UNIVERSIDADE POSITIVO

LUIZ FILLIPE DE BONA

OSWALDO CARVALHO DA SILVA JUNIOR

AEOLOS - SOFTWARE PARA CÁLCULO DE MODOS DE VIBRAÇÃO E FREQUÊNCIAS NATURAIS EM PÓRTICOS PLANOS

CURITIBA

2019

LUIZ FILLIPE DE BONA

OSWALDO CARVALHO DA SILVA JUNIOR

AEOLOS - SOFTWARE PARA CÁLCULO DE MODOS DE VIBRAÇÃO E FREQUÊNCIAS NATURAIS EM PÓRTICOS PLANOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de graduação do curso de Engenharia Civil da Universidade Positivo.

Orientador: Prof. Juliano Jorge Scremin

CURITIBA

2019

RESUMO

O cálculo dos parâmetros modais de uma estrutura é de fundamental importância para verificação de segurança quanto ao fenômeno da ressonância. Este fenômeno ocorre quando a frequência da solicitação externa se aproxima de uma das frequências naturais da estrutura, o que pode acarretar o colapso desta por conta de deslocamentos excessivos e consequentes esforços solicitantes acima da capacidade resistente dos elementos estruturais.

Os parâmetros modais se resumem às frequências naturais e aos modos de vibração, sendo estes obtidos por meio da resolução de um problema de autovalores e autovetores, proveniente da composição de um sistema de equações de movimento livre não amortecido. Neste sistema de equações as propriedades de massa e rigidez do modelo estrutural são representadas de forma matricial, e a sua solução pode ser obtida por meio da resolução de um polinômio característico, o que é inviável para estruturas com diversos graus de liberdade, ou por meio de métodos numéricos iterativos como o método de Jacobi.

O presente trabalho propõe a criação de uma ferramenta computacional programada em linguagem Python, com recursos de programação orientada à objeto, destinada ao cálculo dos parâmetros modais de modelos estruturais planos, possibilitando ao usuário a visualização dos modos de vibração e a quantificação das frequências naturais correlatas a cada modo.

A ferramenta foi validada com soluções de problemas de modelos planos encontrados na literatura clássica da área de análise de vibrações como também em comparações feitas com resultados obtidos de modelos desenvolvidos na versão educacional do software comercial SAP2000 21 EVAL.

Palavras-chaves: Análise matricial; equação do movimento; parâmetros modais.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema linearmente elástico sob ação de uma solicitação dinâmica em um instante de tempo 16
Figura 2 - Classificação das forças dinâmicas 18
Figura 3 - Vibração livre de um oscilador simples não amortecido 21
Figura 4 - Sistema real 25
Figura 5 - Barra bi engastada com rotação unitária 25
Figura 6 - Barra de pórtico plano isolada e suas configurações de deformadas elementares 27
Figura 7 - Estrutura com massa concentrada 30
Figura 8 - Campo de deslocamentos para um elemento de viga 32
Figura 9 - Deslocabilidades locais em uma barra em função do sistema de eixos globais 33
Figura 10 – Sistema de coordenadas global 35
Figura 11 – Disposição dos coeficientes de rigidez na barra 1 36
Figura 12 - Espalhamento da matriz da matriz de rigidez local para a global 36
Figura 13 - Linha elástica de barra 41
Figura 14 - Fluxograma geral da entrada, processamento e saída de dados do software Aeolos 49
Figura 15 - Convenção de Green 50
Figura 16 – Fluxograma geral da entrada de dados 50
Figura 17 – Fluxograma geral da criação dos objetos Element 53
Figura 18 – Fluxograma geral da geração de matrizes de rotação 56
Figura 19 - Matriz elementar de massa discreta no programa 56
Figura 20 – Fluxograma geral da geração da matriz de massa 57
Figura 21 - Fluxograma geral da geração das matrizes globais de massa 57
Figura 22 - Fluxograma geral da geração das matrizes globais de rigidez 58
Figura 23 - Fluxograma geral da solução do problema de autovalores e autovetores no Aeolos 58
Figura 24 - Seção transversal 60
Figura 25 - Seção transversal 61

Figura 26 - Eixo de coordenadas SAP e eixo de coordenadas Aeolos 61
Figura 27 - Viga em balanço, engastada 62
Figura 28 – Numeração de graus de liberdade da estrutura da Figura 27..... 64
Figura 29 - Deformada da estrutura da Figura 28 para o primeiro e segundo modos de vibração 64
Figura 30 – Plotagem no Aeolos do primeiro modo com o parâmetro fase de plotagem 1 e escala 1, e do primeiro modo com o parâmetro fase de plotagem 0 e escala 1 65
Figura 31 - Duas barras perpendiculares, engastadas entre si e com o apoio engastado 66
Figura 32 – Deformada relativa ao primeiro e segundo modos de vibração 67
Figura 33 - Plotagem no Aeolos do primeiro modo, com o parâmetro fase de plotagem 1 e escala 1 e do primeiro modo, com parâmetro fase de plotagem 0 e escala 1 68
Figura 34 - Viga biengastada, dividida em 4 elementos por 3 nós..... 69
Figura 35 - Graus de liberdade da estrutura da Figura 34 no Aeolos..... 69
Figura 36 – Viga biapoiada do modelo 4 72
Figura 37 – Plotagem do 1° ao 4° modo de vibração do modelo 4. Aeolos em vermelho, SAP em azul e a estrutura original em preto..... 75
Figura 38 – Plotagem do 1° ao 4° modo de vibração do modelo 5. Aeolos em vermelho, SAP em azul e a estrutura original em preto..... 76
Figura 39 - Plotagem do 1° ao 4° modo de vibração do modelo 6. Aeolos em vermelho, SAP em azul e a estrutura original em preto..... 78
Figura 40 - Plotagem do 1° ao 4° modo de vibração do modelo 7. Aeolos em vermelho, SAP em azul e a estrutura original em preto..... 79

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Frequências críticas estabelecidas 12
Quadro 2 - Frequências naturais mínimas de pisos em estruturas mistas 13
Quadro 3 - Modelos estruturais escolhidos para a validação 47
Quadro 4 – Atributos de objetos da classe Element 54
Quadro 5 – Comparação dos resultados para as frequências naturais obtidas pelo Aeolos (a) e o SAP (b), com os valores da Equação 71 63
Quadro 6 – Comparação dos resultados para os modos de vibração obtidos pelo Aeolos (a) e o SAP (b), com os valores da Equação 72 65
Quadro 7 – Comparação dos resultados para as frequências naturais obtidas pelo Aeolos (a) e pelo SAP (b), com os valores da Equação 76 68
Quadro 8 – Comparação dos resultados obtidos para os modos de vibração obtidos pelo Aeolos (a) e o SAP (b), com os valores da Equação 77 68
Quadro 9 – Comparação dos resultados obtidos para as frequências naturais pelo Aeolos (a) e o SAP (b) com os valores fornecidos pela literatura 70
Quadro 10 – Comparação dos resultados obtidos para os modos de vibração obtidos pelo Aeolos, com os valores fornecidos pela literatura 71
Quadro 11 – Frequências naturais da viga (Figura 36), para 3, 5, 9 e 33 pontos nodais 72
Quadro 12 – Frequências naturais da viga (Figura 36), para 3, 5, 9 e 33 pontos nodais obtidos pelo Aeolos 72
Quadro 13 – Frequências naturais da viga (Figura 36), para 3, 5, 9 e 33 pontos nodais obtidos pelo SAP 73
Quadro 14 - Comparação dos resultados obtidos e o erro calculado para as frequências naturais para matriz de massa discreta (a) e consistente (b) 74
Quadro 15 - Comparação dos resultados obtidos e o erro calculado para as frequências naturais (a) e modos de vibração (b) para matriz de massa discreta 75
Quadro 16 - Comparação dos resultados obtidos e o erro calculado para as frequências naturais (a) e modos de vibração (b) para massa discreta 76
Quadro 17 - Comparação dos resultados obtidos e o erro calculado para as frequências naturais (a) e modos de vibração (b) para a matriz de massa discreta 77

Quadro 18 - Comparação dos resultados obtidos e o erro calculado para as frequências naturais (a) e modos de vibração (b) para a matriz de massa discreta..... 79

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10

1.1 OBJETIVO GERAL 11

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS 11

1.3 JUSTIFICATIVA 12

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 14

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 16

3.1 FUNDAMENTOS DA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS 16

3.1.1 Solicitações Dinâmicas 17

3.2 VIBRAÇÃO LIVRE NÃO AMORTECIDA 19

3.2.1 Sistemas com um grau de liberdade 19

3.2.2 Sistemas com Múltiplos Grau de Liberdade 22

3.3 ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS 24

3.3.1 Método das Forças ou da Flexibilidade 24

3.3.2 Método da Rigidez ou Deslocamentos 26

3.3.3 Matriz de Massa 30

3.3.4 Matriz de Massa Discreta ou Concentrada 30

3.3.5 Matriz de Massa Consistente 31

3.3.6 Matriz de Rotação 33

3.3.7 Matrizes Globais 35

3.4 FREQUÊNCIA NATURAL E MODOS DE VIBRAÇÃO 37

3.4.1 Autovalores e Autovetores 37

3.4.2 Método de Resolução Direta 37

3.4.3 Método de Jacobi 38

3.4.4 Equações de Hermite 41

3.5 FENÔMENO DE RESSONÂNCIA 41

3.6 FUNDAMENTOS DE PYTHON E PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETO 42
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 44
4.1 METODOLOGIA DO TRABALHO 44
4.1.1 Programação Do Aeolos 45
4.1.2 Metodologia De Validação 46
4.2 METODOLOGIA DO CÓDIGO COMPUTACIONAL AEOLOS 49
4.2.1 Entrada de Dados 50
4.2.2 Seção Transversal 51
4.2.3 Propriedades dos Materiais 51
4.2.4 Coordenadas dos Nós 51
4.2.5 Elementos de Barras 52
4.2.6 Graus de Liberdade nos Nós 52
4.3 PROCESSAMENTO 52
4.3.1 Criação de Objetos Elementares 53
4.3.2 Geração de Matriz de Rigidez Elementar 54
4.3.3 Geração de Matriz de Rotação 55
4.3.4 Geração de Matriz de Massa 56
4.3.5 Geração das Matrizes Globais de Rigidez e de Massa 57
4.3.6 Autovalores e Autovetores 58
4.4 SAÍDA DE DADOS 58
5 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO 59
5.1 CONSIDERAÇÕES PRÉVIAS 59
5.2 PARÂMETRO DE MATERIAIS E SEÇÕES TRANSVERSAIS PARA MODELAGEM DAS ESTRUTURAS 60
5.3 COMPARATIVO DE MODELOS 62
5.3.1 Modelo 1: Bibliografia 62

5.3.2 Modelo 2: Bibliografia 65
5.3.3 Modelo 3: Bibliografia 69
5.3.4 Modelo 4: Bibliografia 71
5.3.5 Modelo 5: Comparativo de Software (Pórtico Convencional Engastado) 73
5.3.6 Modelo 6: Comparativo de Software (Pórtico Convencional Engastado e Contraventado) 76
5.3.7 Modelo 7: Comparativo de Software (Pórtico Convencional Rotulado) ... 77
5.3.8 Modelo 8: Comparativo de Software (Estrutura Inteiramente Treliçada). 78
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 80
6.1 TRABALHOS FUTUROS 81
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 82
APÊNDICE A 85
APÊNDICE B 106

1 INTRODUÇÃO

Durante a fase de projeto de estruturas na engenharia civil, é comum não haver um estudo do efeito das cargas dinâmicas que podem afligi-las, tão menos quais são suas consequências. As cargas, ou solicitações, classificadas como dinâmicas apresentam variação no sentido e na intensidade ao longo do tempo, diferentemente das cargas estáticas (BRASIL & DA SILVA, 2013).

Segundo Brasil (2013), uma estrutura civil deve resistir aos esforços ao qual é solicitada, de forma a manter suas configurações desejadas quando sob efeitos de movimentos induzidos. A estrutura deverá sofrer pequenos movimentos quando dinamicamente solicitada, e caso esta condição não seja atendida, poderá surgir como consequência movimentos oscilatórios.

Ainda segundo Brasil (2013):

> Os movimentos oscilatórios podem levar a reações e a esforços internos solicitantes maiores que os determinados estaticamente; a permanência de seres humanos sobre a estrutura pode se tornar desconfortável; os movimentos podem afetar o funcionamento de equipamentos montados nesta estrutura; pessoas e equipamentos nas intermediações da estrutura podem ser afetados pelo movimento, etc. (BRASIL, 2013, p. 16 - 17)

Assim, a análise dos efeitos das cargas dinâmicas difere de uma análise de cargas estática, onde as forças de inércia são consideradas desprezíveis e a variável tempo não existe. O estudo das cargas dinâmicas abrange os efeitos da grande maioria das cargas possíveis a serem consideradas em estruturas de obras civis, como as solicitações decorrentes do uso humano ou de máquinas que apresentem vibrações (LIMA & SANTOS, 2008).

Para o caso uma estrutura que apresente uma frequência de vibração solicitante coincidente com uma de suas frequências naturais, haverá uma superposição de efeitos dos movimentos oscilatórios. Isso acarretará em tensões adicionais e uma ampliação progressiva nas amplitudes dos deslocamentos. Esse fenômeno de superposição é chamado de ressonância, e tal fenômeno pode, no pior cenário possível, culminar na ruína da estrutura (BLESSMANN, 1998).

A Dinâmica das Estruturas estuda os efeitos que as cargas dinâmicas exercem em uma estrutura. Para o cálculo destes efeitos normalmente é composto um sistema de equações de movimento que pode ser simplificado ao caso de movimento livre não amortecido a partir do qual gera-se um problema de autovalores e autovetores cuja resolução determina os parâmetros modais da estrutura, a saber, as frequências naturais e consequentes modos de vibração associados a cada frequência (LIMA & SANTOS, 2008).

1.1 OBJETIVO GERAL

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver uma ferramenta computacional que permita calcular as frequências naturais e seus respectivos modos de vibração em modelos estruturais planos.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

a) Gerar a plotagem da deformada relativa aos modos de vibração dos modelos estruturais.

b) Gerar saída de dados em modo texto com as repostas dos vetores representantes dos modos de vibração e consequentes autovalores (frequências naturais).

1.3 JUSTIFICATIVA

As frequências naturais mínimas para cada tipo de estrutura são normalmente definidas em normas de acordo com o uso ao qual a estrutura está destinada. As normas definem estes valores mínimos de modo a garantir que as frequências de solicitação possíveis nos diferentes tipos de edificações não venham a se aproximar das frequências naturais mais baixas do sistema prevenindo o fenômeno de ressonância (SORIANO, 2014).

Segundo a NBR 6118:2014 - Projeto de Estruturas de Concreto, a frequência natural da estrutura de concreto deve exceder em 20% a frequência crítica solicitante, sendo necessário apenas as primeiras frequências naturais para a previsão do comportamento do modelo estrutural sob ações externas. A norma fornece uma tabela (Quadro 1) apresentando as frequências críticas a serem respeitadas pelo projeto estrutural de acordo com a finalidade de uso da estrutura.

Finalidade	**Frequência crítica**
Ginásio de esportes	8,0 Hz
Salas de dança ou de concerto sem cadeiras	7,0 Hz
Escritórios	4,0 Hz
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,5 Hz
Passarelas de pedestres ou de ciclistas	4,5 Hz

Quadro 1 - Frequências críticas estabelecidas pela - Tabela 23.1 (NBR 6118:2014)

Para a NBR 6123:1988 - Forças Devidas ao Vento em Edificações, nas estruturas que apresentem uma frequência fundamental (primeira frequência natural) maior quem 1,0 Hz, a ação das rajadas de vento pode ser analisada de forma simplificada por meio de uma análise estática, considerando apenas uma velocidade média constante em um determinado intervalo de tempo. Porém, edificações com uma frequência natural menor que 1,0 Hz, em particular aquelas que não apresentem grande dissipação de energia, devem considerar também a

resposta flutuante na orientação do vento através de uma análise dinâmica, para a superposição das respostas flutuantes e médias de maneira a obter a resposta dinâmica total.

A NBR 8800:2008 – Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios, estabelece as frequências naturais mínimas de pisos em estruturas mistas destinadas as atividades humanas, com a finalidade de evitar o desconforto durante o uso ou prejuízo ao funcionamento de equipamentos. Essas frequências naturais mínimas fornecidas pela norma estão na organizadas no Quadro 2.

Finalidade	**Frequência natural mínima**
Residências e escritórios	4,0 Hz
Academias de ginástica, salões de dança, ginásios e estádios de esportes	6,0 Hz
Em caso de uso muito repetitivo (ex.: Ginástica aeróbia)	8,0 Hz

Quadro 2 - Frequências naturais mínimas de pisos em estruturas mistas (Fonte: NBR 8800:2008 / Quadro: Autores, 2019)

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A seguir será exposto um resumo de trabalhos correlatos que ressaltam a importância do conhecimento dos parâmetros modais e justifica a produção desta ferramenta computacional de cálculo de tais parâmetros para modelos analíticos de pórticos planos.

Rocha (2015), estudou o comportamento dinâmico de uma ponte através de um modelo numérico desenvolvido no SAP2000 e comparou os resultados das frequências naturais e dos modos de vibração obtido para o modelo com os resultados experimentais de ensaios de vibrações. Durante a modelagem numérica foram adotadas simplificações na geometria e nas propriedades dos materiais, devido à falta de informações relativas à estrutura real. Conclui-se na comparação dos resultados que apesar das simplificações efetuadas no modelo, os resultados obtidos pelo modelo numérico para os parâmetros modais são muito próximos do modelo experimental.

Nóbrega (2004), afirma que durante o estudo de diversas estruturas de concreto pré-moldado, os primeiros parâmetros modais obtidos através de modelos numéricos por ferramentas computacionais são compatíveis com os testes experimentais quando a estrutura se apresenta integra e pouco danificada.

Terra (2009), destaca que quando ocorre uma perda localizada de rigidez em uma estrutura devido a danos estruturais, os parâmetros modais são afetados por essa perda, que por consequência afetam a integridade estrutural. Foi verificado a possibilidade de prever a vida útil de uma estrutura, através da detecção de danos estruturais pela variação das frequências naturais para uma estrutura exposta a condições de crescente de deterioração.

Morales (2019), ressalta que para condições controladas, foi possível verificar a proximidade do valor calculado analiticamente e experimentalmente para a primeira frequência natural de uma barra metálica bi apoiada. Considerando um cenário que simula danos estruturais, notou-se que há pequenas variações para o primeiro e segundo modo de vibração calculados analiticamente.

Malveiro et al. (2011), utilizaram um modelo numérico para obter os parâmetros modais de um viaduto ferroviário. Após a modelagem analítica, foram utilizados ensaios experimentais de vibração ambiental, onde acelerômetros auxiliaram na obtenção das frequências naturais do viaduto. Os resultados experimentais apresentaram uma boa correlação com os modos de vibração globais da estrutura calculados analiticamente. Porém, com uma diferença significante nos resultados dos modos de vibração local obtidos experimentalmente e analiticamente, foi constatado a necessidade de uma calibração do modelo numérico com os resultados da identificação experimental.

Gutemberg e Alver (2009), realizaram uma análise de conforto humano em passarelas de madeiras, estimando as frequências naturais para prever a ocorrência de vibrações excessivas limitando a análise a passarelas que apresentassem frequências fundamentais inferiores aos limites pré-estabelecidos na norma Eurocode 5 – Parte 2 (2004). O modelo analítico desenvolvido para o cálculo dos parâmetros modais foi para vigas bi apoiadas, e os resultados obtidos da análise teórica para vãos maiores que 10 metros apresentaram vibrações excessivas.

Costa et al. (2014), desenvolveram um estudo de identificação das vibrações provocadas pelo tráfego e a influência dos parâmetros modais na ponte Durrães em Portugal. Os valores obtidos para os parâmetros modais pelo modelo teórico foram comparados aos resultados de ensaios de vibração ambiental, os resultados apresentaram diferenças inferiores à 18%, que foi considerado uma boa correlação dos valores. Os valores experimentais serão utilizados para a calibração do modelo numérico para um melhor ajuste dos correspondentes parâmetros de modelagem, pois a rigidez adotada no modelo considera uma aproximação homogenia das características dos diferentes componentes da ponte.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste Capítulo serão abordados os conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento do presente trabalho.

3.1 FUNDAMENTOS DA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Para desenvolvimento das equações pertinentes ao problema dinâmico é possível se considerar uma estrutura de pórtico simplificada apresentando apenas um grau de liberdade, sofrendo influência de uma solicitação dinâmica externa (p) em um determinado instante de tempo. Considerando que a solicitação ocorre na direção positiva do sistema de eixos adotado, é gerado um deslocamento (u) em velocidade (ü) e a aceleração (ü) agindo no mesmo sentido da força externa (Figura 1) (CHOPRA, 2012).

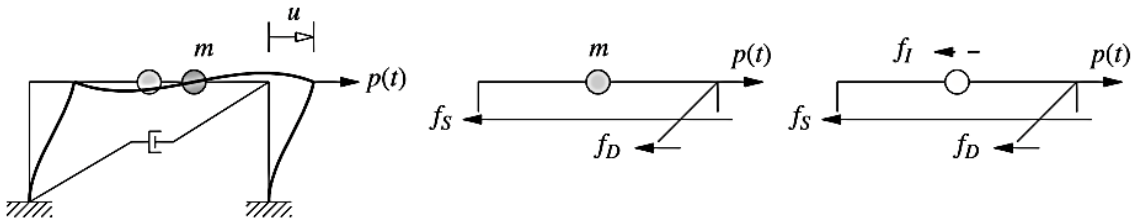


Figura 1 - Sistema linearmente elástico sob ação de uma solicitação dinâmica em um instante de tempo (CHOPRA, 2012)

Para as forças atuantes na estrutura da Figura 1, suas relações podem ser escritas de maneira a obter o equilíbrio do sistema através da Equação 1:

$$f_S - f_D - f_I = p \tag{1}$$

A força elástica resistente de um sistema em resposta à pequenos deslocamentos (f_S) é dada pela lei de Hooke. Esta relação linear entre a força (f_S) e a deformação resultante (u), tem como variável independente o coeficiente de

rigidez (k) relativo aos componentes do sistema para o deslocamento imposto (CHOPRA, 2012).

$$f_S = ku \tag{2}$$

A força de amortecimento (f_D) da estrutura, é caracterizada por dissipar a energia de vibração em um sistema. A força possui sentido oposto à força externa, e está relacionada à velocidade de deslocamentos (u) durante a atuação do amortecimento quantificado pela constante (c) (CHOPRA, 2012). Assim, a equação resultante se torna:

$$f_D = cu \tag{3}$$

A força de inércia (f_I) tem relação com o princípio de inércia, e é fundamentada na Segunda Lei de Newton, a qual determina que a força resultante que atua sobre um corpo é igual ao produto de sua massa (m) pela sua aceleração ($\ddot{u}$) (LIMA & SANTOS, 2008).

$$f_I = m\ddot{u} \tag{4}$$

Substituindo na Equação 1 a Equação 2, 3 e 4. Obtém-se organizando seus termos, a seguinte equação para um instante (t) de tempo:

$$m\ddot{u} + cu + ku = p(t) \tag{5}$$

A Equação 5, é denominada Equação do Movimento, e descreve as respostas da estrutura para uma solicitação dinâmica em um instante de tempo (SORIANO, 2014).

3.1.1 Solicitações Dinâmicas

As solicitações dinâmicas podem ser classificadas conforme os tipos a seguir:

Solicitações Harmônicas: São expressas por funções seno ou cosseno, podendo estar associadas ao uso humano ou as forças devido ao vento (Figura 2 a).

Solicitações Periódicas Arbitrárias: Possuem períodos similares ao das forças harmônicas, mas não podem ser descritas por funções simples como a de seno ou cosseno. Podem ser relacionadas ao uso de máquinas que apresentem trepidações (Figura 2 b).

Solicitações Impulsivas: Possuem grande intensidade e curta duração e são relacionadas às explosões ou falha abrupta de componentes na estrutura (Figura 2 c).

Solicitações Aperiódicas: São forças que variam de forma arbitrária no tempo. São resultantes de sismos ou tráfego de veículos (Figura 2 d).

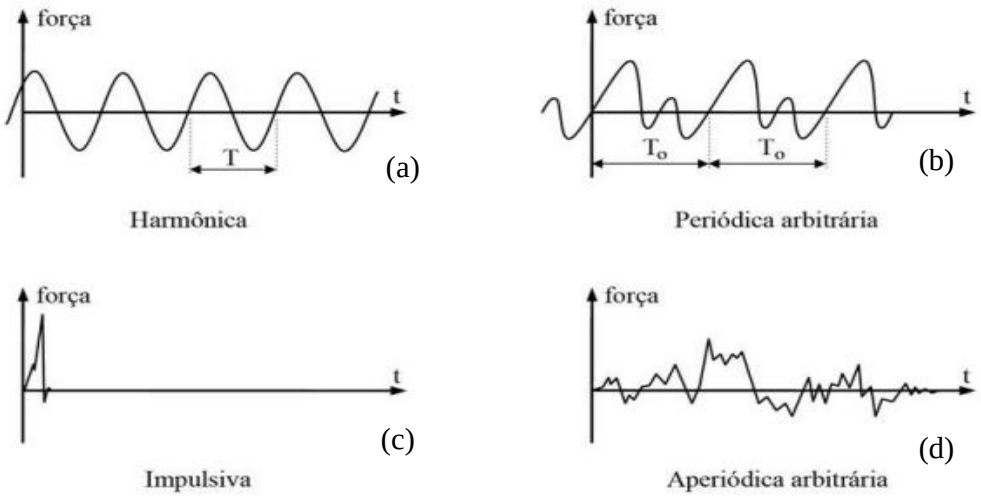


Figura 2 - Classificação das forças dinâmicas *(DE SOUZA & SORIANO, 2004)*

A correta classificação destas forças permite a escolha de métodos de determinação da resposta estrutural para a ação dinâmica de maneira simplificada (DE SOUZA & SORIANO, 2004).

