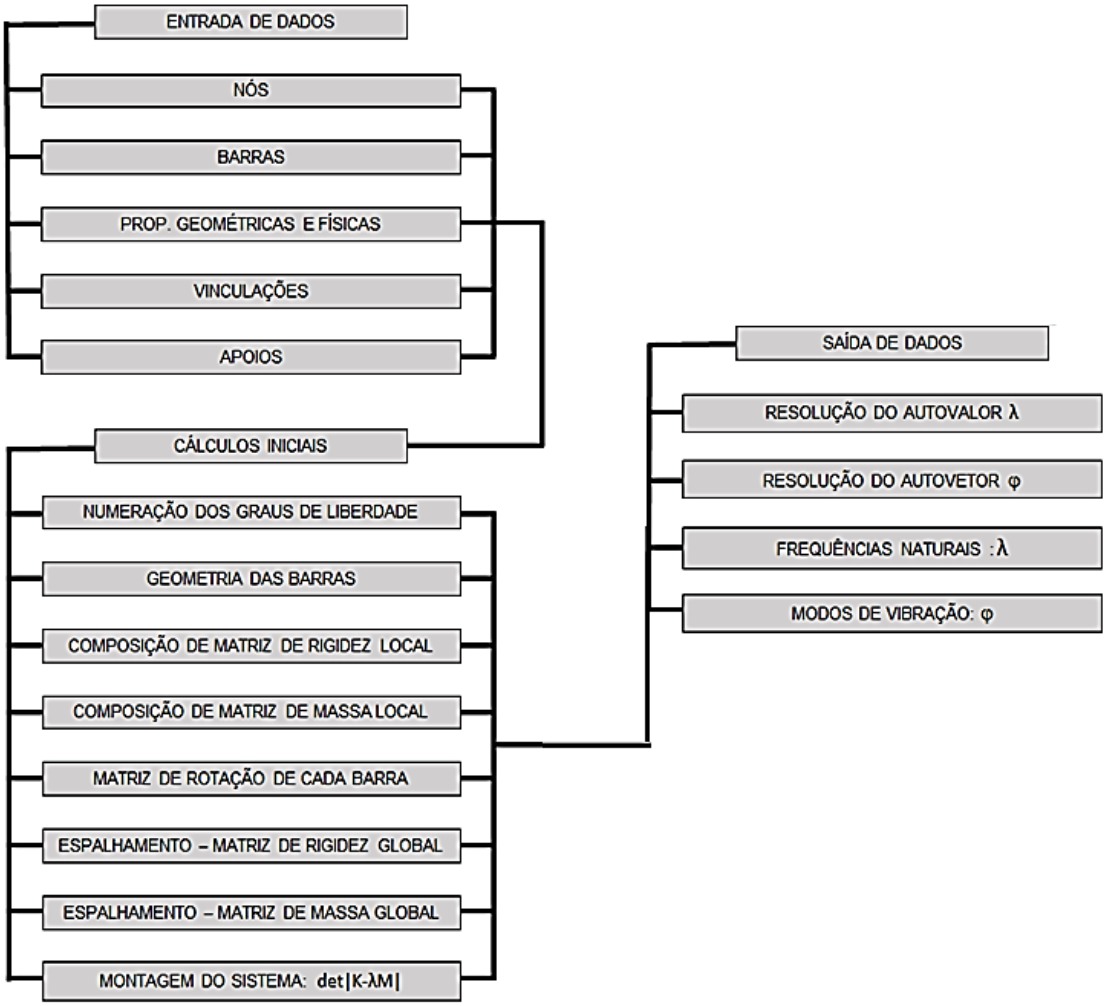


Figura 16- Fluxograma computacional.
Fonte: Os autores (2019).

4.2.2 Entrada de dados

Conforme demonstrado na Figura 16, a entrada de dados é o início fundamental para qualquer programação, compreendendo que tais informações devem ser geradas pelo usuário, definindo dados constantes e conhecidos, tais como: nós, barras, propriedades geométricas e físicas, vinculações e apoios.

4.2.2.1 Nós

A partir de um eixo tridimensional, possuindo abscissa representada pelo eixo X, ordenada pelo eixo Z e cota pelo eixo Y (Figura 5).

4.2.2.2 Barras

As incidências entre dois nós geram uma barra, o usuário deverá, portanto, indicar o nó inicial e o final da barra para que o programa o considere em seus cálculos.

4.2.2.3 Propriedades Geométricas e Físicas

As propriedades relativas a cada barra condizentes em sua geometria, módulo de elasticidade e massa linear, devem ser inseridas conforme necessidade do usuário. As seções comumente utilizadas são do tipo, H, U, I, L entre outras. Para os materiais o usuário poderá selecionar entre aço, concreto e madeira. A partir das informações de seção geométrica e material o programa gera a massa linear de cada barra.

4.2.2.4 Vinculação

Este parâmetro está configurado para considerar todas as barras com rótulas em suas extremidades, portanto definindo estruturas treliçadas espaciais.

4.2.2.5 Apoios

Os apoios devem ser definidos pelo usuário, tornando esses nós com deslocabilidade nula conforme a restrição imposta na entrada de dados.

4.2.3 Cálculos Iniciais

Com os dados inicias inseridos corretamente, o programa deverá iniciar a sequência de cálculo, passando primeiramente pela numeração das barras e dos graus de liberdade, nesta etapa ainda se realiza o processo para determinação da geometria das barras e a montagem das matrizes, posteriormente o programa calculará o determinante $|K-\lambda M|$ apresentado na equação 21.

4.2.3.1 Numeração dos graus de liberdade

Este parâmetro está configurado para que os graus de liberdade presentes na estrutura se iniciem de forma a acompanhar a ordem de inserção dos nós.

4.2.3.2 Geometria das barras

Definido os nós iniciais e finais de uma barra, obtém-se comprimento total das barras e seus cossenos diretores, que serão utilizados na formulação das matrizes subsequentes.

4.2.3.3 Matriz de rigidez local

Conforme apresentado no tópico 3.3.4, a matriz de rigidez local representada pela equação 10.

4.2.3.4 Matriz de massa local

Conforme apresentado no tópico 3.3.3, a matriz de massa local representada pela equação 8.1.

4.2.3.5 Matriz de rotação

Conforme apresentado no tópico 3.3.2, a matriz de rotação utiliza os cossenos diretores da barra para distribuição dos seus esforços nos eixos X,Y e Z conforme equação 05. A matriz é válida para todas as posições exceto quando a barra está orientada inteiramente no eixo Y, nestes casos a matriz *T* assume o formato presente na equação 06.

4.2.3.6 Espalhamento de matrizes

Com o término de montagem das matrizes acima representadas, o programa poderá realizar os espalhamentos nas coordenadas da matriz de rigidez global e na matriz de massa global.

A formulação para matriz de rigidez global segue abaixo:

$$|Kglob| = |R.T| * |Ke| * |R|$$

A formulação para matriz de rigidez global segue abaixo:

$$|Kmass| = |R.T| * |Km| * |R|$$

Posicionando os elementos das matrizes conforme o número do grau de liberdade do nó da barra.

4.2.3.7 Determinante |K-λM|

Para a resolução dos problemas de Autovalor e Autovetor serão utilizadas as bibliotecas dos *Python*, que dispõem da função *eight* na biblioteca do *numpy,* que retorna os resultados de Autovalor e Autovetor de duas matrizes.

4.2.4 Saída de dados

Conforme apresentado no item 4.2.3.7 a função *eight* exporta como resultado os autovalores e autovetores de duas matrizes, sendo estes as frequências naturais e os modos de vibração da treliça espacial, as quais serão apresentadas através de uma interface gráfica, utilizando ainda a normalização dos valores conforme apresentado no item 3.6 e no Anexo A é possível visualizar a normalização pela matriz de massa no exemplo numérico 1.

4.2.5 Gerenciamento de arquivos

Com o objetivo de proporcionar uma maior praticidade aos usuários, utilizou-se a função *shelve,* uma biblioteca do *numpy* que possibilita salvar os dados de entrada, tais como, nós, incidências de barras, propriedades físicas e geométricas em um único arquivo, desta forma o usuário pode criar seu próprio banco de dados com estruturas que lhe forem convenientes.

Esta biblioteca utiliza arquivos criptografados no qual apenas o programa que gerar o arquivo de salvamento consegue executa-lo posteriormente.

4.2.6 Arquivo executável

O desenvolvimento do código que permite a criação de um arquivo executável, se deu através da utilização da função *py2exe*, uma biblioteca do *python* que possibilita a unificação dos arquivos que fazem parte do código bruto, o qual tem o objetivo de realizar todos os cálculos apresentado no Anexo C.

4.2.7 Tutorial

Todo processo para utilização do aplicativo encontra-se no Anexo B contendo um tutorial exemplificando a utilização do software

5 VALIDAÇÕES

Para as validações dos valores das frequências naturais e modos de vibração do software desenvolvido (SHOF Tools), foi utilizado o software SAP2000 v.20, em que será realizado um comparativo entre os resultados plotados em ambos os programas.

O SAP2000 é uma ferramenta computacional de engenharia que realiza analises, simulações, modelagem e dimensionamento de estruturas de diversos segmentos tais como: estruturas industriais, barragens, pontes, edifícios, entre outros. O programa realiza analises através do método dos elementos finitos (MEF – procedimentos numéricos para soluções aproximadas através de cálculos diferenciais). (CSI, 2019)

Os resultados de análise modal (frequências naturais e modos de vibração) do SAP2000 são determinados pelos métodos de superposição que sobrepõem as formas do modo de vibração livre através de respostas dinâmicas para descrever os padrões de deslocamento. Para os modos de vibração, segundo o tutorial do SAP2000 o software utiliza o recurso de normalização pela matriz de massa.

As validações do SHOF Tools serão feitas através da modelagem e análise modal de 3 modelos de estruturas treliçadas espaciais;

- Torre quadrada treliçada;
- Viga joist;
- Domo de estrutura espacial;

5.1 METODOLOGIA DE VALIDAÇÃO

A validação das análises modais entre as ferramentas de modelagem SHOF Tools x SAP2000, será feito através de um comparativo entre as 10 primeiras frequências naturais e seus respectivos modos de vibração, pois segundo Queiroz (2010), estas são as frequências mais preocupantes.

Para que a validação do SHOF Tools ocorra, é preciso seguir os seguintes passos:

Passo 1: A modelagem da estrutura em ambos os softwares, de modo que sua origem e coordenadas globais sejam as mesmas.

Passo 2: Entrada de dados (propriedades da estrutura deve ser a mesma):

- Modo de Elasticidade E [MPa];
- Peso especifico do material [kgf/m³]
- Seção transversal das barras [m²]
- Vínculos de ligação entre as barras (por se tratar de estruturas treliçadas, todas as ligações serão rotuladas);
- Vinculação dos apoios
    - Articulação de 2º grau – giro livre, sem deslocamentos de apoio;

5.1.1 Torre treliçada

A torre treliçada é constituída por uma estrutura composta pelas seguintes propriedades físicas:

- Material: Alumínio 5052 H34;
- Modulo de Elasticidade: E= 70.000,00 MPa;
- Peso específico: 2.700 kgf/m³
- Seção transversal: 0,09m².
- Dimensões: conforme (Figura 17);
- Vínculos: Apoio articulado de 2º grau;
- Ligações do tipo rotulado (giro livre);
- Medidas em metros.

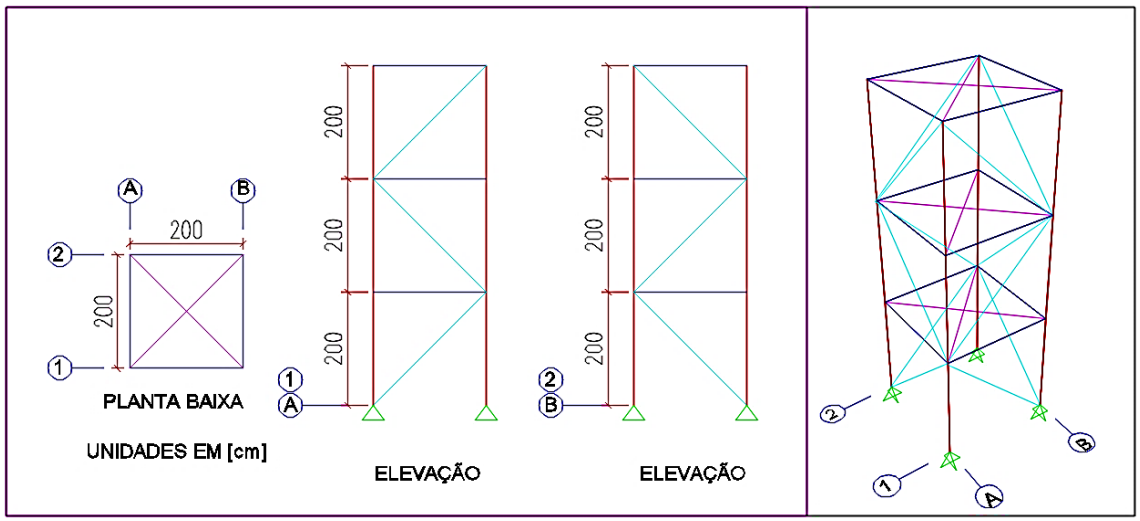


Figura 17 – Torre treliçada (dimensões em cm).
Fonte: Os autores (2019).

A Figura 18 e Figura 19 ilustram a modelagem das estruturas nos softwares SHOF Tools e SAP 2000.

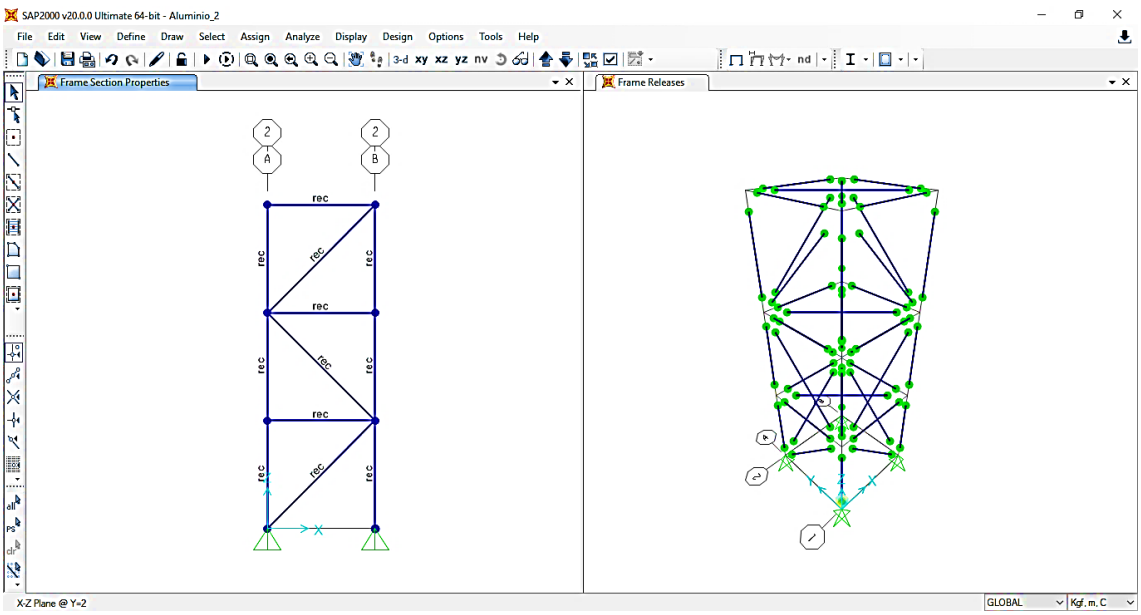


Figura 18 – Torre treliçada SAP2000.
Fonte: Os autores (2019).

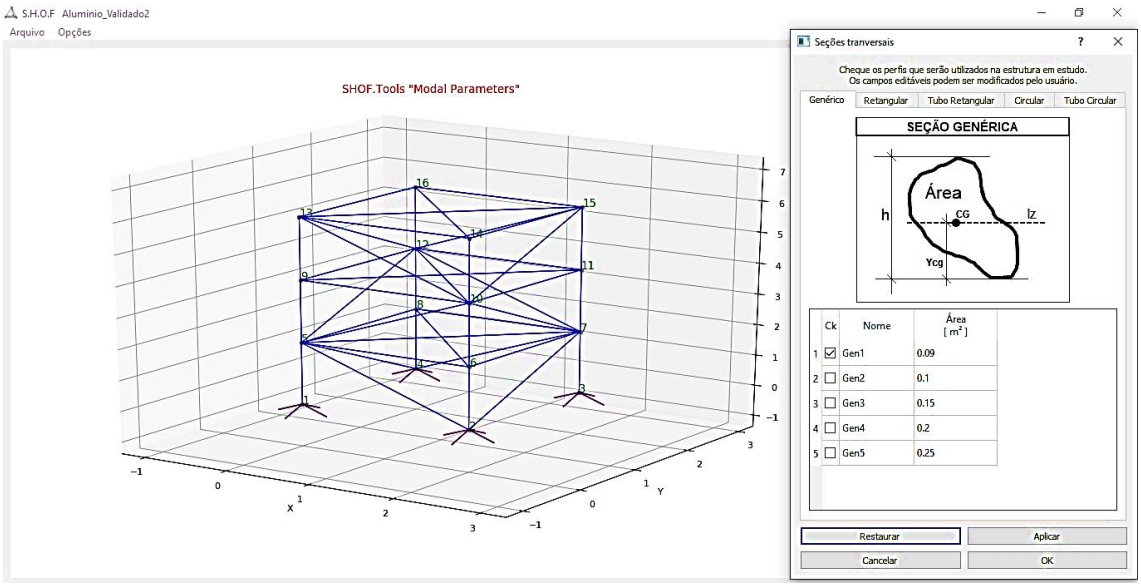


Figura 19 – Torre treliçada SHOF Tools.
Fonte: Os autores (2019).

5.1.1.1 Resultados da Torre Treliçada

A Figura 20 demonstra o sentido e forma com que a estrutura se desloca no 1ª modo de vibração.

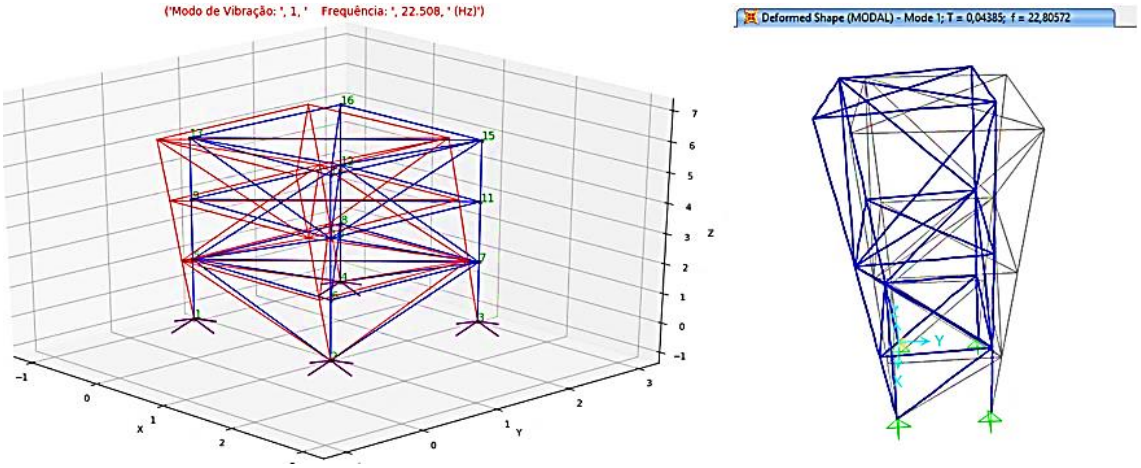


Figura 20 – Deslocamentos torre treliçada SHOF x SAP2000.
Fonte: Os autores (2019).

O Quadro 2 apresenta o comparativo dos resultados gerados pelos programas SHOF Tools x SAP2000.

Nº do modo	SHOF Tools Frequência [Hz]	SAP 2000 Frequência [Hz]	Diferença [%]
1	22,5083402	22,805717	1,30%
2	26,3301257	26,6779953	1,30%
3	39,5540662	40,0766485	1,30%
4	74,458535	75,4422697	1,30%
5	75,5288036	76,5266786	1,30%
6	104,548158	105,929433	1,30%
7	105,12775	106,516682	1,30%
8	125,647304	127,307337	1,30%
9	140,420122	142,275331	1,30%
10	140,4229	142,278145	1,30%

Quadro 2 – resultados das frequências naturais.
Fonte: Os autores (2019).

Conforme citado no capítulo 5.1, realizou-se a validação dos 10 primeiros modos de vibração, os quais encontram-se no Anexo D devido a quantidade de verificações e tamanho da estrutura.