3.2 VIBRAÇÃO LIVRE NÃO AMORTECIDA

Vibrações (ou movimentos) livres não amortecidas são caracterizadas por desprezarem as forças de amortecimento ($cu\dot{} = 0$) e admitir a inexistência de solicitações dinâmicas externas ($p(t) = 0$), para um sistema que vibra devido à imposição de condições iniciais de deslocamento e velocidade, que caracterizam uma perturbação inicial (BRASIL & DA SILVA, 2013). Logo, alterando a Equação 5, para a forma particularizada descrita, obtém-se:

$$m\ddot{u} + cu\dot{} + ku = p(t) \rightarrow m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (6)$$

3.2.1 Sistemas com um grau de liberdade

Particularizando a equação do movimento (Equação 5) para a seguinte forma homogênea adaptada para o movimento livre não amortecido (SORIANO, 2014):

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0 \quad (7)$$

A solução para a equação diferencial ordinária do movimento harmônico (Equação 7), admite as seguintes soluções harmônicas parciais (CHOPRA, 2012):

$$\begin{cases} u(t) = a_1 \cos(\omega_n t) \\ u(t) = a_2 \sin(\omega_n t) \end{cases} \quad (8)$$

Substituindo na Equação 7, a primeira equação da solução (Equação 8):

$$\ddot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0 \rightarrow -\omega_n^2 a_1 \cos(\omega_n t) + \frac{k}{m} a_1 \cos(\omega_n t) = 0 \quad (9)$$

Fatorando-se a Equação 9, obtém-se a Equação 10:

$$\left(-\omega_n^2 + \frac{k}{m}\right) a_1 \cos(\omega_n t) = 0 \quad (10)$$

Para a Equação 10, considera-se que ω_n será, para um valor de t qualquer ($t \neq 0$) respeitando a igualdade nula:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{11}$$

onde ω_n é frequência natural angular, k a rigidez da estrutura e m a massa do sistema.

Para uma equação diferencial ordinária, a solução é dada pela soma de suas soluções parciais (Equação 8), obtendo a Equação 12 (CHOPRA, 2012):

$$u(t) = a_1 \cos(\omega_n t) + a_2 \sin(\omega_n t) \tag{12}$$

As condições de contorno para descobrir os coeficientes independentes (a_1 e a_2) é onde os valores do deslocamento u(t) e de velocidade $\dot{u}(t)$ se encontra no instante t = 0, definido como o instante inicial do movimento (Equação 13) (SORIANO, 2014):

$$u = u(0) \qquad \dot{u} = \dot{u}(0) \tag{13}$$

Aplicando as condições de contorno da Equação 13 na 12:

$$a_1 = u(0) \qquad a_2 = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \tag{14}$$

Assim, com os valores das constantes a_1 e a_2 substituídos na Equação 12, obtém-se a nova forma para descrever o deslocamento pela Equação 15:

$$u(t) = u(0) \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \tag{15}$$

A Equação 15 representa o movimento de um ponto em uma estrutura em vibração livre não amortecida (Figura 3).

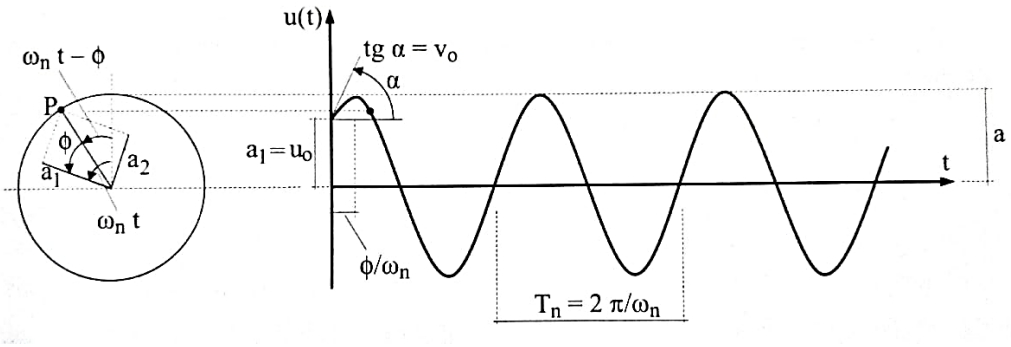


Figura 3 - Vibração livre de um oscilador simples não amortecido (SORIANO, 2014)

A curva de deslocamento no tempo, descreve um ciclo que se repete a cada $2\pi/\omega_n$ segundos, dada pela frequência natural angular ($\omega_n = 2\pi f_n$). Nomeia-se este período de ciclo oscilatório de período natural de vibração (T_n), e o inverso do período natural de vibração caracteriza a frequência de vibração natural (f_n) conforme a Equação 16 (BRASIL & DA SILVA, 2013).

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{16}$$

Pode-se expressar a equação do movimento harmônico em função da amplitude do deslocamento máximo e o ângulo de fase para as condições iniciais u(0) e u̇(0). Assim, para a resposta livre não amortecida da Figura 3, projeta-se uma representação correspondente de um ponto p que se move no sentido anti-horário sobre uma circunferência em velocidade angular constante e de igual valor a frequência natural angular (ω_n). O raio do movimento circular do ponto corresponde a amplitude de vibração (a) (SORIANO, 2014).

Os valores de a_1 e a_2, são referentes a solução (Equação 8) da equação diferencial ordinária, e são para a projeção circular (Figura 3):

$$\begin{cases} a_1 = a\cos(\phi) \\ a_2 = a\,\mathrm{sen}(\phi) \end{cases} \tag{17}$$

Substituindo os valores das constantes a_1 e a_2 (Equação 17) na Equação 12, e adotando o instante inicial ($t = 0$), resulta na Equação 18. E calculando a derivada da Equação 18, obtém-se a velocidade na Equação 19:

$$u(t) = a\cos(\phi)\cos(\omega_n t) + a\sin(\phi)\sin(\omega_n t) \rightarrow u(t) = a\cos(\omega_n t - \phi) \quad (18)$$

$$\begin{cases} u(0) = a\cos(\phi) \\ \dfrac{\dot{u}(0)}{\omega_n} = a\sin(\phi) \end{cases} \quad (19)$$

Na Equação 19, tem-se a amplitude (a) e o ângulo de fase (ϕ) do movimento harmônico dependentes das condições iniciais.

A equação da amplitude é dada por $a = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$:

$$a = \sqrt{u(0)^2 + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right)^2} \quad (20)$$

E a equação do ângulo de fase por $\tan\phi = a_2/a_1$:

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{u}(0)}{u(0)\omega_n}\right) \quad (21)$$

3.2.2 Sistemas com Múltiplos Grau de Liberdade

Para sistemas com múltiplos graus de liberdade, a equação do movimento (Equação 5) pode ser reescrita em função das matrizes globais de rigidez (K), massa (M) e amortecimento (C) das estruturas e o vetor das cargas dinâmicas ($\{p\}$), para tais sistemas, na forma (LIMA & SANTOS, 2008):

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = \{p\} \quad (22)$$

Contudo, para a equação do movimento (Equação 22) particularizada para a vibração livre não amortecida similar ao modelo de um grau de liberdade, se torna (Equação 23) (BRASIL & DA SILVA, 2013):

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (23)$$

A determinação destas matrizes de massa e rigidez globais para sistemas com múltiplos graus de liberdade é realizado através da Análise Matricial de Estruturas, que é descrita na seção 3.3.

Assumindo a similaridade da solução da equação do movimento com a vibração livre para o sistema de um grau de liberdade (Equação 18), a solução harmônica dos deslocamentos nodais em coordenadas modais é (SORIANO, 2014):

$$u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{1(j)} \\ \varphi_{2(j)} \\ \vdots \\ \varphi_{n(j)} \end{Bmatrix} \cos\left(\omega_j t - \phi_j\right) = \hat{\Phi}_j \cos\left(\omega_j t - \phi_j\right) \tag{24}$$

O $\hat{\Phi}_j$ é um vetor constante de movimento da estrutura em vibração livre não amortecida chamados de modos naturais de vibração, para uma dada frequência natural (ω_j) (LIMA & SANTOS, 2008).

A substituição da Equação 24 na 23, gera a solução não singular seguinte ($t \neq 0$):

$$(-M\omega_j^2 + K)\hat{\Phi}_j \cos\left(\omega_j t - \phi_j\right) = 0 \rightarrow \left(K - \omega_j^2 M\right)\hat{\Phi}_j = 0 \tag{25}$$

Estabelecendo que para uma estrutura em movimento, $\hat{\Phi}_j$ não pode assumir um valor nulo na Equação 25. Assim, a única solução que pode atender a igualdade nula é descrita na Equação 26 (BRASIL & DA SILVA, 2013).

$$\det\left|K - \omega_j^2 M\right| = 0 \tag{26}$$

A solução da Equação 25, caracteriza um problema de autovalor e autovetor, cuja solução determina as “n” frequências naturais e os referentes modos de vibração da estrutura, respectivamente. Porém, devido ao fato de ser uma solução de um sistema homogêneo (Equação 24), os coeficientes do autovetor $\hat{\Phi}_j$ representa um múltiplo escalar qualquer onde importará apenas os valores relativos entre os coeficientes (LIMA & SANTOS, 2008). Os métodos de solução do problema de autovalores e autovetores se encontram na seção 3.5.1 do texto.

O conjunto dos “n” autovetores ($\hat{\Phi}_j$) de uma estrutura podem ser escritos matricialmente em uma matriz denominado como Matriz Modal (Φ) na Equação 27.

$$\Phi = [\hat{\Phi}_1 \quad \dots \quad \hat{\Phi}_n] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{j1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Os “n” autovalores (ω_n^2) podem ser representados de maneira matricial através da Matriz Espectral (Ω):

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

3.3 ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

Esta seção visa explanar a concepção e métodos de determinação de propriedades de rigidez e de massa que representam estruturas com múltiplos graus de liberdade, partindo de matrizes elementares de barras componentes (tanto de massa quanto de rigidez), passando pela composição e aplicação, se necessárias, das matrizes de rotação das mesmas, até a representação da estrutura completa através das matrizes globais de massa e rigidez.

Para tanto será feita uma breve revisão do Método das Forças de modo a se compreender a técnica de obtenção dos coeficientes de rigidez empregados no Método dos Deslocamentos e consequentemente na análise matricial de estruturas.

3.3.1 Método das Forças ou da Flexibilidade

O Método das Forças consiste em obter os esforços hiperestáticos (X_i) presente na estrutura real hiperestática por meio de superposições de soluções básicas isostáticas, utilizando condições de compatibilidade para os

deslocamentos. O método elimina os vínculos redundantes na estrutura real para criar o sistema principal (SP), que atuara como estrutura para as soluções básicas do problema (MARTHA, 2010).

Para a determinação do coeficiente de rigidez pelo Método das Forças, adota-se um exemplo simplificado de uma barra bi engastada (Figura 5) de comprimento "ℓ", onde $\mathrm{d_i}$ representa as deslocabilidades.



Figura 4 - Sistema real (DE SOUZA & SORIANO, 2004)

Aplicando uma rotação unitária em $\mathrm{d_2}$, ocorre a formação de esforços hiperestático resistente ao deslocamento ($\mathrm{X_i}$).

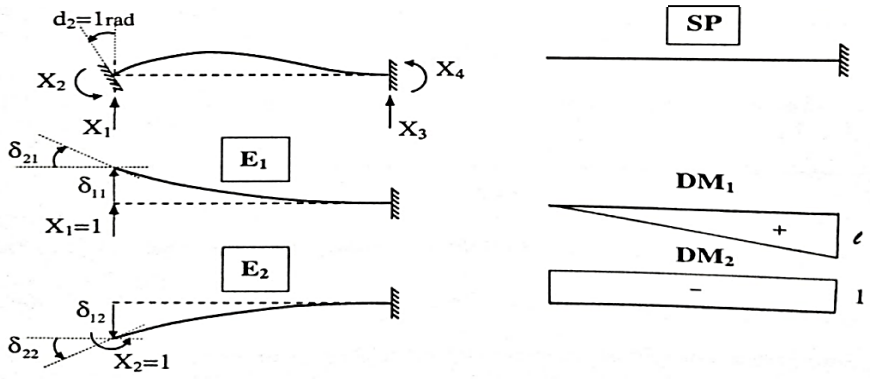


Figura 5 - Barra bi engastada com rotação unitária *(DE SOUZA & SORIANO, 2004)*

Para a Figura 5, a solução básica da estrutura real é formada pelas estruturas $\mathrm{E_1}$ e $\mathrm{E_2}$ e seus respectivos diagramas de momentos fletores (. O caso $\mathrm{E_1}$ é o sistema principal sob a ação de uma força virtual unitária no sentido de $\mathrm{d_1}$, e os coeficientes de flexibilidade δ_{11} (em $\mathrm{d_1}$) e δ_{21} (em $\mathrm{d_2}$) são relativos da aplicação dessa força unitária. O caso $\mathrm{E_2}$ é de construção similar ao $\mathrm{E_1}$ para um momento unitário em $\mathrm{d_2}$, e resulta nos coeficientes δ_{12} (em $\mathrm{d_1}$) e δ_{22} (em $\mathrm{d_2}$). Logo, as equações de compatibilidade para os deslocamentos do sistema real ($\mathrm{d_1} = 0$ e $\mathrm{d_2} = 1$) resultantes para a rotação unitária imposta, será (DE SOUZA & SORIANO, 2004):

$$\begin{cases} \delta_{11}\mathrm{X_1} + \delta_{12}\mathrm{X_2} = 0 \\ \delta_{21}\mathrm{X_1} + \delta_{22}\mathrm{X_2} = 1 \end{cases} \tag{29}$$

Os coeficientes de flexibilidade (δ_{ij}) são determinados pelo princípio das forças virtuais (Equação 30) como sendo o cálculo de uma integral, para o comprimento “l” da barra, que combina os diagramas dos momentos fletores ($M_i M_j$) com o parâmetro $1/EI$ multiplicando o resultado. Onde “E” é o módulo de elasticidade e “I” é o momento de inércia em relação ao eixo perpendicular ao plano (MARTHA, 2010).

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_i M_j dx \tag{30}$$

A Equação 31 apresenta a solução dos os coeficientes de flexibilidade:

$$\begin{cases} \delta_{11} = \dfrac{1}{EI}\displaystyle\int_0^l x^2\, dx = \dfrac{l^3}{3EI} \\ \delta_{12} = \delta_{21} = \dfrac{1}{EI}\displaystyle\int_0^l x\, dx = \dfrac{l^2}{2EI} \\ \delta_{22} = \dfrac{1}{EI}\displaystyle\int_0^l 1\, dx = \dfrac{l}{EI} \end{cases} \tag{31}$$

Com a substituição da Equação 31 na 29, pode-se obter os valores dos hiperestáticos X_1 e X_2 que atuam na direção de d_1 e d_2 para manter a estrutura em equilíbrio (Equação 32). Esses esforços hiperestáticos são numericamente iguais aos coeficientes de rigidez (k).

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{6EI}{l^2} \\ X_2 = \dfrac{4EI}{l} \end{cases} \tag{32}$$

3.3.2 Método da Rigidez ou Deslocamentos

O método dos deslocamentos ou rigidez é amplamente utilizado em implementações computacionais. O método envolve a determinação dos deslocamentos nodais, denominados de graus de liberdade, através das equações

de equilíbrio. Diferentemente do método das forças em que vínculos são eliminados esforços unitários são aplicados nos pontos de eliminação de vínculos, no método da rigidez vínculos fictícios são adicionados e deslocamentos unitários são aplicados em um sistema com todos os graus de liberdade restringidos (hipergeométrico) (DE SOUZA & SORIANO, 2004).

O método de construção é similar ao método das forças utilizando a superposição de soluções básicas. Entretanto, ao invés de obter esforços em vínculos excedentes (esforços hiperestáticos) são calculados inicialmente os deslocamentos nodais do sistema real por meio de um sistema de equações de equilíbrio. Conforme demonstrado pelo método das forças, os coeficientes de rigidez atuam quando um deslocamento unitário é imposto, com a finalidade de manter o equilíbrio de uma barra (LEET, UANG, & GILBERT, 2009).

Considerando o exemplo (Figura 6), para a obtenção da matriz de rigidez local de uma barra biengastada de pórtico plano que foi decomposta em configurações de deformadas elementares.

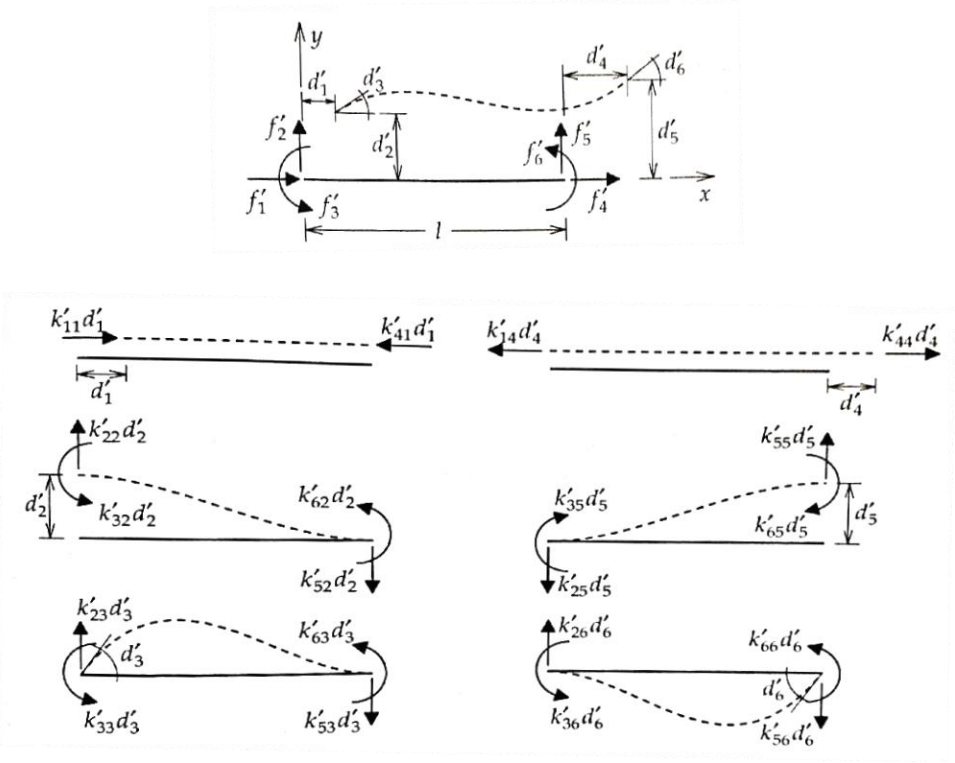


Figura 6 - Barra de pórtico plano isolada e suas configurações de deformadas elementares *(MARTHA, 2010)*

A superposição das deformadas elementares resulta na seguinte relação de igualdade entre os produtos dos coeficientes de rigidez k'_{ij} com os deslocamentos em d'_j e as forças nodais f'_i que atuam na deslocabilidades d'_i. Logo, a superposição de todos as configurações de deformadas elementares produz a seguinte relação matricial (Equação 33), onde $[k']$ é a matriz de rigidez local para uma barra de pórtico plano biengastado (MARTHA, 2010).

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{11} & 0 & 0 & k'_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{22} & k'_{23} & 0 & k'_{25} & k'_{26} \\ 0 & k'_{32} & k'_{33} & 0 & k'_{11} & k'_{36} \\ k'_{41} & 0 & 0 & k'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k'_{52} & k'_{53} & 0 & k'_{55} & k'_{56} \\ 0 & k'_{62} & k'_{63} & 0 & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \tag{33}$$

Assim, pelo método de obtenção da matriz de rigidez local e dos coeficientes de rigidez descrito anteriormente, obtém-se para qualquer barra sem articulação (todos os deslocamentos d'_j ocorrem), a matriz de rigidez local pela Equação 34.

$$[k'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Para barra com rótula na extremidade inicial e engaste na extremidade final (não ocorre rotação em d'_3) a matriz de rigidez local será dada pela Equação 35:

$$[k'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Para barra com rótula na extremidade final e engaste extremidade na inicial (não ocorre rotação em d'_6), se obtém a Equação 36:

$$[k'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Para barra com rótula nas duas extremidades (não ocorre rotações em d'_3 e d'_6), ocorre na seguinte matriz da Equação 37:

$$[k'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

3.3.3 Matriz de Massa

A matrizes de massa elementares podem ser discretas (concentradas) ou consistentes (distribuída). Enquanto a primeira considera um sistema linearmente independente para considerações de massa, as segunda admite uma participação relativa da massa nos graus de liberdades do elemento estrutural (CHOPRA, 2012).

3.3.4 Matriz de Massa Discreta ou Concentrada

Para a matriz de massa discreta, é considerado que o elemento do pórtico (Figura 7) com a notação de massa por unidade de comprimento m ($\mathrm{m} = \rho \mathrm{A}$), é resultante do produto da massa específica do material ρ por sua área de seção transversal A, e seu é o comprimento é dado por “l”.

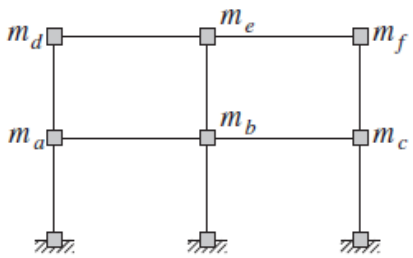


Figura 7 - Estrutura com massa concentrada *(CHOPRA, 2012)*

Para essa forma de matriz, considera-se que a massa dos elementos é dividida entre os pontos nodais de suas extremidades, e cujos valores são atribuídos aos graus de liberdade relativo às translações destes pontos, obtém-se uma matriz diagonal elementar (local) de massa (SORIANO, 2014). Para um elemento de pórtico plano, a matriz consistente assumira a seguinte forma:

$$[m'] = \frac{ml}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ sim. & . & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Os elementos nulos da matriz diagonal de massa local, correspondem ao momento de inércia de massa, que é comum ser desconsiderado devido ineficácia de obter resultados mais exatos com sua consideração (BRASIL & DA SILVA, 2013).

3.3.5 Matriz de Massa Consistente

Para a matriz de massa consistente, considera-se as equações de um elemento finito na formulação do deslocamento (Equação 39):

$$u(t) = Nu^{(e)}(t) \quad (39)$$

onde u é o vetor dos deslocamentos de um ponto, N é uma matriz de funções de interpolação (equações da linha elástica dos elementos) e $u^{(e)}$ é o vetor dos deslocamentos nodais do elemento (SORIANO, 2014).

Para a aceleração, reescreve a equação do elemento finito (Equação 39):

$$\ddot{u}(t) = N\ddot{u}^{(e)}(t) \quad (40)$$

Similar ao método dos deslocamentos, a obtenção dos coeficientes de massa m_{ij} será feito por superposição dos efeitos de deslocamentos unitários dos nós do elemento (CHOPRA, 2012).

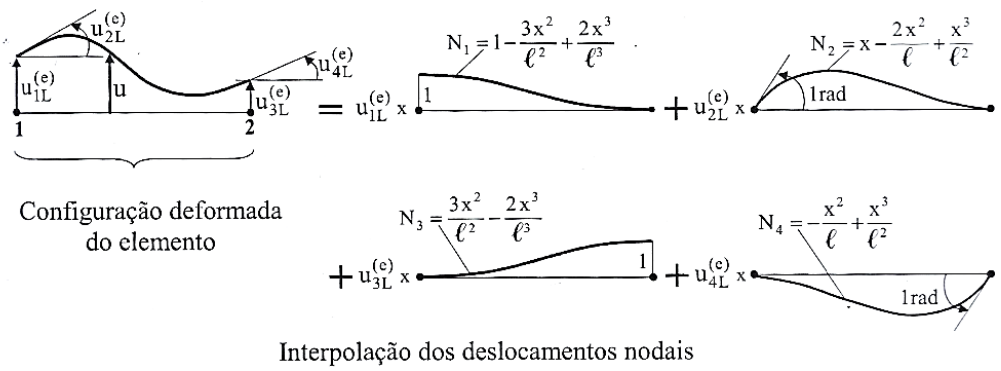


Figura 8 - Campo de deslocamentos para um elemento de viga *(SORIANO, 2014)*

A Figura 8 é o efeito de deformação de deslocamentos unitários em uma viga, com N sendo a equação da linha elástica do elemento deformado para cada deslocamento imposto. De forma similar a Equação 30 (obtenção dos coeficientes de flexibilidade), o trabalho virtual da força de inércia fornece o coeficiente de massa como a soma da integral das equações elásticas (N_i e N_j) dos casos i e j ao longo do comprimento “l” da viga, com o parâmetro “m” multiplicando o resultado da integral (BRASIL & DA SILVA, 2013):

$$m_{ij}(t) = m\int_0^l N_i N_j dx \tag{41}$$

Desta forma, os coeficientes de massa são montados na matriz de massa elementar (local) de forma similar ao método dos deslocamentos. Fornecendo assim, a seguinte matriz de massa local e simétrica para pórticos planos:

$$[m'] = \frac{m'l}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ . & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ . & . & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ . & . & . & 140 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 156 & -22l \\ \text{sim.} & . & . & . & . & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

3.3.6 Matriz de Rotação

Tratando-se de elementos estruturais, os coeficientes, sejam eles de massa consistente ou de rigidez, estão associados às deslocabilidades (graus de liberdade) no sistema de eixos local. Assim, deve-se formular uma transformação das matrizes elementares locais para adequá-la aos eixos globais da estrutura, através utilização de matrizes de rotação. Para tanto, é preciso associar as deslocabilidades do sistema local “xy” para o sistema de eixos global “XY” (LEET, UANG, & GILBERT, 2009).

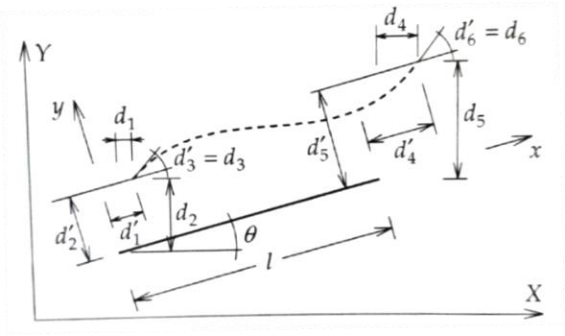


Figura 9 - Deslocabilidades locais em uma barra em função do sistema de eixos globais (MARTHA, 2010)

Utilizando-se as relações trigonométricas em função do ângulo θ, com base na Figura 9, para decompor os deslocamentos globais (d_i) em deslocamentos locais (d'_i), conforme a Equação 43:

$$\begin{cases} d'_1 = d_1 \cos\theta + d_2 \operatorname{sen}\theta \\ d'_2 = -d_1 \operatorname{sen}\theta + d_2 \cos\theta \\ d'_3 = d_3 \\ d'_4 = d_4 \cos\theta + d_5 \operatorname{sen}\theta \\ d'_5 = -d_4 \operatorname{sen}\theta + d_5 \cos\theta \\ d'_6 = d_6 \end{cases} \tag{43}$$

Escrevendo essas funções de modo generalizado:

$$\{d'\} = [R]\{d\} \tag{44}$$

Reescreve-se a Equação 43 matricialmente para a Equação 45:

$$[\mathrm{R}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \mathrm{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Por ser ortogonal, a matriz de rotação possui sua inversa igual à sua transposta $[\mathrm{R}]^{-1} = [\mathrm{R}]^{\mathrm{T}}$. Desta maneira, obtém-se que os deslocamentos globais para uma barra inclinada será (MARTHA, 2010):

$$\frac{\{\mathrm{d}'\}}{[\mathrm{R}]} = \{\mathrm{d}\} \rightarrow \{\mathrm{d}\} = [\mathrm{R}]^{\mathrm{T}}\{\mathrm{d}'\} \quad (46)$$

De maneira semelhante a formulação de rotação dos deslocamentos (Equação 44), a decomposição das forças globais (f) que atuam no mesmo sentido que os deslocamento, é feita para em forças locais (f') (MARTHA, 2010):

$$\{\mathrm{f}'\} = [\mathrm{R}]\{\mathrm{f}\} \quad (47)$$

E considerando o vetor de forças no sistema local $\{\mathrm{f}'\}$ como o produto da matriz dos coeficientes de rigidez locais $[\mathrm{k}']$ pelo vetor dos deslocamentos locais $\{\mathrm{d}'\}$ (DE SOUZA & SORIANO, 2004).

$$\{\mathrm{f}'\} = [\mathrm{k}']\{\mathrm{d}'\} \quad (48)$$

Com essa dedução, pode-se formular a equação da rotação para a matriz de rigidez. Substituindo a Equação 44 e 47 na 48 para obter a rotação da matriz local de rigidez para o sistema de eixos globais:

$$[\mathrm{R}]\{\mathrm{f}\} = [\mathrm{k}'][\mathrm{R}]\{\mathrm{d}\} \rightarrow \{\mathrm{f}\} = [\mathrm{R}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{k}'][\mathrm{R}]\{\mathrm{d}\} \quad (49)$$

Adotando o trabalho do sistema de forças em relação aos eixos globais similar a Equação 48 ($\{\mathrm{f}\} = [\mathrm{k}]\{\mathrm{d}\}$), para substituir na Equação 49 e obter a equação de rotação da matriz de rigidez local para um sistema de coordenadas globais (Equação 50).

$$[\mathrm{k}]\{\mathrm{d}\} = [\mathrm{R}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{k}'][\mathrm{R}]\{\mathrm{d}\} \rightarrow [\mathrm{k}] = [\mathrm{R}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{k}'][\mathrm{R}] \quad (50)$$

Segundo SORIANO (2014), tanto as formas de matrizes de rotação (Equação 45), quanto a aplicação destas em matrizes elementares de massa consistente, são as mesmas utilizadas na rotação de matrizes de rigidez elementares de rigidez. Assim a Equação (50) é reescrita para a Equação (51).

$$[\mathrm{m}] = [\mathrm{R}]^{\mathrm{T}}[\mathrm{m}'][\mathrm{R}] \tag{51}$$

onde, $[\mathrm{m}]$ é a matriz de massa elementar consistente em coordenadas globais, e $[\mathrm{m}']$ é a matriz de massa elementar consistente em coordenadas locais.

3.3.7 Matrizes Globais

Para a composição de matrizes globais de estruturas, é necessário levar em consideração a soma da contribuição dos coeficientes das matrizes elementares em coordenadas globais, referentes aos elementos individuais da estrutura. Assim, é gerado uma matriz quadrática com a mesma ordem do número máximo de graus de liberdade da estrutura completa, a qual é denominada “matriz global” (de massa ou de rigidez). Assim, numera-se os graus de liberdade da estrutura de maneira generalizada (Figura 10). A numeração realizada das deslocabilidades é atribuída às respectivas matrizes locais de coeficientes rotacionadas (Equação 50 e 51), sejam elas de massa ou de rigidez, correspondente aos graus de liberdade enumerados (SORIANO & DE SOUZA, 2004).

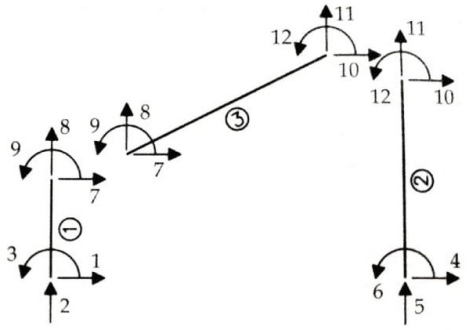


Figura 10 – Sistema de coordenadas global (MARTHA, 2010)

Adotando como exemplo a barra 1 (Figura 10), a numeração dos graus de liberdade arbitrados para um sistema global, indicam as numerações das linhas e colunas (por simetria) da matriz elementar rotacionada. As colunas e linhas da matriz elementar, apresentarão os graus de liberdade 1, 2, 3, 7, 8, e 9 (as deslocabilidades d_1, d_2, d_3, d_7, d_8 e d_9) para a barra 1 e seus respectivos coeficientes, conforme a Figura 11.

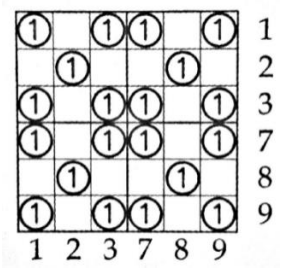


Figura 11 – Disposição dos coeficientes de rigidez na barra 1 *(MARTHA, 2010)*

A transferência dos coeficientes das matrizes elementares rotacionadas para a global, será realizada pelo vetor de espalhamento, que realiza a correspondência entre a numeração dos graus de liberdade da estrutura realizado e os respectivos coeficientes das matrizes elementares rotacionadas, somando os coeficientes relativos à mesma posição na matriz global, caso preciso. Assim, alocando os coeficientes nas linhas e colunas correspondentes à numeração dos graus de liberdade na matriz globais (Figura 10). Onde, k_{ij} tem o índice i como a linha e o índice j como a coluna correspondente (Figura 12).

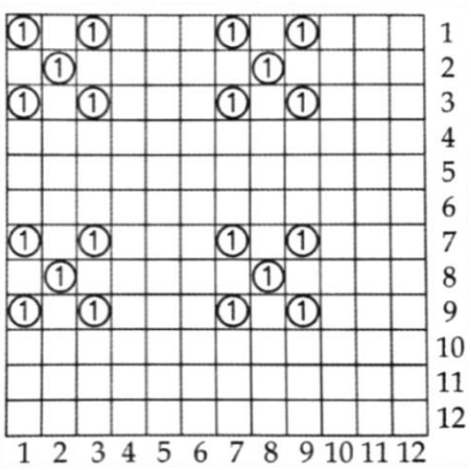


Figura 12 - Espalhamento da matriz da matriz de rigidez local para a global *(MARTHA, 2010)*

3.4 FREQUÊNCIA NATURAL E MODOS DE VIBRAÇÃO

Como mencionado anteriormente, a determinação numérica dos parâmetros modais, em sistema sob vibração livre não amortecidas, é dada por um problema de álgebra linear, denominado autovalores e autovetores (DE SOUZA & SORIANO, 2004).

3.4.1 Autovalores e Autovetores

Pela definição em álgebra linear, um vetor $\mathrm{v} \neq 0$ é um autovetor se a imagem em um operador linear $\mathrm{T}(\mathrm{v})$ for um múltiplo escalar de v. Sendo $\mathrm{T}(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$, o múltiplo escalar λ é um autovalor (valor próprio) de $\mathrm{T}(\mathrm{v})$ associado ao autovetor (vetor próprio) de v (STEINBRUCH & WINTERLE, 1987).

Para obter as frequências naturais e os modos de vibração, serão expostos dois métodos de resolução do problema de autovalores e autovetores, a saber: o método de resolução direta e um dos métodos de resolução iterativa.

3.4.2 Método de Resolução Direta

Com a resolução do determinante da Equação 25, os valores das raízes obtidas para ω_j^2 pelo polinômio gerado, são o quadrado das frequências naturais (BRASIL & DA SILVA, 2013).

Com o resultado dos valores das raízes obtidas para ω_j^2 substituídos na equação $\widehat{\Phi}_j\left(\mathrm{K} - \mathrm{M}\omega_j^2\right) = 0$, o resultado fornecerá um vetor. Para cada valor ω_j^2, obtém-se um vetor $\widehat{\Phi}_j$ com n-ésimos coeficientes. Pode-se agrupar esses vetores na matriz modal (Φ) (Equação 27) (LIMA & SANTOS, 2008).

A matriz modal terá a ordem de seus autovetores condicionada a matriz espectral Ω (Equação 28), que possui os autovalores ω_j^2 ordenados do menor valor para a frequência natural ou frequência fundamental (ω_1^2), avançando para o maior valor calculado (ω_n^2).

As amplitudes dos modos naturais são arbitrárias, não apresentando um valor absoluto, devido ao fato que a equação do problema de autovalores e autovetores é indeterminada. Porém, a razão entre seus valores, para um mesmo modo, é constante (BRASIL & DA SILVA, 2013).

3.4.3 Método de Jacobi

O método de Jacobi é um dos mais antigos métodos de iteração para a resolução de problemas de autovalores. Responsável por utilizar uma sequência de transformações ortogonais (k=1,2,...,n) para ortogonalizar a matriz transformada (A') (SORIANO, 2014).

O método consiste em considerar o problema de autovalor pela forma reduzida ($AX = X\Omega$), onde:

$$\begin{cases} A = M^{-1/2} K M^{-1/2} \\ X = M^{1/2} \Phi \end{cases} \tag{52}$$

Assim, considera-se que a matriz A irá sofrer uma sequência de transformações para se tornar uma matriz ortogonalizada. As transformações ortogonais ocorrerem do seguinte modo (SORIANO, 2014):

$$A^{(k+1)} = T^{(k)T} A^{(k)} T^{(k)} \tag{53}$$

onde T é uma matriz ortogonal de rotação da forma (Equação 54):

$$T^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & . & 0 & 0 & . & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & . & \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 0 & . & 1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & \cos\theta & . & -\sin\theta & 0 & . & 0 \\ \vdots & . & . & . & \ddots & \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 0 & . & 0 & \sin\theta & . & \cos\theta & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & . & 0 & 1 & . & 0 \\ \vdots & . & \vdots & \vdots & . & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & . & 0 & 0 & . & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{linha i} \\ \\ \leftarrow \text{linha j} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (54)$$

$$\begin{matrix} & & & \uparrow & & \uparrow & & & \\ & & & \text{coluna i} & & \text{coluna j} & & & \end{matrix}$$

A substituição da matriz de rotação na Equação 53, gera os novos coeficientes para a matriz A', com a condição de que o coeficiente a_{ij} seja anulado. O coeficiente a_{ij} da matriz A, tem como referência de linha (i e j) e coluna (i e j) idêntico ao da matriz de rotação T. Os coeficientes da matriz $A^{(k)}$ serão modificados da seguinte maneira (WILKINSON, 1965):

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ji}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \left(a_{jj}^{(k)} - a_{ii}^{(k)}\right)\cos\theta\sin\theta \\ a_{il}^{(k+1)} = a_{li}^{(k+1)} = a_{li}^{(k)}\cos\theta + a_{li}^{(k)}\sin\theta \qquad \text{em que } l \neq i \text{ e } l \neq j \\ a_{jl}^{(k+1)} = a_{lj}^{(k+1)} = a_{lj}^{(k)}\cos\theta + a_{lj}^{(k)}\sin\theta \qquad \text{em que } l \neq i \text{ e } l \neq j \\ a_{ii}^{(k+1)} = a_{ii}^{(k)}\cos^2\theta - a_{jj}^{(k)}\sin^2\theta + 2a_{ij}^{(k)}\cos\theta\sin\theta \\ a_{jj}^{(k+1)} = a_{ii}^{(k)}\text{sen}^2\theta - a_{jj}^{(k)}\cos^2\theta + 2a_{ij}^{(k)}\cos\theta\sin\theta \end{cases} \quad (55)$$

Com a condição de a'_{ij} ser um valor nulo, reescreve a primeira expressão do sistema de equações (Equação 55) para:

$$0 = a_{ij}^{(k)}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \left(a_{jj}^{(k)} - a_{ii}^{(k)}\right)\cos\theta\sin\theta \quad (56)$$

Fazendo a substituição na Equação 68 de $(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ e $(\cos\theta\sin\theta)$ de forma equivalente por suas identidades geométricas, que são $\cos(2\theta)$ e $\sin(2\theta)/2$, respectivamente. Obtém-se:

$$0 = a_{ij}^{(k)}\cos 2\theta + \left(a_{jj}^{(k)} - a_{ii}^{(k)}\right)\frac{1}{2}\sin 2\theta \rightarrow a_{jj}^{(k)} - a_{ii}^{(k)} = -\frac{a_{ij}^{(k)}\cos 2\theta}{\frac{1}{2}\sin 2\theta} \quad (57)$$

Dando continuidade a solução da Equação 57:

$$a_{jj}^{(k)} - a_{ii}^{(k)} = -2a_{ij}^{(k)} \cot 2\theta \rightarrow \cot 2\theta = \frac{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}{2a_{ij}^{(k)}} \tag{58}$$

Isolando a Equação 58 em função do ângulo θ:

$$2\theta = \operatorname{actg} \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} \rightarrow \theta = \frac{1}{2} \operatorname{actg} \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} \tag{59}$$

O coeficiente $a_{ij}^{(k)}$ escolhido, deve ser de preferência o maior valor fora da diagonal para que a convergência da matriz A em uma matriz ortogonal, possa ser efetuada com mais eficiência, reduzindo o número de iterações. (WILKINSON, 1965)

Considerando que as colunas e linhas (i e j) da matriz de rotação T são dispostas de modo a zerar o coeficiente $a_{ij}^{(k)}$, deve-se considerar que a combinação das matrizes de rotação utilizado no método ira convergir para a matriz modal X, através da seguinte notação (SORIANO, 2014):

$$T'^{(k)} = T^{(0)} T^{(1)} T^{(2)} \dots T^{(k)} \tag{60}$$

onde $T^{(0)} = I$ (matriz identidade).

Assim, obtém-se a matriz rotação que converge para a matriz modal normalizada Φ (WILKINSON, 1965):

$$T'^{(k)} = X \rightarrow \Phi = M^{-1/2} X \tag{61}$$

Através de sucessivas transformações para anular o coeficiente de posição ($a_{ij}^{(k)}$), obtém-se a ortogonalização da matriz A que converge para a matriz espectral que contêm as frequências naturais (SORIANO, 2014).

$$A^{(k)} = \Omega \tag{62}$$

3.4.4 Equações de Hermite

A representação da deformação ao longo de uma barra, na qual são aplicados deslocamentos nodais de rotação e translação pode ser feita utilizando o método das forças para obter a correspondente elástica entre dois nós em função de um comprimento de barra dx, conforme a Figura 13 (DE SOUZA & SORIANO, 2004).

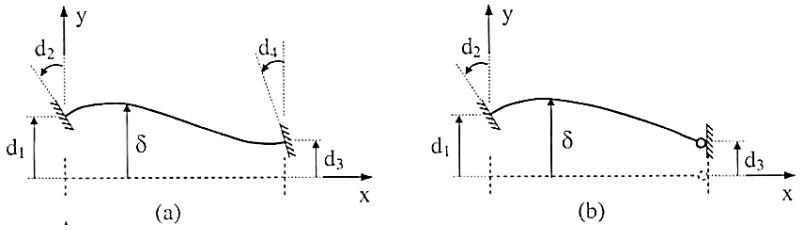


Figura 13 - Linha elástica de barra *(DE SOUZA & SORIANO, 2004)*

Desta maneira, Soriano (2014) expõem a equação de Hermite para representação destes elementos. Para uma barra biengastada, representada na Figura 13 (a), a equação (63) é dada como:

$$\delta = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right) d_1 + \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) d_2 + \left(\frac{3x^2}{l^2} + \frac{3x^3}{l^3}\right) d_3 + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) d_4 \qquad (63)$$

No caso de barra de extremidades engastada e rotulada, Figura 13 (b), obtém-se a Equação 64:

$$\delta = \left(1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}\right) d_1 + \left(x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2}\right) d_2 + \left(\frac{3x^2}{2l^2} + \frac{3x^3}{2l^3}\right) d_3 \qquad (64)$$

3.5 FENÔMENO DE RESSONÂNCIA

As primeiras frequências naturais exercem um papel fundamental na utilização e na prevenção de danos de uma estrutura. Sendo estabelecido em norma que para estruturas de concreto a frequência fundamental de uma estrutura deve exceder em pelo menos 20% a frequência crítica. Esta normatização tem a

função de evitar que as estruturas possam entrar em ressonância devido a sua utilização (LIMA, 2014).

A amplitude dos deslocamentos de uma estrutura está diretamente ligada as forças excitadoras que perturbam o seu estado estático de equilíbrio. Porém, quando o movimento oscilatório de um sistema coincida com uma das frequências naturais da estrutura, ocorre o fenômeno de ressonância (YONEDA, 1982).

O fenômeno de ressonância permite que as vibrações forçadas em uma estrutura amplifiquem os deslocamentos sem aumento da energia total (aumento das forças externas) (YONEDA, 1982).

3.6 FUNDAMENTOS DE PYTHON E PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETO

A metodologia deste trabalho acadêmico abordará aspectos relacionados ao código fonte do programa Aeolos. Para uma melhor interproteção do capítulo mencionado, é útil contemplar alguns fundamentos e termos da Programação Orientada a Objeto, assim como algumas particularizações e características da linguagem Python.

O Python é uma linguagem de programação orientada a objeto. Essa linguagem é considerada interpretada, ou seja, os códigos ou programas, relacionados à mesma são escritos em scripts que são processados por um interpretador de Python. Entre as características do Python está a disponibilidade de bibliotecas padrão, e a possibilidade de criar e importar outras bibliotecas complementares. Por essa razão, a utilização dessa linguagem é considerada de modo relativamente fácil, no que tange a produção de código. Outra vantagem da programação em Python é o “open-source”, o que significa que diversos membros qualificados de sua comunidade podem participar na implementação e melhoria de suas bibliotecas, assim como seus usuários. Essas bibliotecas são disponibilizadas aos usuários da linguagem de forma gratuita (LUTZ, 2009).

Na linguagem em Python, o módulo é definido como sendo meramente um arquivo de código, que pode conter desde simples programas até complexas abstrações de classes (PHILLIPS, 2010).

A Programação Orientada a Objeto, é um paradigma de programação direcionada à modelagem e funcionalidade de objetos. Os objetos em programação são análogos aos objetos do mundo físico, como sendo entidades que possuem características próprias (atributos), e que podem sofrer e produzir ações que alterem seu estado e características através de métodos (que pertencem às diferentes classes de objetos). O objeto é definido como uma parte de memória alocada, que possuí valores próprios e conjuntos de operações relacionadas à mesma. A consideração do objeto ser uma instancia de uma classe, subtende-se que a instancia é como uma cópia da classe, contendo todas os atributos e métodos da mesma, e é atribuída a uma variável quando inicializada (PHILLIPS, 2010).

A classe define um tipo de objeto, que pode ser implementado pelo usuário, caso sua concepção e utilização não tenha direta relação com as classes pré-definidas da linguagem (classes “built-in”). Quando instanciada, contém todos os atributos e métodos definidos para a classe em questão (STROUSTRUP, 1997).

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para alcançar os objetivos propostos neste trabalho, foi necessário a implementação de um código computacional que estivesse de acordo com as teorias estabelecidas pelos autores das bibliografias estudadas na fundamentação teórica, assim como a validação do código. Neste capítulo são descritas as etapas de desenvolvimento que foram utilizadas para a para o desenvolvimento deste Trabalho de Conclusão de Curso.

4.1 METODOLOGIA DO TRABALHO

A metodologia utilizada para alcançar os objetivos propostos por este trabalho acadêmico foi realizada em duas partes.

A primeira parte é à organização da fundamentação teórica e revisão bibliográfica, que contemplam toda a teoria e referencial acadêmico necessários para a implementação e legitimação do programa proposto. Apenas menções e referencias serão feitas sobre o capítulo que aborda este tema, tendo em vista que precede o atual.

A segunda parte consiste em traduzir a fundamentação teórica necessária em linguagem Python 3.7, para a determinação dos parâmetros modais. Essa parte refere-se à implementação do programa propriamente dito. O critério de escolha desta linguagem computacional foi sua relativa facilidade de utilização e a disponibilidade das bibliotecas “open-source”. A programação da ferramenta computacional foi dividida em duas etapas, cada etapa resultou em um módulo do programa final (“CoreDynamics.py” e “Main.py”). O programa foi nomeado “Aeolos”, em homenagem ao deus grego do vento, com a consideração de que este fenômeno natural, segundo BLESSMANN (1998), tem direta relação com vibrações em estruturas civis usuais.

Este Trabalho de Conclusão de Curso possui um manual de utilização do Aeolos em seu apêndice (Apêndice A), onde podem ser constatadas regras referentes às numerações dos nós, barras, e graus de liberdades. No manual há as informações de unidades para as dimensões de estrutura, módulos de elasticidade, momentos de inércia, peso especifico dos materiais, entre outras. O manual contém as especificações sobre os formatos de arquivos que podem ser exportados com os valores dos parâmetros modais calculados pelo Aeolos, são eles os formatos .xlsx (planilha), .csv (“Comma-separated values”), e dxf (arquivo CAD).

Como a explanação da metodologia do software visa uma abordagem técnica dos aspectos do programa, recomenda-se a leitura prévia do manual para maior familiarização com a interface gráfica e o funcionamento do software.

4.1.1 Programação Do Aeolos

Conforme mencionado, a programação do Aeolos foi dividida em dois módulos, que resultaram de duas etapas de construção do programa.

A primeira etapa da implementação computacional, em ordem cronológica de desenvolvimento realizado, refere-se ao módulo “CoreDinamics.py”. Esse módulo tem a função de processamento dos dados que são fornecidos pelo usuário, com a finalidade de calcular os parâmetros modais (frequência natural e modos de vibração) através da resolução do problema de autovalores e autovetores, satisfazendo o objetivo proposto por este trabalho.

Para a segunda etapa, foi desenvolvido o módulo “Main.py”, que contém os elementos de interface gráfica, os elementos de exportação dos dados gerados, e elementos de manipulação dos dados fornecidos pelo usuário referentes à estrutura em análise (salvar e abrir arquivos de estrutura do programa). Este módulo é responsável pelos elementos que compõe os campos relativos às entradas de dados do usuário e os elementos relacionados à plotagem dos modos de vibração.

4.1.2 Metodologia De Validação

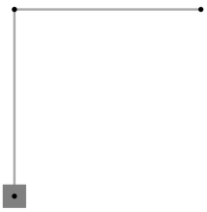
A metodologia de validação foi efetuada de modo a obter um aumento progressivo na complexidade dos modelos. Inicialmente, foram utilizados modelos mais simples expostos na literatura, referenciada na fundamentação teórica. Com a verificação destes exemplos, foram utilizados diferentes modelos estruturais de maior complexidade, para comparação de resultado com o programa SAP2000 21 EVAL, que é a versão gratuita de avaliação disponibilizada para estudantes e desenvolvido pela empresa CSI. A justificativa e critérios de adoção dos modelos mencionados encontram-se no Quadro 3, porém os resultados numéricos e de plotagens, ambos parciais, se encontram no Capítulo 5, assim como os resultados completos no Apêndice B.

O critério utilizado para a escolha do SAP como comparativo de resultados foi a sua reputação no meio profissional e acadêmico e sua disponibilidade na versão educacional.