5.1.2 Viga Joist

Propriedades físicas da estrutura da viga joist é:

- Material: Aço A36 de média resistência;
- Modulo de Elasticidade: E= 200.000,00 Mpa;
- Peso específico: 7500 kg/m³
- Seção transversal: Barra quadrada laminada com lado 50mm.
- Dimensões: conforme (Figura 21);
- Vínculos: Apoio articulado de 2º grau;
- Ligações do tipo rotulado (giro livre).
- Medidas em metros.

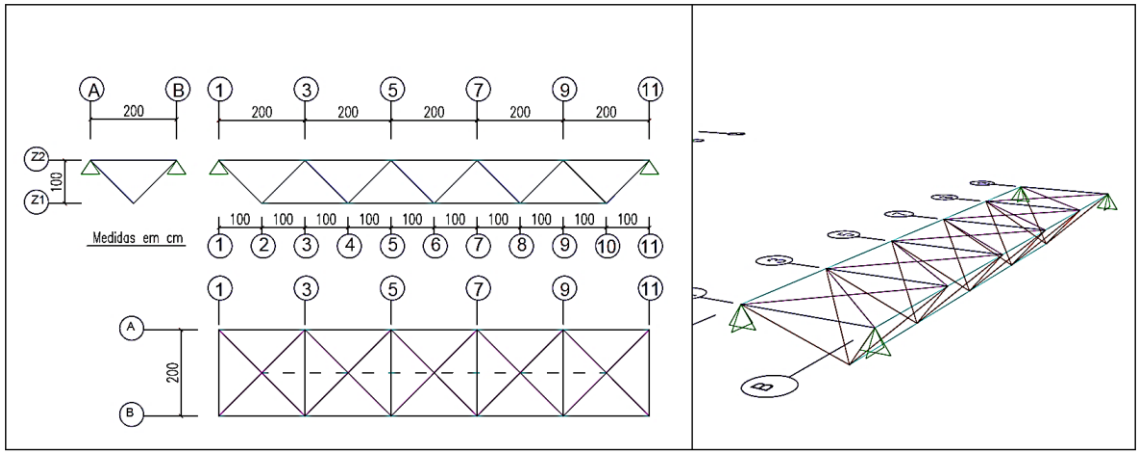


Figura 21 – viga joist (dimensões em cm).
Fonte: Os autores (2019).

A Figura 22 e Figura 23 apresentam o modelo da viga joist nos programas SHOF Tools e SAP 2000.

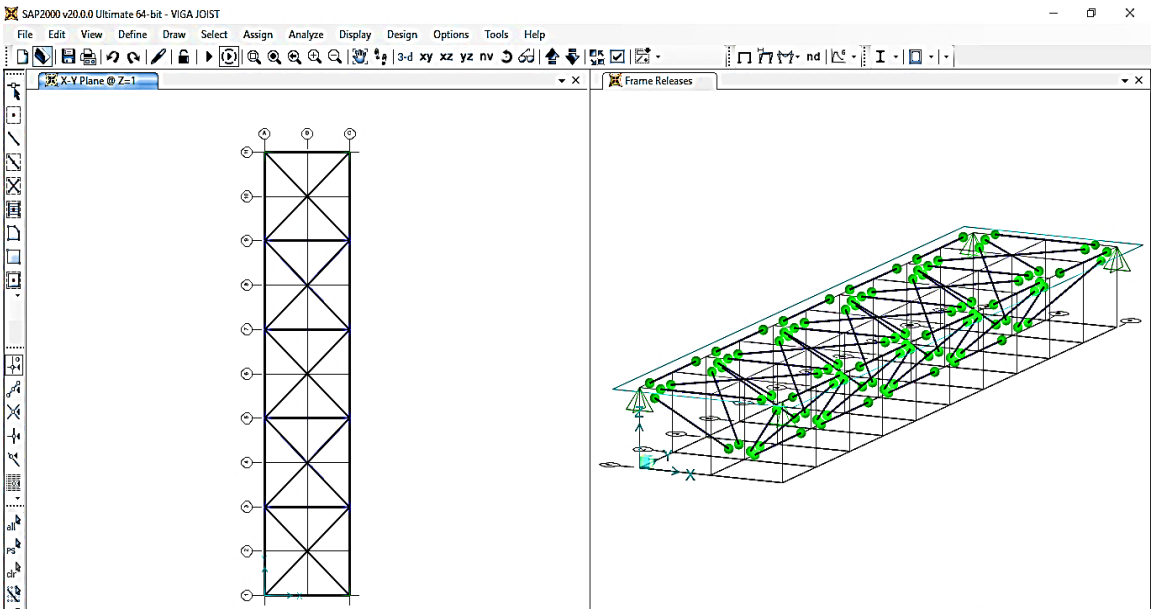


Figura 22 – viga joist SAP2000.
Fonte: Os autores (2019).

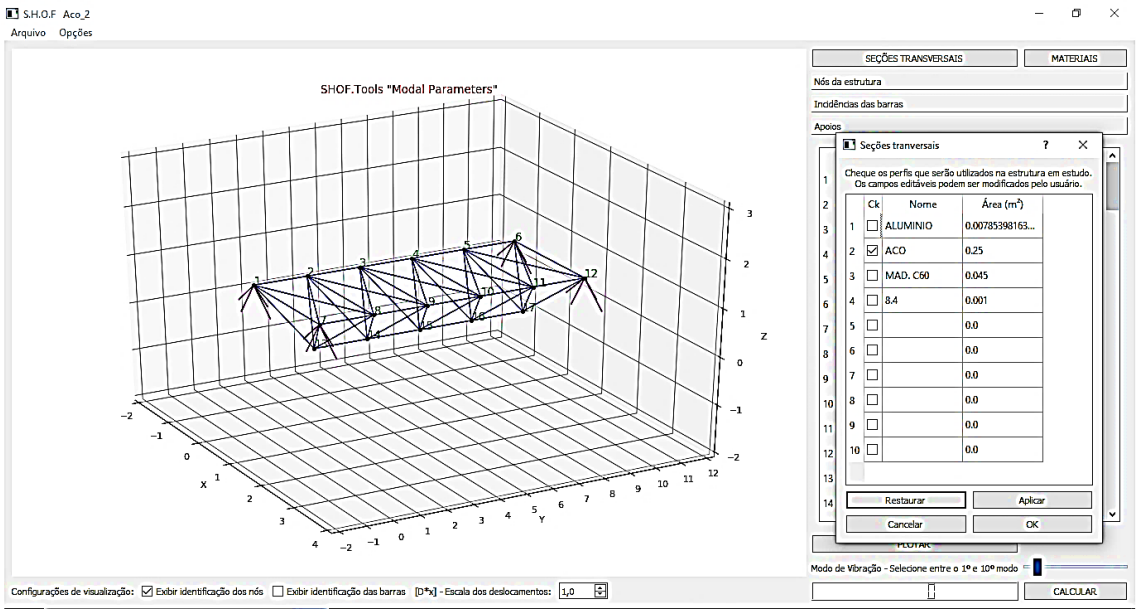


Figura 23 – viga joist SHOF Tools.
Fonte: Os autores (2019).

5.1.2.1 Resultados da Viga Joist

A Figura 24 ilustra o sentido e a forma com que a estrutura se desloca no 1ª modo de vibração.

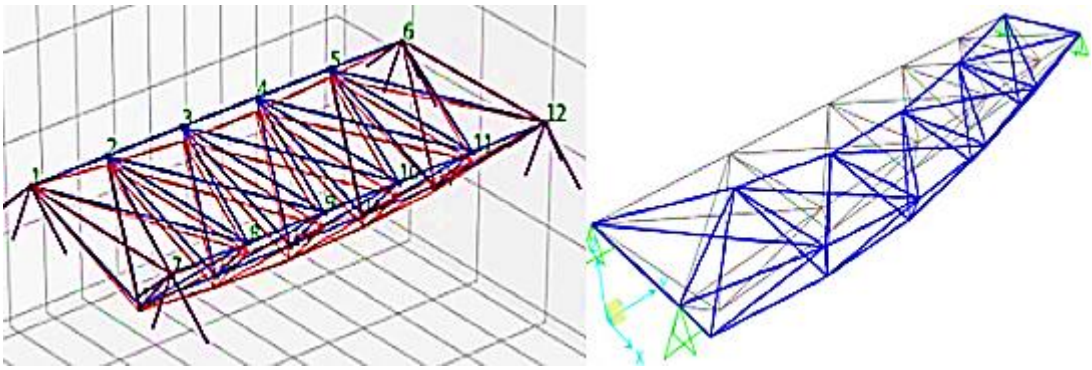


Figura 24 – Deslocamentos viga joist SHOF x SAP2000.
Fonte: Os autores (2019).

O Quadro 3 apresenta o comparativo dos resultados gerados pelos programas SHOF Tools x SAP2000.

Nº do modo	SHOF Tools Frequência [Hz]	SAP 2000 Frequência [Hz]	Diferença [%]
1	20,9977572	21,275176	1,30%
2	39,9611013	40,489061	1,30%
3	57,7621788	58,525324	1,30%
4	58,6522415	59,427146	1,30%
5	77,0749078	78,09321	1,30%
6	97,9958084	99,290514	1,30%
7	107,855654	109,28063	1,30%
8	121,389645	122,99343	1,30%
9	123,978046	125,61602	1,30%
10	128,448998	130,14605	1,30%

Quadro 3 - resultados das frequências naturais..
Fonte: Os autores (2019).

Conforme mencionado no capítulo 5.1, foi executado a validação dos 10 primeiros modos de vibração, os quais encontram-se no Anexo D.

5.1.3 Domo de estrutura espacial

As propriedades do Domo de estrutura espacial são:

- Material: Genérico;
- Modulo de Elasticidade: E= 300,00 Mpa;
- Peso específico: 7840 kg/m³
- Seção transversal genérica com área 0,000317 m²;
- Dimensões: conforme (Figura 21);
- Vínculos: Apoio articulado de 2º grau;
- Ligações do tipo rotulado (giro livre).
- Medidas em metros.

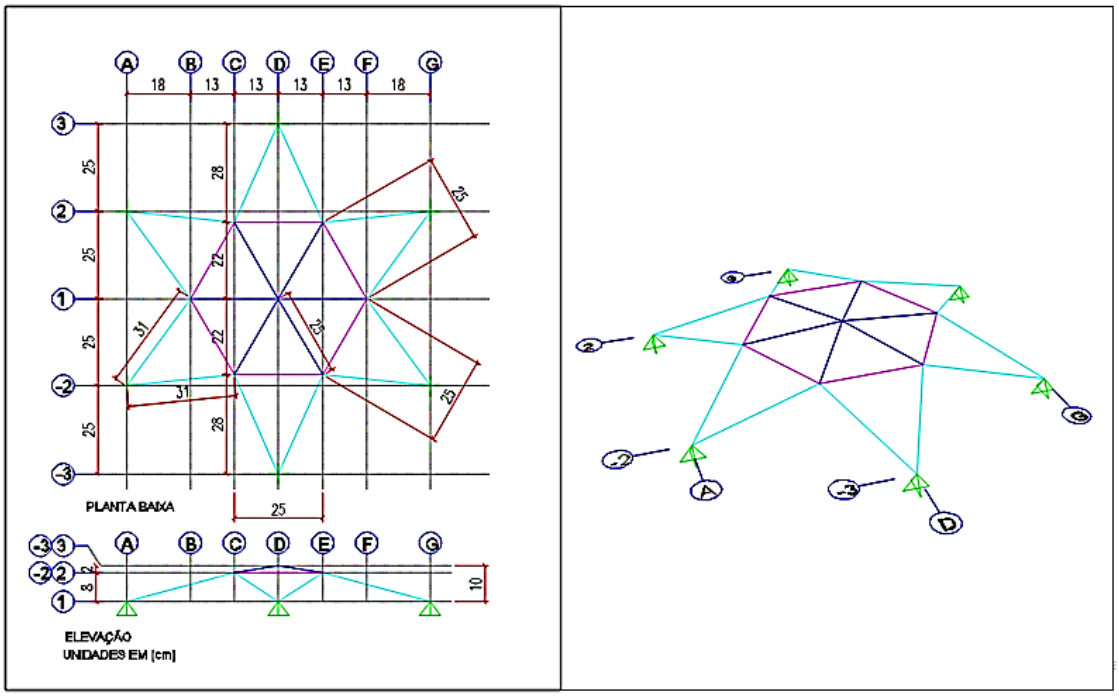


Figura 25 – Domo (dimensões em cm).
Fonte: Os autores (2019).

A Figura 26 e Figura 27 apresentam o modelo da viga joist nos programas SHOF Tools e SAP 2000.

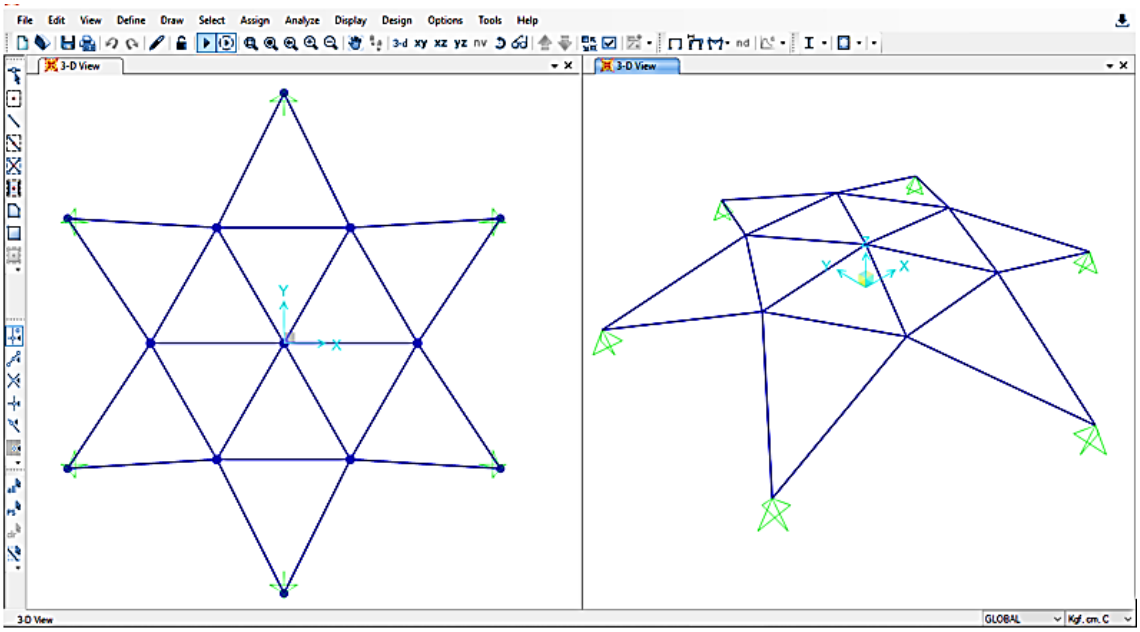


Figura 26 – Domo SAP2000.
Fonte: Os autores (2019).

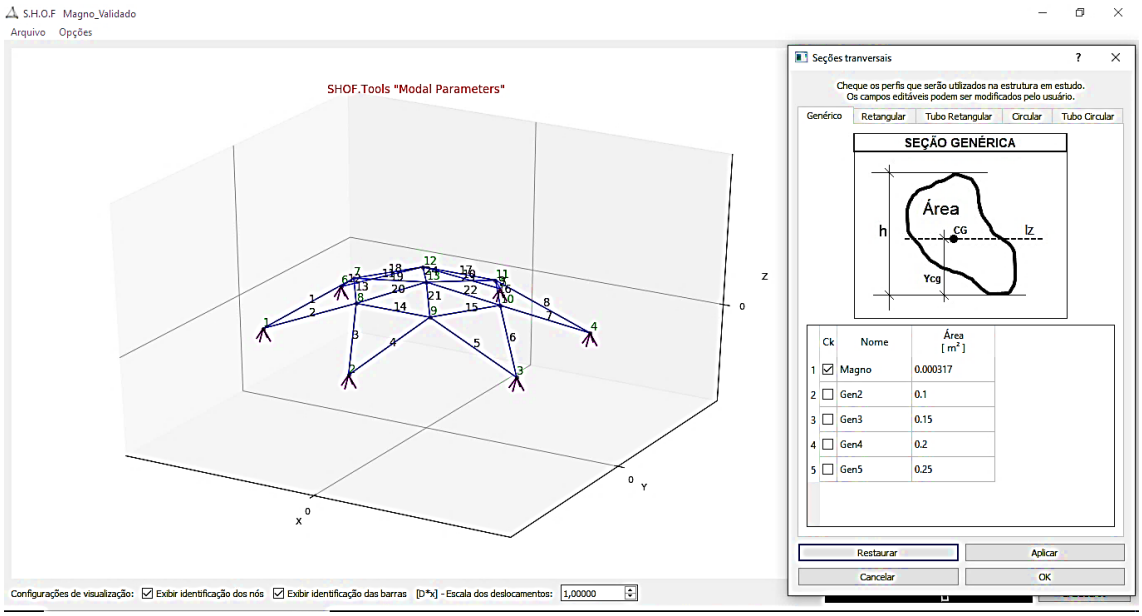


Figura 27 – Domo SHOF Tools.
Fonte: Os autores (2019).

5.1.3.1 Resultados do domo de estrutura espacial

A Figura 28 ilustra o sentido e a forma com que a estrutura se desloca no 1ª modo de vibração.

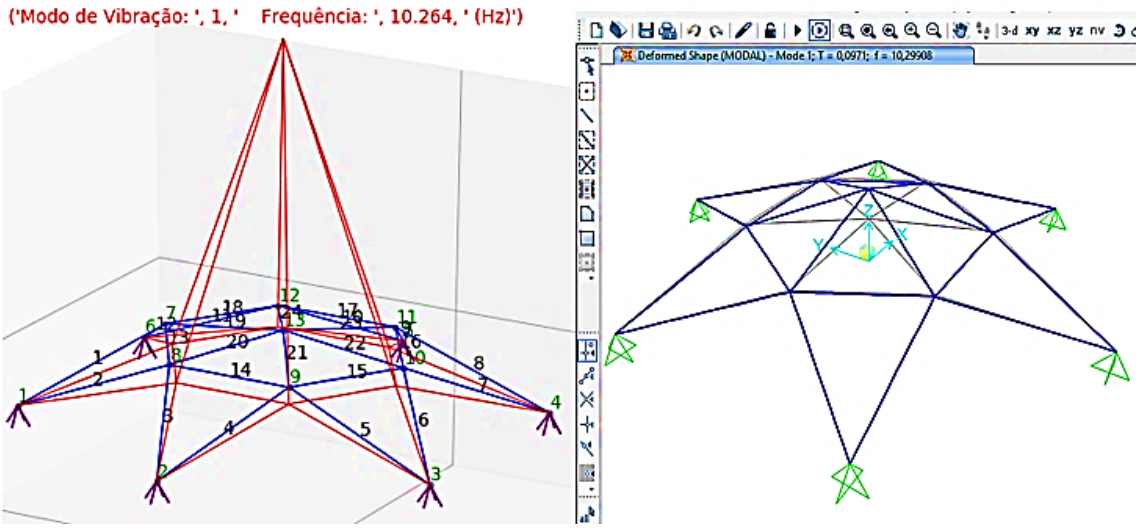


Figura 28 – Deslocamentos domo SHOF x SAP2000.
Fonte: Os autores (2019).

O Quadro 4 apresenta o comparativo dos resultados gerados pelos programas SHOF Tools x SAP2000.

Nº do modo	SHOF Tools Frequência [Hz]	SAP 2000 Frequência [Hz]	Diferença [%]
1	10,2644967	10,2990758	0,34%
2	15,0403487	15,0910168	0,34%
3	15,0404763	15,0911448	0,34%
4	15,2735864	15,3250403	0,34%
5	15,7748643	15,8280069	0,34%
6	15,7756645	15,8288097	0,34%
7	19,4892623	19,5549179	0,34%
8	55,565383	55,7525722	0,34%
9	55,5658377	55,7530285	0,34%
10	71,0626894	71,3020861	0,34%

Quadro 4 - resultados das frequências naturais.
Fonte: Os autores (2019).

De acordo com o capítulo 5.1, foram validados os 10 primeiros modos de vibração, que encontram-se no Anexo D.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi desenvolvido um programa computacional, nomeado de SHOF tools, capaz de realizar cálculos, apresentar resultados numéricos e gráficos num período de tempo similar aos softwares disponíveis no mercado, em específico SAP2000, programa utilizado para validação dos resultados obtidos no item 5.

Durante a elaboração deste trabalho, tomou-se como base as referências bibliográficas aqui presentes e antes de se iniciar qualquer rotina de programação para desenvolvimento do código, foram realizados exercícios, interpretação de teoremas e validações simplórias de cada processo, para que no momento da validação dos resultados finais, os mesmos chegassem ao mínimo de variação possível.