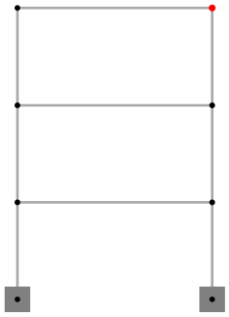
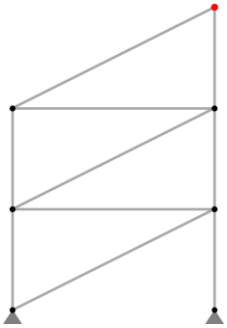
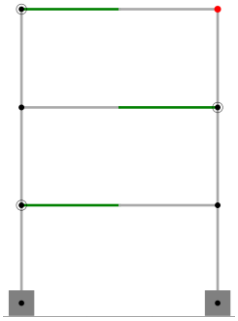
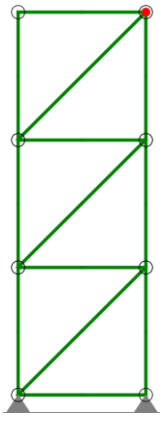
Para cada um dos modelos comparativos diretos entre softwares, foi escolhido o nó que apresentava a maior coordenada na direção positiva do eixo “Y”, assim como na direção do eixo “X”, para padronizar a análise dos resultados, realizada com os valores dos modos de vibração já normalizados, como é indicado na seção 5.1 deste trabalho. E embora não seja o escopo deste trabalho acadêmico, também consta nos exemplos de comparação, uma estrutura de treliça, com o intuito de demonstrar a capacidade do Aeolos em determinar parâmetros modais deste tipo de modelo estrutural.

Segundo Lima e Santos (2008), os deslocamentos reais gerados pela resposta dinâmica de estruturas em movimento harmônico são determinados pelo método de sobreposição modal. Para isso, é necessário a determinação dos parâmetros modais. Os modos de vibração não representam os deslocamentos em unidades de comprimento, e são apenas espaços vetoriais onde os deslocamentos reais ocorrem. Porém, Chopra (2012) nos exemplos 1 e 2, de forma didática, aplica os valores normalizados destes vetores de forma direta a seus respectivos graus de

liberdade. O SAP, de maneira geral, atribuí os valores calculados destes vetores nas direções dos deslocamentos correspondentes, considerando tais deslocamentos em metro, ou radianos. Dessa forma, para a análise do comportamento das deformadas das estruturas, este trabalho considera os autovetores como deslocamentos em metros para translações, e radianos para rotações. A descrição dos modelos utilizados na validação são apresentas no quadro a seguir (Quadro 3).

Modelo	Descrição
	Modelo 1 – Bibliografia. Com o intuito de validar o Aeolos, é sensato iniciar com estruturas simples, e com resultados validados pela literatura. Este modelo e seus resultados foram retirados da literatura do Chopra (2012). O modelo consiste em uma viga engastada em balanço, e possui uma matriz de massa discreta.
	Modelo 2 – Bibliografia. Modelo retirado da literatura do Chopra (2012), apresentando uma estrutura em “L” invertido, com a matriz de massa discreta. O fato de possuir barras paralelas aos eixos globais e perpendiculares em si implica no uso de diferentes matrizes de rotação elementares.
	Modelo 3 – Bibliografia. O modelo consiste de uma barra bi engastada, retirada da literatura de Lima e Santos (2008). Este modelo foi utilizado para a validação da matriz de massa consistente do Aeolos. O autor utiliza a matriz de massa consistente para a determinação dos modos de vibração neste exemplo.
	Modelo 4 – Bibliografia. O modelo consiste de uma barra bi rotulada, retirada da literatura de Soriano (2014). Este modelo foi utilizado para a análise de convergência de frequências naturais para matrizes de massa consistente e discreta do Aeolos e SAP em comparação com os resultados obtidos pelo autor.

Quadro 3 - Modelos estruturais escolhidos para a validação, continua na página 47 (Fonte: Autores, 2019)

	Modelo 5 – Comparativo de Software (Pórtico Convencional Engastado). A concepção deste modelo estrutural é exaustivamente utilizada na bibliografia em exemplos e exercícios (SORIANO, 2014). A modelagem apresentada é de notável similaridade com estruturas do cotidiano. Foi considerado sensato iniciar as comparações de valores entre os softwares, utilizando uma idealização de um edifício de 3 andares.
	Modelo 6 – Comparativo de Software (Pórtico Convencional Engastado e Contraventado). Pode ser considerada uma variação do Modelo 4, que explora a aplicação das matrizes de rotação para os elementos de barras inclinadas do pórtico, assim como o uso de apoios rotulados fixos.
	Modelo 7 – Comparativo de Software (Pórtico Convencional Rotulado). O modelo pode ser considerado uma variação do Modelo 4, que explora a utilização de rótulas nos elementos estruturais do pórtico, dada a existência da implementação de matrizes de rigidez elementares no Aeolos para os casos de vinculo rótula-engastes (Equação 35 e 36).
	Modelo 8 – Comparativo de Software (Estrutura Inteiramente Treliçada) Sendo conhecida a particularização de esforços internos em treliça, dado o fato de que somente sofrem solicitações axiais, é útil verificar o comportamento do Aeolos perante tais estruturas. O modelo também serve para testar o uso da matriz de rigidez elementar rótula-rótula (Equação 37) implementada no Aeolos.

Quadro 3 - Modelos estruturais escolhidos para a validação, conclusão na página 48

(Fonte: Autores, 2019)

4.2 METODOLOGIA DO CÓDIGO COMPUTACIONAL AEOLOS

O software desenvolvido oferece ao usuário uma ferramenta computacional para a determinação dos parâmetros modais de uma estrutura aporticada plana. O programa foi desenvolvido para que o usuário insira os dados necessários para cálculo da estrutura no software (entrada de dados), e através de rotinas programadas de cálculos (processamento), o programa possa retornar os resultados desejados (saída de dados). O funcionamento do programa pode ser esquematizado seguindo o fluxograma (Figura 14).

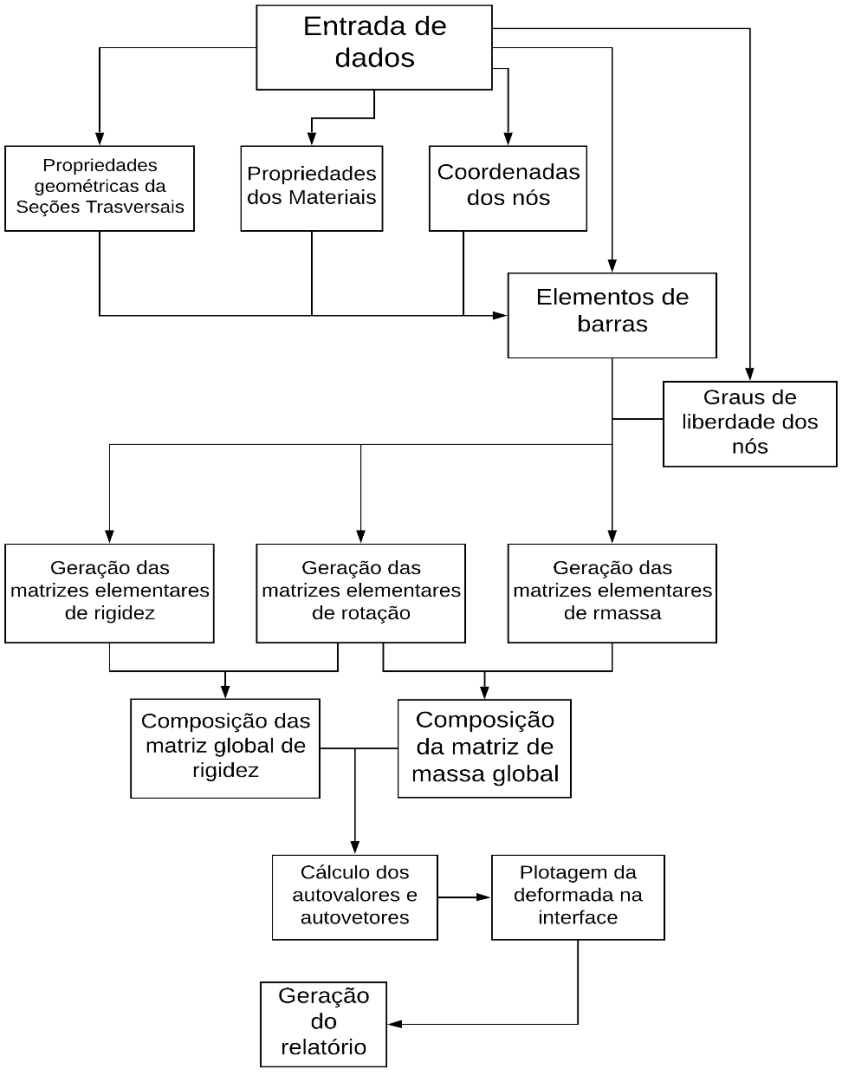


Figura 14 - Fluxograma geral da entrada, processamento e saída de dados do software Aeolos
(Fonte: Autores, 2019)

A convenção de sinais utilizados pelo Aeolos foi a convenção de Green, que determina como positivos as translações no eixo “X” para cima, eixo “Y” para a direita, e rotações no eixo “Z” com sentido anti-horário. (MARTHA, 2010) Como mostra a Figura 15.

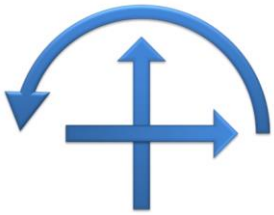


Figura 15 - Convenção de Green (Fonte: Autores, 2019)

4.2.1 Entrada de Dados

A entrada de dados consiste em o usuário informar através da interface gráfica do programa, que está contida no módulo “Main”, e que foi desenvolvida em PyQt4, quais os valores das variáveis que descrevem a estrutura, e que são necessárias para o funcionamento do software. Cada subitem desta seção representa uma aba de entrada (Figura 16) de dados do Aeolos contendo essas variáveis, que também são abordadas com riqueza de detalhes no manual do Aeolos (Apêndice A).

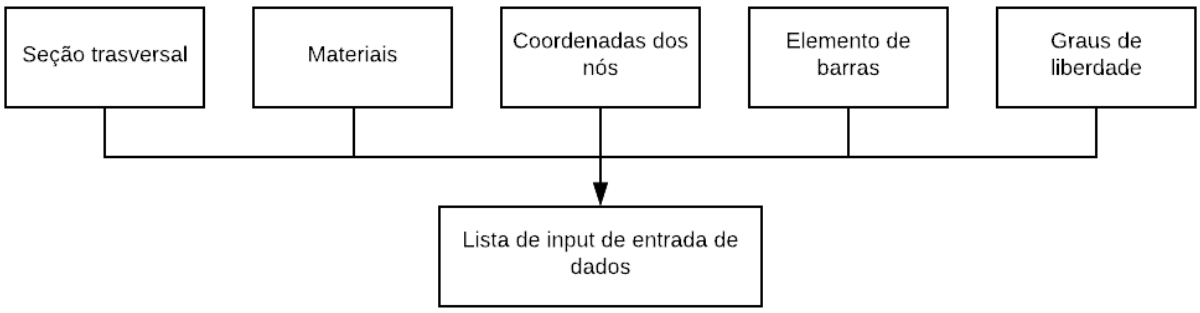


Figura 16 – Fluxograma geral da entrada de dados (Fonte: Autores, 2019)

4.2.2 Seção Transversal

Refere-se às informações da seção transversal que compõe as propriedades geométricas dos elementos de barra. São eles: identificação numérica arbitrada pelo usuário; área da seção transversal; base e altura da seção transversal; momento de inércia em relação ao eixo z do plano de plotagem, sendo a convenção de eixos descrita no manual do software (Apêndice A), e nas considerações prévias dos parâmetros de validação do Capitulo 5. Dadas as diferentes formas de seções transversais e momentos de inércia possíveis, a determinação desses valores fica à cargo do usuário.

4.2.3 Propriedades dos Materiais

Refere-se às propriedades dos materiais dos elementos que compõem o sistema. São eles: identificação numérica arbitrada, módulo de elasticidade; peso específico.

4.2.4 Coordenadas dos Nós

Refere-se de informações dos nós que compõem as estruturas. Consiste de: numeração arbitrária para o elemento da estrutura; coordenada na direção do eixo “X” global; coordenada na direção do eixo “Y” global; fornecimento do valor a ser considerado para o campo “Apoio” relativo ao nó. Os valores para “Apoio” podem ser: 0 para a inexistência de um apoio; 1 para apoio tipo 1 (restrito apenas para translação em “Y”; 2 para apoio tipo dois (apenas rotação em torno de “Z” livre); 3 para engaste.

4.2.5 Elementos de Barras

Os elementos de barras são definidos informando: número de identificação do nó inicial do elemento; a existência de uma rotula neste nó para esta barra (valor 1 para sim e 0 para não); número de identificação do nó final do elemento; a existência de uma rotula neste nó para esta barra (valor 1 para sim e 0 para não); número de identificação do tipo de seção transversal que o elemento possui; número de identificação do tipo de material que compõem o elemento.

4.2.6 Graus de Liberdade nos Nós

Os graus de liberdade devem ser numerados respeitando os critérios estabelecidos no manual do Aeolos. Uma vez realizada, o usuário deve informar: número de identificação do nó; número do grau de liberdade atribuído a translação em “X”; número do grau de liberdade atribuído a translação em “Y”; número do grau de liberdade em relação a rotação em “Z”.

4.3 PROCESSAMENTO

A interface (contida no módulo “Main”) faz a leitura das informações fornecidas pelo usuário e utiliza o módulo “CoreDynamics” para realizar o processamento dos dados informados pelo usuário, visando a determinação dos autovalores e autovetores da estrutura. Logo, as classes e objetos referidos a diante se encontram dentro deste último módulo. Sua estrutura e funcionalidades serão descritas nos subitens conseguintes:

4.3.1 Criação de Objetos Elementares

A classe Element é responsável por criar objetos que representam elementos estruturais dentro do programa (Figura 17), tomando por base as informações que a interface gráfica disponibiliza após a entrada de dados do usuário . Ela também cria, através de cálculos e formulações, novos atributos que serão consumidos por classes subsequentes do programa.



Figura 17 – Fluxograma geral da criação dos objetos Element (Fonte: Autores, 2019)

Listando, suas funcionalidades são:

1. Leitura da lista resultante da entrada de dados fornecida pelo usuário
2. Criação de novos objetos referentes aos elementos estruturais importados
3. Criação com rotinas de cálculos de novos atributos elementares para os elementos estruturais, sendo eles:
    a. Comprimento dos elementos de barras do sistema estrutural realizado pelos nós que incidem os elementos:

$$l = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2} \tag{65}$$

    b. Cálculo dos cossenos diretores dos elementos em relação aos eixos x e y globais:

$$\cos\alpha = \frac{x_f - x_i}{l} \qquad \cos\beta = \frac{y_f - y_i}{l} \qquad (\alpha + \beta = 90°) \tag{66}$$

c. Cálculo da massa do elemento por unidade de comprimento em função do peso específico fornecido (γ) e área de seção transversal (A):

$$\mathrm{m} = \frac{\gamma \times 1000 \times \mathrm{A}}{9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \tag{67}$$

4. Criação de identificadores gerais para a classe à qual pertence os novos objetos de elementos estruturais, sendo os identificadores:
   a. Número do maior identificador de grau de liberdade do sistema.
   b. Número dos identificadores de graus de liberdade relativas às restrições de apoio da estrutura.

Atributos de Objetos da classe Element:
- Coordenadas nodais - Incidência - Área de seção transversal dos componentes - Módulo de elasticidade do material - Massa linear de cada componente - Condições de vínculos - Momento de inercia da seção transversal - Número de identificação do elemento em nós - Número de identificação dos graus de liberdade referentes a cada nó - Cossenos diretores da barra

Quadro 4 – Atributos de objetos da classe Element (Fonte: Autores)

4.3.2 Geração de Matriz de Rigidez Elementar

A classe K_ElementMatrix é responsável por gerar a matriz de rigidez de cada elemento estrutural, tomando por base os objetos criados pela classe Element,

e sendo esses passados como argumento na inicialização da classe em questão. Ao utilizar o método elementary() desta classe, a mesma identificará as condições de vinculação dos elementos estruturais, podendo eles ser:

- Ambos os nós engastados (Equação 34)
- Nó inicial rotulado; nó final engastado (Equação 35)
- Nó inicial engastado; nó final rotulado (Equação 36)
- Nó inicial rotulado; nó final rotulado (Equação 37)

Com os parâmetros fornecidos, o método aplica os atributos da classe Element à estrutura da matriz de rigidez determinada, sendo eles:

- A – Área da seção transversal do elemento.
- E – Módulo de elasticidade do elemento.
- I – Momento de inércia da seção transversal do elemento.
- L – Comprimento longitudinal do elemento.

Para barras com extremidade solta, ou seja, elementos em balanço, a matriz de rigidez a ser considerada é a mesma para o caso de vínculos engaste-engaste, tendo em vista que o procedimento para elaboração da matriz elementar de rigidez é a mesma. Logo, não demandam nenhum tratamento especial.

4.3.3 Geração de Matriz de Rotação

Uma vez obtido a matriz de rigidez do sistema, o método rotation() também aplica os valores já contidos nos objetos da classe Element, porém agora em uma matriz de rotação, aplicando os cossenos diretores em relação aos elementos de barras formados e aos eixos globais “x” e “Y”:

O método rotation() retorna a matriz de rotação do elemento. O método k_rotated() retorna a matriz de rigidez rotacionada do elemento estrutural.

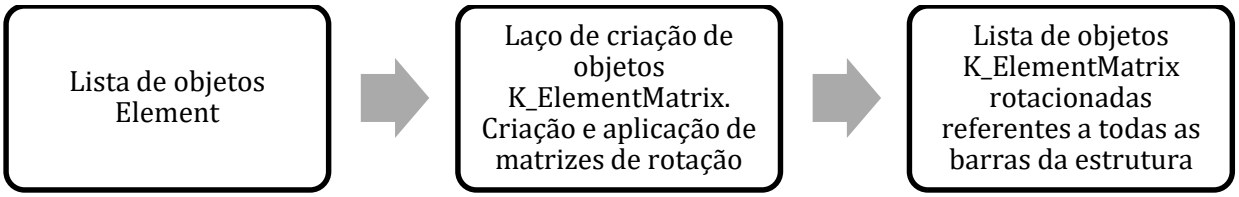


Figura 18 – Fluxograma geral da geração de matrizes de rotação (Fonte: Autores, 2019)

4.3.4 Geração de Matriz de Massa

A classe MassMatrix é responsável por gerar a matriz de massa de cada elemento estrutural, tomando por base os objetos criados pela classe Element, os quais são passados como argumento na inicialização desta classe. O método generator() desta classe utiliza os atributos de massa linear (m) e comprimento da barra (L) para a determinação a montagem da matriz de massa (M) para elementos de pórtico plano, conforme embasamento teórico para matrizes discretas de massa (Equação 38). Para a particularização de casos de estruturas treliçadas a matriz de massa elementar discreta não pode contar com elementos iguais a zero em sua diagonal principal. Para isto, foi atribuído valores infinitesimalmente pequenos para solucionar este problema, sem prejuízos aos resultados finais. Dessa forma, a matriz da Equação 38 se torna a matriz dada na Figura 19.

```
M = numpy.matrix([
                 [  1.,    0.,       0.,    0.,    0.,       0.],
                 [  0.,    1.,       0.,    0.,    0.,       0.],
                 [  0.,    0.,   1.e-30,    0.,    0.,       0.],
                 [  0.,    0.,       0.,    1.,    0.,       0.],
                 [  0.,    0.,       0.,    0.,    1.,       0.],
                 [  0.,    0.,       0.,    0.,    0.,   1.e-30]
                 ])

M = m * L / 2 * M
```

Figura 19 - Matriz elementar de massa discreta no programa (Fonte: Autores, 2019)

Para matrizes de massa consistente, para elementos de pórticos, tem-se a matriz da Equação 42, deve ser rotacionada pelo método rotated(), para sua própria classe, similar à matriz de rigidez elementar.

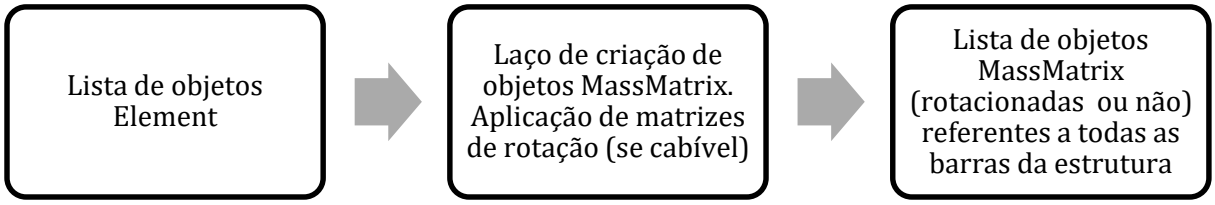


Figura 20 – Fluxograma geral da geração da matriz de massa (Fonte: Autores, 2019)

4.3.5 Geração das Matrizes Globais de Rigidez e de Massa

A classe GlobalMatrix tem a função de utilizar as matrizes de rigidez rotacionadas e a matrizes de massa (rotacionada ou não dependendo da sua natureza) de cada elemento estrutural para formar as respectivas matrizes globais (Figura 22 e Figura 22), que são utilizadas na determinação dos autovalores e autovetores. Quando inicializada esta classe, utiliza-se a variável de classe proveniente da classe Element, referente ao número total dos graus de liberdade da estrutura, gerando assim uma matriz quadrada de ordem numericamente igual ao número de graus de liberdade da estrutura. O método GlobalMatrix.distributor() demanda os argumentos referentes às listas de incidência de cada elemento da estrutura, assim como suas matrizes, sejam elas de rigidez elementar rotacionada, ou de massa elementar, pois ambas utilizarão essa classe para formação de suas respectivas matrizes globais. O método global_free_K() elimina as linhas e colunas das matriz de rigidez e de massa globais relativas aos graus de liberdade restritos dos apoios.

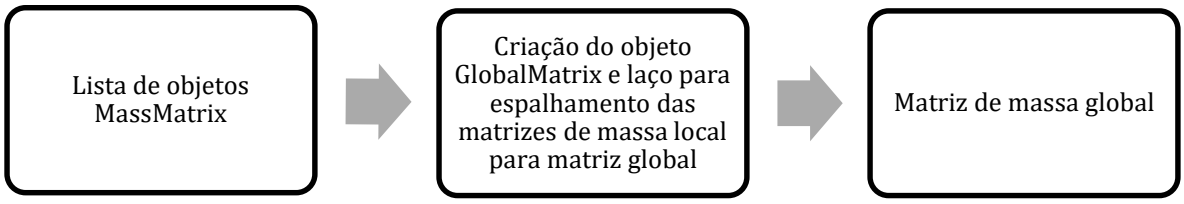


Figura 21 - Fluxograma geral da geração das matrizes globais de massa (Fonte: Autores, 2019)

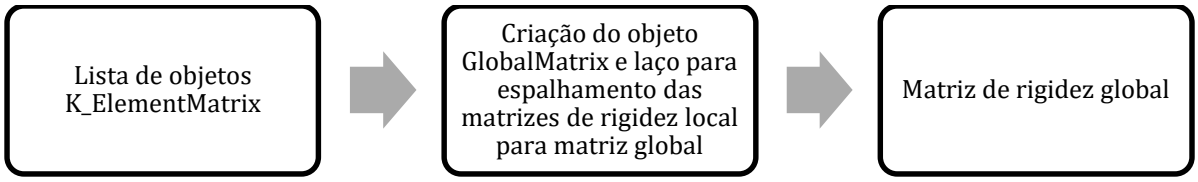


Figura 22 - Fluxograma geral da geração das matrizes globais de rigidez (Fonte: Autores, 2019)

4.3.6 Autovalores e Autovetores

Para a solução do problema de autovalores e autovetores descrita no embasamento teórico, utiliza-se a biblioteca “scipy” da linguagem Python. Para a classe “linalg”, a função “eig()” (do inglês: “Eingelvalues”) recebe o parâmetro da matriz global de rigidez e da matriz global de massa, para retornar os autovalores e autovetores da estrutura (Figura 23).

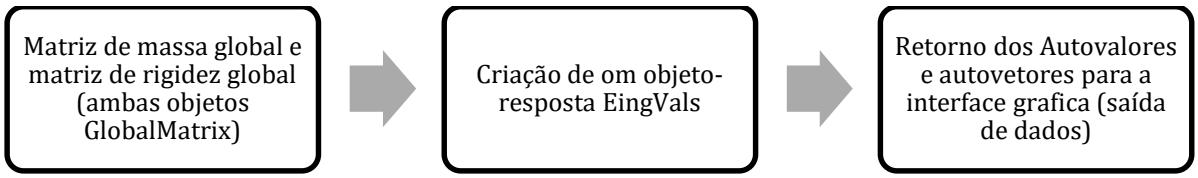


Figura 23 - Fluxograma geral da solução do problema de autovalores e autovetores no Aeolos (Fonte: Autores, 2019)

4.4 SAÍDA DE DADOS

A saída de dados consiste na plotagem da estrutura deformada, pela interface, de acordo com os modos de vibração, através das equações de Hermite. Utilizando a biblioteca pandas, é possível exportar os valores obtidos pelo Aeolos dos parâmetros modais para arquivos de planilhas de extensão .xlsx. e .csv. Utilizando a biblioteca dxfwrite, é possível exportar a deformada de cada modo da estrutura para arquivo. dxf, que pode ser utilizado em programas CAD.

5 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

Como mencionado no embasamento teórico, não é possível determinar valores absolutos para modos de vibração, sendo relevantes apenas as proporções que os deslocamentos mantêm dentro de um mesmo modo. Para fins de determinação do erro obtido de maneira mais precisa, para as tabelas de comparação de modos, encontrado no Apêndice B, foi adotado como critério de normalização o maior deslocamento (ou rotações), em termos numéricos, da coluna “Aeolos” e seu valor homólogo na coluna “SAP”, passando o valor destes deslocamentos a ser igual a 1. Estes deslocamentos parametrizados, se encontram nas colunas “Aeolos – Normalizado” e “SAP - Normalizado”. Para um mesmo modo de vibração, todos os deslocamentos são divididos pelo valor inicial parametrizador. Desta maneira, é possível aferir o quanto os valores obtidos pelo Aeolos divergem dos obtidos pelo SAP, tomando como base um deslocamento unitário, resultante da normalização. A normalização dos exemplos retirados da bibliografia será discutida em cada caso. Seguindo a recomendação da bibliografia (BLESSMANN, 1998), foram comparados apenas os dez primeiros modos de vibração e frequências das estruturas obtidas através do SAP e do Aeolos.

5.1 CONSIDERAÇÕES PRÉVIAS

Parte do Apêndice B deste presente trabalho, foi replicado para análise dos modelos 5 a 8, neste capítulo, onde será contemplado apenas as primeiras 10 frequências naturais, os 4 primeiros modos de vibração normalizados e suas respectivas plotagens via Aeolos, sendo comparado apenas os valores de deslocamentos relativos ao nó de cada estrutura descrita no Quadro 3 (Modelos estruturais escolhidos para a validação).

Em relação à visualização dos modos, devido à impossibilidade de sobrepor as plotagens originais oriundas de cada um dos softwares, foi necessário realizar uma adaptação da interface de plotagem do Aeolos. Fornecendo as matrizes

modais normalizadas utilizadas para os comparativos deste capítulo. Através do código fonte, é possível sobrepor as plotagens utilizando os dados originados de ambos os softwares. Dessa forma é possível visualizar o quanto as divergências numéricas afetam a deformada da estrutura, utilizando a mesma ferramenta de plotagem. As plotagens dos modos originários do SAP são feitas na cor azul, enquanto as do Aeolos são na cor vermelha, em linhas tracejadas (dashed line), e sobrepostas às plotagens do SAP, sendo que estrutura original aparece plotada ao fundo na cor preta. Assim, onde as diferenças numéricas forem mais relevantes, será possível evidenciar através das cores onde as plotagens entre o Aeolos e o SAP divergem entre si.

5.2 PARÂMETRO DE MATERIAIS E SEÇÕES TRANSVERSAIS PARA MODELAGEM DAS ESTRUTURAS

Os parâmetros de materiais adotados para os modelos 1, 2, 5, 6 e 7:

- Módulo de elasticidade: $\mathrm{E} = 20\ \mathrm{GPa}$
- Área seção transversal: $\mathrm{A} = 0{,}06\ \mathrm{m}^2$
- Peso específico: $\gamma = 25\ \mathrm{kN/m}^3$
- Momento de inercia (eixo 3): $\mathrm{I}_3 = 8{,}0\ 10^{-4}\mathrm{m}^4$
- Dimensões: Base (eixo 3) $= 0{,}15\ \mathrm{m}$; Altura (eixo 2) $= 0{,}4\ \mathrm{m}$

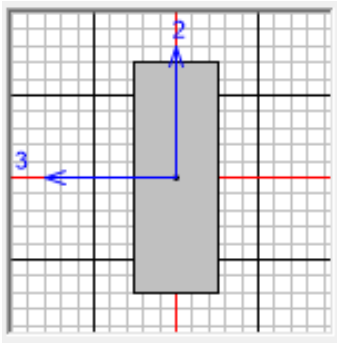


Figura 24 - Seção transversal (Fonte: SAP)

Os parâmetros de materiais adotados para o modelo 8:

- Módulo de elasticidade: $\mathrm{E} = 200\ \mathrm{GPa}$

- Área seção transversal: $\mathrm{A} = 0{,}0004\ \mathrm{m}^2$
- Peso específico: $\gamma = 77\ \mathrm{kN/m}^3$
- Momento de inercia (eixo 3): $\mathrm{I}_3 = 1{,}333\mathrm{x}10^{-8}\mathrm{m}^4$
- Dimensões: Base (eixo 3) $= 0{,}02\ \mathrm{m}$; Altura (eixo 2) $= 0{,}02\ \mathrm{m}$

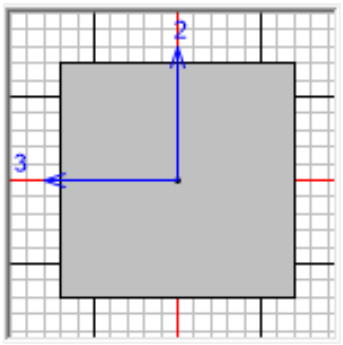


Figura 25 - Seção transversal (Fonte: SAP)

Para os modelos 5 a 7, os comprimentos de barras utilizados foram:

- Barras horizontais: $6\ \mathrm{m}$
- Barras verticais: $3\ \mathrm{m}$
- Barras inclinadas (se houverem): $6{,}708\ \mathrm{m}$

Para o modelo 8, os comprimentos de barras utilizadas foram:

- Barras horizontais: $2\ \mathrm{m}$
- Barras verticais: $2\ \mathrm{m}$
- Barras inclinadas: $2{,}823\ \mathrm{m}$

Para os eixos de coordenadas utilizados nos programas em relação ao plano de observação, cabe as seguintes considerações:

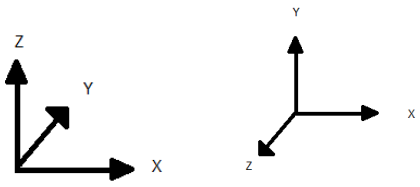


Figura 26 - Eixo de coordenadas SAP (esquerda) e eixo de coordenadas Aeolos (direita) (Fonte: Autores, 2019)

A equivalência de eixos em relação à Figura 26, será dada com as seguintes considerações:

- SAP:
- Eixo 3 = eixo “Z” positivo
- Eixo 2 = eixo “X” negativo

- Aeolos:
- Eixo 3 = eixo “Y” negativo
- Eixo 2 = eixo “X” negativo

5.3 COMPARATIVO DE MODELOS

5.3.1 Modelo 1: Bibliografia

Este modelo foi retirado da bibliografia (CHOPRA, 2012, pg. 413), e sua configuração é contemplada na Figura 27. Consiste de uma viga em balanço, engastada em sua extremidade esquerda. O autor analisa apenas translações (u_1 e u_2), referentes aos nós discretizados na barra, cuja direção de deslocamento coincidem com o eixo “Y” do Aeolos e “Z” do SAP.

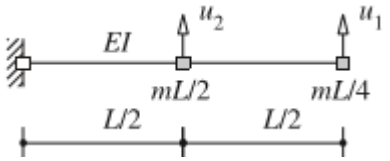


Figura 27 - viga em balanço, engastada *(CHOPRA, 2012)*

Utilizando o Método da Rigidez, Chopra (2012) obtém a matriz de rigidez global da estrutura (Equação 68.a). Considerando a matriz de massa discreta para este problema, Chopra (2012) utiliza a matriz de massa global (Equação 68.b):

$$\mathrm{K} = \frac{48\mathrm{EI}}{7\mathrm{L}^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix} \text{ (a)} \qquad \mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{mL}/4 & 0 \\ 0 & \mathrm{mL}/2 \end{bmatrix} \text{ (b).} \qquad (68)$$

Resolvendo o problema de autovalor e autovetor pelo método clássico, tendo em vista a simplicidade do modelo estrutural, Chopra (2012) obtém as frequências naturais em função dos parâmetros de massa (m), módulo de elasticidade (E), momento de inércia (I) e comprimento de barra (L), esquematizados na Figura 27, e as soluções são dadas na Equação 69 (a e b).

$$\omega_1 = \frac{3{,}15623}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}\ \text{(a)} \qquad \omega_2 = \frac{16{,}2580}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}\ \text{(b).} \tag{69}$$

A mesma concepção de estrutura, ou elemento de estrutura, deste modelo simplificado, foi modelado no Aeolos e no SAP, com parâmetros idênticos ao utilizados para a comparação dos modelos 5 a 7, verificados na seção 5.2.

A matriz de massa discreta, implementada no Aeolos, considera metade da massa própria de cada elemento estrutural para cada grau de liberdade relativo a translação de cada um de seus nós, somando-os se houver mais de uma barra para cada nó. Desta maneira, a utilização da mencionada matriz no Aeolos terá o mesmo efeito prático da idealização realizada por Chopra (2012), no que tange atribuições de massa. Arbitrando L = 4 metros, e "m" igual a massa linear do elemento estrutural, descrita na Equação 70, e utilizando os parâmetros mencionados no parágrafo anterior:

$$m = \frac{\gamma * A}{G} = \frac{25\frac{(kg*m/s^2)}{m^3} * 0{,}06\ m^2 * 1000}{9{,}81\frac{m}{s^2}} = 152{,}905\ kg/m \tag{70}$$

Substituindo os parâmetros (E, I, m e L) na Equação 69 (a e b), iguais aos utilizados nos modelos 5 a 7, obtêm-se:

$$\omega_1 = 10{,}1559\ Hz\ \text{(a)} \qquad \omega_2 = 52{,}3138\ Hz\ \text{(b)} \tag{71}$$

Utilizando a matriz de rigidez para elementos biengastados do Aeolos (parâmetros "rotulas" iguais a zero para os nós da barra), assim como os parâmetros já mencionados (E, I, m e L), obteve-se as frequências naturais equivalentes da Equação 71 para este software. A mesma estrutura foi modelada via SAP, e os comparativos de frequências naturais podem ser observados no Quadro 5:

Fequência	Aeolos	Modelo	Erro (%)
	Hz	**Hz**	
1	1,0156E+01	1,0156E+01	-9,5843E-05
2	5,2314E+01	5,2314E+01	2,2391E-04

(a)

Fequência	SAP	Modelo	Erro (%)
	Hz	**Hz**	
1	1,0108E+01	1,0156E+01	-4,7431E-01
2	5,0497E+01	5,2314E+01	-3,4725E+00

(b)

Quadro 5 – Comparação dos resultados para as frequências naturais obtidas pelo Aeolos (a) e o SAP (b), com os valores da Equação 71 (Fonte: Autores, 2019)

Dado o fato de Chopra (2012) considerar apenas translações no eixo “Y”, o sistema global de graus de liberdade apresenta dimensão 2x2. Portanto, é esperado que sejam encontradas apenas duas frequências naturais, assim como vetores de deslocamentos com duas dimensões. O Aelos é implementado considerando 3 graus de liberdade por nó, sendo assim um sistema global de graus de liberdade, para este modelo, de dimensão 6x6, com vetores de 6 dimensões. Logo, é relevante para comparação apenas as duas primeiras frequências encontradas pelo Aeolos, assim como apenas as translações em direção do eixo “Y”. A numeração dos graus de liberdade da estrutura representada no Aeolos é dada na Figura 28.

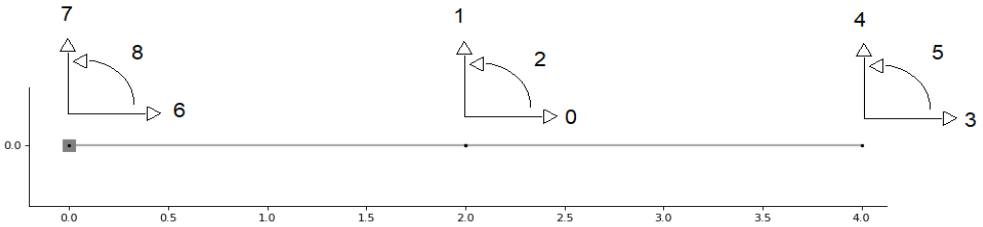


Figura 28 – Numeração de graus de liberdade da estrutura da Figura 27 (Fonte: Autores, 2019)

Chopra (2012), obtém como resultado de autovalores para a estrutura, dada na Equação 72 (a e b), já normalizadas em relação ao deslocamento u_1 (Figura 27), correspondente ao deslocamento 4 do Aeolos (Figura 28).

$$\emptyset_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}3274 \\ 1{,}0000 \end{Bmatrix} \text{ (a)} \qquad \emptyset_2 = \begin{Bmatrix} -1{,}5274 \\ 1{,}0000 \end{Bmatrix} \text{ (b)} \tag{72}$$

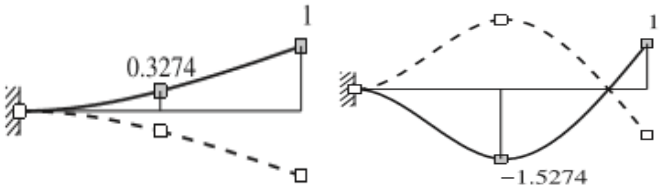


Figura 29 - Deformada da estrutura da Figura 28 para o primeiro (esquerda) e segundo (direita) modos de vibração *(CHOPRA, 2012)*

Com a utilização do Aeolos, obteve-se os resultados dos modos de vibração, desconsiderando os graus de liberdade e modos de vibração irrelevantes para a análise. Normalizando manualmente em função do deslocamento 4 do Aeolos, obtém-se o comparativo dos autovetores obtidos na Equação 72 com o Aeolos (Quadro 6.a) e o SAP (Quadro 6.b).

Grau de Liberdade	Modos					
	1			2		
	Aeolos	Modelo	Erro(%)	Aeolos	Modelo	Erro(%)
1	3.2736E-01	3.2740E-01	-1.1653E-02	-1.5274E+00	-1.5275E+00	-9.0442E-03
4	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00

(a)

Grau de Liberdade	Modos					
	1			2		
	SAP	Modelo	Erro(%)	SAP	Modelo	Erro(%)
1	3.2979E-01	3.2740E-01	7.2958E-01	-1.5274E+00	-1.5275E+00	-1.5161E+00
4	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00

(b)

Quadro 6 – Comparação dos resultados para os modos de vibração obtidos pelo Aeolos (a) e o SAP (b), com os valores da Equação 72 (Fonte: Autores, 2019)

Gerando a plotagem dos referidos modos de vibração no Aeolos, têm-se:

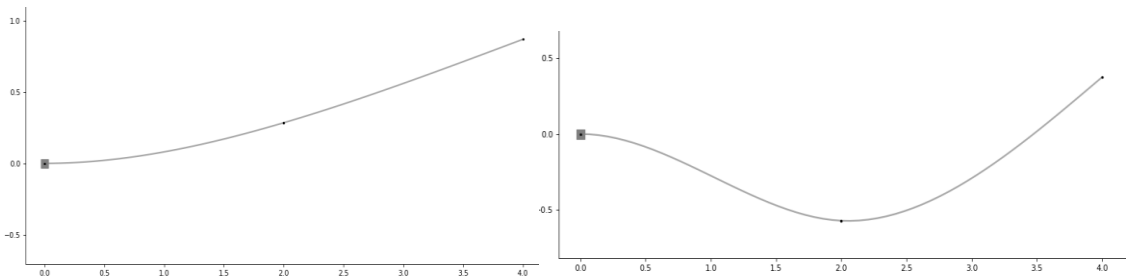


Figura 30 – Plotagem no Aeolos do primeiro modo com o parâmetro fase de plotagem 1 e escala 1 (esquerda), e do primeiro modo com o parâmetro fase de plotagem 0 e escala 1 (direita) (Fonte: Aeolos)

Comparando os resultados obtidos para as frequências naturais (Quadro 5) e os modos de vibração normalizados (Quadro 6), é possível verificar que o Aeolos alcançou resultados idênticos à bibliografia, sendo a pequena divergência nos valores relativo às frequências dado por uma questão de arredondamento, enquanto o SAP obteve erros de até 3,47%. Para modos de vibração, o erro máximo obtido pelo Aeolos foi da ordem de 0,012%, enquanto a do SAP foi de 1,52%.

5.3.2 Modelo 2: Bibliografia

Este modelo foi retirado da bibliografia (CHOPRA, 2012, pg 412) e sua configuração é contemplada na Figura 31. Consiste de duas barras, perpendiculares, engastadas entre si e com o apoio. O autor analisa apenas

translações (u_1 e u_2), referentes ao nó livre discretizado na estrutura, cuja direção de deslocamento coincidem com o eixo “X” (para u_1), e o eixo “Y” do Aeolos, ou “Z” do SAP (para u_2).

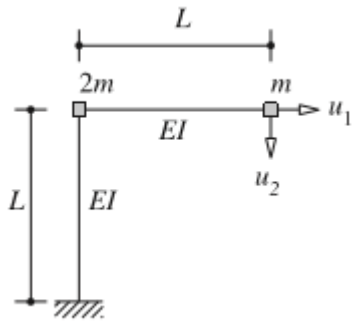


Figura 31 - Duas barras perpendiculares, engastadas entre si e com o apoio engastado *(CHOPRA, 2012)*

Utilizando o Método da Rigidez, Chopra (2012) obtém a matriz de rigidez global da estrutura (Equação 73.a). Considerando a matriz de massa discreta para este problema, Chopra (2012) utiliza a matriz de massa global (Equação 73.b):

$$\mathrm{k} = \frac{6\mathrm{EI}}{7\mathrm{L}^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ (a)} \qquad \mathrm{m} = \begin{bmatrix} 3\mathrm{m} & 0 \\ 0 & \mathrm{m} \end{bmatrix} \text{ (b).} \tag{73}$$

Seguindo o mesmo processo de determinação de autovalor e autovetor do modelo 1, são dadas na Equação 74 (a e b).

$$\omega_1 = \frac{0{,}6987}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{mL}^3}} \text{ (a)} \qquad \omega_2 = \frac{1{,}874}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{mL}^3}} \text{ (b).} \tag{74}$$

A mesma concepção de estrutura, foi modelado no Aeolos, com parâmetros idênticos ao utilizados no modelo 1, com exceção comprimento “L”, ao qual foi atribuído o valor de 3 metros. A massa “m”, que é dada na equação, para manter a equivalência com a matriz de massa discreta implementada no Aeolos, pode ser observada na Equação 75, que foi escrita em função da massa linear “m” do exemplo 1 (Equação 70), aqui chamada de “m1”, uma vez que os parâmetros são os mesmos. As considerações de matriz de rigidez utilizadas no Aeolos também se mantem igual ao modelo 1.

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{m1} * \mathrm{L}}{2} = \frac{152{,}905\ \mathrm{kg/m} * 3\ \mathrm{m}}{2} = 229{,}3578\ \mathrm{kg} \tag{75}$$

Substituindo os parâmetros (E, I e m) na Equação 74 (a e b), iguais aos utilizados no modelo 1, e “m” calculado na Equação 75, obtém-se:

$$\omega_1 = 5{,}6524\ \text{Hz}\ \text{(a)} \qquad \omega_2 = 15{,}1604\ \text{Hz}\ \text{(b)}. \tag{76}$$

Chopra (2012), também obtém os modos de vibração já normalizados:

$$\emptyset_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}0000 \\ 2{,}0970 \end{Bmatrix}\ \text{(a)} \qquad \emptyset_2 = \begin{Bmatrix} 1{,}0000 \\ -1{,}4310 \end{Bmatrix}\ \text{(b)}. \tag{77}$$

Contudo, Chopra (2012) não considera a convenção de Green, utilizado pelo Aeolos, para a translação em “Y”, mas considera para deslocamentos em “X”, como mostra a figura referente aos modos de vibração da estrutura figura (Figura 32), quando comparada com o valor dos resultados apresentados por Chopra (2012) na Equação 77.

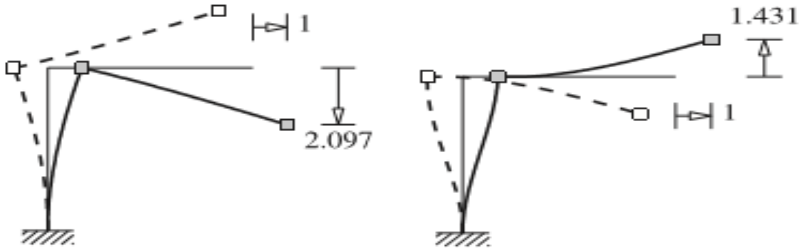


Figura 32 – Deformada relativa ao primeiro (esquerda) e segundo (direita) modos de vibração *(CHOPRA, 2012)*

Dessa maneira, será feita uma pequena adaptação referente a esses valores na normalização dos modos obtidos pelo Aeolos e SAP (Quadro 8). Realizando a enumeração dos graus de liberdade de acordo com o manual o Aeolos, a translação u_1 (Figura 31) corresponde ao grau de liberdade 3, e $-u_2$ correspondente ao grau de liberdade 4 da estrutura no referido programa.

Sendo a análise da estrutura referente a apenas dois graus de liberdade, interessa apenas as duas primeiras frequências obtidas. Modelando a estrutura nos referidos softwares, obtém-se então as frequências naturais (Quadro 7) e os modos de vibração normalizados relativos aos graus 3 e 4 (Quadro 8), com a alteração de sinal para o grau de liberdade 4 (u_2) relativo ao segundo modo de vibração.

Fequência	Aeolos	Modelo	Erro (%)
	Hz	**Hz**	
1	5,6507E+00	5,6524E+00	-3,0463E-02
2	1,5136E+01	1,5160E+01	-1,5818E-01

(a)

Fequência	SAP	Modelo	Erro (%)
	Hz	**Hz**	
1	5,6391E+00	5,6524E+00	-2,3559E-01
2	1,4893E+01	1,5160E+01	-1,7669E+00

(b)

Quadro 7 – Comparação dos resultados para as frequências naturais obtidas pelo Aeolos (a) e pelo SAP (b), com os valores da Equação 76 (Fonte: Autores, 2019)

Grau de Liberdade	Modos					
	1			**2**		
	Aeolos	Modelo	Erro(%)	Aeolos	Modelo	Erro(%)
3	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
4	2.0973E+00	2.0970E+00	1.5893E-02	-1.4247E+00	-1.4310E+00	-4.3706E-01

(a)

Grau de Liberdade	Modos					
	1			**2**		
	SAP	Modelo	Erro(%)	SAP	Modelo	Erro(%)
3	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
4	2.0872E+00	2.0970E+00	-4.6678E-01	-1.4318E+00	-1.4310E+00	5.6901E-02

(b)

Quadro 8 – Comparação dos resultados obtidos para os modos de vibração obtidos pelo Aeolos (a) e o SAP (b), com os valores da Equação 77 (Fonte: Autores, 2019)

Realizando a plotagem dos modos de vibração obtidos pelo Aeolos (Quadro 8.a) no próprio software, tem se as deformadas relativas aos modos de vibração não normalizados (Figura 33):

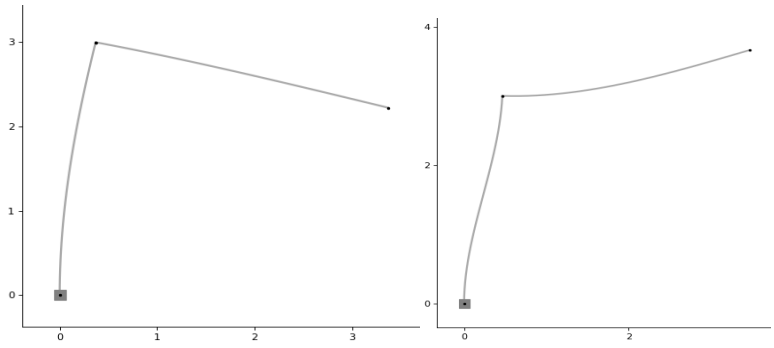


Figura 33 - Plotagem no Aeolos do primeiro modo, com o parâmetro fase de plotagem 1 e escala 1 (esquerda) e do primeiro modo, com parâmetro fase de plotagem 0 e escala 1 (direita) (Fonte: Aeolos)

Comparando os resultados obtidos, tem-se um erro máximo de 0,16% para frequências naturais do Aeolos, enquanto o SAP apresenta erro de 1,76% (Quadro

7). Para modos normalizados, o erro máximo do Aeolos foi de 0,44%, e de 0,47% para o SAP (Quadro 8)

5.3.3 Modelo 3: Bibliografia

Este modelo foi retirado da bibliografia (LIMA & SANTOS, 2008, pg 113), e sua configuração é contemplada na Figura 34. Consiste de uma viga, biengastada, dividida em 4 sub elementos por 3 nós. Assim, o autor analisa apenas translações (d_1, d_3 e d_5), relativos ao eixo "Y", e rotações (d_2, d_4 e d_6) relativos ao eixo "Z", referentes aos nós livres discretizado na estrutura.

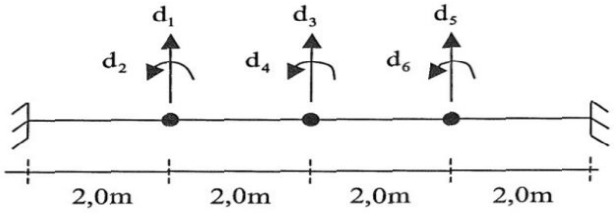


Figura 34 - Viga biengastada, dividida em 4 elementos por 3 nós *(LIMA & SANTOS, 2008)*

É importante ressaltar que para obter os parâmetros modais em uma viga biengastada, é necessário a discretização da mesma em 3 ou mais pontos nodais (mais informações no manual do Aeolos).

Traduzindo a estrutura da Figura 34 para o Aeolos, tem-se a mesma e seus graus de liberdade enumerados na Figura 35:

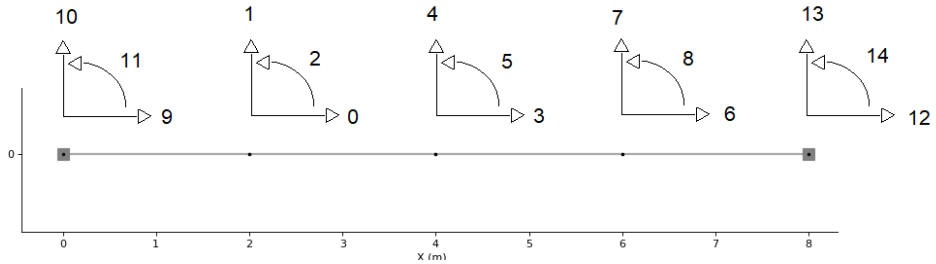


Figura 35 - Graus de liberdade da estrutura da Figura 34 no Aeolos (Fonte: Aeolos)

Lima e Santos (2008), fornecem os parâmetros da estrutura como: E = 2,05× 10^{11} N/m²; m = 6,0× 10^{3} kg/m; I = 3,3415× 10^{-4} m^4.