Fazendo uso do embasamento teórico e do recurso computacional *python*, desenvolveu-se o código presente no anexo C, capaz de realizar cálculos que determinam as frequências naturais, modos de vibração e demonstração gráfica da estrutura deformada.

Além de garantir que o software SHOF tools apresentasse resultados convergentes e com baixos índices de variações, foi prezado por um baixo custo computacional, sendo assim, o software aqui desenvolvido se demonstrou efetivo quando comparado com o SAP2000, para obtenção das frequências naturais e modos de vibração, assim como representados nos quadros dos itens 5.1.1.1, 5.1.2.1 e 5.1.3.1.

Por fim, entende-se que o estudo deste tema deve ser cada vez mais difundido nas universidades, assim como este trabalho pode ser ampliado para a aplicação de outros tipos de elementos estruturais, como vigas contínuas, pórticos e outros tipos de vinculações de modo que o estudo possa ficar mais completo ainda.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Márcio T de. **Vibrações mecânicas para engenheiros**. 2. ed., São Paulo: Edgard Blücher, 1990.

ARNDT, Marcos. **O método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas.** Paraná, Curitiba 2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimentos.** Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mista de aço e concreto – Procedimento.** Rio de Janeiro, 2006.

BELLEI, Ildony H.; **Edifícios industriais em aço – Projeto e cálculo**. São Paulo: PINI, 1998.

BOLINA, C.C.; Palechor, E. U. L.; Vásquez, M. P. R.; **Vibrações: As frequências naturais estimada e experimental de uma estrutura**, em: Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria. São Paulo: Blucher, 2015.

BRASIL, REYOLANDO M. L. R. F.; SILVA, Marcelo Araujo **Introdução à Dinâmica das Estruturas para Engenharia Civil.** 1. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2013.

CARVALHO, José P. G. **Otimização estrutural mono e multi-objetivo de treliças considerando frequências naturais de vibração, carga crítica de flambagem e agrupamento ótimo e barras e materiais.** Juiz de Fora, 2019.

CASTRO, André F. C.. **Otimização de estruturas através de uma técnica de programação semidefinida de grande porte.** Paraíba, João Pessoa, 2018.

CHOPRA, Anil K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering.** 4th ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 2012.

ESPADA, Margarida. **Desenvolvimento de modelos para análise dinâmica de estruturas. Aplicação a barragens de betão e estruturas auxiliares.** Portugal, Lisboa, 2010.

FEÓ, E.A. **Desenvolvimento teórico do método de Jacobi.** Faculdade de engenharia de Resende – Rio de Janeiro, 2005.

FRANCO, N.M.B. **Cálculo numérico**. Universidade de São Paulo – Instituto de ciências matemáticas e de computação – São Paulo, 2011.

GERE, J. M.; WEAVER, W. J., **Análise de estruturas reticuladas**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1987.

GONÇALVES, P.J.P; PIRES, F.A; **Análise Dinâmica e Otimização estrutural de uma treliça espacial**, em: IX Congresso Nacional de Engenharia Mecânica. Fortaleza, Ceará, 2016.

HANAOR, A. ; MARSH, C. **Modification of behaviour of ouble-layer grids: overview. Journal of Structural Engineering,** v.115, n.5, p.1021-1570, May, 1989.

MAKOWSKI, Z.S. **Space structures of today and tomorrow, In: INTENATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES**, Guildford, UK, 1984.

MARTHA, L. F., **Análise de estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. 1a Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MARTINELLI, Larissa B.. **Otimização de estruturas treliçadas geometricamente não lineares submetidas a carregamento dinâmico.** Espírito Santo, Vitória, 2019.

MCCORMAC, J. C., **Análise estrutural: Usando métodos clássicos e métodos matriciais**. 4ª Ed. São Paulo: Gen, 2009.

MOREIRA, D. F., **Análise matricial das estruturas.** 1ª Ed. Rio de Janeiro: Editora da Universidade de São Paulo LTC, 1977

NASCIMENTO, Fernanda O.D.A. **Análise de estruturas metálicas de torres treliçadas autoportantes para telecominicações.** Tese de mestrado, Universidade Estadual da Campinas, Campinas-Sp, 2002.

PINTO, Marcelo; XAVIER, Louise; **Análise Dinâmica da Igreja Nossa Senhora do Rosário dos Homens Pretos, Aracati, CE**, em: II Simpósio Brasileiro sobre reabilitação das construções. Fortaleza, Ceará, 2019.

QUEIROZ, Paulo César de Oliveira **Análise estática e dinâmica de estruturas reticuladas: Ambiente de simulação em Java.** Tese de mestrado, Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2010.

RAO, Singiresu S. **Vibrações mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

RIBEIRO, Diogo. **Avaliação Experimental dos Efeitos Dinâmicos Induzidos pelo Vento na Torre de Telecomunicação do Monte da Virgem.** Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

RODRIGUES, H; VARUM, H; COSTA, A. **Interface gráfico para análise não-linear de pórticos planos sujeitos a cargas dinâmicas e/ou estáticas**. Aveiro, 2004.

SAP2000 TUTORIALS. Disponível em : < https://wiki.csiamerica.com/display/tutorials/SAP2000>. Acesso em: 21 out. 2019

SORIANO, H. L., **Análise de estruturas – formulação matricial e implementação computacional**. 1a Ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 2005.

SORIANO, H. L., **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1a Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

STEINBRUCH, AN E WINTERLE, P. **Introdução à Álgebra Linear.** Pearson Education do Brasil, São Paulo, 1997.

8 ANEXO A

Exemplo numérico 1:

Considerando um cenário onde ocorram deslocamentos unitários no mesmo sentido em um pórtico de um edifício de dois pavimentos (Figura 29), em uma mesma variação temporal e admitindo que todas as lajes são infinitamente rígidas, determine as frequências naturais e modos de vibração da estrutura. (CHOPRA, 2012)

Dados:

Massas aglomerada nos pavimentos[3]

$m_1 = 2m \quad e \quad m_2 = 1m$

Mesma rigidez para todos os pilares

$k_{11} = 3k\ ;\ k_{12} = -1k\ ;\ k_{21} = -1k\ ;\ k_{22} = 1k$

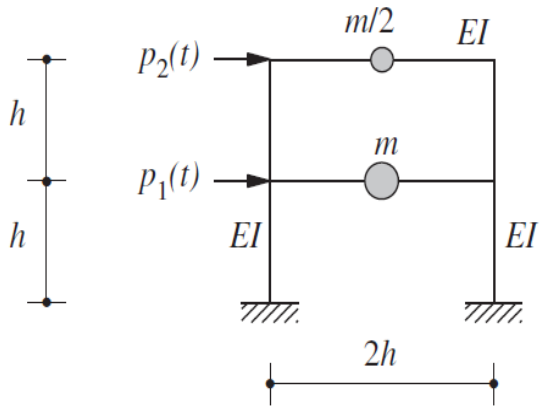


Figura 29 – Modelo estrutural simplificado: Pórtico de dois pavimentos.

Fonte: CHOPRA (2012).

Passo 1: Montar as matrizes K (rigidez) e M (massa)

[3] O autor Chopra (2012) considera que as massas apresentadas na estrutura são concentradas. Conforme definição de Nascimento (2002) e Martinelli (2019) no embasamento teórico do capítulo 3.3.3.

$$K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \qquad \rightarrow \qquad K = \begin{vmatrix} 3k & -1k \\ -1k & 1k \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \qquad \rightarrow \qquad M = \begin{vmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 1m \end{vmatrix}$$

Passo 2: Obter o determinante das matrizes K e M na equação 22.

$$det|K - \lambda M|, \qquad sendo\ o\ autovalor\ \lambda = \omega^2\ [frequência\ natural]$$

$$det \begin{vmatrix} 3k - 2m\lambda & -1k \\ -1k & 1k - 1m\lambda \end{vmatrix}$$

A resposta para o determinante é um polinômio denominado equação característica, obtido através de *n* soluções ($\lambda_1, \ldots, \lambda_N$) que são a quantidade de frequências naturais dos *n* modos de vibração.

No caso a resposta do determinante foi um polinômio de grau 2, sendo 2 frequências naturais (autovalores) e 2 modos de vibração (autovetores) para cada frequência.

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

Passo 3: Obter as frequências naturais (ω) da equação característica.

$$\lambda_1 = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = 0{,}7071\ rad/s$$

$$\lambda_2 = 2{,}0 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = 1{,}4142\ rad/s$$

Se dividirmos o autovalor ω por 2π, tem-se a resposta da frequência (f) em hertz (Hz).

$$\omega_1 = 0{,}7071\ rad/s \quad \rightarrow \quad f_1 = 0{,}1125\ Hz$$

$$\omega_2 = 1{,}4142\ rad/s \quad \rightarrow \quad f_2 = 0{,}2251\ Hz$$

Passo 4: Encontrar os modos de vibração (ϕ)

Os autovalores ω encontrados no passo anterior devem ser substituídos na equação (14)

$$\begin{vmatrix} 3k - 2m\lambda & -1k \\ -1k & 1k - 1m\lambda \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

a) Frequência natural 1 $\omega_1^2 = \lambda = 0{,}5$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0{,}5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\phi_{11} - 1\phi_{12} = 0 \\ -1\phi_{11} + 0{,}5\phi_{12} = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \phi_1 \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{bmatrix}$$

$$2\phi_{11} - 1\phi_{12} = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_{11} = 0{,}5\phi_{12} \quad \rightarrow \quad v_1 = \phi(0{,}5; 1)$$

Modos de vibração natural ϕ_1

$$\phi_1 \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Figura 30 mostra o primeiro modo de vibração para a frequência natural ω_1^2

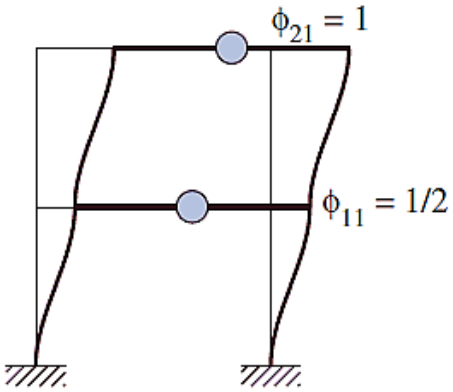


Figura 30 – 1º modo de vibração.
Fonte: CHOPRA (2012).

b) Frequência natural 2 $\omega_2^2 = \lambda = 2{,}0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -1\phi_{21} - 1\phi_{22} = 0 \\ -1\phi_{21} - 1\phi_{22} = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \phi_2 \begin{bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$-1\phi_{21} - 1\phi_{22} = 0 \quad \rightarrow \quad -\phi_{11} = \phi_{12} \quad \rightarrow \quad v_1 = \phi(-1; 1)$$

Modos de vibração natural ϕ_2

$$\phi_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Figura 31 representa o segundo modo de vibração causado na estrutura de dois pavimentos pela frequência natural ω_2^2

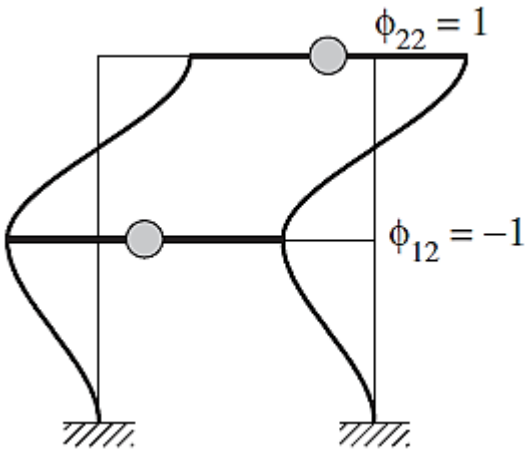


Figura 31 – 2º modo de vibração.
Fonte: CHOPRA (2012).

Passo 5: Normalização dos modos de vibração pela matriz de massa

a) Normalização dos modos de vibração natural ϕ_1

$$\phi_1 \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_1^T \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_n = \hat{\phi}_n^T m \hat{\phi}_n$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 1m \end{vmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore \boldsymbol{M_1 = \frac{3}{2} m \; ou \; 1{,}5m}$$

Substituindo M_1 na equação de ϕ_1

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt[2]{M_n}} \times \hat{\phi}_n$$

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt[2]{1{,}5m}} \times \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4082 \\ 0{,}8164 \end{bmatrix}} \textbf{ modo de vibração 1 normalizado}$$

b) Normalização dos modos de vibração natural ϕ_2

$$\phi_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \phi_1^T \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_n = \hat{\phi}_n^T m \hat{\phi}_n$$

$$M_2 = [-1 \quad 1] \times \begin{vmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 1m \end{vmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore \boldsymbol{M_2 = 3m}$$

Substituindo M_2 na equação de ϕ_2

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt[2]{M_n}} \times \hat{\phi}_n$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt[2]{3m}} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\phi_2 = \begin{bmatrix} -0,577 \\ 0,577 \end{bmatrix}}$ **modo de vibração 2 normalizado**

9 ANEXO B

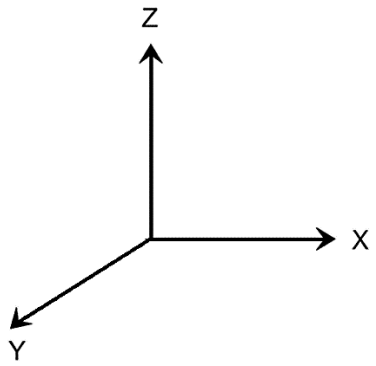
MANUAL DO USUÁRIO

CÁLCULO DOS PARÂMETROS MODAIS DE TRELIÇAS ESPACIAIS

Este manual tem como objetivo apresentar os passos para o uso correto do software SHOF. Tool, desenvolvido como trabalho de conclusão no curso de Engenharia Civil da Universidade Positivo no ano de 2019.

1. SISTEMA GLOBAL DE COORDENADAS

A orientação dos eixos X (horizontal), Y (longitudinal) e Z (vertical), é evidenciada na imagem a baixo com a finalidade de gerar resultados claros e facilitando o entendimento e a comunicação entre usuário e aplicativo.

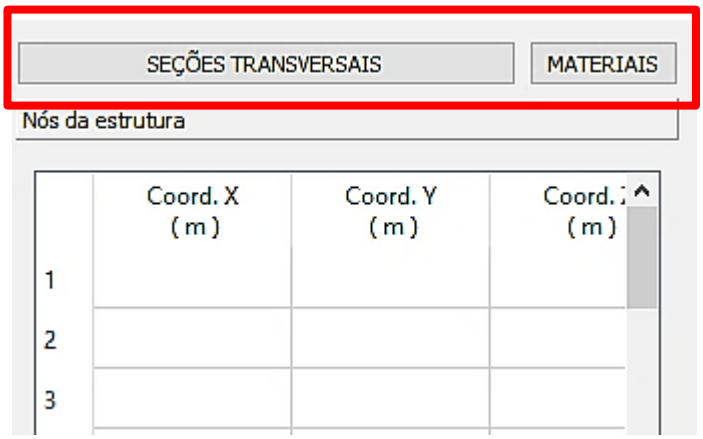


A convenção para deslocamentos está associada ao sistema de eixos locais das barras e globais da estrutura, toma-se a barra orientada em seu eixo de coordenadas locais e analisa-se onde se encontra a posição dos nós iniciais e finais e sua incidência para modelagem dos modelos matemáticos propostos para cálculo dos parâmetros modais.

2 ENTRADA DE DADOS

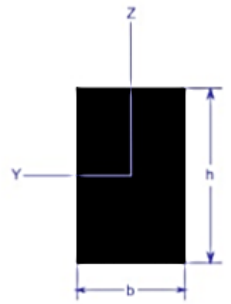
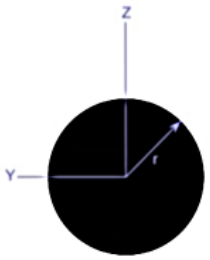
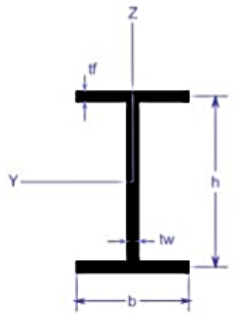
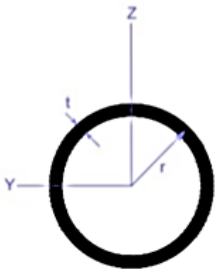
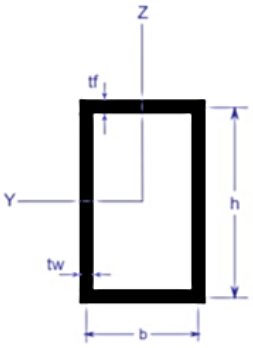
2.1 Propriedades das barras

A inserção das propriedades das barras é parte essencial para o correto dimensionamento visto que os parâmetros modais necessitam da rigidez e da massa de cada barra.

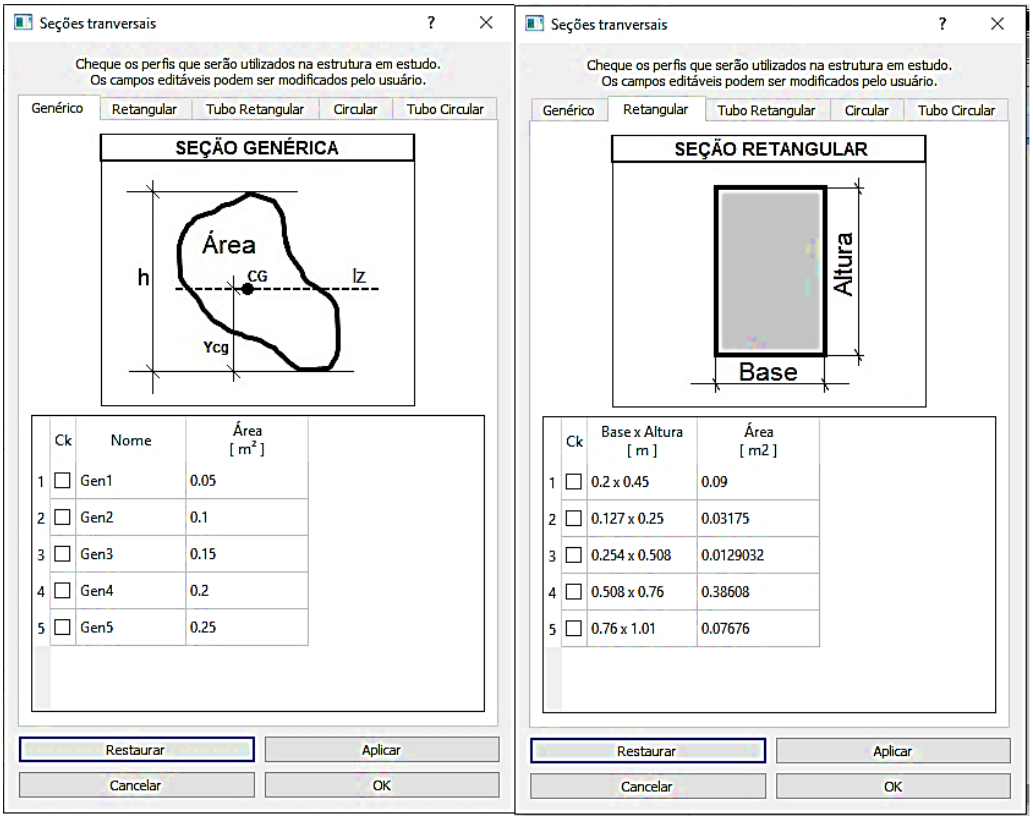


2.1.1. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Ao clicar no botão de Seções Transversais o usuário poderá informar os perfis que serão utilizados na estrutura em estudo. Para possibilitar a utilização de qualquer tipo de seção, e evitar simplificações indesejáveis pelo usuário, a entrada de dados referente as seções é feita através dos valores de áreas. Abaixo estão algumas fórmulas para determinação de áreas.