Lima e Santos (2008), determinam a matriz de rigidez global a utilizando as matrizes de rigidez elementares para cada segmento de barra, de maneira análoga ao modelo 1. Desta maneira, aplicando suas respectivas matrizes de rotação, obtém-se a matriz global de rigidez:

$$K = \begin{bmatrix} 2{,}0550 * 10^8 & 0 & -1{,}0275 * 10^8 & 1{,}0275 * 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}7400 * 10^8 & -1{,}0275 * 10^8 & 6{,}8501 * 10^7 & 0 & 0 \\ -1{,}0275 * 10^8 & -1{,}0275 * 10^8 & 2{,}0550 * 10^8 & 0 & -1{,}0275 * 10^8 & 1{,}0275 * 10^8 \\ 1{,}0275 * 10^8 & 6{,}8501 * 10^7 & 0 & 2{,}0550 * 10^8 & -1{,}0275 * 10^8 & 6{,}8501 * 10^7 \\ 0 & 0 & -1{,}0275 * 10^8 & -1{,}0275 * 10^8 & 2{,}0550 * 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0275 * 10^8 & 6{,}8501 * 10^7 & 0 & 2{,}7400 * 10^8 \end{bmatrix} \quad (78)$$

De maneira análoga à matriz “k”, Lima e Santos (2008) utiliza matrizes de massa consistentes elementares de viga para cada elemento do exemplo. Aplicando as matrizes de rotação, obtém a Equação 79:

$$M = \begin{bmatrix} 8{,}9143 * 10^3 & 0 & 1{,}5429 * 10^3 & -7{,}4286 * 10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}1429 * 10^2 & 7{,}4286 * 10^2 & -3{,}4286 * 10^3 & 0 & 0 \\ 1{,}5429 * 10^3 & 7{,}4286 * 10^2 & 8{,}9143 * 10^3 & 0 & 1{,}5429 * 10^3 & -7{,}4286 * 10^2 \\ -7{,}84286 * 10^2 & -3{,}4286 * 10^3 & 0 & 9{,}1429 * 10^2 & 7{,}4286 * 10^2 & 3{,}4286 * 10^3 \\ 0 & 0 & 1{,}5429 * 10^3 & 7{,}4286 * 10^2 & 8{,}9143 * 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & -7{,}4286 * 10^2 & 3{,}4286 * 10^3 & 0 & 9{,}1429 * 10^2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Lima e Santos (2008), apontam os resultados das frequências naturais os valores descriminados no quadro de comparativos (Quadro 9) entre o modelo de análise, o Aeolos e o SAP, sendo selecionados apenas as frequências relevantes para análise:

Freq.	Aeolos	Modelo	Erro (%)
	Hz	**Hz**	
1	5,9528E+00	5,9524E+00	6,0508E-03
2	1,6539E+01	1,6539E+01	-3,3611E-03
3	3,2812E+01	3,2811E+01	8,8138E-04
4	6,2077E+01	6,2077E+01	1,4867E-04
5	1,0267E+02	1,0267E+02	-1,6054E-04
6	1,6542E+02	1,6542E+02	1,1363E-04

(a)

Freq.	SAP	Modelo	Erro (%)
	Hz	**Hz**	
1	5,8857E+00	5,9524E+00	-1,1199E+00
2	1,5495E+01	1,6539E+01	-6,3165E+00
3	2,5274E+01	3,2811E+01	-2,2971E+01
4	8,9571E+01	6,2077E+01	4,4291E+01
5	1,6551E+02	1,0267E+02	6,1208E+01
6	2,1624E+02	1,6542E+02	3,0723E+01

(b)

Quadro 9 – Comparação dos resultados obtidos para as frequências naturais pelo Aeolos (a) e o SAP (b) com os valores fornecidos pela literatura (Fonte: Autores, 2019)

É possível notar que o SAP diverge dos valores obtidos pelo Aeolos e o modelo da bibliografia. Como é notado na tabela de frequências naturais do modelo 5 (Quadro 14.b), e posteriormente apontado na conclusão deste trabalho, o SAP não faz a utilização de matriz de massa consistente para cálculo de parâmetros

modais. Sendo assim, não é útil a comparação de modos de vibração para este modelo, pois dada a natureza da relação entre autovalor e autovetor, as frequências divergentes implicarão em modos de vibração distintos.

Para os modos de vibração do Aeolos e do exemplo, realizou-se os comparativos dos mesmos já normalizados. Os resultados estão no Quadro 10:

Graus de liberdade	Aeolos	Exemplo	Erro (%)	Aeolos	Exemplo	Erro (%)	Aeolos	Exemplo	Erro (%)
	Modo 1			Modo 2			Modo 3		
1	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
2	7,0024E-01	7,0024E-01	8,3451E-04	2,6958E-01	2,6958E-01	1,0717E-03	-5,8839E-01	-5,8839E-01	0,0000E+00
4	1,8400E+00	1,8400E+00	1,6843E-03	-1,7775E-16	0,0000E+00	0,0000E+00	-1,0300E+00	-1,0300E+00	0,0000E+00
5	4,1408E-14	0,0000E+00	0,0000E+00	-9,8616E-01	-9,8616E-01	1,6108E-04	2,8011E-14	2,8011E-14	0,0000E+00
7	1,0000E+00	1,0000E+00	6,9278E-12	-1,0000E+00	-1,0000E+00	0,0000E+00	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
8	-7,0024E-01	-7,0024E-01	8,3451E-04	2,6958E-01	2,6958E-01	1,0717E-03	5,8839E-01	5,8839E-01	0,0000E+00

Graus de liberdade	Aeolos	Exemplo	Erro (%)	Aeolos	Exemplo	Erro (%)	Aeolos	Exemplo	Erro (%)
	Modo 4			Modo 5			Modo 6		
1	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00	1,5620E-01	1,5620E-01	-5,2794E-04
2	-4,7696E+00	-4,7696E+00	0,0000E+00	1,8204E+01	1,8204E+01	0,0000E+00	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
4	-4,7237E-16	-4,7237E-16	0,0000E+00	-4,7047E+00	-4,7047E+00	0,0000E+00	9,8014E-17	0,0000E+00	0,0000E+00
5	5,3329E+00	5,3329E+00	0,0000E+00	-2,8742E-14	-2,8742E-14	0,0000E+00	1,6261E+00	1,6262E+00	-2,1626E-03
7	-1,0000E+00	-1,0000E+00	0,0000E+00	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00	-1,5620E-01	-1,5620E-01	-5,2794E-04
8	-4,7696E+00	-4,7696E+00	0,0000E+00	-1,8204E+01	-1,8204E+01	0,0000E+00	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00

Quadro 10 – Comparação dos resultados obtidos para os modos de vibração obtidos pelo Aeolos, com os valores fornecidos pela literatura (Fonte: Autores, 2019)

Os resultados foram idênticos, senão por uma questão de arredondamento, pois os autores utilizam apenas duas casas decimais para exibir o resultado. Para os modos de vibração, relativo as numerações dos graus de liberdade da Figura 35, os erros podem ser considerados desprezíveis, quando existentes, sendo os maiores da ordem de 10^{-3}.

5.3.4 Modelo 4: Bibliografia

O modelo 4 retirado da literatura (SORIANO, 2014, pg 211), será usado para análise da influência de incrementos de pontos nodais na determinação dos parâmetros modais. Este incremento, é feito através da discretização da viga (Figura 36) em elementos de tamanhos iguais, e tem como objetivo demonstrar uma convergência das frequências naturais no refinamento da discretização, na teoria

clássica de vigas. O autor assume as seguintes propriedades para a viga: EI = $4 \times 10^7 \mathrm{N.m^2}$; $\mathrm{m'} = \frac{200\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$; L = 8 m.

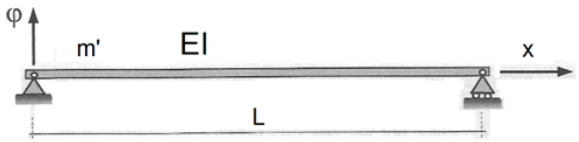


Figura 36 – Viga biapoiada do modelo 4 *(SORIANO, 2014)*

Com a notação P = $\sqrt{\frac{\mathrm{EI}}{m'\mathrm{L}^4}}$, obtem-se as frequências:

$$\begin{cases} \omega_1 = \pi^2 \times \mathrm{P} \ = \ 10{,}976\mathrm{Hz} \\ \omega_2 = 4\pi^2 \times \mathrm{P} \ = \ 43{,}904\mathrm{Hz} \\ \omega_3 = 9\pi^2 \times \mathrm{P} \ = \ 103{,}560\ \mathrm{Hz} \end{cases} \tag{80}$$

Dessa maneira, o autor compara os resultados obtidos para as frequências naturais pela teoria clássica de vigas (Equação 80), com os resultados da discretização do modelo (Figura 36) em 3, 5, 9 e 33 pontos nodais igualmente espaçados, fazendo uso da matriz de massa discreta (concentrada) e consistente, os resultados fornecidos pelo autor foram organizados no Quadro 11:

Pontos nodais	Matriz de Massa	Frequencia 1 (Hz)			Frequencia 2 (Hz)			Frequencia 3 (Hz)		
		Numérico	Teórico	Erro (%)	Numérico	Teórico	Erro (%)	Numérico	Teórico	Erro (%)
3	Discreta	1.0897E+01	1.0976E+01	-7.2391E-01	-	4.3904E+01	-	-	9.8786E+01	-
	Consistente	1.1020E+01	1.0976E+01	3.9696E-01	4.8732E+01	4.3904E+01	1.0996E+01	1.2249E+02	9.8786E+01	2.3994E+01
5	Discreta	1.0981E+01	1.0976E+01	4.3150E-02	4.3586E+01	4.3904E+01	-7.2391E-01	9.2544E+01	9.8786E+01	-6.3188E+00
	Consistente	1.0979E+01	1.0976E+01	2.8650E-02	4.4078E+01	4.3904E+01	3.9623E-01	1.0059E+02	9.8786E+01	1.8286E+00
9	Discreta	1.0976E+01	1.0976E+01	-3.5081E-04	4.3892E+01	4.3904E+01	-2.7901E-02	9.8606E+01	9.8786E+01	-1.8206E-01
	Consistente	1.0976E+01	1.0976E+01	3.9993E-03	4.3917E+01	4.3904E+01	3.0100E-02	9.8915E+01	9.8786E+01	1.3050E-01
33	Discreta	1.0976E+01	1.0976E+01	2.5492E-03	4.3904E+01	4.3904E+01	1.0992E-03	9.8786E+01	9.8786E+01	0.0000E+00
	Consistente	1.0976E+01	1.0976E+01	2.5492E-03	4.3904E+01	4.3904E+01	1.0992E-03	9.8786E+01	9.8786E+01	0.0000E+00

Quadro 11 – Frequências naturais da viga (Figura 36), para 3, 5, 9 e 33 pontos nodais (Fonte: Autores, 2019)

Comparando-se os resultados do modelo numérico do autor com os resultados obtidos via SAP (Quadro 12) e Aeolos (Quadro 13):

Pontos nodais	Matriz de Massa	Frequencia 1 (Hz)			Frequencia 2 (Hz)			Frequencia 3 (Hz)		
		Numérico	Aeolos	Erro (%)	Numérico	Aeolos	Erro (%)	Numérico	Aeolos	Erro (%)
3	Discreta	1.0897E+01	1.0897E+01	-4.6693E-04	-	-	-	-	-	-
	Consistente	1.1020E+01	1.1020E+01	-2.2946E-04	4.8732E+01	4.8731E+01	1.2352E-03	1.2249E+02	1.2249E+02	-5.5017E-04
5	Discreta	1.0981E+01	1.0973E+01	7.1192E-02	4.3586E+01	4.3586E+01	-4.6693E-04	9.2544E+01	9.2543E+01	5.3528E-04
	Consistente	1.0979E+01	1.0979E+01	1.9540E-04	4.4078E+01	4.4078E+01	-9.5161E-04	1.0059E+02	1.0059E+02	7.5072E-04
9	Discreta	1.0976E+01	1.0976E+01	-1.1252E-03	4.3892E+01	4.3892E+01	1.2041E-04	9.8606E+01	9.8605E+01	6.8847E-04
	Consistente	1.0976E+01	1.0976E+01	-1.3241E-04	4.3917E+01	4.3916E+01	1.6450E-03	9.8915E+01	9.8914E+01	1.2573E-03
33	Discreta	1.0976E+01	1.0976E+01	6.2220E-05	4.3904E+01	4.3905E+01	-1.3817E-03	9.8786E+01	9.8786E+01	-5.4977E-04
	Consistente	1.0976E+01	1.0976E+01	6.1455E-05	4.3904E+01	4.3905E+01	-1.3946E-03	9.8786E+01	9.8786E+01	-6.1524E-04

Quadro 12 – Frequências naturais da viga (Figura 36), para 3, 5, 9 e 33 pontos nodais obtidos pelo Aeolos (Fonte: Autores, 2019)

Pontos nodais	Matriz de Massa	Frequencia 1 (Hz)			Frequencia 2 (Hz)			Frequencia 3 (Hz)		
		Numérico	SAP	Erro (%)	Numérico	SAP	Erro (%)	Numérico	SAP	Erro (%)
3	Discreta	1,0897E+01	1,0840E+01	5,2313E-01	-	-	-	-	-	-
5	Discreta	1,0981E+01	1,0923E+01	5,2914E-01	4,3586E+01	4,2738E+01	1,9842E+00	9,2544E+01	8,8044E+01	5,1107E+00
9	Discreta	1,0976E+01	1,0928E+01	4,4056E-01	4,3892E+01	4,3148E+01	1,7244E+00	9,8606E+01	9,4778E+01	4,0393E+00
33	Discreta	1,0976E+01	1,0929E+01	4,3686E-01	4,3904E+01	4,3194E+01	1,6445E+00	9,8786E+01	9,5314E+01	3,6421E+00

Quadro 13 – Frequências naturais da viga (Figura 36), para 3, 5, 9 e 33 pontos nodais obtidos pelo SAP (Fonte: Autores, 2019)

É possível notar no Quadro 11 que as primeiras frequências naturais do modelo tendem a convergir para o valor de cálculo teórico conforme o número de pontos, e seus graus de liberdade correlatos, usados para discretizar a viga aumenta. O Quadro 12 demonstra que o Aeolos obteve resultados para frequências naturais, em comparação com os obtidos pelo autor, com erro máximo da ordem de grandeza 10^{-3}, enquanto o SAP (Quadro 13) obteve erro máximo de 5,11%. Ambos os softwares demonstram convergência para os valores obtidos na Equação 80, porém o SAP demonstrou erros maiores em relação ao Aeolos em comparação aos resultados fornecidos pela bibliografia.

5.3.5 Modelo 5: Comparativo de Software (Pórtico Convencional Engastado)

Como mencionado na metodologia deste trabalho, para a apresentação do comparativo de resultados entre o Aeolos e o SAP, foi adotado um nó de referência, Quadro 3, para as análises de resultados. Inicialmente, utilizando os parâmetros especificados no item 5.2, foi determinado os parâmetros modais através do Aeolos, para a estrutura do modelo 5, utilizando a opção de cálculo com matriz de massa consistente, e posteriormente com a matriz de massa discreta. Comparando as frequências obtidas pelo software com as obtidas pelo SAP, foi possível comparar resultados para matrizes discreta (Quadro 14.a), e para matrizes consistentes (Quadro 14.b).

	Aeolos	SAP	Erro
Freq.	**Hz**	**Hz**	%
1	3,7554E+00	3,7122E+00	1,1638E+00
2	1,2546E+01	1,2358E+01	1,5201E+00
3	2,2922E+01	2,2422E+01	2,2301E+00
4	5,0244E+01	5,0235E+01	1,7078E-02
5	5,0653E+01	5,0635E+01	3,5418E-02
6	1,0542E+02	1,0540E+02	2,3022E-02
7	1,0721E+02	1,0711E+02	9,6364E-02
8	1,2164E+02	1,2162E+02	2,2490E-02
9	1,3810E+02	1,3808E+02	1,7078E-02
10	1,3823E+02	1,3820E+02	1,8992E-02
11	1,9315E+02	1,9311E+02	1,7078E-02
12	1,9322E+02	1,9319E+02	1,7524E-02

(a)

	Aeolos	SAP	Erro
Modo	**Hz**	**Hz**	%
1	3.7789E+00	3.7122E+00	1.7987E+00
2	1.3101E+01	1.2358E+01	6.0146E+00
3	2.5354E+01	2.2422E+01	1.3075E+01
4	2.8638E+01	5.0235E+01	-4.2992E+01
5	3.7727E+01	5.0635E+01	-2.5492E+01
6	4.2671E+01	1.0540E+02	-5.9515E+01
7	6.0021E+01	1.0711E+02	-4.3960E+01
8	7.3385E+01	1.2162E+02	-3.9659E+01
9	8.7611E+01	1.3808E+02	-3.6549E+01
10	9.6789E+01	1.3820E+02	-2.9966E+01
11	1.3634E+02	1.9311E+02	-2.9398E+01
12	1.5048E+02	1.9319E+02	-2.2109E+01
13	1.5428E+02	N/A	N/A
14	1.8609E+02	N/A	N/A
15	2.1808E+02	N/A	N/A
16	2.2062E+02	N/A	N/A
17	3.3095E+02	N/A	N/A
18	3.4057E+02	N/A	N/A

(b)

Quadro 14 - Comparação dos resultados obtidos e o erro calculado para as frequências naturais para matriz de massa discreta (a) e consistente (b) (Fonte: Autores, 2019)

É possível notar que através do uso da matriz de massa consistente, o Aeolos determinou 6 modos de vibração a mais do que quando utilizando a matriz de massa discreta. Além disso, os erros para frequências de vibração relativas ao mesmo modo, comparados com o SAP, foi de até 59,51% para matrizes consistentes, enquanto para matrizes discretas, o erro máximo foi de 2,23%. Dessa forma, os comparativos dos próximos modelos serão apenas referentes a matriz de massa discreta. Sendo assim, adotando os critérios de exposição de resultados mencionados na metodologia, os valores de frequências naturais e modos de vibração para este modelo, são dados no Quadro 15.

	Aeolos	SAP	Erro
Freq.	**Hz**	**Hz**	%
1	3,7554E+00	3,7122E+00	1,1638E+00
2	1,2546E+01	1,2358E+01	1,5201E+00
3	2,2922E+01	2,2422E+01	2,2301E+00
4	5,0244E+01	5,0235E+01	1,7078E-02
5	5,0653E+01	5,0635E+01	3,5418E-02
6	1,0542E+02	1,0540E+02	2,3022E-02
7	1,0721E+02	1,0711E+02	9,6364E-02
8	1,2164E+02	1,2162E+02	2,2490E-02
9	1,3810E+02	1,3808E+02	1,7078E-02
10	1,3823E+02	1,3820E+02	1,8992E-02

(a)

Modos		Aeolos	SAP	Erro (%)
1	DX	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
	DY	-6.1372E-03	-5.9975E-03	2.3287E+00
	RZ	-5.3000E-02	-5.2566E-02	8.2444E-01
2	DX	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
	DY	-2.2337E-02	-2.1719E-02	2.8477E+00
	RZ	-3.8535E-01	-3.7877E-01	1.7367E+00
3	DX	4.6916E-01	4.7407E-01	-1.0357E+00
	DY	-1.3683E-02	-1.3148E-02	4.0680E+00
	RZ	-4.3663E-01	-4.2674E-01	2.3184E+00
4	DX	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
	DY	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
	RZ	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

(b)

Quadro 15 - Comparação dos resultados obtidos e o erro calculado para as frequências naturais (a) e modos de vibração (b) para matriz de massa discreta (Fonte: Autores, 2019)

A plotagem dos primeiros 4 modos de vibração da estrutura deformada (vermelho para o Aeolos e azul para o SAP), sobrepostas sobre sua configuração original (preto), podem ser visualizadas nas na Figura 37:

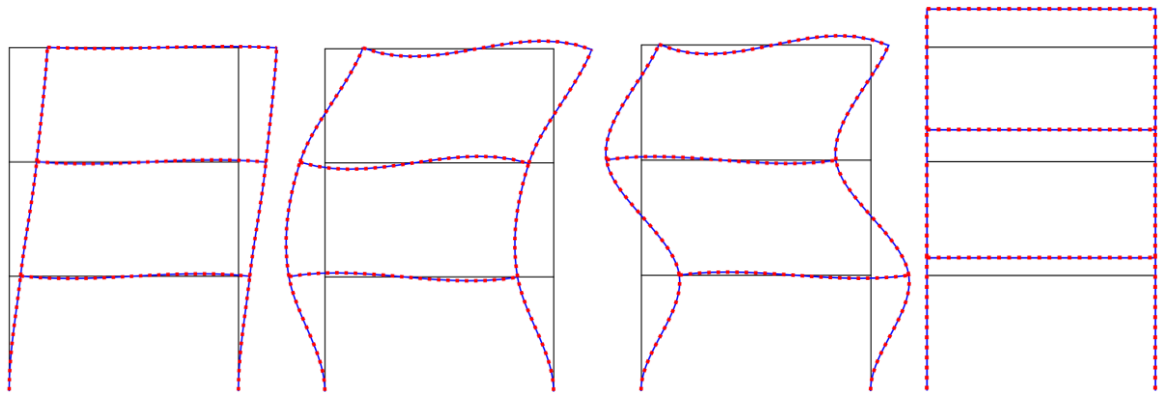


Figura 37 – Plotagem do 1° ao 4° modo de vibração (esquerda à direita) do modelo 5. Aeolos em vermelho, SAP em azul e a estrutura original em preto (Fonte: Aeolos)

É possível notar que o erro máximo na determinação das frequências foi de 2,23%, relativo ao modo 6. Já nos deslocamentos, o erro foi de 4,06%, para o deslocamento DY do modo 3, porém a diferença numérica foi da ordem de grandeza 10^{-4}. A deformada da estrutura em questão, dada pelos deslocamentos indicados no Quadro 15.b, são dadas na Figura 37.

Para o mesmo modelo, dados os valores do Apêndice B, considerando apenas comparação de modos de vibração normalizados e para valores com ordem de grandeza maiores que 10^{-3}, foi de 5,78% para o modo 8, grau de liberdade 3.

5.3.6 Modelo 6: Comparativo de Software (Pórtico Convencional Engastado e Contraventado)

Realizando o processo análogo ao do modelo 4 para a determinação de parâmetros modais via Aeolos e SAP, verifica-se os valores para frequências naturais no Quadro 16.a e os modos de vibração no Quadro 16.b.

	Aeolos	SAP	Erro
Freq.	**Hz**	**Hz**	%
1	1,5683E+01	1,5674E+01	5,7594E-02
2	4,1684E+01	4,1664E+01	4,8674E-02
3	4,8509E+01	4,8493E+01	3,2908E-02
4	6,0757E+01	6,0719E+01	6,3225E-02
5	7,6075E+01	7,6019E+01	7,4049E-02
6	9,6639E+01	9,6599E+01	4,1185E-02
7	1,1304E+02	1,1301E+02	1,8340E-02
8	1,2535E+02	1,2533E+02	1,7586E-02
9	1,4305E+02	1,4303E+02	1,7681E-02
10	1,6535E+02	1,6532E+02	1,7524E-02

(a)

Modos		Aeolos	SAP	Erro (%)
1	DX	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
	DY	-1.6657E-01	-1.6644E-01	7.3787E-02
	RZ	-5.8644E-02	-5.8891E-02	-4.1998E-01
2	DX	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
	DY	-8.8212E-01	-8.8023E-01	2.1454E-01
	RZ	-3.9232E-01	-3.8949E-01	7.2696E-01
3	DX	5.0586E-01	5.0388E-01	3.9339E-01
	DY	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
	RZ	-1.0326E-01	-1.0160E-01	1.6387E+00
4	DX	-2.1391E-02	-1.9291E-02	1.0883E+01
	DY	-2.3598E-01	-2.3529E-01	2.9239E-01
	RZ	-1.5561E-01	-1.5469E-01	5.9469E-01

(b)

Quadro 16 - Comparação dos resultados obtidos e o erro calculado para as frequências naturais (a) e modos de vibração (b) para massa discreta (Fonte: Autores, 2019)

Sendo a plotagem dos modos análogas ao modelo 5, tem-se (Figura 38):

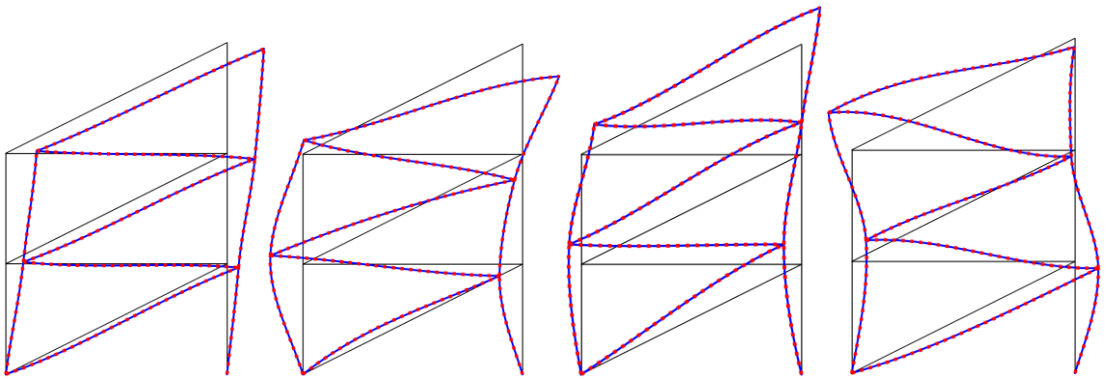


Figura 38 – Plotagem do 1° ao 4° modo de vibração (esquerda à direita) do modelo 6. Aeolos em vermelho, SAP em azul e a estrutura original em preto (Fonte: Aeolos)

Nota-se que erros para as frequências em geral não alcançaram 0,1% em comparação ao SAP. Para os deslocamentos, o maior erro foi de 10,8%, para o deslocamento DX do modo 4, sendo a diferença numérica de resultados entre os softwares, para este deslocamento, da ordem de 10^{-3}.