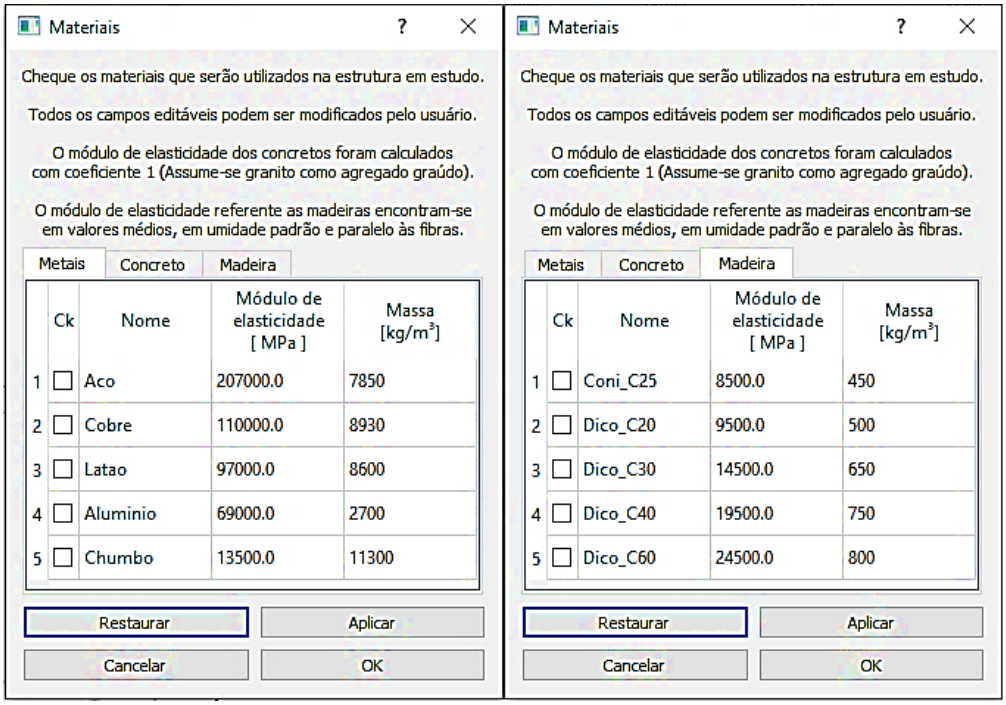
	$A = b * h$
	$A = \pi * r^2$
	$A \approx h * t_w + a * b$
	$A \approx 2 * \pi * r * t$
	$A \approx 2 * (b * t_f + h * t_w)$

A janela para informar as seções da estrutura estudada, apresenta valores pré-definidos para alguns modelos de seções conforme imagem, entretanto o software permite que mais de uma seção seja selecionada, alterada e/ou adicionada.



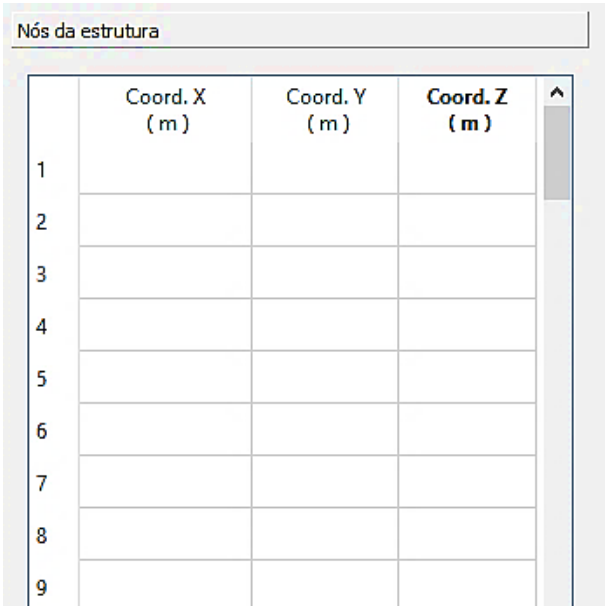
2.1.2. PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

O programa apresenta alguns materiais pré-definidos, mas o usuário pode modificar os campos editáveis, permitindo que mais de um material seja selecionado.

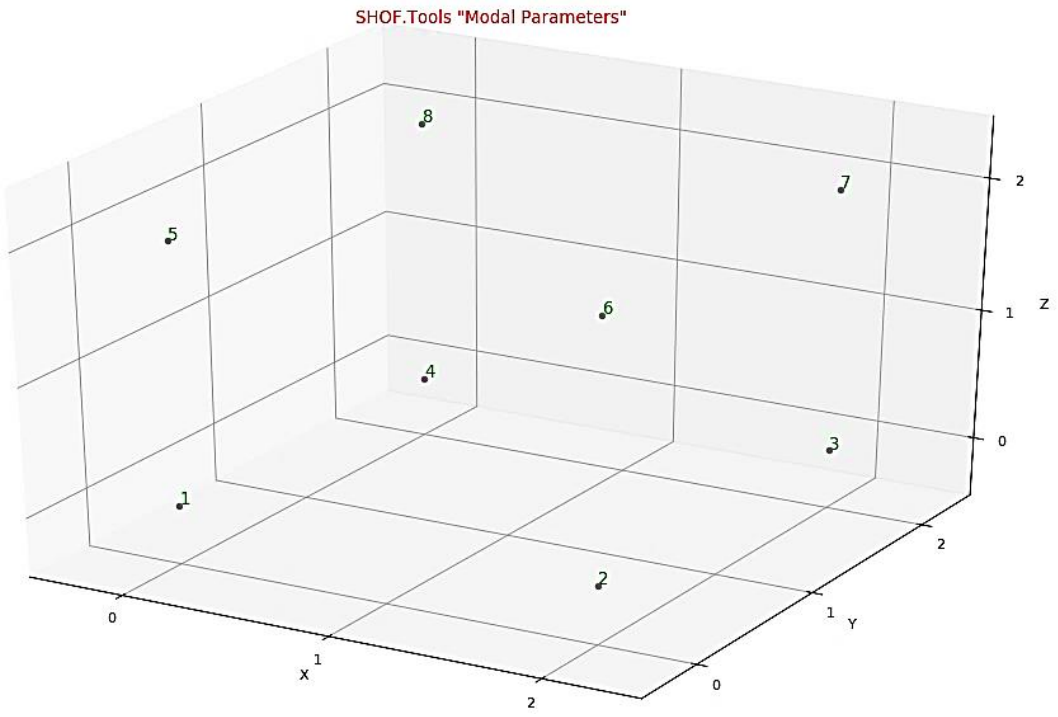


2.2 Nós da Estrutura

As coordenadas são inseridas em m (metros), separa-se os algarismos utilizando ponto, sempre orientando a estrutura por coordenadas globais.

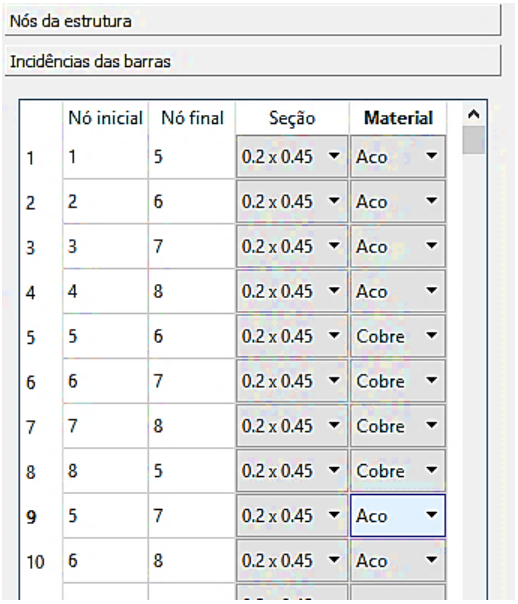


Ao listar as coordenadas, para visualizar o usuário poderá selecionar o botão plotar, e se orientar através das marcações dos nós.

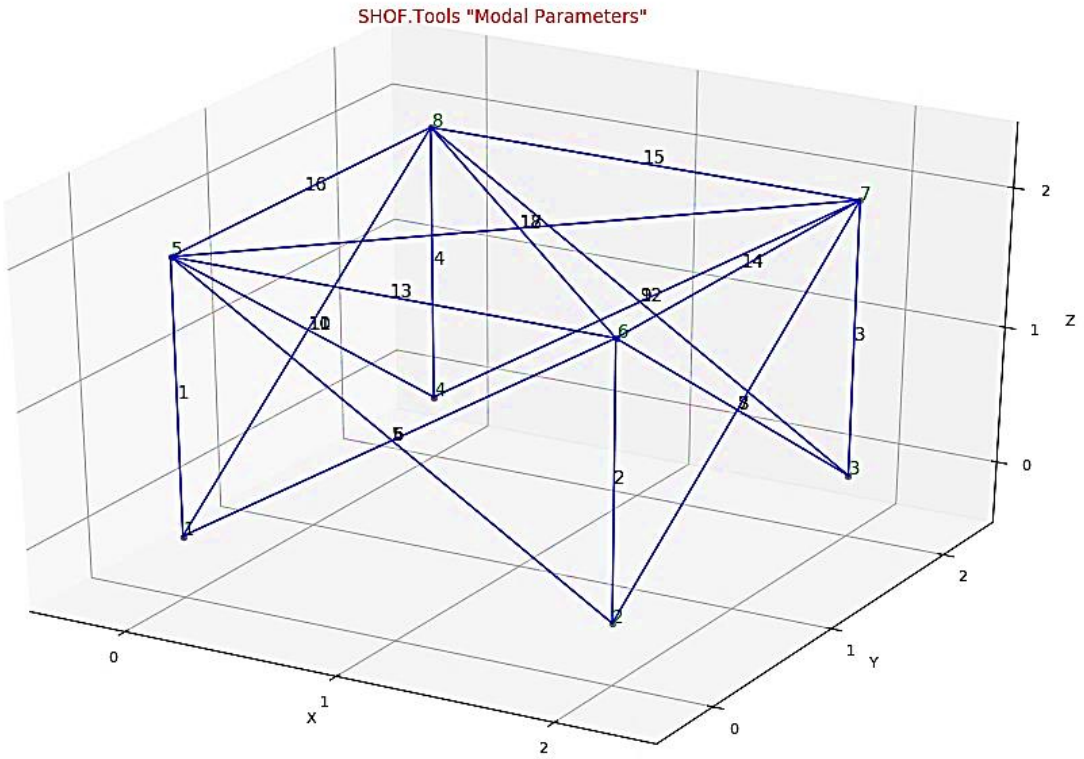


2.3 Incidência das barras

Neste campo serão informados o início e o fim das barras e suas respectivas propriedades que foram previamente selecionadas nas janelas especificas.

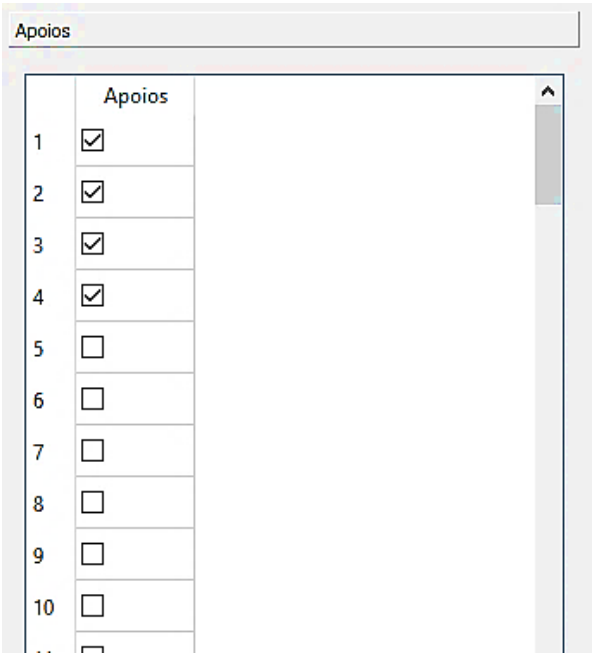


Ao listar as incidências das barras, para visualizar o usuário poderá selecionar o botão plotar e visualizar as barras.

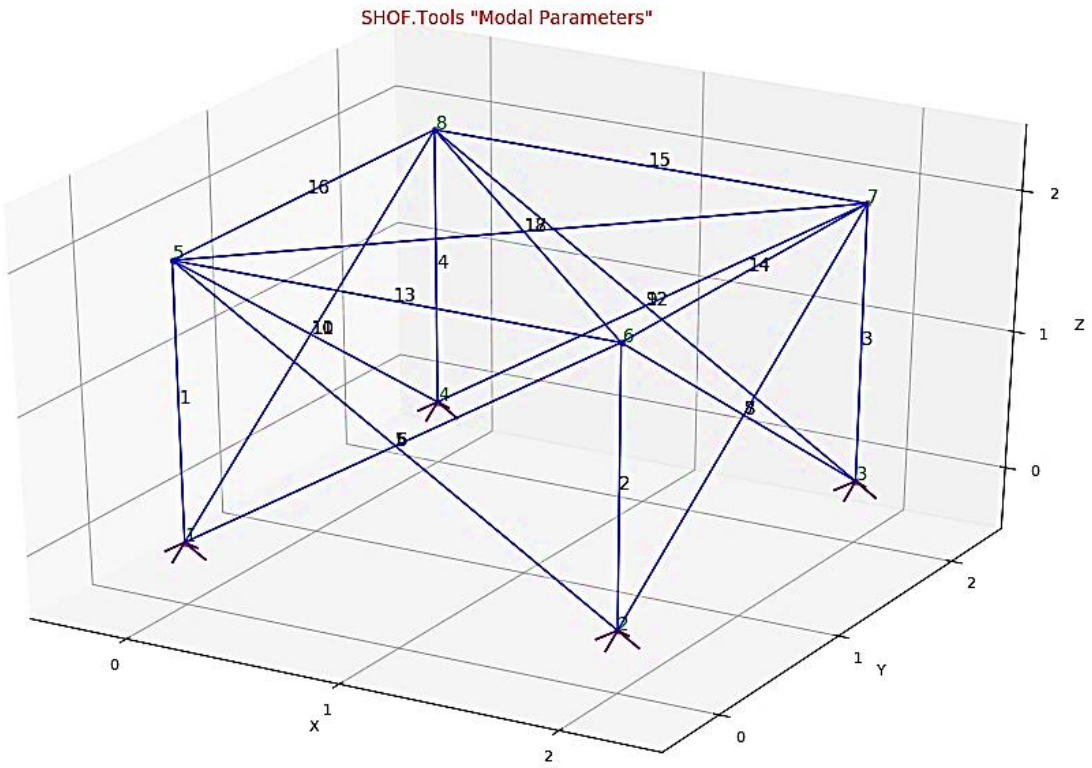


2.4 Apoios

Este campo se refere aos vínculos dos nós com meio exterior (apoios), onde ao selecionar um campo o programa irá considerar que o deslocamento está restringido.

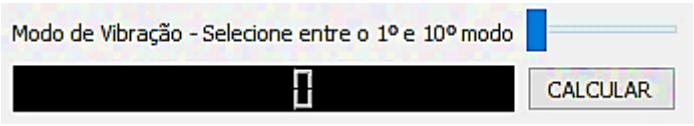


Depois de especificado as restrições dos nós, ao se clicar no botão plotar elas serão representadas nos respectivos nós com linhas roxas.

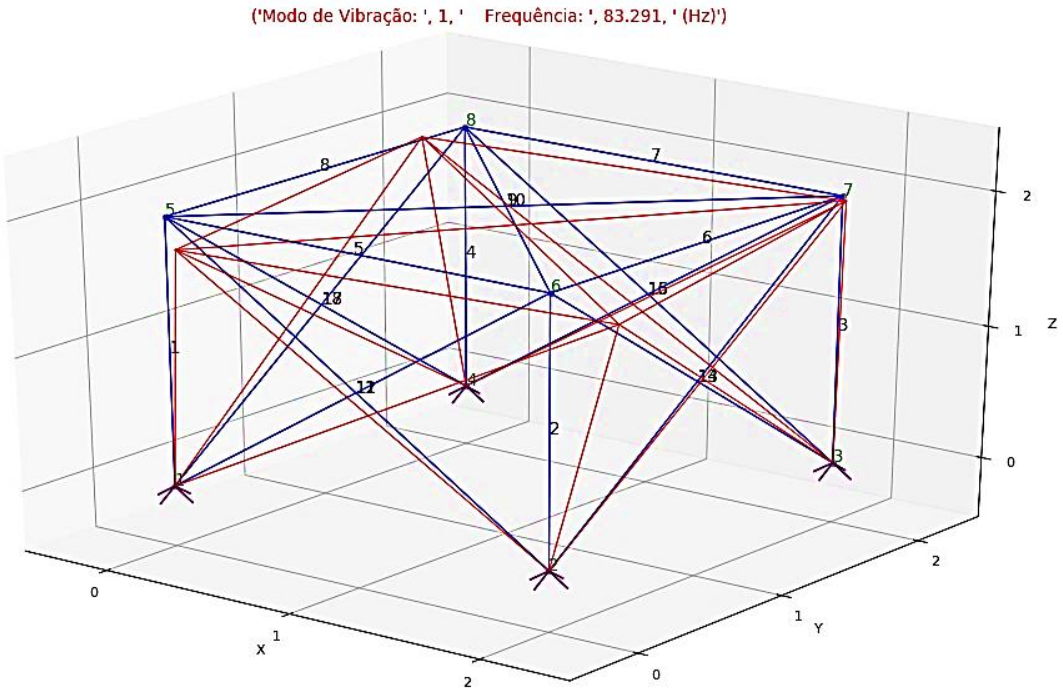


3 CALCULAR

Após finalizar a entrada de dados da estrutura ela poderá ser calculada, clicando primeiramente no slider que indicará qual o modo de vibração que será calculado, o programa está setado para inicialmente ter o valor 0 indicado e só irá calcular quando a indicação for maior que 0 após isso pode-se clicar no botão calcular. Ao clicar no botão, poderá ser visualizado as frequências e os modos de vibração da estrutura.

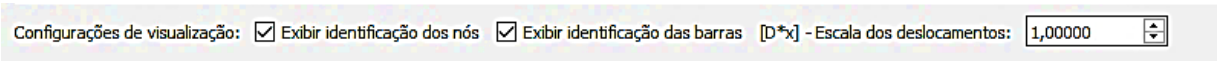


Os resultados são apresentados no sistema global conforme imagem abaixo.



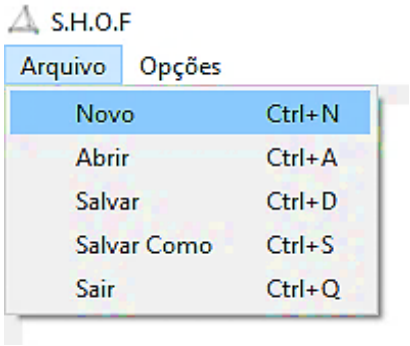
4 OPCIONAIS

Com a finalidade de aprimorar a experiência dos usuários foram inseridos botões de exibição, onde o usuário pode exibir ou ocultar o número dos nós e das barras e a escala no qual o modo será exibido, localizados na parte inferior esquerda do software.



5 ARQUIVO

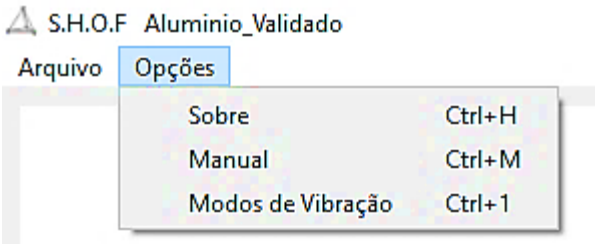
É possível salvar as estruturas modelas, clicando no botão salvar, salvar como ou ainda utilizando as teclas de atalho CTRL+D ou CTRL+S. Caso tenha estruturas salvas pode optar por abrir e carregar todas as características salvas anteriormente.



6 OPÇÕES

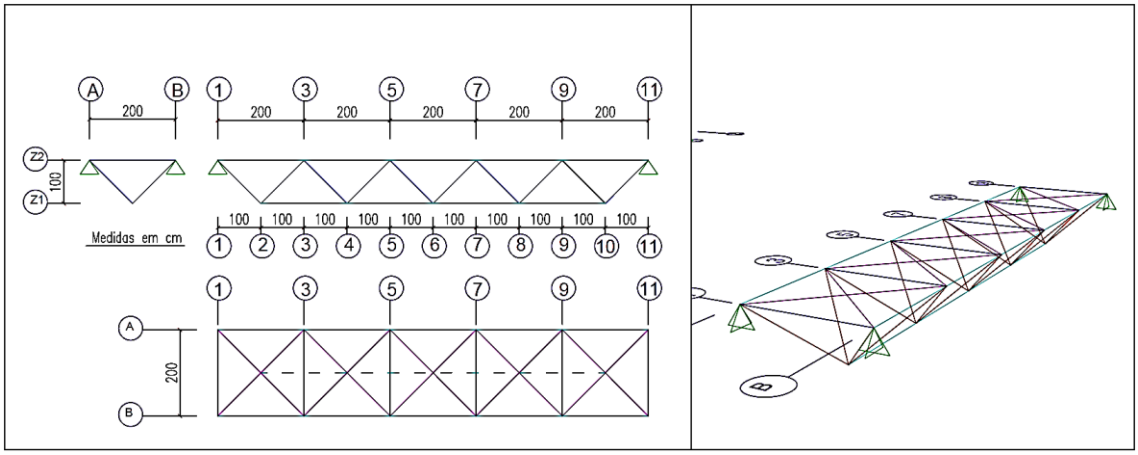
No menu Opções encontram-se os manuais e instruções para utilização do software e caso o usuário deseje ver quais os modos de vibração após o cálculo da estrutura, pode clicar no Modo de Vibração ou usar as teclas CTRL+1 onde abrirá um arquivo txt editável.

Para verificar as recomendações da norma o usuário pode pressionar CTRL + R que abrira um menu contendo os principais trechos da NBR 6118 , NBR 6123 e NBR 8800.



7 EXEMPLO RESOLVIDO

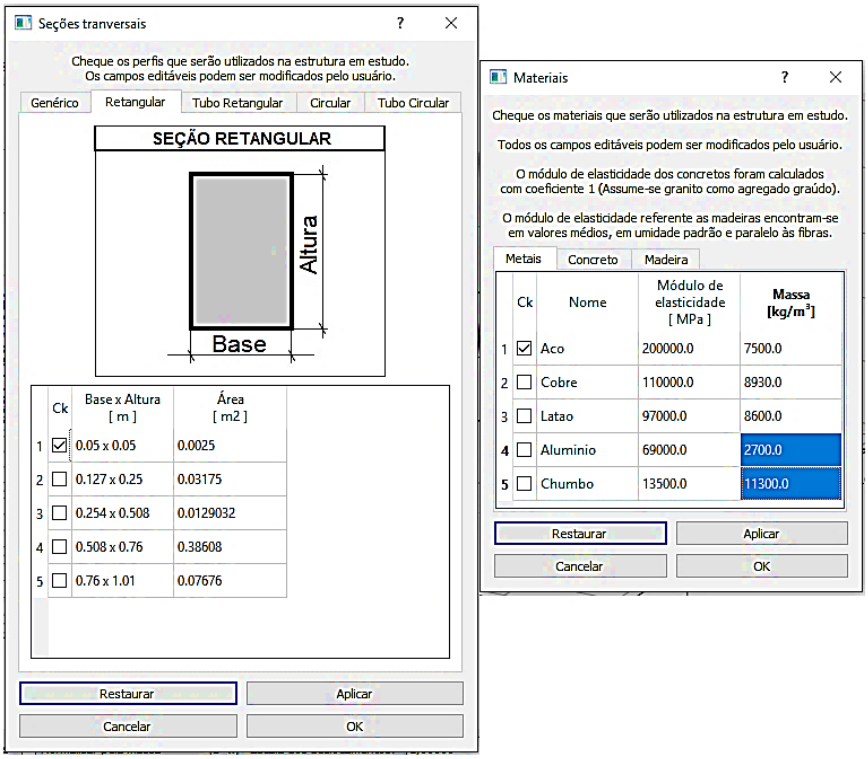
Como exemplificação, abaixo está uma estrutura treliçada, inserido os dados sequenciados.



Inicie o software selecionando as seções transversais e os materiais que serão utilizados, para este caso em específico utilizamos:

Seção Retangular 0,05 x 0,05 (m) = 0,0025m²

Aço: Módulo de Elasticidade = 200000 MPa e 7500 kgf/m³



A entrada dos nós será realizada manualmente, conforme as coordenadas e a incidência das barras, abaixo segue nós e barras da estrutura:

Nós:

	Cood. X (m)	Cood. Y (m)	Cood. Z (m)
1	0	0	1
2	0	2	1
3	0	4	1
4	0	6	1
5	0	8	1
6	0	10	1
7	2	0	1
8	2	2	1
9	2	4	1
10	2	6	1
11	2	8	1
12	2	10	1
13	1	1	0
14	1	3	0
15	1	5	0
16	1	7	0
17	1	9	0

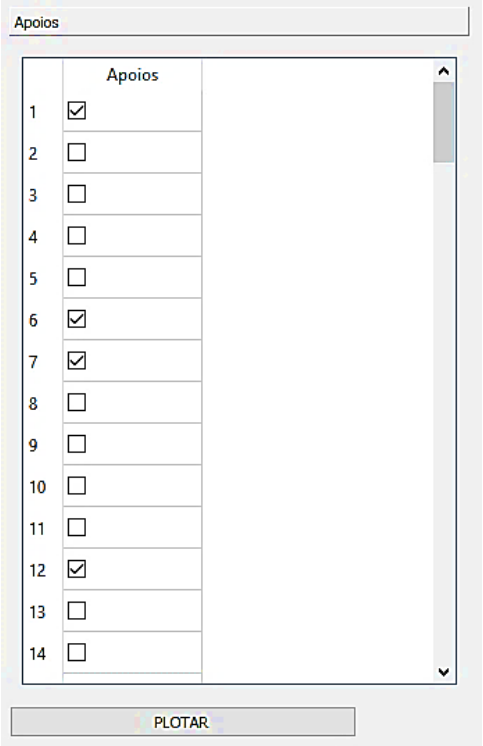
Incidência:

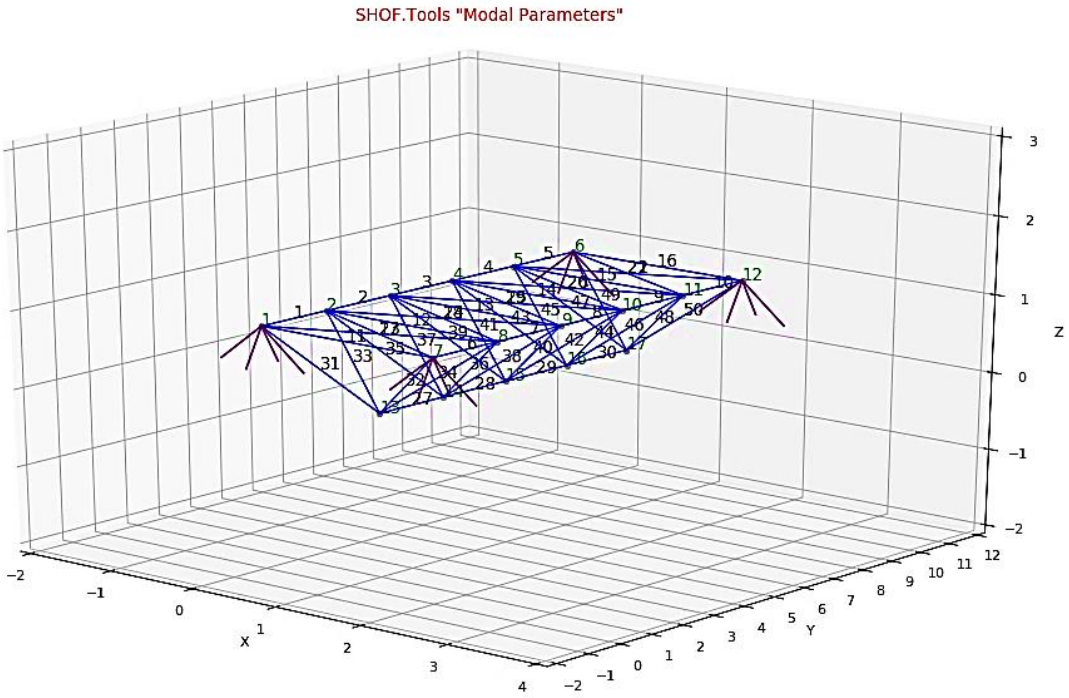
	Nó inicial	Nó Final	Seção	Material
1	1	2	0.05x0.05	Aco
2	2	3	0.05x0.05	Aco
3	3	4	0.05x0.05	Aco
4	4	5	0.05x0.05	Aco
5	5	6	0.05x0.05	Aco
6	7	8	0.05x0.05	Aco
7	8	9	0.05x0.05	Aco
8	9	10	0.05x0.05	Aco

	Nó inicial	Nó Final	Seção	Material
9	10	11	0.05x0.05	Aco
10	11	12	0.05x0.05	Aco
11	1	7	0.05x0.05	Aco
12	2	8	0.05x0.05	Aco
13	3	9	0.05x0.05	Aco
14	4	10	0.05x0.05	Aco
15	5	11	0.05x0.05	Aco
16	6	12	0.05x0.05	Aco
17	1	5	0.05x0.05	Aco
18	2	6	0.05x0.05	Aco
19	3	10	0.05x0.05	Aco
20	4	11	0.05x0.05	Aco
21	5	12	0.05x0.05	Aco
22	6	11	0.05x0.05	Aco
23	7	2	0.05x0.05	Aco
24	8	2	0.05x0.05	Aco
25	9	4	0.05x0.05	Aco
26	10	5	0.05x0.05	Aco
27	13	14	0.05x0.05	Aco
28	14	15	0.05x0.05	Aco
29	15	16	0.05x0.05	Aco
30	16	17	0.05x0.05	Aco
31	13	1	0.05x0.05	Aco
32	13	7	0.05x0.05	Aco
33	13	2	0.05x0.05	Aco
34	13	8	0.05x0.05	Aco
35	14	2	0.05x0.05	Aco
36	14	8	0.05x0.05	Aco
37	14	3	0.05x0.05	Aco
38	14	9	0.05x0.05	Aco
39	15	3	0.05x0.05	Aco

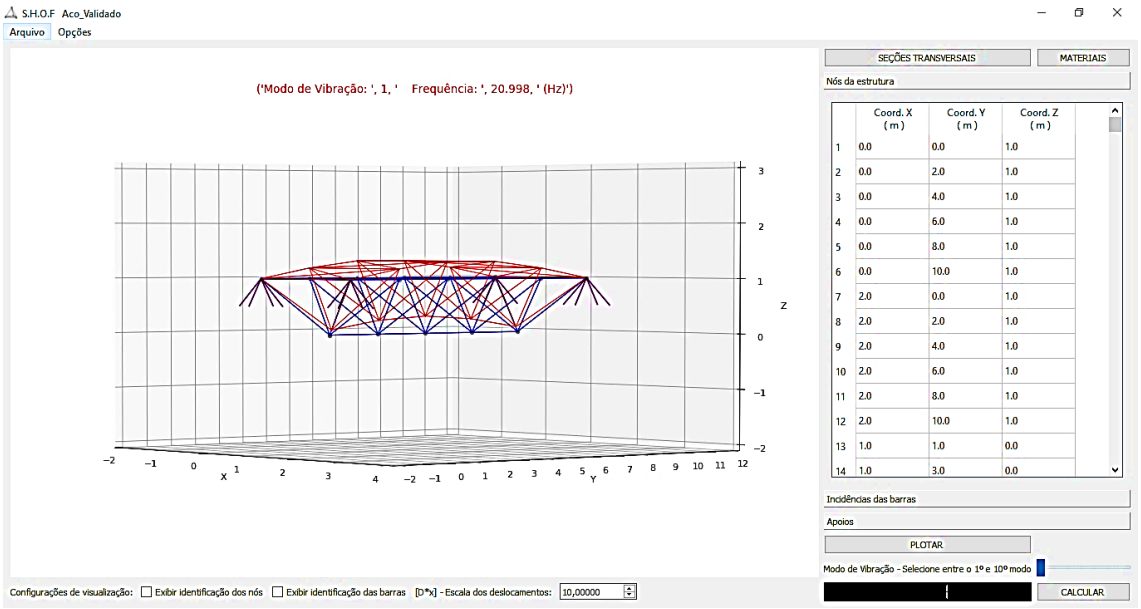
	Nó inicial	Nó Final	Seção	Material
40	15	9	0.05x0.05	Aco
41	15	4	0.05x0.05	Aco
42	15	10	0.05x0.05	Aco
43	16	4	0.05x0.05	Aco
44	16	10	0.05x0.05	Aco
45	16	5	0.05x0.05	Aco
46	16	11	0.05x0.05	Aco
47	17	5	0.05x0.05	Aco
48	17	11	0.05x0.05	Aco
49	17	6	0.05x0.05	Aco
50	17	12	0.05x0.05	Aco

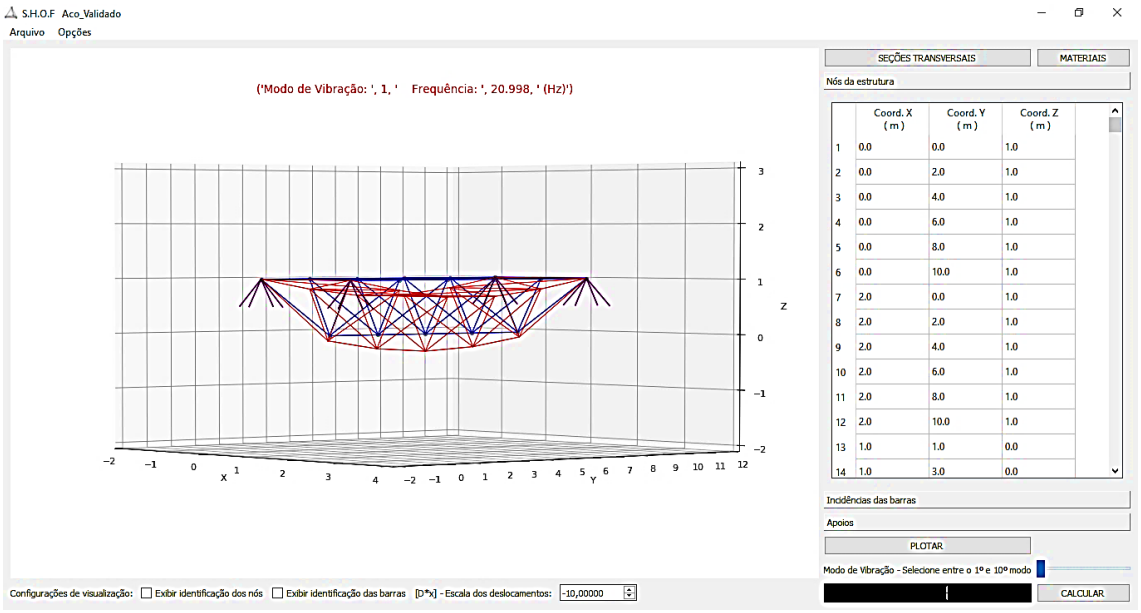
Insira os apoios nos nós 1, 6, 7 e 12, então clique em plotar

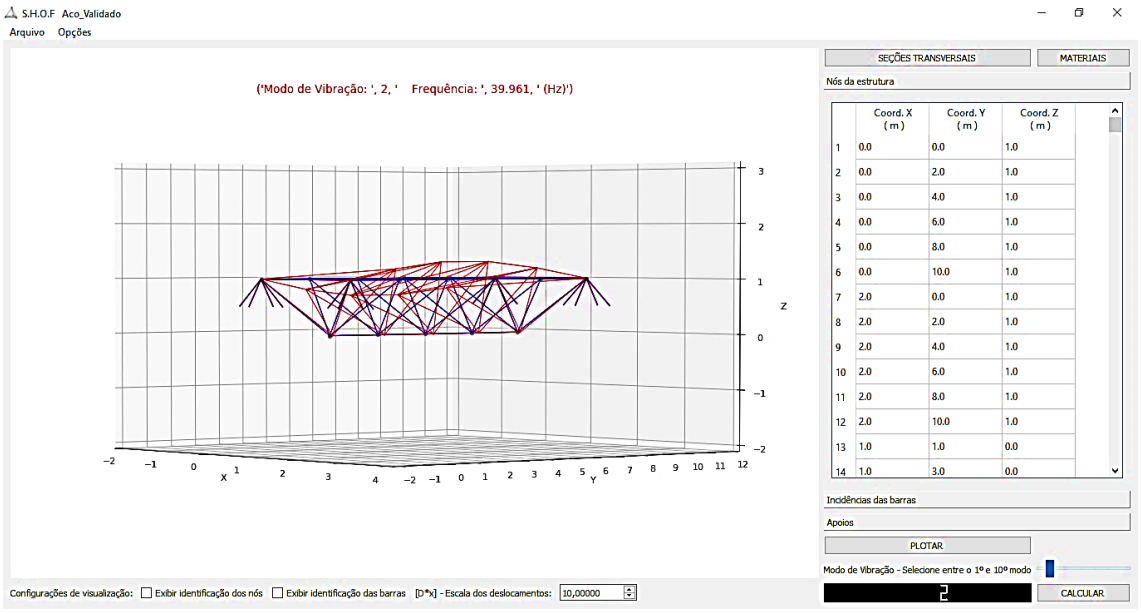


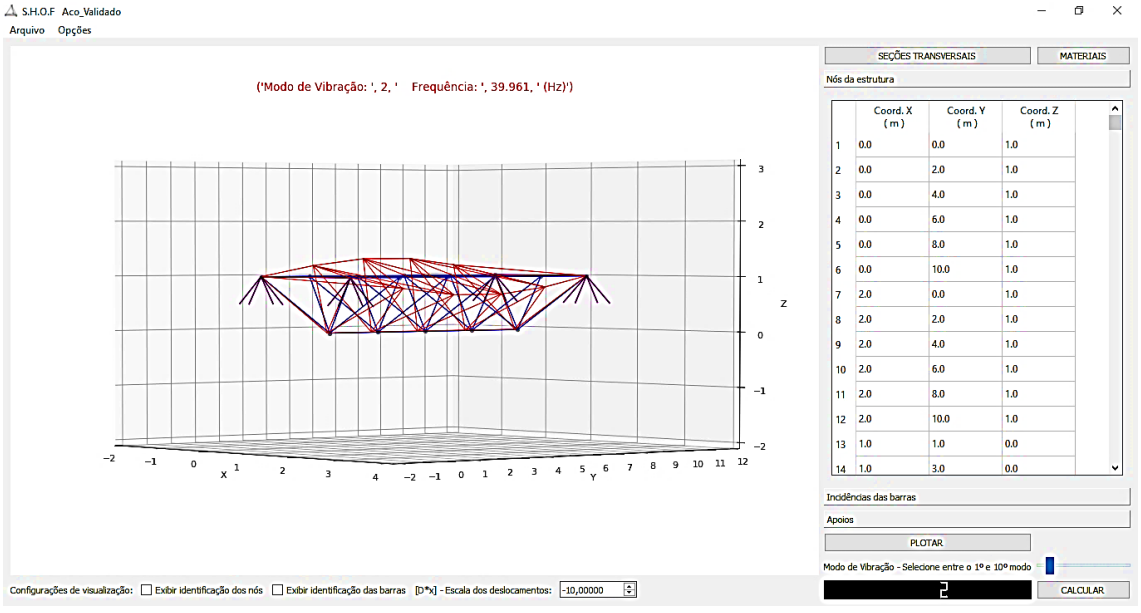


Para exibir as frequências e os modos de vibração clique no slider e altere a escala dos deslocamentos para 10, clique em calcular para exibir os valores novamente, caso a escala fique desproporcional pode-se alterar para melhor visualização.