A análise é estendida para todos os modos do Apêndice B – modelo 6, deste modelo composto de elementos de barras de contraventamento. Para erros relativos aos deslocamentos com valores de ordem de grandeza maiores que 10^{-3}, 8 graus de liberdade, podendo ou não serem repetidos entre os modos, em diferentes modos de vibração, tiveram diferenças variando entre 7% e 38,1% a partir do terceiro modo, enquanto os 160 deslocamentos restante possuíram erros iguais ou menores que 5,5%.

5.3.7 Modelo 7: Comparativo de Software (Pórtico Convencional Rotulado)

Realizando o processo análogo ao do modelo 5 e 6, determina-se os parâmetros modais via Aeolos e SAP. Verifica-se os valores das frequências naturais no Quadro 17.a, modos de vibração no Quadro 17.b e plotagem na Figura 39.

	Aeolos	SAP	Erro
Freq.	**Hz**	**Hz**	%
1	2,3633E+00	2,3530E+00	4,4037E-01
2	9,5930E+00	9,5018E+00	9,5947E-01
3	2,1589E+01	2,1150E+01	2,0745E+00
4	5,0244E+01	5,0235E+01	1,7078E-02
5	5,0349E+01	5,0340E+01	1,8665E-02
6	1,0539E+02	1,0537E+02	2,2402E-02
7	1,0717E+02	1,0707E+02	9,4648E-02
8	1,2160E+02	1,2157E+02	2,1860E-02
9	1,3810E+02	1,3808E+02	1,7078E-02
10	1,3814E+02	1,3812E+02	1,7370E-02

(a)

Modos		Aeolos	SAP	Erro (%)
1	DX	9.9971E-01	9.9972E-01	-9.7709E-04
	DY	-1.8980E-03	-1.8803E-03	9.3977E-01
	RZ	-8.4326E-02	-8.3841E-02	5.7788E-01
2	DX	9.9626E-01	9.9640E-01	-1.3488E-02
	DY	-6.6178E-03	-6.5252E-03	1.4195E+00
	RZ	-5.3297E-01	-5.2470E-01	1.5759E+00
3	DX	3.3948E-01	3.4325E-01	-1.0962E+00
	DY	-3.3788E-03	-3.2675E-03	3.4067E+00
	RZ	-4.9540E-01	-4.8168E-01	2.8484E+00
4	DX	-1.9677E-16	4.8771E-12	-1.0000E+02
	DY	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
	RZ	-3.8241E-16	-1.7363E-12	-9.9978E+01

(b)

Quadro 17 - Comparação dos resultados obtidos e o erro calculado para as frequências naturais (a) e modos de vibração (b) para a matriz de massa discreta (Fonte: Autores, 2019)

Sendo a plotagem dos modos análogas ao modelo 5, tem-se (Figura 39):

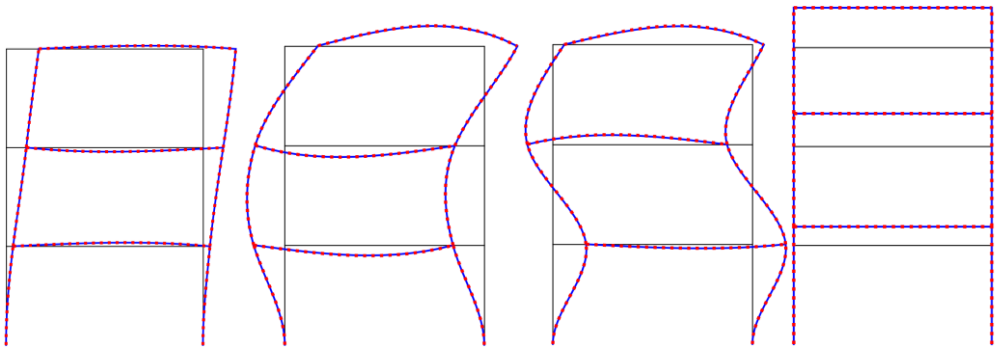


Figura 39 - Plotagem do 1° ao 4° modo de vibração (esquerda à direita) do modelo 7. Aeolos em vermelho, SAP em azul e a estrutura original em preto (Fonte: Aeolos)

Verifica-se que o erro máximo de frequência e deslocamento foi relativo ao modo 3, sendo os seus valores, respectivamente 2,07% e 3,41% em comparação ao SAP. Erros próximos a 100% para RZ, e 10% para DX do modo 4 devem ser desconsiderados, pois os valores destes deslocamentos podem ser considerados numericamente nulos, dada a ordem de grandeza dos mesmos.

Este modelo composto de elementos rotulados e engastado possui, para valores com ordem de grandeza maiores que 10^{-3}, para todos os modos do Apêndice B – modelo 7, o maior erro foi de 5,5%, para o grau de liberdade 3 do modo 8.

5.3.8 Modelo 8: Comparativo de Software (Estrutura Inteiramente Treliçada)

Para a determinação dos parâmetros modais desta estrutura treliçadas, foram utilizados os parâmetros estruturais do item 5.2, específicos para este caso. Contudo, o procedimento para alcance dos resultados foi o mesmo dos modelos 4, 5 e 6. Verifica-se as frequências naturais no Quadro 18.a, os modos de vibração no Quadro 18.b e as plotagem na Figura 40.

	Aeolos	SAP	Erro
Modo	**Hz**	**Hz**	%
1	3.3615E+01	3.3609E+01	1.7078E-02
2	1.0274E+02	1.0272E+02	1.7078E-02
3	1.4300E+02	1.4297E+02	1.7078E-02
4	1.7952E+02	1.7949E+02	1.7078E-02
5	2.4108E+02	2.4103E+02	1.7078E-02
6	3.7020E+02	3.7014E+02	1.7078E-02
7	3.9289E+02	3.9283E+02	1.7078E-02
8	4.2045E+02	4.2038E+02	1.7078E-02
9	4.5585E+02	4.5577E+02	1.7078E-02
10	5.1753E+02	5.1745E+02	1.7078E-02

(a)

Modos		Aeolos	SAP	Erro (%)
1	DX	9.9300E-01	9.9300E-01	6.1804E-06
	DY	-1.9573E-01	-1.9573E-01	3.2813E-05
	RZ	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	DX	-8.3212E-01	-8.3212E-01	-4.3058E-06
	DY	2.9398E-01	2.9398E-01	2.2364E-05
	RZ	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	DX	-1.1315E-01	-1.1315E-01	-4.2894E-05
	DY	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
	RZ	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
4	DX	3.7803E-01	3.7803E-01	1.7261E-06
	DY	-3.4913E-01	-3.4913E-01	6.3669E-06
	RZ	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

(b)

Quadro 18 - Comparação dos resultados obtidos e o erro calculado para as frequências naturais (a) e modos de vibração (b) para a matriz de massa discreta (Fonte: Autores, 2019)

Sendo a plotagem dos modos análogas ao modelo 5, tem-se (Figura 40):

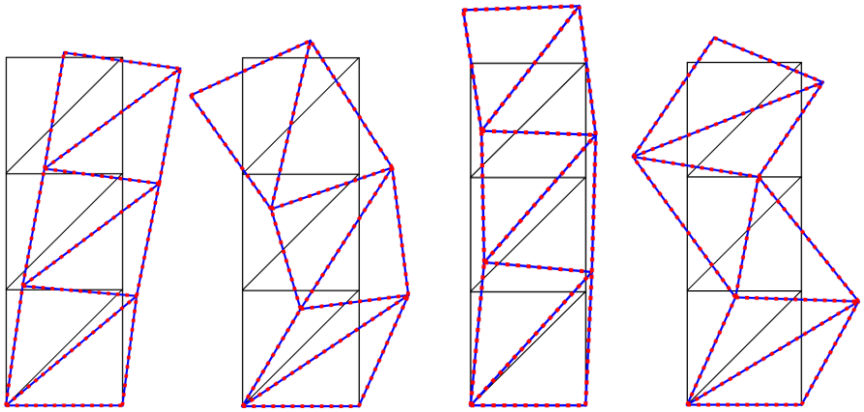


Figura 40 - Plotagem do 1° ao 4° modo de vibração (esquerda à direita) do modelo 8. Aeolos em vermelho, SAP em azul e a estrutura original em preto (Fonte: Aeolos)

Os erros do Aeolos em comparação ao SAP para as frequências não atingiram 0,02%, enquanto os erros dos modos de vibração, para todos os deslocamentos comparados no Apêndice B – modelo 8, podem ser considerados desprezíveis.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As plotagens de todos os modos de vibração, para todos os exemplos de comparação entre softwares, que constam no Anexo B, apresentam similaridade visual aceitável. Para as plotagens dos modos de vibração normalizados do Aeolos nos modelos 5 a 8, sobrepostas sobre as plotagens considerando os valores homólogos oriundos do SAP (normalizados), não houve disparidade visual perceptível resultante das divergências de valores entre as duas fontes. Logo, é possível atribuir as eventuais divergências entre as plotagens, apresentadas em Anexo B, aos métodos de plotagem utilizados pelos diferentes softwares, e não necessariamente aos valores alcançados por ambos, para pequenos erros.

A disparidade de valores obtidos para as frequências naturais do modelo 5 através do Aeolos, utilizando matrizes de massa consistente, em detrimento com as frequências obtidas pelo SAP, foi de até 59,51%. Dessa forma, é possível concluir que o SAP determina parâmetros modais através do uso de matrizes discretas de massa, uma vez que os valores obtidos pelo Aeolos, utilizando este tipo de matriz, apresentaram erro máximo, para as frequências desse exemplo, de 2,23%.

Observando os resultados comparativos para parâmetros modais entre o Aeolos e os exemplos retirados da literatura (modelos 1 a 4), para os modelos 1 e 3, os valores obtidos para os parâmetros modais normalizados podem ser considerados idênticos, enquanto o erro máximo entre os parâmetros para o modelo 2 foi de 0,44% para translação no eixo “Y” do segundo modo de vibração.

Comparando os valores obtidos para ambos os softwares para frequências naturais, o Aeolos apresentou erro máximo, entre todos os modelos, em relação ao SAP de 2,23% para o pórtico convencional (modelo 3, modo 3). O Aeolos apresenta grande precisão na determinação das frequências de vibração das estruturas, porém apresenta algumas divergências pontuais referentes aos modos com relação ao SAP. Assim, é possível afirmar que mantem uma margem de erro menor ou igual a 5,8% para quase a totalidade dos modos de todos os modelos.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Como continuação desse trabalho se propõe um estudo mais aprofundado na análise dinâmica. Entre esses estudos, podem ser citados o estudo e implementação no software da força de amortecimento, vibração forçada, a análise no domínio da frequência e análise sísmica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto**. Rio de Janeiro, 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6123: Forças Devidas ao Vento em Edificações.** Rio de Janeiro, 1998.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800: Projeto de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios.** Rio de Janeiro, 2008.

BLESSMANN, J. (1998). **Introdução ao Estudos das Ações Dinâmicas do Vento.** Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil: Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

BRASIL, R. M., & DA SILVA, M. A. (2013). **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. São Paulo, São Paulo, Brasil: Editora Edgar Bluncher Ltda.

CHOPRA, A. K. (2012). **Dynamics of Structures.** California, Estados Unidos: Pearson.

COSTA, C., RIBEIRO, D., JORGE, P., SILVA, R., ARÊDE, A., & CALÇADA, R. (2014). **Avaliação Expermental e Numéria dos Parâmetro Modais da Ponte Ferroviária Durrães In.** (Artigo) 5as Jornadas Portuguesas de Engenharia Estrutural, 1 - 12.

DE SOUZA, S. L., & SORIANO, H. L. (2004). **Análise de Estruturas: Método das Forças e Deslocamentos**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna.

GUTEMBERG, P. D., & ALVER, A. D. (2009). **Vibrações Em Passarelas De Madeira In**. (Artigo) Caderno de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 11, n 53, 81 - 85.

HALLIDAY, D., & RESNICK, R. (1993). **Gravitação, Ondas e Termodinâmica** (Vol. 2°). Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Livros Técnicos e Científicos editora.

HIBBELER, R. (2004). **Resistência dos Materiais**. São Paulo: Pearson Education do Brasil.

LEET, K., UANG, C.-M., & GILBERT, A. (2009). **Fundamento da Análise estrutural.** São Paulo, São Paulo, Brasil: McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda.

LIMA, S. D., & SANTOS, S. D. (2008). **Análise Dinâmica das Estruturas.** (P. A. Marques, Ed.) Rio de Janeiro, Rio de janeiro, Brasil: Editora Ciência moderna.

LUTZ, M. (2009). Learning Python. Sebastopol: O'Reilly Media.

MALVEIRO, J., RIBEIRO, D., SOUZA, C., & CALÇADA, R. (2011). **Identificação Expermental dos Parâmetros Modais de um Viaduto Ferroviário Com Tabuleiro Pré-Fabricado In.** (Artigo) 2° Congresso Nacional sobre Segurança e Conservação de Pontes, pp. 349-358.

MARTHA, L. F. (2010). **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos** . (M. A. Corrêia, Ed.) Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Elsevier Editora Ltda.

MORALES, F. A. (2016). **Avaliação da Influência da Temperatura Sobre os Parâmtros Modais de Estruturas.** (Dissertação de Pós-graduação em Engenharia Civil) Ouro Preto: Departamento de Engenharia Civil da Escola de Minas, 2016.

NÓBREGA, P. G. (2004). **Análise Dinâmica de Estruturas de Concreto: Estudo Expermental e Numérico das Condições de Contorno de Estruturas Pré-Moldadas**.(Tese de Doutorado na área de Engenharia de Estruturas) São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, 2004.

PHILLIPS, D. (2010). **Python 3: Object Oriented Programming**. Olton: Packt Publishing Ltd.

ROCHA, S. P. (2015). **Observação do Comportamento Dinâmico de Estruturas da Engenharia Civil**. (Dissertação de Mestrado na àrea de Especialização de Estruturas) Lisboa: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, 2015.

SORIANO, H. L. (2014). **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. (M. Â. Correa, Ed.) Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Elsevier Editora Ltda.

STEINBRUCH, A., & WINTERLE, P. (1987). **Álgebra Linear**. São Paulo: Editora McGraw-Hill Ltda.

STROUSTRUP, B. (1997). **The C++ Programming Language**. Murray Hill: AT&T.

SUSSEKIND, J. C. (1981). **Curso de Análise estrutural (Vol. 1)**. Porto Alegre, Rio Grande so Sul, Brasil: Esitora Globo.

TERRA, M. F. (2009). **Estudo de Métodos Numéricos Basados Nas Características Modais Para Identificação de Danos em Vigas**. (Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil) Campos dos Goytacazes: Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2009.

WILKINSON, J. H. (1965). **The Algebric Eigenvalue Problem.** Londres: Oxford, Clarendon Press.

APÊNDICE A

MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE AEOLOS

1 INTRODUÇÃO

O Aeolos foi o produto de um Trabalho de Conclusão de Curso, requisito para a graduação no curso de Engenharia Civil, da Universidade Positivo (Curitiba-PR), realizado pelos alunos Luiz Fillipe De Bona e Oswaldo Carvalho da Silva Junior, e orientado pelo professor Juliano Jorge Scremin. O Objetivo do software é determinar os parâmetros modais (frequências naturais e modos de vibração) de estruturas reticuladas planas, sendo o foco principal pórticos planos, porém tendo também o programa apresentado resultados precisos para treliças planas.

2 INTERFACE

Neste capítulo, os elementos da interface do software Aelos serão apresentados e suas funções explicadas.

2.1 OVERVIEW DA INTERFACE

A interface do programa se apresenta de maneira simples e de fácil utilização.

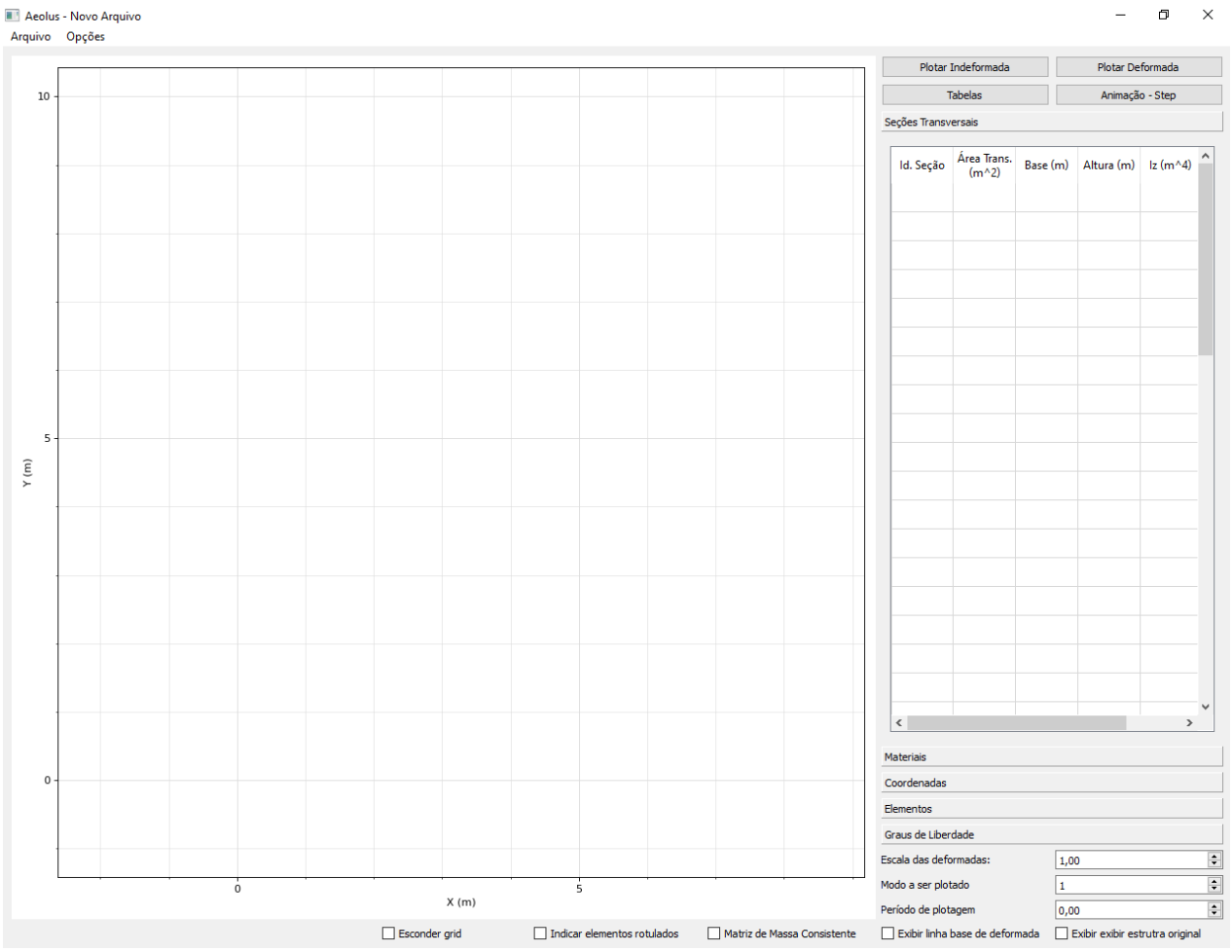


Figura A.41 - Overview da interface

2.2 COMPONENTES DO SOFTWARE

A Figura A.42 mostra faz a numeração dos elementos de interface para melhor explicar suas funções.

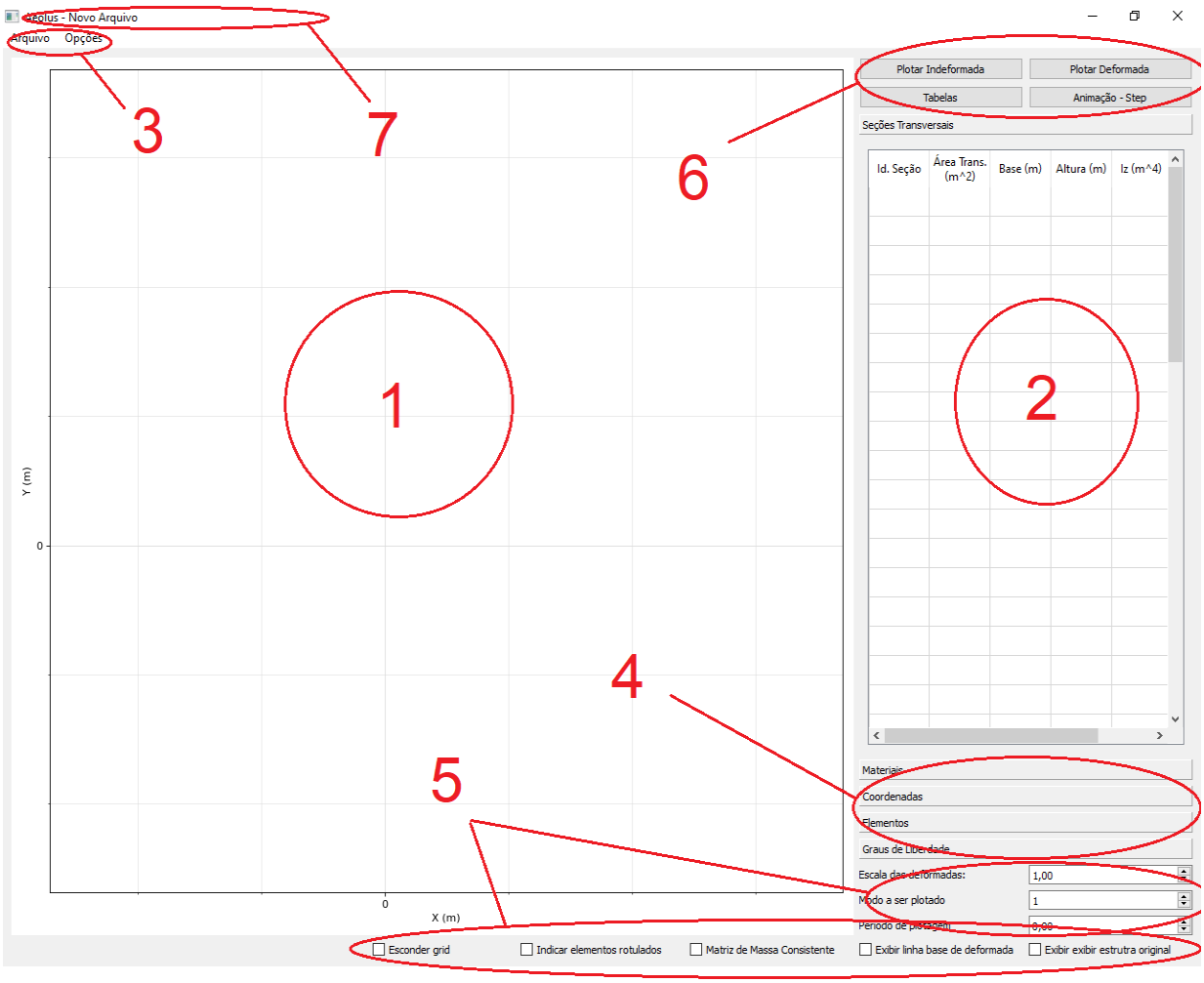


Figura A.42 - Interface e componentes do software

2.2.1 Item 1: Tela de Plotagem

A tela de plotagem é o espaço da interface gráfica do programa destinada a criar uma representação visual da estrutura em análise. Nela será possível

contemplar a estrutura na sua forma indeformada, durante e após o processo de “input” da mesma no programa, assim como a visualização da deformação promovida pelos seus modos de vibração. Nela o eixo “X” é determinado pelas abcissas, “Y” as ordenadas, e “Z” o eixo perpendicular a ambos.

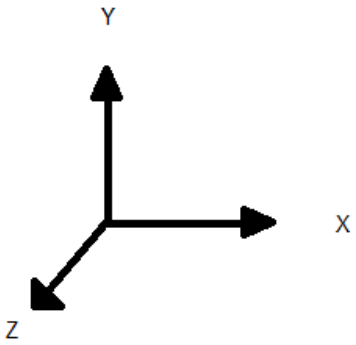


Figura A.43 – Representação dos eixo do Aeolos

São elementos da plotagem os seguintes objetos gráficos:

Elementos Estrutural	Representação Gráfica
Apoio rotulado móvel (tipo 1)	
Apoio rotulado fixo (tipo 2)	
Apoio engastado	
Barra	
Nó com apenas rótulas	
Nó com rótula (s) e engaste (s)	
Nó com engastes	

Quadro A.19 – Elementos de Plotagem, conclusão

2.2.2 Item 2: Tabela de Entrada de Dados

Este espaço é destinado à entrada de dados dos parâmetros da estrutura em análise que sejam pertinentes à determinação de parâmetros modais da mesma. Maiores detalhes sobres seus campos são abordados no item 4 desta seção.

2.2.3 Item 3: Barra de Opções

Na barra de opções é possível encontrar dois botões distintos:

1) Botão “Arquivo” possui as funções:

- “Novo” – Inicia um projeto vazio.
- “Abrir Arquivo” – Permite utilizar um arquivo de estrutura já salvo anteriormente.
- “Salvar Arquivo” – Atualiza os dados do arquivo anteriormente aberto, ou salva os dados em um novo arquivo, caso tenha começado a estrutura a partir da opção “Novo”.
- “Salvar Como” – Permite salvar a estrutura em um arquivo com nome diferente do original.
- “Sair” – Finaliza o programa Aeolos.

2) Botão “Opções” possui as funções:

- “Sobre” – Abre uma janela com informações sobre o software e os autores.
- “Ajuda” – Abre o manual de instruções para a utilização do software (este arquivo).