S.H.O.F Aco_Validado
Arquivo Opções
('Modo de Vibração: ', 1, ' Frequência: ', 20.998, ' (Hz)')
SEÇÕES TRANSVERSAIS
MATERIAIS
Nós da estrutura
Coord. X (m)
Coord. Y (m)
Coord. Z (m)
1 0.0 0.0 1.0
2 0.0 2.0 1.0
3 0.0 4.0 1.0
4 0.0 6.0 1.0
5 0.0 8.0 1.0
6 0.0 10.0 1.0
7 2.0 0.0 1.0
8 2.0 2.0 1.0
9 2.0 4.0 1.0
10 2.0 6.0 1.0
11 2.0 8.0 1.0
12 2.0 10.0 1.0
13 1.0 1.0 0.0
14 1.0 3.0 0.0
Incidências das barras
Apoios
PLOTAR
Modo de Vibração - Selecione entre o 1º e 10º modo
1
CALCULAR
Configurações de visualização:
Exibir identificação dos nós
Exibir identificação das barras
[D*x] - Escala dos deslocamentos:
-10,00000


S.H.O.F Aco_Validado
Arquivo Opções
('Modo de Vibração: ', 2, ' Frequência: ', 39.961, ' (Hz)')
SEÇÕES TRANSVERSAIS
MATERIAIS
Nós da estrutura
Coord. X (m)
Coord. Y (m)
Coord. Z (m)
1 0.0 0.0 1.0
2 0.0 2.0 1.0
3 0.0 4.0 1.0
4 0.0 6.0 1.0
5 0.0 8.0 1.0
6 0.0 10.0 1.0
7 2.0 0.0 1.0
8 2.0 2.0 1.0
9 2.0 4.0 1.0
10 2.0 6.0 1.0
11 2.0 8.0 1.0
12 2.0 10.0 1.0
13 1.0 1.0 0.0
14 1.0 3.0 0.0
Incidências das barras
Apoios
PLOTAR
Modo de Vibração - Selecione entre o 1º e 10º modo
2
CALCULAR
Configurações de visualização:
Exibir identificação dos nós
Exibir identificação das barras
[D*x] - Escala dos deslocamentos:
10,00000


S.H.O.F Aco_Validado
Arquivo Opções
('Modo de Vibração: ', 2, ' Frequência: ', 39.961, ' (Hz)')
SEÇÕES TRANSVERSAIS
MATERIAIS
Nós da estrutura
Coord. X (m)
Coord. Y (m)
Coord. Z (m)
1 0.0 0.0 1.0
2 0.0 2.0 1.0
3 0.0 4.0 1.0
4 0.0 6.0 1.0
5 0.0 8.0 1.0
6 0.0 10.0 1.0
7 2.0 0.0 1.0
8 2.0 2.0 1.0
9 2.0 4.0 1.0
10 2.0 6.0 1.0
11 2.0 8.0 1.0
12 2.0 10.0 1.0
13 1.0 1.0 0.0
14 1.0 3.0 0.0
Incidências das barras
Apoios
PLOTAR
Modo de Vibração - Selecione entre o 1º e 10º modo
2
CALCULAR
Configurações de visualização:
Exibir identificação dos nós
Exibir identificação das barras
[D*x] - Escala dos deslocamentos:
-10,00000

10 ANEXO C

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Oct 21 14:35:37 2019

@author: Os Autores
"""

import numpy as np
from scipy.linalg import eigh

class CalcSHOF(object):

    def __init__(self):

        # Geometria
        self.nos = []
        self.barras = []
        self.restri = []
        self.prop1 = [] # módulo de elasticidade e peso específico
        self.prop2 = [] #área da seção
        self.nos2 = []

        # Propriedades do material
        self.mat_el = []
        self.mater  = []

        # Propriedades da seção transversal
        self.sec_el = []
        self.secao  = []



        self.g_sec      = []
        self.sec_el     = []
        self.mater      = []
        self.mat_el     = []
```

```
def quantidades(self):

    self.lista_tam       = [] # Lista do comprimento das barras
    self.lista_Incid     = []
    self.lista_n         = []
    self.lista_qy        = []
    self.lista_qz        = []
    self.lista_mx        = []
    self.lista_R         = []
    self.lista_R1        = []
    self.lista_T         = [] # Lista das matrizes de rotação
    self.lista_Cx        = [] # Cosseno diretor X
    self.lista_Cy        = [] # Cosseno diretor Y
    self.lista_Cz        = [] # Cosseno diretor Z
    self.Matrix_Mind     = [] # Matriz de Massa
    self.Matrix_Rind     = [] # Matriz de Rigidez
    self.Matrix_Massa    = [] # Matriz de Massa
    self.Matrix_Rigidez  = [] # Matriz de Rigidez

    self.restri = np.array(self.restri).flatten() # Restrições
    self.totngl = 3 * len(self.nos) # Quantidade de graus de liberdade
    self.numgl = np.zeros(self.totngl) # Graus de liberdade
    self.KG = np.zeros((self.totngl,self.totngl)) # Matriz de rigidez global
    self.MG = np.zeros((self.totngl,self.totngl)) # Matriz de massa global
    self.numb = len(self.barras) # Número de barras
    self.nummat = len(self.mater) # Número de materiais
    self.numsec = len(self.secao) # Número de seções
    self.numn = len(self.nos) # Número de nós
    self.nglliv = 0
    self.vet_desloc = []

    # Ordena os graus de liberdade livres
    cont = 0
    a = 0
    cont1 = 0
    for i in self.restri:
        if i == 0:
            self.numgl[cont*3] = (a*3)
            self.numgl[cont*3+1] = (a*3)+1
```

```
                self.numgl[cont*3+2] = (a*3)+2
                a += 1
                cont1 += 1
                self.vet_desloc.append(cont)
            cont += 1
        self.Limitador = cont1*3

        # Ordena os graus de liberdade restringidos
        cont = 0
        for i in self.restri:
            if i == 1:
                self.numgl[cont*3] = (a*3)
                self.numgl[cont*3+1] = (a*3)+1
                self.numgl[cont*3+2] = (a*3)+2
                a += 1
            cont += 1

        for i in range(len(self.barras)):
            b = self.barras[i]
            [L, Cx, Cy, Cz] = self.geometria_das_barras(self.nos[b[0]][0], self.nos[b[0]][1],
self.nos[b[0]][2], self.nos[b[1]][0], self.nos[b[1]][1], self.nos[b[1]][2])
            self.lista_tam.append(L)
            self.lista_Cx.append(Cx)
            self.lista_Cy.append(Cy)
            self.lista_Cz.append(Cz)
            T = self.matriz_de_rotacao(Cx, Cy, Cz)
            self.lista_T.append(T)

            # vetores de incidencia
            vetIncid = self.numgl[ b[0] ] + self.numgl[ b[1] ]
            self.lista_Incid.append(vetIncid)

    def geometria_das_barras(self, nx, ny, nz, fx, fy, fz):
        _L = np.sqrt( (fx-nx) ** 2 + (fy-ny) ** 2 + (fz - nz) ** 2 )
        _lbx = (fx - nx)/_L
        _lby = (fy - ny)/_L
        _lbz = (fz - nz)/_L
        return [ _L, _lbx, _lby, _lbz]

    def matriz_de_rotacao(self, Cx, Cy, Cz):
```

```
    Cxy = np.sqrt(Cx**2 + Cy**2)

    if Cxy == 0:
        R1 = np.round(np.matrix([
            [      0,      0,       Cz ],
            [      0,      1,        0 ],
            [    -Cz,      0,        0 ]
            ]),20)
    else:
        R1 = np.round(np.matrix([
            [       Cx,        Cy,     Cz ],
            [  -Cy/Cxy,    Cx/Cxy,      0 ],
            [-Cx*Cz/Cxy, -Cy*Cz/Cxy,    Cxy]
            ]),20)

    self.lista_R1.append(R1)

    R =  np.zeros((6,6))
    R[ 0: 3, 0: 3] = R1
    R[ 3: 6, 3: 6] = R1

    self.lista_R.append(R)

    return R

def matriz_de_rigidez(self, EA, L):

        Kele = np.matrix([
                    [  EA / L,          0.,          0.,   -EA/L,          0.,          0.],
                    [       0,          0.,          0.,      0.,          0.,          0.],
                    [       0,          0.,          0.,      0.,          0.,          0.],
                    [ -EA / L,          0.,          0.,    EA/L,          0.,          0.],
                    [       0,          0.,          0.,      0.,          0.,          0.],
                    [       0,          0.,          0.,      0.,          0.,          0.]
                    ])

        return Kele

def matriz_de_massa(self, PA, L):
```

```
#MASSA DISTRIBUIDA      (CONSISTENTE)  -- utilizar quando se tem pórtico
#          Mele = (PA * L / 6) *  np.matrix(  [
#                                  [       2,          0.,         0.,     1.,         0.,         0.],
#                                  [       0,          2.,         0.,     0.,         1.,         0.],
#                                  [       0,          0.,         2.,     0.,         0.,         1.],
#                                  [       1,          0.,         0.,     2.,         0.,         0.],
#                                  [       0,          1.,         0.,     0.,         2.,         0.],
#                                  [       0,          0.,         1.,     0.,         0.,         2.]
#                                  ])

#MASSA CONCENTRADA
          Mele = PA * L / 2 *  np.matrix(  [
                                  [       1,          0.,         0.,     0.,         0.,         0.],
                                  [       0,          1.,         0.,     0.,         0.,         0.],
                                  [       0,          0.,         1.,     0.,         0.,         0.],
                                  [       0,          0.,         0.,     1.,         0.,         0.],
                                  [       0,          0.,         0.,     0.,         1.,         0.],
                                  [       0,          0.,         0.,     0.,         0.,         1.]
                                  ])

          return Mele

# ------------------------------- SECOES ------------------------------- #
    def Secao(self,nome):
        for i in range(len(self.g_sec)):

            if self.g_sec[i][1] == nome:

                A = self.g_sec[i][2]
                return A

# ------------------------------- MATERIAIS ------------------------------- #
    def Material1(self,nome ):

        for i in range (len(self.mater)):
            if self.mater[i][0] == nome:
                E = self.mater[i][1]
                return E

    def Material2(self,nome ):
```

```
        for i in range(len(self.mater)):
            if self.mater[i][0] == nome:
                P = self.mater[i][2]
                return P
# ------------------------------- MODOS DE VIBRAÇÃO ------------------------------- #
    def mod_vib(self, mod_vib1, escala,modelo):

            self.lista_De_loc    = []
            self.lista_Fe_loc    = []
            self.lista_PA        = [] # Massa Linear
            self.lista_EA        = [] # Rigidez axial
            self.lista_kele      = [] # Lista das matrizes de rigidez elementares
            self.lista_ni        = []
            self.lista_lb        = []
            self.lista_gm        = []
            self.lista_floc      = []
            self.lista_fglo      = []
            self.lista_kele      = [] # Lista das matrizes de rigidez elementares
            self.lista_mele      = [] # Lista das matrizes de massas
            self.lista_kele_lib  = [] # Matrizes de rigidez com liberações nodais
            self.lista_kele_rot  = [] # Matrizes de rigidez rotacionadas
            self.lista_mele      = [] # Lista das matrizes de massas
            self.lista_mele_lib  = [] #
            self.lista_mele_rot  = [] #
            self.lista_cy        = []
            self.lista_cz        = []
            i = 0

            for b in self.barras:
                L = self.lista_tam[i]
                nome1 = self.prop1[i][0]
                Area = self.Secao(nome1)
                A1 = Area
                nome2 = self.prop1[i][1]
                E1 = self.Material1(nome2)
                P1 = self.Material2(nome2)
                EA  = E1 * A1 * 1 * 9.80665
                self.lista_EA.append(EA)
                PA  = A1 * P1
```

```
            self.lista_PA.append(PA)
            kele = self.matriz_de_rigidez( EA, L )
            self.lista_kele.append(kele)
            mele = self.matriz_de_massa( PA, L )
            self.lista_mele.append(mele)

            # Matriz de rotação / Rotação das matrizes
            T = self.lista_T[i]
            kele_rot = np.array(T.T * kele * T)
            #mele_rot = np.array(T.T * mele * T)
            mele_rot = np.array(mele)

            self.lista_kele_rot.append(kele_rot) # Lista das matrizes de rigidez
            self.lista_mele_rot.append(mele_rot) # Lista das massa rotacionadas

            # Espalhamento da matriz de rigidez local (kele_rot) na global (KG)
            lim_inf = b[0]
            lim_sup = b[1]
            pos = self.numgl
            self.vet_incid                                                                    =
[int(pos[lim_inf*3]),int(pos[lim_inf*3+1]),int(pos[lim_inf*3+2]),int(pos[lim_sup*3]),int(pos[lim_sup*
3+1]),int(pos[lim_sup*3+2])]
            var_lin = np.array(self.vet_incid*6).reshape(6,6)
            lin = (var_lin)
            col = (lin.T)
            self.KG[ lin, col ] += kele_rot
            self.MG[ lin, col ] += mele_rot
            i += 1
        N = self.Limitador
        KG = self.KG
        K11 = np.array(KG[0:N,0:N])
        MA = self.MG
        M11 = np.array(MA[0:N,0:N])

        self.autovalor, mod_vib = eigh(K11,M11)
        self.vibra = mod_vib.T
        self.totngl = 3 * len(self.nos)
        self.Limitador2 = self.totngl - self.Limitador
        self.pontos_ = np.zeros((len(self.nos),3))
        self.nos2 = []
```

```
        i = 0
        cont = 0
        cont2 = 0
        passo1 = np.array(self.autovalor)
        passo2 = np.sqrt(passo1)
        passo3 = passo2 * np.pi / 2
        self.vector =  passo3[mod_vib1]
        self.vib_01 = self.vibra[mod_vib1]
        print(passo3)

        self.aut = self.autovalor[mod_vib1]

        #NORMALIZAÇÃO DO MODO DE VIBRAÇÃO PELA MASSA


#         if modelo[0] == 1:
#             vib_00 = []
#             vib_10 = []
#             modv = mod_vib
#             for i in range (N):
#                 vib_01 =  modv[i]/modv[i][0]
#                 vib_00.append(vib_01)
#             vib_02 = np.matrix(vib_00)
#             vib_03 = vib_02.T
#             vib_04 = vib_03*M11*vib_02
#             vib_05 = np.array(vib_04.diagonal())
#             vib_06 = np.array(vib_03)
#             vib_07 = 1/vib_05
#             vib_08 = np.sqrt(vib_07)
#             for i in range (N):
#                 vib_09 = vib_06[i] * vib_08
#                 vib_10.append(vib_09)
#             vib_13 = []
#             for i in range (N):
#                 vib_12 = []
#                 for j in range (N):
#                     vib_11 = vib_10[i][0][j]
#                     vib_12.append(vib_11)
#                 vib_13.append(vib_12)
#             vib_15 = np.array(vib_13)
```

```
#             vib_14 = vib_15.T
#         else:
#             vib_14 = self.vibra



        #METODO DE JACOBI

#         U = np.eye(A.shape[0])
#         limite = 1
#         criterio = 1e-15
#         self.maxv, self.pi, self.pj = self.maxval(A)
#
#         while limite > criterio:
#
#             if A[self.pi,self.pi] == A[self.pj,self.pj]:
#                 alfa = np.pi/4
#             else:
#                alfa = abs(0.5 * np.arctan( float(2*A[self.pi,self.pj]/(A[self.pj,self.pj]-A[self.pi,self.pi]))
))
#
#             V = np.eye(A.shape[0])
#             V[self.pi,self.pi] = np.cos(alfa)
#             V[self.pj,self.pj] = np.cos(alfa)
#             V[self.pi,self.pj] = -np.sin(alfa)
#             V[self.pj,self.pi] = np.sin(alfa)
#
#             U = np.dot( U, V )
#             A = np.dot( np.dot( V.T, A ) , V )
#
#             # nova varredura para descobrir quem e é o maior aij:
#             self.maxv, self.pi, self.pj = self.maxval(A)
#
#             if self.maxv < criterio:
#                 limite = self.maxv
#
#
##         print("Autovalor = ")
##         print(self.autovalor)
##         print("Modo de Vib = ")
```

```
##          print(mod_vib[0])
##          print("V  = ")
##          print(V)
##          print("A = ")
##          print(sorted(A.diagonal()))
##          print("U = ")
##          print(U)



        vib_14 = self.vibra

        self.vib_02 = vib_14[mod_vib1]
#         np.savetxt('Modos de Vibração.txt', self.vibra, newline='\n')
        np.savetxt('Modos de Vibração.txt', self.vib_02, newline='\n')
        i = 0
        for b in self.nos:
            self.variar = []
            tester_limit = len(self.vet_desloc)
            if cont2 >= tester_limit:
                    d1 = b[0]
                    d2 = b[1]
                    d3 = b[2]
                    self.variar.append(d1)
                    self.variar.append(d2)
                    self.variar.append(d3)
                    self.nos2.append(self.variar)
            if cont2 < tester_limit:
                tester = self.vet_desloc[cont2]
                if cont == tester:
                    d1 = self.vib_02[i*3] * escala + b[0]
                    d2 = self.vib_02[i*3+1] * escala + b[1]
                    d3 = self.vib_02[i*3+2] * escala + b[2]
                    i += 1
                    cont2 += 1
                    self.variar.append(d1)
                    self.variar.append(d2)
                    self.variar.append(d3)
                    self.nos2.append(self.variar)
                else:
```

```
        d1 = b[0]
        d2 = b[1]
        d3 = b[2]
        self.variar.append(d1)
        self.variar.append(d2)
        self.variar.append(d3)
        self.nos2.append(self.variar)

cont += 1
```

11 ANEXO D

RESULTADO COMPARATIVO DOS MODOS DE VIBRAÇÃO

Conforme citado no capítulo 5.1, realizou-se a validação dos 10 primeiros modos de vibração, os quais serão apresentados a seguir:

- **TORRE TRELIÇADA**

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
1	5	-2,35E-03	-2,35E-03	-1,46E-03	-7,42E-02	-7,42E-02	-4,61E-02	3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
1	6	-2,37E-03	-2,37E-03	5,83E-17	-7,49E-02	-7,49E-02	-7,66E-11		0,00%	0,00%	0,00%
1	7	-2,35E-03	-2,35E-03	1,46E-03	-7,42E-02	-7,42E-02	4,61E-02		0,00%	0,00%	0,00%
1	8	-2,37E-03	-2,37E-03	-5,87E-17	-7,49E-02	-7,49E-02	-6,55E-11		0,00%	0,00%	0,00%
1	9	-4,56E-03	-4,56E-03	-1,76E-03	-1,44E-01	-1,44E-01	-5,57E-02		0,00%	0,00%	0,00%
1	10	-4,52E-03	-4,52E-03	1,25E-16	-1,43E-01	-1,43E-01	5,16E-12		0,00%	0,00%	0,00%
1	11	-4,56E-03	-4,56E-03	1,76E-03	-1,44E-01	-1,44E-01	5,57E-02		0,00%	0,00%	0,00%
1	12	-4,52E-03	-4,52E-03	-1,13E-16	-1,43E-01	-1,43E-01	1,09E-12		0,00%	0,00%	0,00%
1	13	-6,93E-03	-6,93E-03	-2,05E-03	-2,19E-01	-2,19E-01	-6,47E-02		0,00%	0,00%	0,00%
1	14	-6,98E-03	-6,98E-03	1,29E-16	-2,21E-01	-2,21E-01	2,85E-11		0,00%	0,00%	0,00%
1	15	-6,93E-03	-6,93E-03	2,05E-03	-2,19E-01	-2,19E-01	6,47E-02		0,00%	0,00%	0,00%
1	16	-6,98E-03	-6,98E-03	-1,22E-16	-2,21E-01	-2,21E-01	3,70E-11		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 5 - 1º Modo de Vibração da torre treliçada
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
2	5	1,11E-03	-1,11E-03	-6,41E-17	3,52E-02	-3,52E-02	2,75E-11	3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
2	6	1,13E-03	-1,13E-03	-1,18E-03	3,56E-02	-3,56E-02	-3,73E-02		0,00%	0,00%	0,00%
2	7	1,11E-03	-1,11E-03	7,82E-17	3,52E-02	-3,52E-02	1,45E-10		0,00%	0,00%	0,00%
2	8	1,13E-03	-1,13E-03	1,18E-03	3,56E-02	-3,56E-02	3,73E-02		0,00%	0,00%	0,00%
2	9	4,51E-03	-4,51E-03	-7,64E-17	1,43E-01	-1,43E-01	3,44E-10		0,00%	0,00%	0,00%
2	10	4,45E-03	-4,45E-03	-2,34E-03	1,41E-01	-1,41E-01	-7,41E-02		0,00%	0,00%	0,00%
2	11	4,51E-03	-4,51E-03	9,24E-17	1,43E-01	-1,43E-01	-5,28E-11		0,00%	0,00%	0,00%
2	12	4,45E-03	-4,45E-03	2,34E-03	1,41E-01	-1,41E-01	7,41E-02		0,00%	0,00%	0,00%
2	13	7,34E-03	-7,34E-03	-8,71E-17	2,32E-01	-2,32E-01	-2,58E-10		0,00%	0,00%	0,00%
2	14	7,41E-03	-7,41E-03	-2,37E-03	2,34E-01	-2,34E-01	-7,49E-02		0,00%	0,00%	0,00%
2	15	7,34E-03	-7,34E-03	1,04E-16	2,32E-01	-2,32E-01	-5,40E-11		0,00%	0,00%	0,00%
2	16	7,41E-03	-7,41E-03	2,37E-03	2,34E-01	-2,34E-01	7,49E-02		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 6 - 2º Modo de Vibração da torre treliçada

Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
3	5	2,90E-03	-2,90E-03	1,42E-17	-9,17E-02	9,17E-02	1,72E-09	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
3	6	2,98E-03	2,98E-03	4,48E-18	-9,43E-02	-9,43E-02	-8,66E-09		0,00%	0,00%	0,00%
3	7	-2,90E-03	2,90E-03	-2,37E-17	9,17E-02	-9,17E-02	3,04E-09		0,00%	0,00%	0,00%
3	8	-2,98E-03	-2,98E-03	-2,40E-18	9,43E-02	9,43E-02	-9,09E-09		0,00%	0,00%	0,00%
3	9	5,26E-03	-5,26E-03	2,17E-17	-1,66E-01	1,66E-01	-7,92E-10		0,00%	0,00%	0,00%
3	10	5,12E-03	5,12E-03	3,95E-18	-1,62E-01	-1,62E-01	6,22E-10		0,00%	0,00%	0,00%
3	11	-5,26E-03	5,26E-03	-4,27E-17	1,66E-01	-1,66E-01	-2,98E-09		0,00%	0,00%	0,00%
3	12	-5,12E-03	-5,12E-03	-7,04E-18	1,62E-01	1,62E-01	-1,79E-09		0,00%	0,00%	0,00%
3	13	6,14E-03	-6,14E-03	2,82E-17	-1,94E-01	1,94E-01	-6,44E-10		0,00%	0,00%	0,00%
3	14	6,28E-03	6,28E-03	4,97E-18	-1,99E-01	-1,99E-01	2,51E-09		0,00%	0,00%	0,00%
3	15	-6,14E-03	6,14E-03	-5,80E-17	1,94E-01	-1,94E-01	8,83E-10		0,00%	0,00%	0,00%
3	16	-6,28E-03	-6,28E-03	-5,59E-18	1,99E-01	1,99E-01	6,20E-09		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 7 - 3º Modo de Vibração da torre treliçada
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
4	5	-3,69E-03	-3,69E-03	9,76E-05	-1,17E-01	-1,17E-01	3,09E-03	3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
4	6	-4,08E-03	-4,08E-03	-1,17E-16	-1,29E-01	-1,29E-01	6,18E-08		0,00%	0,00%	0,00%
4	7	-3,69E-03	-3,69E-03	-9,76E-05	-1,17E-01	-1,17E-01	-3,09E-03		0,00%	0,00%	0,00%
4	8	-4,08E-03	-4,08E-03	1,03E-16	-1,29E-01	-1,29E-01	5,89E-08		0,00%	0,00%	0,00%
4	9	-4,68E-03	-4,68E-03	3,31E-03	-1,48E-01	-1,48E-01	1,05E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	10	-4,23E-03	-4,23E-03	-2,16E-16	-1,34E-01	-1,34E-01	-3,32E-08		0,00%	0,00%	0,00%
4	11	-4,68E-03	-4,68E-03	-3,31E-03	-1,48E-01	-1,48E-01	-1,05E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	12	-4,23E-03	-4,23E-03	1,95E-16	-1,34E-01	-1,34E-01	2,22E-08		0,00%	0,00%	0,00%
4	13	4,93E-03	4,93E-03	6,20E-03	1,56E-01	1,56E-01	1,96E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	14	5,35E-03	5,35E-03	-2,30E-16	1,69E-01	1,69E-01	2,44E-09		0,00%	0,00%	0,00%
4	15	4,93E-03	4,93E-03	-6,20E-03	1,56E-01	1,56E-01	-1,96E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	16	5,35E-03	5,35E-03	2,16E-16	1,69E-01	1,69E-01	-6,61E-08		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 8 - 4º Modo de Vibração da torre treliçada
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
5	5	-6,04E-03	6,04E-03	9,23E-18	1,91E-01	-1,91E-01	1,05E-08	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
5	6	-6,70E-03	6,70E-03	-2,07E-03	2,12E-01	-2,12E-01	6,53E-02		0,00%	0,00%	0,00%
5	7	-6,04E-03	6,04E-03	1,74E-17	1,91E-01	-1,91E-01	7,75E-10		0,00%	0,00%	0,00%
5	8	-6,70E-03	6,70E-03	2,07E-03	2,12E-01	-2,12E-01	-6,53E-02		0,00%	0,00%	0,00%
5	9	-3,16E-03	3,16E-03	-1,64E-16	9,98E-02	-9,98E-02	-4,73E-09		0,00%	0,00%	0,00%
5	10	-2,84E-03	2,84E-03	-3,93E-03	9,00E-02	-9,00E-02	1,24E-01		0,00%	0,00%	0,00%
5	11	-3,16E-03	3,16E-03	1,94E-16	9,98E-02	-9,98E-02	5,67E-09		0,00%	0,00%	0,00%
5	12	-2,84E-03	2,84E-03	3,93E-03	9,00E-02	-9,00E-02	-1,24E-01		0,00%	0,00%	0,00%
5	13	2,85E-03	-2,85E-03	-3,23E-16	-9,01E-02	9,01E-02	-6,14E-09		0,00%	0,00%	0,00%
5	14	3,10E-03	-3,10E-03	-4,27E-03	-9,80E-02	9,80E-02	1,35E-01		0,00%	0,00%	0,00%
5	15	2,85E-03	-2,85E-03	3,54E-16	-9,01E-02	9,01E-02	8,15E-09		0,00%	0,00%	0,00%
5	16	3,10E-03	-3,10E-03	4,27E-03	-9,80E-02	9,80E-02	-1,35E-01		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 9 - 5º Modo de Vibração da torre treliçada
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
6	5	1,06E-03	1,06E-03	3,90E-03	3,35E-02	3,35E-02	1,23E-01	3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
6	6	4,76E-04	-4,76E-04	4,09E-03	1,50E-02	-1,50E-02	1,29E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	7	-1,06E-03	-1,06E-03	3,90E-03	-3,35E-02	-3,35E-02	1,23E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	8	-4,76E-04	4,76E-04	4,09E-03	-1,50E-02	1,50E-02	1,29E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	9	-2,53E-04	-2,53E-04	6,98E-03	-8,01E-03	-8,01E-03	2,21E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	10	-5,64E-04	5,64E-04	7,41E-03	-1,78E-02	1,78E-02	2,34E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	11	2,53E-04	2,53E-04	6,98E-03	8,01E-03	8,01E-03	2,21E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	12	5,64E-04	-5,64E-04	7,41E-03	1,78E-02	-1,78E-02	2,34E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	13	1,30E-04	1,30E-04	8,74E-03	4,11E-03	4,11E-03	2,76E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	14	5,74E-05	-5,74E-05	8,76E-03	1,82E-03	-1,82E-03	2,77E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	15	-1,30E-04	-1,30E-04	8,74E-03	-4,11E-03	-4,11E-03	2,76E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	16	-5,74E-05	5,74E-05	8,76E-03	-1,82E-03	1,82E-03	2,77E-01		0,01%	-0,01%	0,00%

Quadro 10 - 6º Modo de Vibração da torre treliçada
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
7	5	5,63E-03	-5,63E-03	2,17E-16	1,78E-01	-1,78E-01	-8,01E-09	3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
7	6	6,96E-03	6,96E-03	2,18E-16	2,20E-01	2,20E-01	2,83E-08		0,00%	0,00%	0,00%
7	7	-5,63E-03	5,63E-03	2,20E-16	-1,78E-01	1,78E-01	-1,52E-08		0,00%	0,00%	0,00%
7	8	-6,96E-03	-6,96E-03	2,41E-16	-2,20E-01	-2,20E-01	1,55E-08		0,00%	0,00%	0,00%
7	9	1,60E-03	-1,60E-03	3,94E-16	5,06E-02	-5,06E-02	1,61E-08		0,00%	0,00%	0,00%
7	10	1,30E-03	1,30E-03	4,07E-16	4,10E-02	4,10E-02	-4,76E-09		0,00%	0,00%	0,00%
7	11	-1,60E-03	1,60E-03	4,03E-16	-5,06E-02	5,06E-02	1,58E-08		0,00%	0,00%	0,00%
7	12	-1,30E-03	-1,30E-03	4,38E-16	-4,10E-02	-4,10E-02	6,06E-09		0,00%	0,00%	0,00%
7	13	-5,34E-03	5,34E-03	4,96E-16	-1,69E-01	1,69E-01	-8,38E-09		0,00%	0,00%	0,00%
7	14	-6,32E-03	-6,32E-03	4,83E-16	-2,00E-01	-2,00E-01	-3,53E-09		0,00%	0,00%	0,00%
7	15	5,34E-03	-5,34E-03	5,11E-16	1,69E-01	-1,69E-01	-1,13E-09		0,00%	0,00%	0,00%
7	16	6,32E-03	6,32E-03	5,14E-16	2,00E-01	2,00E-01	-1,18E-08		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 11 - 7º Modo de Vibração da torre treliçada
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
8	5	-5,71E-03	-5,71E-03	2,61E-04	-1,81E-01	-1,81E-01	8,25E-03	3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
8	6	-7,85E-03	-7,85E-03	1,27E-17	-2,48E-01	-2,48E-01	-1,86E-07		0,00%	0,00%	0,00%
8	7	-5,71E-03	-5,71E-03	-2,61E-04	-1,81E-01	-1,81E-01	-8,25E-03		0,00%	0,00%	0,00%
8	8	-7,85E-03	-7,85E-03	-2,66E-18	-2,48E-01	-2,48E-01	-2,03E-07		0,00%	0,00%	0,00%
8	9	4,99E-03	4,99E-03	-1,82E-03	1,58E-01	1,58E-01	-5,76E-02		0,00%	0,00%	0,00%
8	10	3,63E-03	3,63E-03	1,82E-17	1,15E-01	1,15E-01	5,18E-08		0,00%	0,00%	0,00%
8	11	4,99E-03	4,99E-03	1,82E-03	1,58E-01	1,58E-01	5,76E-02		0,00%	0,00%	0,00%
8	12	3,63E-03	3,63E-03	2,55E-18	1,15E-01	1,15E-01	1,17E-08		0,00%	0,00%	0,00%
8	13	-2,64E-04	-2,64E-04	-3,41E-03	-8,36E-03	-8,36E-03	-1,08E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	14	-3,40E-04	-3,40E-04	2,51E-17	-1,08E-02	-1,08E-02	-1,19E-08		0,00%	0,00%	0,00%
8	15	-2,64E-04	-2,64E-04	3,41E-03	-8,36E-03	-8,36E-03	1,08E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	16	-3,40E-04	-3,40E-04	1,11E-17	-1,08E-02	-1,08E-02	3,50E-08		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 12 - 8º Modo de Vibração da torre treliçada
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
9	5	3,45E-03	-3,45E-03	4,94E-18	-1,09E-01	1,09E-01	-1,23E-08	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
9	6	5,22E-03	-5,22E-03	-3,26E-05	-1,65E-01	1,65E-01	1,03E-03		0,00%	0,00%	0,00%
9	7	3,45E-03	-3,45E-03	1,16E-17	-1,09E-01	1,09E-01	-2,17E-08		0,00%	0,00%	0,00%
9	8	5,22E-03	-5,22E-03	3,26E-05	-1,65E-01	1,65E-01	-1,03E-03		0,00%	0,00%	0,00%
9	9	-7,38E-03	7,38E-03	6,80E-18	2,33E-01	-2,33E-01	-1,06E-08		0,00%	0,00%	0,00%
9	10	-4,87E-03	4,87E-03	-5,42E-05	1,54E-01	-1,54E-01	1,71E-03		0,00%	0,00%	0,00%
9	11	-7,38E-03	7,38E-03	1,99E-17	2,33E-01	-2,33E-01	-2,30E-08		0,00%	0,00%	0,00%
9	12	-4,87E-03	4,87E-03	5,42E-05	1,54E-01	-1,54E-01	-1,71E-03		0,00%	0,00%	0,00%
9	13	3,50E-03	-3,50E-03	8,12E-18	-1,11E-01	1,11E-01	4,40E-09		0,00%	0,00%	0,00%
9	14	4,85E-03	-4,85E-03	-7,50E-05	-1,53E-01	1,53E-01	2,37E-03		0,00%	0,00%	0,00%
9	15	3,50E-03	-3,50E-03	2,47E-17	-1,11E-01	1,11E-01	2,19E-08		0,00%	0,00%	0,00%
9	16	4,85E-03	-4,85E-03	7,50E-05	-1,53E-01	1,53E-01	-2,37E-03		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 13 - 9º Modo de Vibração da torre treliçada
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
10	5	3,41E-03	-3,41E-03	-1,92E-18	-1,08E-01	1,08E-01	9,22E-09	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
10	6	5,17E-03	5,17E-03	3,02E-16	-1,64E-01	-1,64E-01	7,38E-09		0,00%	0,00%	0,00%
10	7	-3,41E-03	3,41E-03	-6,10E-18	1,08E-01	-1,08E-01	3,62E-09		0,00%	0,00%	0,00%
10	8	-5,17E-03	-5,17E-03	-3,16E-16	1,64E-01	1,64E-01	-3,58E-08		0,00%	0,00%	0,00%
10	9	-7,38E-03	7,38E-03	7,59E-18	2,34E-01	-2,34E-01	8,65E-09		0,00%	0,00%	0,00%
10	10	-4,87E-03	-4,87E-03	5,02E-16	1,54E-01	1,54E-01	-7,99E-09		0,00%	0,00%	0,00%
10	11	7,38E-03	-7,38E-03	-2,23E-17	-2,34E-01	2,34E-01	1,27E-08		0,00%	0,00%	0,00%
10	12	4,87E-03	4,87E-03	-5,26E-16	-1,54E-01	-1,54E-01	1,64E-08		0,00%	0,00%	0,00%
10	13	3,54E-03	-3,54E-03	7,93E-18	-1,12E-01	1,12E-01	-1,89E-08		0,00%	0,00%	0,00%
10	14	4,91E-03	4,91E-03	7,02E-16	-1,55E-01	-1,55E-01	1,88E-08		0,00%	0,00%	0,00%
10	15	-3,54E-03	3,54E-03	-2,65E-17	1,12E-01	-1,12E-01	-9,02E-09		0,00%	0,00%	0,00%
10	16	-4,91E-03	-4,91E-03	-7,36E-16	1,55E-01	1,55E-01	-1,05E-08		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 14 - 10º Modo de Vibração da torre treliçada
Fonte: Os autores (2019).

- **VIGA JOIST**

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
1	2	-4,12E-07	-6,18E-04	1,87E-02	1,30E-05	1,95E-02	-5,90E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	3	2,15E-04	-3,33E-04	3,10E-02	-6,81E-03	1,05E-02	-9,82E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	4	2,15E-04	3,33E-04	3,10E-02	-6,81E-03	-1,05E-02	-9,82E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	5	-4,12E-07	6,18E-04	1,87E-02	1,30E-05	-1,95E-02	-5,90E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	8	4,12E-07	-6,18E-04	1,87E-02	-1,30E-05	1,95E-02	-5,90E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	9	-2,15E-04	-3,33E-04	3,10E-02	6,81E-03	1,05E-02	-9,82E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	10	-2,15E-04	3,33E-04	3,10E-02	6,81E-03	-1,05E-02	-9,82E-01	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
1	11	4,12E-07	6,18E-04	1,87E-02	-1,30E-05	-1,95E-02	-5,90E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	13	1,99E-17	7,26E-03	9,06E-03	3,92E-12	-2,30E-01	-2,87E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	14	1,22E-17	4,50E-03	2,50E-02	4,15E-11	-1,42E-01	-7,91E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	15	-7,65E-17	1,50E-17	3,13E-02	2,29E-11	-5,90E-12	-9,90E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	16	-8,35E-17	-4,50E-03	2,50E-02	-3,56E-11	1,42E-01	-7,91E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	17	-4,58E-17	-7,26E-03	9,06E-03	-6,01E-11	2,30E-01	-2,87E-01		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 15 - 1º Modo de Vibração da viga joist
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
2	2	-8,18E-03	-4,84E-04	-1,94E-02	-2,59E-01	-1,53E-02	-6,14E-01		0,00%	0,00%	0,00%
2	3	-1,37E-02	-2,55E-04	-3,14E-02	-4,33E-01	-8,07E-03	-9,94E-01		0,00%	0,00%	0,00%
2	4	-1,37E-02	2,55E-04	-3,14E-02	-4,33E-01	8,07E-03	-9,94E-01		0,00%	0,00%	0,00%
2	5	-8,18E-03	4,84E-04	-1,94E-02	-2,59E-01	1,53E-02	-6,14E-01		0,00%	0,00%	0,00%
2	8	-8,18E-03	4,84E-04	1,94E-02	-2,59E-01	1,53E-02	6,14E-01		0,00%	0,00%	0,00%
2	9	-1,37E-02	2,55E-04	3,14E-02	-4,33E-01	8,07E-03	9,94E-01		0,00%	0,00%	0,00%
2	10	-1,37E-02	-2,55E-04	3,14E-02	-4,33E-01	-8,07E-03	9,94E-01	3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
2	11	-8,18E-03	-4,84E-04	1,94E-02	-2,59E-01	-1,53E-02	6,14E-01		0,00%	0,00%	0,00%
2	13	5,94E-03	1,12E-16	2,19E-16	1,88E-01	-1,32E-08	-3,54E-09		0,00%	0,00%	0,00%
2	14	1,46E-02	3,51E-17	3,72E-16	4,62E-01	1,22E-09	-1,54E-09		0,00%	0,00%	0,00%
2	15	1,78E-02	-1,70E-17	2,10E-16	5,63E-01	7,84E-10	-2,37E-08		0,00%	0,00%	0,00%
2	16	1,46E-02	-3,03E-17	2,33E-17	4,62E-01	8,56E-09	1,44E-08		0,00%	0,00%	0,00%
2	17	5,94E-03	1,41E-17	-5,53E-17	1,88E-01	1,82E-08	-5,37E-09		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 16 - 2º Modo de Vibração da viga joist
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
3	2	1,72E-03	2,90E-03	3,10E-02	5,45E-02	9,18E-02	9,81E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	3	1,02E-03	6,97E-03	1,91E-02	3,23E-02	2,20E-01	6,04E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	4	-1,02E-03	6,97E-03	-1,91E-02	-3,23E-02	2,20E-01	-6,04E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	5	-1,72E-03	2,90E-03	-3,10E-02	-5,45E-02	9,18E-02	-9,81E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	8	-1,72E-03	2,90E-03	3,10E-02	-5,45E-02	9,18E-02	9,81E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	9	-1,02E-03	6,97E-03	1,91E-02	-3,23E-02	2,20E-01	6,04E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	10	1,02E-03	6,97E-03	-1,91E-02	3,23E-02	2,20E-01	-6,04E-01	3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
3	11	1,72E-03	2,90E-03	-3,10E-02	5,45E-02	9,18E-02	-9,81E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	13	8,69E-16	1,06E-02	1,66E-02	6,78E-09	3,34E-01	5,25E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	14	4,24E-15	1,59E-03	2,67E-02	-5,21E-10	5,04E-02	8,44E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	15	5,78E-15	-4,00E-03	9,44E-17	9,13E-10	-1,27E-01	8,94E-09		0,00%	0,00%	0,00%
3	16	4,16E-15	1,59E-03	-2,67E-02	-4,18E-09	5,04E-02	-8,44E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	17	7,92E-16	1,06E-02	-1,66E-02	-1,83E-08	3,34E-01	-5,25E-01		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 17 - 3º Modo de Vibração da viga joist
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
4	2	1,43E-02	6,32E-03	-3,43E-03	-4,52E-01	-2,00E-01	1,08E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	3	2,95E-02	3,38E-03	-5,35E-03	-9,33E-01	-1,07E-01	1,69E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	4	2,95E-02	-3,38E-03	-5,35E-03	-9,33E-01	1,07E-01	1,69E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	5	1,43E-02	-6,32E-03	-3,43E-03	-4,52E-01	2,00E-01	1,08E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	8	1,43E-02	-6,32E-03	3,43E-03	-4,52E-01	2,00E-01	-1,08E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	9	2,95E-02	-3,38E-03	5,35E-03	-9,33E-01	1,07E-01	-1,69E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	10	2,95E-02	3,38E-03	5,35E-03	-9,33E-01	-1,07E-01	-1,69E-01	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
4	11	1,43E-02	6,32E-03	3,43E-03	-4,52E-01	-2,00E-01	-1,08E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	13	5,89E-03	-1,57E-15	-2,49E-15	-1,86E-01	-2,13E-09	1,49E-09		0,00%	0,00%	0,00%
4	14	2,89E-02	-2,48E-16	-4,05E-15	-9,13E-01	-3,64E-09	9,39E-10		0,00%	0,00%	0,00%
4	15	3,97E-02	6,28E-16	-8,54E-17	-1,26E+00	-8,47E-09	-7,71E-10		0,00%	0,00%	0,00%
4	16	2,89E-02	-2,17E-16	3,94E-15	-9,13E-01	-4,75E-09	4,07E-10		0,00%	0,00%	0,00%
4	17	5,89E-03	-1,57E-15	2,48E-15	-1,86E-01	-2,55E-09	4,86E-10		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 18 - 4º Modo de Vibração da viga joist
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	Y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
5	2	-1,34E-02	-1,10E-04	-3,18E-02	4,24E-01	3,47E-03	1,00E+00		0,00%	0,00%	0,00%
5	3	-8,41E-03	6,27E-04	-1,97E-02	2,66E-01	-1,98E-02	6,23E-01		0,00%	0,00%	0,00%
5	4	8,41E-03	6,27E-04	1,97E-02	-2,66E-01	-1,98E-02	-6,23E-01		0,00%	0,00%	0,00%
5	5	1,34E-02	-1,10E-04	3,18E-02	-4,24E-01	3,47E-03	-1,00E+00		0,00%	0,00%	0,00%
5	8	-1,34E-02	1,10E-04	3,18E-02	4,24E-01	-3,47E-03	-1,00E+00		0,00%	0,00%	0,00%
5	9	-8,41E-03	-6,27E-04	1,97E-02	2,66E-01	1,98E-02	-6,23E-01		0,00%	0,00%	0,00%
5	10	8,41E-03	-6,27E-04	-1,97E-02	-2,66E-01	1,98E-02	6,23E-01	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
5	11	1,34E-02	1,10E-04	-3,18E-02	-4,24E-01	-3,47E-03	1,00E+00		0,00%	0,00%	0,00%
5	13	9,76E-03	1,44E-18	-3,27E-17	-3,09E-01	-9,24E-09	2,54E-08		0,00%	0,00%	0,00%
5	14	1,55E-02	2,13E-17	-9,81E-17	-4,89E-01	3,03E-08	2,42E-08		0,00%	0,00%	0,00%
5	15	5,66E-16	4,94E-17	-1,03E-16	4,96E-08	7,43E-08	5,88E-08		0,00%	0,00%	0,00%
5	16	-1,55E-02	4,60E-17	-1,39E-17	4,89E-01	4,19E-08	-1,41E-08		0,00%	0,00%	0,00%
5	17	-9,76E-03	3,95E-17	-2,61E-17	3,09E-01	-8,61E-08	-6,46E-08		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 19 - 5º Modo de Vibração da viga joist
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	Y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
6	2	3,88E-03	3,00E-03	3,32E-02	-1,23E-01	-9,48E-02	-1,05E+00		0,00%	0,00%	0,00%
6	3	-2,82E-03	3,30E-03	-1,96E-02	8,92E-02	-1,04E-01	6,18E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	4	-2,82E-03	-3,30E-03	-1,96E-02	8,92E-02	1,04E-01	6,18E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	5	3,88E-03	-3,00E-03	3,32E-02	-1,23E-01	9,48E-02	-1,05E+00		0,00%	0,00%	0,00%
6	8	-3,88E-03	3,00E-03	3,32E-02	1,23E-01	-9,48E-02	-1,05E+00		0,00%	0,00%	0,00%
6	9	2,82E-03	3,30E-03	-1,96E-02	-8,92E-02	-1,04E-01	6,18E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	10	2,82E-03	-3,30E-03	-1,96E-02	-8,92E-02	1,04E-01	6,18E-01	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
6	11	-3,88E-03	-3,00E-03	3,32E-02	1,23E-01	9,48E-02	-1,05E+00		0,00%	0,00%	0,00%
6	13	-6,15E-17	7,49E-03	1,77E-02	-3,63E-08	-2,37E-01	-5,59E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	14	-5,47E-17	-6,85E-03	7,21E-03	7,98E-08	2,16E-01	-2,28E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	15	-1,82E-17	-1,72E-16	-2,24E-02	1,61E-07	-9,85E-08	7,08E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	16	-1,03E-16	6,85E-03	7,21E-03	-4,16E-08	-2,16E-01	-2,28E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	17	-5,00E-17	-7,49E-03	1,77E-02	-2,01E-07	2,37E-01	-5,59E-01		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 20 - 6º Modo de Vibração da viga joist
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	Y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
7	2	1,41E-02	-1,67E-04	3,23E-02	-4,44E-01	5,29E-03	-1,02E+00	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
7	3	-7,98E-03	-3,82E-04	-1,99E-02	2,52E-01	1,21E-02	6,29E-01		0,00%	0,00%	0,00%
7	4	-7,98E-03	3,82E-04	-1,99E-02	2,52E-01	-1,21E-02	6,29E-01		0,00%	0,00%	0,00%
7	5	1,41E-02	1,67E-04	3,23E-02	-4,44E-01	-5,29E-03	-1,02E+00		0,00%	0,00%	0,00%
7	8	1,41E-02	1,67E-04	-3,23E-02	-4,44E-01	-5,29E-03	1,02E+00		0,00%	0,00%	0,00%
7	9	-7,98E-03	3,82E-04	1,99E-02	2,52E-01	-1,21E-02	-6,29E-01		0,00%	0,00%	0,00%
7	10	-7,98E-03	-3,82E-04	1,99E-02	2,52E-01	1,21E-02	-6,29E-01		0,00%	0,00%	0,00%
7	11	1,41E-02	-1,67E-04	-3,23E-02	-4,44E-01	5,29E-03	1,02E+00		0,00%	0,00%	0,00%
7	13	-1,01E-02	-2,00E-17	-1,84E-18	3,19E-01	-2,59E-07	3,93E-07		0,00%	0,00%	0,00%
7	14	-3,49E-03	-1,80E-17	-6,70E-17	1,10E-01	-1,29E-07	1,46E-07		0,00%	0,00%	0,00%
7	15	1,32E-02	6,47E-17	1,39E-16	-4,18E-01	-2,89E-07	1,15E-07		0,00%	0,00%	0,00%
7	16	-3,49E-03	-4,54E-17	6,26E-17	1,10E-01	-3,78E-07	1,49E-07		0,00%	0,00%	0,00%
7	17	-1,01E-02	4,21E-17	-1,17E-16	3,19E-01	-2,61E-07	3,47E-07		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 21 - 7º Modo de Vibração da viga joist
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	Y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
8	2	4,93E-03	9,05E-03	1,70E-02	-1,56E-01	-2,86E-01	-5,38E-01	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
8	3	-6,32E-03	9,95E-03	-3,26E-02	2,00E-01	-3,15E-01	1,03E+00		0,00%	0,00%	0,00%
8	4	6,32E-03	9,95E-03	3,26E-02	-2,00E-01	-3,15E-01	-1,03E+00		0,00%	0,00%	0,00%
8	5	-4,93E-03	9,05E-03	-1,70E-02	1,56E-01	-2,86E-01	5,38E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	8	-4,93E-03	9,05E-03	1,70E-02	1,56E-01	-2,86E-01	-5,38E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	9	6,32E-03	9,95E-03	-3,26E-02	-2,00E-01	-3,15E-01	1,03E+00		0,00%	0,00%	0,00%
8	10	-6,32E-03	9,95E-03	3,26E-02	2,00E-01	-3,15E-01	-1,03E+00		0,00%	0,00%	0,00%
8	11	4,93E-03	9,05E-03	-1,70E-02	-1,56E-01	-2,86E-01	5,38E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	13	-1,13E-16	8,68E-03	1,22E-02	7,91E-07	-2,74E-01	-3,85E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	14	-2,57E-16	3,99E-03	-7,95E-03	8,85E-07	-1,26E-01	2,51E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	15	-1,66E-16	1,94E-02	-1,33E-16	3,73E-07	-6,14E-01	2,72E-07		0,00%	0,00%	0,00%
8	16	1,49E-16	3,99E-03	7,95E-03	-4,70E-07	-1,26E-01	-2,51E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	17	1,66E-16	8,68E-03	-1,22E-02	-1,36E-06	-2,74E-01	3,85E-01		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 22 - 8º Modo de Vibração da viga joist
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
9	2	-2,47E-02	-2,53E-03	5,75E-03	7,80E-01	8,01E-02	-1,82E-01	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
9	3	-1,84E-02	1,16E-02	2,27E-03	5,83E-01	-3,68E-01	-7,17E-02		0,00%	0,00%	0,00%
9	4	1,84E-02	1,16E-02	-2,27E-03	-5,83E-01	-3,68E-01	7,17E-02		0,00%	0,00%	0,00%
9	5	2,47E-02	-2,53E-03	-5,75E-03	-7,80E-01	8,01E-02	1,82E-01		0,00%	0,00%	0,00%
9	8	-2,47E-02	2,53E-03	-5,75E-03	7,80E-01	-8,01E-02	1,82E-01		0,00%	0,00%	0,00%
9	9	-1,84E-02	-1,16E-02	-2,27E-03	5,83E-01	3,68E-01	7,17E-02		0,00%	0,00%	0,00%
9	10	1,84E-02	-1,16E-02	2,27E-03	-5,83E-01	3,68E-01	-7,17E-02		0,00%	0,00%	0,00%
9	11	2,47E-02	2,53E-03	5,75E-03	-7,80E-01	-8,01E-02	-1,82E-01		0,00%	0,00%	0,00%
9	13	-1,62E-02	-1,17E-16	-5,00E-17	5,12E-01	5,64E-08	1,32E-08		0,00%	0,00%	0,00%
9	14	-3,93E-02	-2,08E-16	4,30E-17	1,24E+00	1,29E-08	2,67E-08		0,00%	0,00%	0,00%
9	15	9,59E-17	-2,72E-16	3,02E-17	1,03E-07	-9,12E-08	-3,49E-09		0,00%	0,00%	0,00%
9	16	3,93E-02	-1,81E-16	-6,61E-17	-1,24E+00	-1,05E-07	1,18E-08		0,00%	0,00%	0,00%
9	17	1,62E-02	-1,23E-16	8,12E-17	-5,12E-01	6,88E-08	4,34E-08		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 23 - 9º Modo de Vibração da viga joist
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
10	2	-9,71E-03	2,05E-04	-2,01E-02	3,07E-01	-6,49E-03	6,35E-01	-3,16E-02	0,00%	0,00%	0,00%
10	3	1,35E-02	3,50E-04	3,26E-02	-4,28E-01	-1,11E-02	-1,03E+00		0,00%	0,00%	0,00%
10	4	-1,35E-02	3,50E-04	-3,26E-02	4,28E-01	-1,11E-02	1,03E+00		0,00%	0,00%	0,00%
10	5	9,71E-03	2,05E-04	2,01E-02	-3,07E-01	-6,49E-03	-6,35E-01		0,00%	0,00%	0,00%
10	8	-9,71E-03	-2,05E-04	2,01E-02	3,07E-01	6,49E-03	-6,35E-01		0,00%	0,00%	0,00%
10	9	1,35E-02	-3,50E-04	-3,26E-02	-4,28E-01	1,11E-02	1,03E+00		0,00%	0,00%	0,00%
10	10	-1,35E-02	-3,50E-04	3,26E-02	4,28E-01	1,11E-02	-1,03E+00		0,00%	0,00%	0,00%
10	11	9,71E-03	-2,05E-04	-2,01E-02	-3,07E-01	6,49E-03	6,35E-01		0,00%	0,00%	0,00%
10	13	5,98E-03	9,52E-17	1,40E-16	-1,89E-01	3,13E-08	-8,00E-09		0,00%	0,00%	0,00%
10	14	-5,39E-03	5,54E-17	-4,65E-17	1,70E-01	1,27E-08	3,44E-08		0,00%	0,00%	0,00%
10	15	-8,70E-17	1,47E-16	-8,01E-17	5,48E-08	-5,94E-08	1,88E-08		0,00%	0,00%	0,00%
10	16	5,39E-03	4,41E-17	8,15E-17	-1,70E-01	-4,87E-08	2,69E-08		0,00%	0,00%	0,00%
10	17	-5,98E-03	8,21E-18	4,42E-18	1,89E-01	6,69E-08	3,82E-08		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 24 - 10º Modo de Vibração da viga joist
Fonte: Os autores (2019).

- **DOMO DE ESTRUTURA ESPACIAL**

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
1	7	2,91E-02	1,85E-16	-4,93E-02	9,02E-02	6,00E-17	-1,53E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	8	1,45E-02	2,52E-02	-4,93E-02	4,51E-02	7,81E-02	-1,53E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	9	-1,45E-02	2,52E-02	-4,93E-02	-4,51E-02	7,81E-02	-1,53E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	10	-2,91E-02	-2,24E-17	-4,93E-02	-9,02E-02	3,13E-16	-1,53E-01	3,22E-01	0,00%	0,00%	0,00%
1	11	-1,45E-02	-2,52E-02	-4,93E-02	-4,51E-02	-7,81E-02	-1,53E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	12	1,45E-02	-2,52E-02	-4,93E-02	4,51E-02	-7,81E-02	-1,53E-01		0,00%	0,00%	0,00%
1	13	-3,37E-16	7,14E-17	7,19E-01	1,93E-16	-1,45E-16	2,23E+00		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 25 - 1º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
2	7	7,58E-13	5,01E-02	-2,88E-12	7,48E-13	-1,55E-01	-2,83E-12		0,00%	0,00%	0,00%
2	8	2,62E-02	9,54E-02	-3,63E-01	-8,13E-02	-2,96E-01	1,13E+00		0,00%	0,00%	0,00%
2	9	-2,62E-02	9,54E-02	-3,63E-01	8,13E-02	-2,96E-01	1,13E+00		0,00%	0,00%	0,00%
2	10	7,57E-13	5,01E-02	2,87E-12	7,48E-13	-1,55E-01	2,84E-12	-3,22E-01	0,00%	0,00%	0,00%
2	11	2,62E-02	9,54E-02	3,63E-01	-8,13E-02	-2,96E-01	-1,13E+00		0,00%	0,00%	0,00%
2	12	-2,62E-02	9,54E-02	3,63E-01	8,13E-02	-2,96E-01	-1,13E+00		0,00%	0,00%	0,00%
2	13	5,34E-13	7,82E-02	-9,76E-16	5,29E-13	-2,43E-01	-6,51E-17		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 26 - 2º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
3	7	-1,10E-01	3,42E-13	4,18E-01	-3,42E-01	-3,38E-13	1,30E+00		0,00%	0,00%	0,00%
3	8	-6,53E-02	-2,64E-02	2,11E-01	-2,03E-01	-8,18E-02	6,53E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	9	-6,53E-02	2,64E-02	-2,11E-01	-2,03E-01	8,18E-02	-6,53E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	10	-1,10E-01	3,41E-13	-4,18E-01	-3,42E-01	-3,38E-13	-1,30E+00	3,22E-01	0,00%	0,00%	0,00%
3	11	-6,53E-02	-2,64E-02	-2,11E-01	-2,03E-01	-8,18E-02	-6,53E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	12	-6,53E-02	2,64E-02	2,11E-01	-2,03E-01	8,18E-02	6,53E-01		0,00%	0,00%	0,00%
3	13	-7,82E-02	5,34E-13	-4,60E-15	-2,43E-01	-5,30E-13	5,99E-16		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 27 - 3º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
4	7	6,45E-02	-1,90E-15	-3,05E-01	-2,00E-01	-9,88E-16	9,46E-01	-3,22E-01	0,00%	0,00%	0,00%
4	8	-3,19E-02	-5,55E-02	3,03E-01	9,90E-02	1,72E-01	-9,40E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	9	-3,19E-02	5,55E-02	-3,03E-01	9,90E-02	-1,72E-01	9,40E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	10	6,45E-02	-3,79E-15	3,05E-01	-2,00E-01	-4,00E-16	-9,46E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	11	-3,19E-02	-5,55E-02	-3,03E-01	9,90E-02	1,72E-01	9,40E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	12	-3,19E-02	5,55E-02	3,03E-01	9,90E-02	-1,72E-01	-9,40E-01		0,00%	0,00%	0,00%
4	13	2,30E-04	-4,52E-15	3,54E-15	-7,14E-04	-1,42E-15	-1,24E-15		0,01%	0,00%	0,00%

Quadro 28 - 4º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
5	7	9,55E-14	2,06E-02	-4,71E-13	4,75E-13	-6,40E-02	-2,35E-12	-3,22E-01	0,00%	0,00%	0,00%
5	8	4,65E-02	5,99E-02	-3,72E-01	-1,44E-01	-1,86E-01	1,15E+00		0,00%	0,00%	0,00%
5	9	4,65E-02	-5,99E-02	3,72E-01	-1,44E-01	1,86E-01	-1,15E+00		0,00%	0,00%	0,00%
5	10	-9,47E-14	-2,06E-02	-4,73E-13	-4,73E-13	6,40E-02	-2,34E-12		0,00%	0,00%	0,00%
5	11	-4,65E-02	-5,99E-02	-3,72E-01	1,44E-01	1,86E-01	1,15E+00		0,00%	0,00%	0,00%
5	12	-4,65E-02	5,99E-02	3,72E-01	1,44E-01	-1,86E-01	-1,15E+00		0,00%	0,00%	0,00%
5	13	2,13E-15	-6,08E-15	-2,89E-15	1,23E-15	-8,68E-16	-3,60E-17		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 29 - 5º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
6	7	-8,68E-02	2,29E-14	4,30E-01	2,69E-01	1,12E-13	-1,33E+00	-3,22E-01	0,00%	0,00%	0,00%
6	8	6,21E-03	4,65E-02	-2,15E-01	-1,93E-02	-1,44E-01	6,67E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	9	-6,21E-03	4,65E-02	-2,15E-01	1,93E-02	-1,44E-01	6,67E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	10	8,68E-02	-2,21E-14	4,30E-01	-2,69E-01	-1,13E-13	-1,33E+00		0,00%	0,00%	0,00%
6	11	-6,21E-03	-4,65E-02	-2,15E-01	1,93E-02	1,44E-01	6,67E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	12	6,21E-03	-4,65E-02	-2,15E-01	-1,93E-02	1,44E-01	6,67E-01		0,00%	0,00%	0,00%
6	13	-7,55E-15	3,89E-16	-3,58E-05	1,81E-15	-8,18E-16	1,11E-04		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 30 - 6º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
7	7	-3,45E-02	6,33E-17	3,04E-01	-1,07E-01	-4,34E-16	9,43E-01		0,00%	0,00%	0,00%
7	8	-1,72E-02	-2,99E-02	3,04E-01	-5,35E-02	-9,26E-02	9,43E-01		0,00%	0,00%	0,00%
7	9	1,72E-02	-2,99E-02	3,04E-01	5,35E-02	-9,26E-02	9,43E-01		0,00%	0,00%	0,00%
7	10	3,45E-02	-1,86E-16	3,04E-01	1,07E-01	-8,19E-16	9,43E-01	3,22E-01	0,00%	0,00%	0,00%
7	11	1,72E-02	2,99E-02	3,04E-01	5,35E-02	9,26E-02	9,43E-01		0,00%	0,00%	0,00%
7	12	-1,72E-02	2,99E-02	3,04E-01	-5,35E-02	9,26E-02	9,43E-01		0,00%	0,00%	0,00%
7	13	-8,58E-16	-3,15E-17	1,23E-01	1,94E-16	-4,46E-16	3,83E-01		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 31 - 7º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
8	7	-2,92E-01	7,28E-12	-1,26E-01	-9,07E-01	1,41E-10	-3,92E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	8	-2,20E-01	-4,17E-02	-6,31E-02	-6,83E-01	-1,29E-01	-1,96E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	9	-2,20E-01	4,17E-02	6,31E-02	-6,83E-01	1,29E-01	1,96E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	10	-2,92E-01	7,28E-12	1,26E-01	-9,07E-01	1,41E-10	3,92E-01	3,22E-01	0,00%	0,00%	0,00%
8	11	-2,20E-01	-4,17E-02	6,31E-02	-6,83E-01	-1,29E-01	1,96E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	12	-2,20E-01	4,17E-02	-6,31E-02	-6,83E-01	1,29E-01	-1,96E-01		0,00%	0,00%	0,00%
8	13	-3,83E-01	1,42E-11	2,61E-16	-1,19E+00	2,76E-10	-1,45E-15		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 32 - 8º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
9	7	1,09E-11	1,96E-01	4,69E-12	-2,11E-10	-6,08E-01	-9,10E-11		0,00%	0,00%	0,00%
9	8	4,17E-02	2,68E-01	1,09E-01	-1,29E-01	-8,32E-01	-3,39E-01		0,00%	0,00%	0,00%
9	9	-4,17E-02	2,68E-01	1,09E-01	1,29E-01	-8,32E-01	-3,39E-01		0,00%	0,00%	0,00%
9	10	1,09E-11	1,96E-01	-4,69E-12	-2,11E-10	-6,08E-01	9,10E-11	-3,22E-01	0,00%	0,00%	0,00%
9	11	4,17E-02	2,68E-01	-1,09E-01	-1,29E-01	-8,32E-01	3,39E-01		0,00%	0,00%	0,00%
9	12	-4,17E-02	2,68E-01	-1,09E-01	1,29E-01	-8,32E-01	3,39E-01		0,00%	0,00%	0,00%
9	13	1,42E-11	3,83E-01	9,52E-17	-2,76E-10	-1,19E+00	-1,22E-15		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 33 - 9º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial
Fonte: Os autores (2019).

Nº do modo	Nó	SHOF Tools Modo de Vibração			SAP 2000 Modo de Vibração			Fator de Normali-zação	Diferença [%]		
		x	y	z	x	Y	z		x%	y%	x%
10	7	-2,41E-16	-3,10E-01	-2,18E-16	-5,71E-14	9,63E-01	-8,96E-15		0,00%	0,00%	0,00%
10	8	2,69E-01	-1,55E-01	1,98E-06	-8,34E-01	4,81E-01	-6,13E-06		0,00%	0,00%	-0,01%
10	9	2,69E-01	1,55E-01	-1,98E-06	-8,34E-01	-4,81E-01	6,13E-06		0,00%	0,00%	-0,01%
10	10	-2,05E-16	3,10E-01	2,40E-16	-8,64E-14	-9,63E-01	1,35E-14	-3,22E-01	0,00%	0,00%	0,00%
10	11	-2,69E-01	1,55E-01	1,98E-06	8,34E-01	-4,81E-01	-6,13E-06		0,00%	0,00%	-0,01%
10	12	-2,69E-01	-1,55E-01	-1,98E-06	8,34E-01	4,81E-01	6,13E-06		0,00%	0,00%	-0,01%
10	13	-2,91E-16	-4,95E-16	-7,00E-18	5,43E-14	-7,04E-14	6,26E-16		0,00%	0,00%	0,00%

Quadro 34 - 10º Modo de Vibração do domo de estrutura espacial
Fonte: Os autores (2019).