2.2.4 Item 4: Abas de Tabelas de Input de Dados

Para seu correto funcionamento, o programa necessita que diversos parâmetros sejam fornecidos a ele. As abas representam as tabelas nas quais as informações devem ser fornecidas. Suas particularizações são tratadas no “Passo 2” da seção 3 deste documento.

2.2.5 Item 5: Opções de Plotagem

Essa área é composta por 3 campos numéricos e 5 check-boxes. Campos numéricos são representados por:

1) “Escala das deformadas” – Pode ser preenchido com valores maiores que 0, sendo 1 o valor padrão do programa. Este valor representa a escala que será multiplicada pelos componentes do vetor modo de vibração da estrutura, para então ser plotada pelo programa.
2) “Modo a ser plotado” – Para cada frequência natural obtida para a estrutura, existe um correspondente modo de vibração. Aqui o usuário pode especificar de qual modo deseja visualizar a deformada resultante. Deve ser preenchido com números inteiros positivos diferentes de zero.
3) “Período da plotagem” – As coordenadas dos nós variam no tempo de acordo com uma função harmônica. Neste campo o usuário pode forçar a plotagem da deformada do modo de vibração até o extremo oposto do movimento oscilatório. Deve ser preenchido com números reais entre 0 (início do período de oscilação) e 1 (meio período de oscilação).

Check-Boxes representados por:

1) “Exibir linha base de deformada” – Exibe linhas tracejadas retas ligando os nós das deformadas, para melhor visualização dos efeitos de rotação sobre as barras da estrutura

2) “Exibir estrutura original” – Plota, em vermelho, a estrutura indeformada, além da estrutura deformada, também para melhor visualização dos efeitos do modo de vibração na estrutura.
3) “Matriz de massa consistente” – Força a utilização de matriz de massa consistente para determinação dos parâmetros modais.
4) “Indicar elementos rotulados” – Esta opção funciona somente com a plotagem da figura indeformada. Quando ativa, indica qual metade do elemento possui rótula em sua (s) extremidade (s), sendo a plotagem da porção da barra indicada na cor verde.



Figura A.44 – elemento que possui rótula em sua extremidade direita

5) “Esconder grid” – Esconde o grid de fundo da tela de plotagem.

2.2.6 Item 6: Botões de Comando

Existem 4 botões de comando, elas são:

1) “Plotar Indeformada” – Plota apenas a estrutura, ou seus elementos, em sua configuração original. Pode ser utilizada em qualquer momento da entrada de dados
2) “Plotar Deformada” – Ao ser clicado, o programa lê os dados fornecidos pelo usuário, calcula os parâmetros modais, e retorna a plotagem das deformadas, de acordo com os parâmetros fornecidos no “Item 5 – Opções de Plotagem”. Só deve ser utilizada quando todos os dados da estrutura forem fornecidos.
3) “Tabelas” – Retorna uma janela com as tabelas dos valores numéricos alcançados pelo programa referentes aos parâmetros modais, assim como a opção de exportação em arquivo. Só deve ser utilizada após o botão “Plotar Deformada” for acionado.

4) “Animação - Step” – Quando clicado, repetidamente, cria uma animação da estrutura se deformando ao longo de um ciclo de oscilação. Só deve ser utilizada após o botão “Plotar Deformada” for acionado.

2.2.1 Item 7: Informações de Janela

Indica o título do programa. Quando algum arquivo anteriormente salvo é carregado, indica o caminho do mesmo dentro do computador do usuário. Quando algum modo de vibração é plotado, indica qual é sua frequência correspondente, em hertz.

3 PROCEDIMENTO DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE

Para o correto funcionamento do software, é necessário que alguns critérios e sequências sejam atendidas e observadas. Os passos a seguir descreverão como o software deve ser utilizado.

3.1 ESQUEMATIZAÇÃO DA ESTRUTURA

Passo 1: Esquematização da estrutura - Tendo em vista que programa interpreta estruturas reticuladas planas, esta como um todo deve ser esquematizada sendo composta de barras independentes, porém com seus respectivos e devidos vínculos nas suas extremidades. A estrutura corretamente esquematizada deverá conter os seguintes elementos descritos a seguir.

3.1.1 Nós dos Elementos

Para cada ponto de encontro de uma ou mais barras da estrutura, pontos de encontro com apoios, ou as próprias extremidades livres, é atribuído um nó. Cada um dos nós deve ser enumerado com uma orientação: Sempre seguindo o sentido da esquerda para a direita; de baixo para cima; em ordem crescente de números naturais, começando pelo numeral zero. Obs.: O Aeolos trabalha com a determinação de deslocamentos nodais e truncamento de graus de liberdades restritos em apoios, no que tange a composição das matrizes globais da estrutura. Ao representar uma viga bi engastada (apoios), considerando apenas os nós das extremidades, cujos únicos graus de liberdade serão eliminados do cálculo de determinação de parâmetros modais, não gerará nenhum resultado de vibrações. Dessa forma, para este caso, é necessário o uso de, pelo menos, um nó

intermediário, posicionado no meio da barra, para a determinação dos parâmetros, sendo que sua precisão tende a aumentar conforme mais pontos são adicionados. Segue o exemplo da Figura A.45 – Modelo utilizado como exemplo do Passo 1: numeração dos nós:

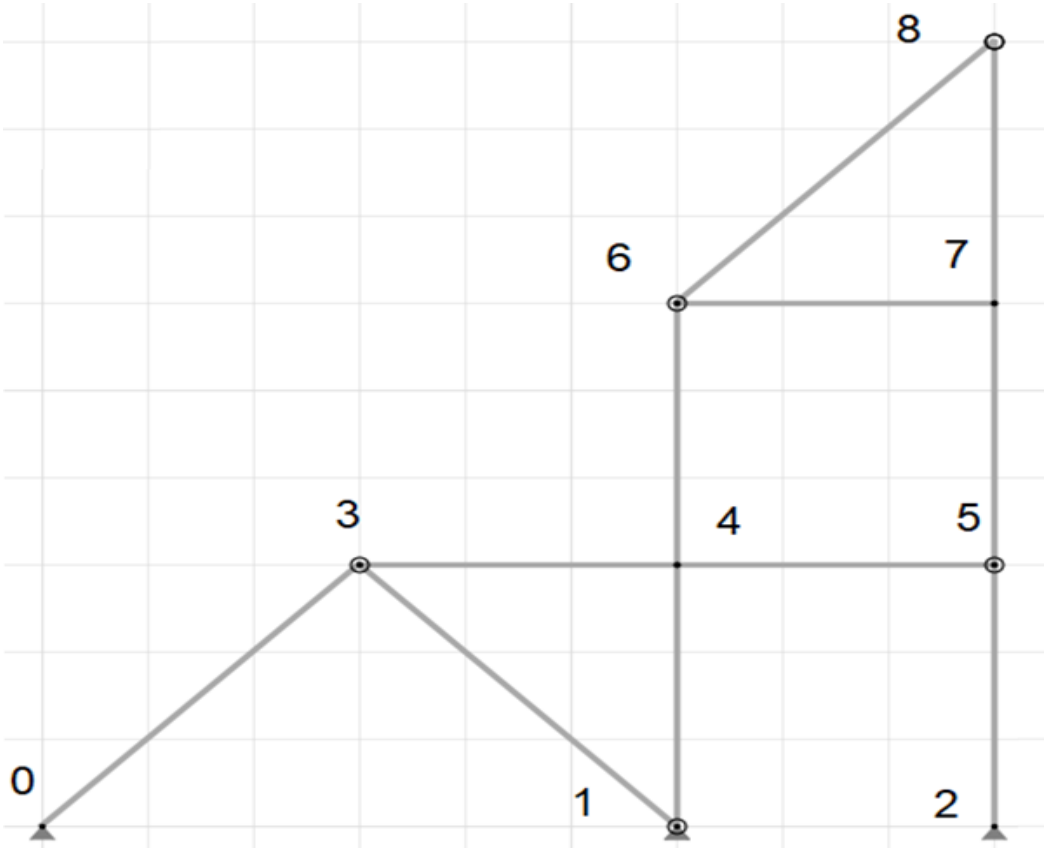


Figura A.45 – Modelo utilizado como exemplo do Passo 1: numeração dos nós

3.1.2 Elementos de Barras

Cada barra deverá possuir um nó inicial e um nó final. Esta ordem definirá a orientação do sentido da barra para a interpretação do programa. Esses direcionamentos devem também seguir uma ordem: De baixo para cima (deve ser priorizada em relação à próxima regra); da esquerda para a direita (se possível). Além disso, as barras devem ser enumeradas. O usuário deve seguir o mesmo

critério de numeração dos nós. Segue o exemplo da Figura A.46 – Modelo utilizado como exemplo do Passo 1: numeração de barras:

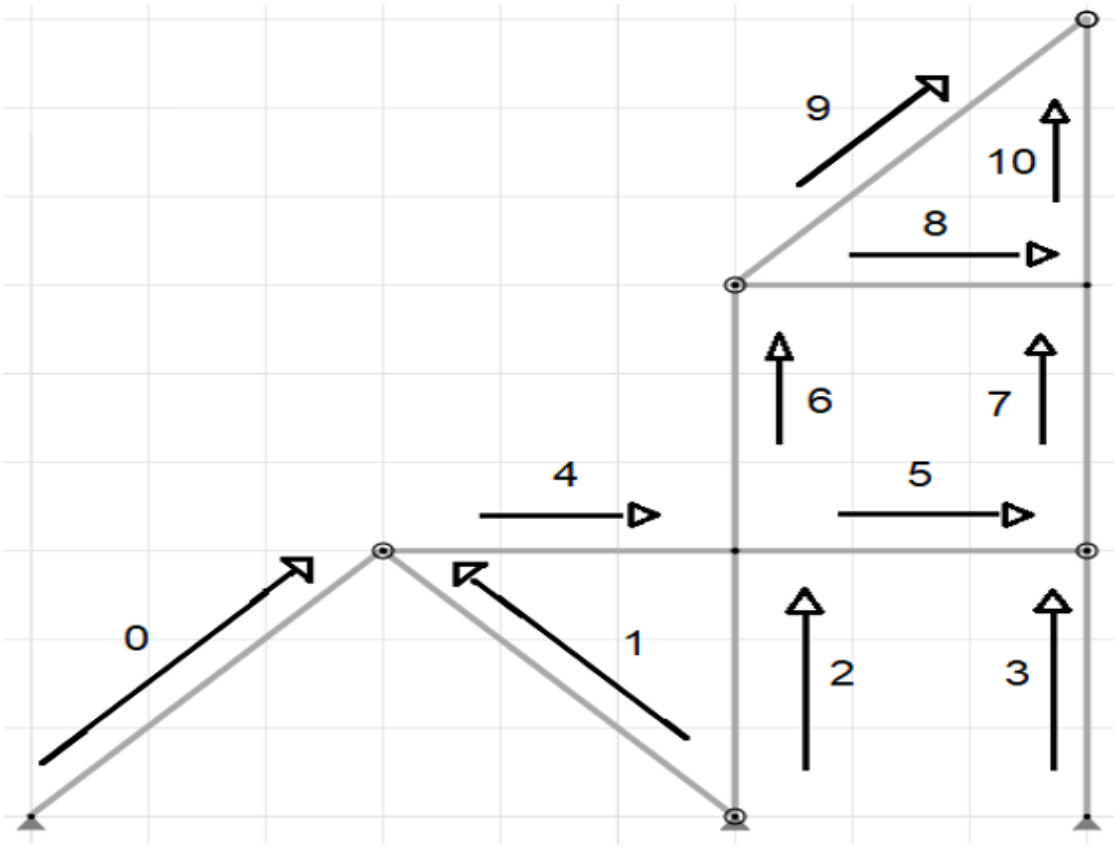


Figura A.46 – Modelo utilizado como exemplo do Passo 1: numeração de barras

3.1.3 Graus de Liberdade

A enumeração dos graus de liberdade da estrutura é a etapa mais importante e crucial, dependente da ação do usuário. Caso seja feita incorretamente, poderá comprometer os resultados de analise modal, assim como a plotagem dos modos de vibração. Os graus de liberdade são as direções nas quais um nó pode transladar, ou rotacionar, dado que estes graus sejam irrestritos por apoios. Particularizando para este programa, os graus de liberdade de cada nó são: Translação em direção do eixo X; translação em direção do eixo Y; rotação em torno do eixo Z, nesta ordem. A enumeração deve começar nos nós onde não existam

apoios. A partir destes nós sem apoios, deve-se seguir a ordem crescente da numeração já realizada dos nós. Começando do numeral zero, em ordem crescente de números naturais, os graus de liberdade devem seguir a sequência anteriormente mencionada (translação em X, Y e rotação em Z). Uma vez enumerados os graus de liberdade irrestritos de nós sem apoio, é necessário enumerar os graus de liberdade irrestritos de nós com apoio. A mesma lógica de enumeração deve ser utilizada, ignorando os graus de liberdade restritos. Uma vez concluída para graus de liberdade irrestritos, é necessário enumerar os restritos, seguindo a mesma lógica das outras etapas.

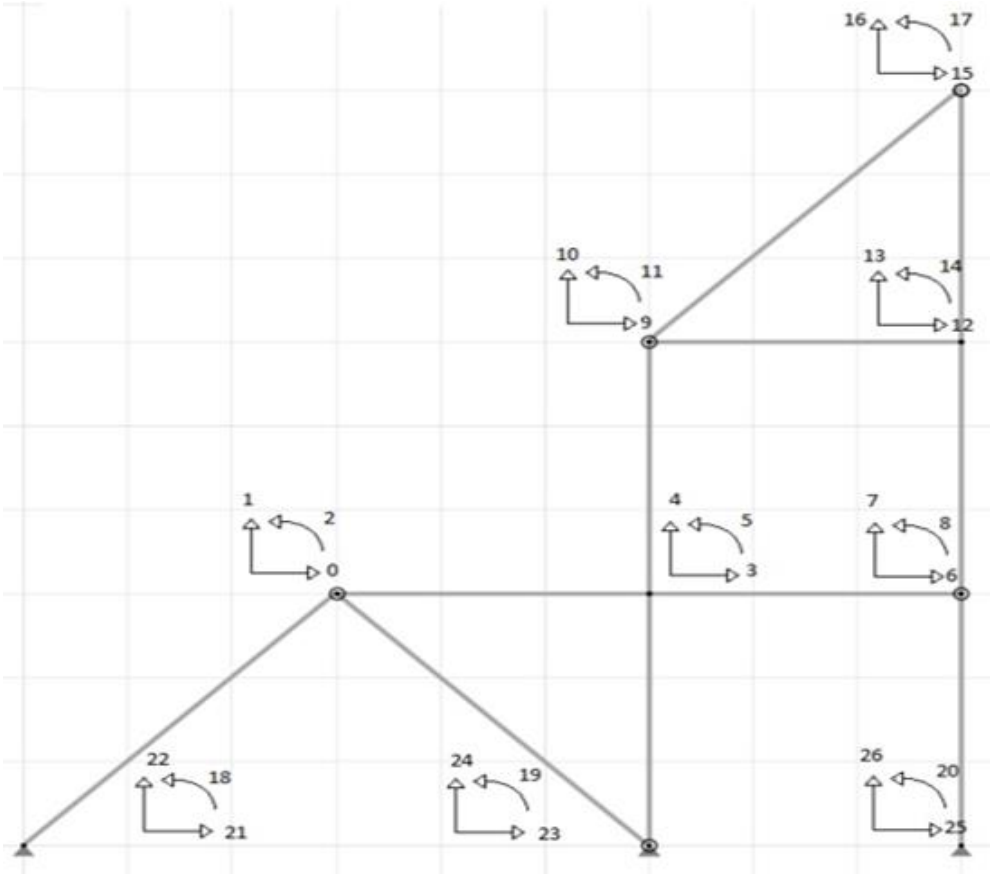


Figura A.47 – Modelo utilizado como exemplo do Passo 1: numeração dos graus de liberdade

3.2 ENTRADA DE DADOS

Passo 2: Entrada de Dados da Estrutura: As abas abordadas no item 3 da seção “Interface” dão acesso às tabelas de entrada de dados do programa. É importante salientar que, a qualquer momento do processo de entrada de dados, o usuário pode utilizar o botão “Plotar Indeformada” para visualizar os elementos estão sendo corretamente imputados no software. Também é importante frisar que linhas não podem ser deixadas em branco, e nem incompletas. Caso sejam, o programa não funcionará corretamente.

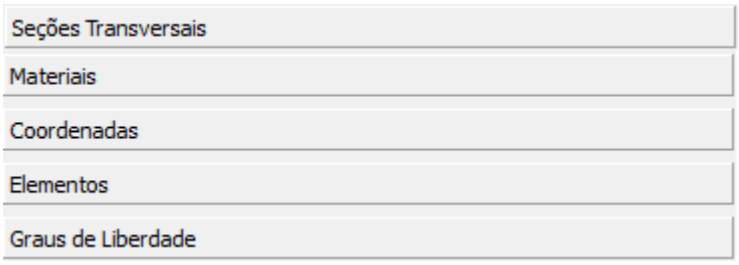


Figura A.48 – Entrada de dados da estrutura

3.2.1 Seções Transversais

Nesta tabela existem os campos:

1) Id. Seção – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar qual seção é utilizada nas barras que serão informadas posteriormente. Valor adimensional.
2) Área Trans. – Deve ser preenchido com números reais positivos não nulos. Esse campo se refere à área da seção transversal da (s) barra (s) da estrutura. Sua unidade é dada em (m^2).
3) Base – Pode ser preenchido com caracteres alfanuméricos. Esse campo não tem real funcionalidade, sua função é apenas auxiliar o usuário na identificação do tipo de seção transversal.

4) Altura – Idem informação do campo “Base”.
5) Iz – Deve ser preenchido com números reais positivos não nulos. Se refere ao momento de inercia da seção em relação ao eixo Z. Sua unidade é dada em (m^4)

Id. Seção	Área Trans. (m^2)	Base (m)	Altura (m)	Iz (m^4)
1	0.06	0.15	0.4	0.0008

Figura A.49 – Tabela das propriedades das seções transversais

3.2.2 Materiais

Nesta tabela existem os campos:

1) Id. Material – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar qual material é utilizado nas barras que serão informadas posteriormente. Valor adimensional.
2) Nome – Pode ser preenchido com caracteres alfanuméricos. Esse campo não tem real funcionalidade, sua função é apenas para auxiliar o usuário na identificação do material, caso exista mais de um.
3) E – Deve ser preenchido com números reais positivos não nulos. Se refere ao módulo de elasticidade do material. Sua unidade é dada em pascal (Pa).
4) Peso Específico – Deve ser preenchido com números reais positivos não nulos. Se refere ao peso específico do material em questão. Sua unidade é dada em (kN/m³)

Id. Material	Nome	E (Pa)	Peso Espec. (kN/m^3)
1	aco	20000000000.0	25.0

Figura A.50 – Tabela das propriedades dos materiais

3.2.2 Coordenadas

Nesta tabela existem os campos:

1) Id. do Nó – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar o numeral que foi atribuído ao nó anteriormente. Valor adimensional.
2) Coord. X – Deve ser preenchido com números reais. Indica qual é a coordenada X global do nó. Valor é dado em metros (m).
3) Coord. Y – Deve ser preenchido com números reais. Indica qual é a coordenada Y global do nó. Valor é dado em metros (m).
4) Apoio – Deve ser preenchido com números reais positivos, de 0 a 3. Referente a qual tipo de apoio é atribuído ao nó, caso exista.

Valor	Significado
0	Ausência de apoio
1	Apoio rotulado móvel (tipo 1)
2	Apoio rotulado fixo (tipo 2)
3	Apoio engastado

Quadro A.20 – Numeração a ser inserida na tabela coordenadas, referente ao tipo de apoio

Id do nó	Coord. X (m)	Coord. Y (m)	Apoio
0.0	0.0	0.0	2.0
1.0	6.0	0.0	2.0
2.0	9.0	0.0	2.0
3.0	3.0	3.0	0.0
4.0	6.0	3.0	0.0
5.0	9.0	3.0	0.0
6.0	6.0	6.0	0.0
7.0	9.0	6.0	0.0
8.0	9.0	9.0	0.0

Figura A.51 – Tabela das coordenadas dos nós

3.2.3 Elementos

Nesta tabela existem os campos:

1) Nº Elemento – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar o numeral que foi atribuído às barras anteriormente. Valor adimensional.
2) Nó Inicial – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar o numeral que foi atribuído ao nó anteriormente. Valor adimensional.
3) Rótula? – Campo binário (apenas 0 ou 1). Serve para informar ao programa se no nó, referido no campo anterior, existe uma rótula para a barra em questão.
4) Nó Final – Idem informações do campo “Nó Inicial”.
5) Rótula? – Idem informações do campo “Rótula?” anterior.
6) Id. Seção – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar qual tipo de seção transversal, definida anteriormente, é utilizado nesta barra. Valor adimensional.
7) Id. Material – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar qual material, definido anteriormente, é utilizado nesta barra. Valor adimensional.

   Obs.: Caso o elemento estrutural esteja em balanço (uma extremidade livre), deve-se indicar que o nó livre não possui rótula.

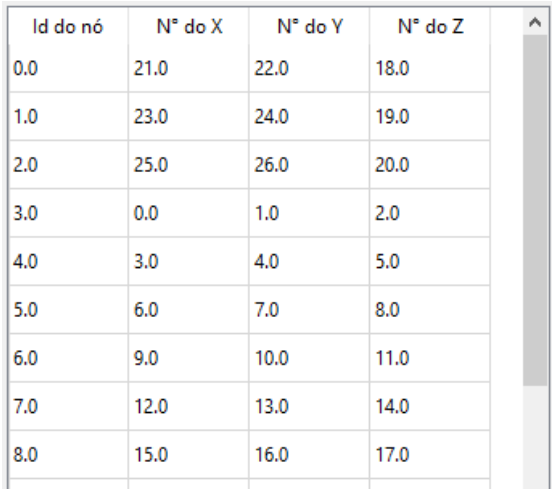
N° Elemento	Nó Inicial	Rótula?	Nó Final	Rótula?	Id. Seção	Id. Material
0	0	0	3	0	1	1
1	1	1	3	1	1	1
2	1	0	4	0	1	1
3	2	0	5	0	1	1
4	3	0	4	0	1	1
5	4	0	5	1	1	1
6	4	0	6	0	1	1
7	5	0	7	0	1	1
8	6	1	7	0	1	1
9	6	0	8	1	1	1
10	7	0	8	1	1	1

Figura A.52 – Tabela das informações a serem inseridas sobre os elementos de barra

3.2.4 Graus de Liberdade

Nesta tabela existem os campos:

1) Id. do Nó – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar o numeral que foi atribuído ao nó anteriormente. Valor adimensional.
2) Nº do X – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar o numeral que foi atribuído ao grau de liberdade X deste nó anteriormente. Valor adimensional.
3) Nº do Y – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar o numeral que foi atribuído ao grau de liberdade Y deste nó anteriormente. Valor adimensional.
4) Nº do Z – Deve ser preenchido apenas com números naturais. Serve para identificar o numeral que foi atribuído ao grau de liberdade Z deste nó anteriormente. Valor adimensional.



Id do nó	N° do X	N° do Y	N° do Z
0.0	21.0	22.0	18.0
1.0	23.0	24.0	19.0
2.0	25.0	26.0	20.0
3.0	0.0	1.0	2.0
4.0	3.0	4.0	5.0
5.0	6.0	7.0	8.0
6.0	9.0	10.0	11.0
7.0	12.0	13.0	14.0
8.0	15.0	16.0	17.0

Figura A.53 – Tabela das numerações dos graus de liberdade

3.3 CÁLCULO DOS PARÂMETROS MODAIS E PLOTAGEM DAS DEFORMADAS

Passo 3: Cálculo dos Parâmetros Modais e Plotagem das Deformadas – Assim que finalizado o processo de entrada de dados, ao pressionar o botão “Plotar Deformada”, o programa irá ler toda a entrada de dados, calculará os parâmetros modais, e retornara a plotagem dos modos de vibração. Por padrão, o programa ordena as frequências naturais em ordem crescente, assim como seus respectivos modos. O modo de vibração que se deseja observar, assim como a escala de plotagem, ou o instante do período da oscilação do modo de vibração, podem ser alterados nos parâmetros da do item 5 da seção 1 desse manual. Também é possível observar a oscilação do modo em forma de animação, apertando repetidamente o botão “Animação - Step”. Segue abaixo a representação gráfica do modo de vibração de uma estrutura.

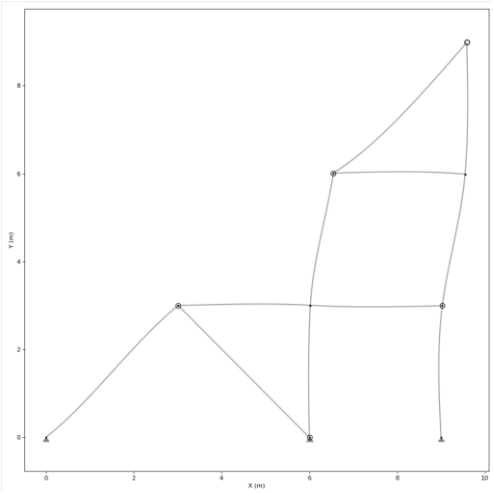


Figura A.54 – Animação dos modos de vibração da estrutura

3.4 VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADO NUMÉRICOS E EXPORTAÇÃO DOS RESULTADOS

Passo 4: Visualização dos Resultado Numéricos e Exportação dos Resultados – A partir do momento que qualquer deformada é gerada, o software disponibiliza os resultados da análise modal para visualização e exportação em extensões .xlsx e .csv. Para tais funcionalidades, basta clicar no botão “Tabelas”, navegar entre as abas de “Frequências”, ou “Modos de Vibração”, ou exportar as tabelas clicando no botão exportar para a extensão de arquivo de interesse.

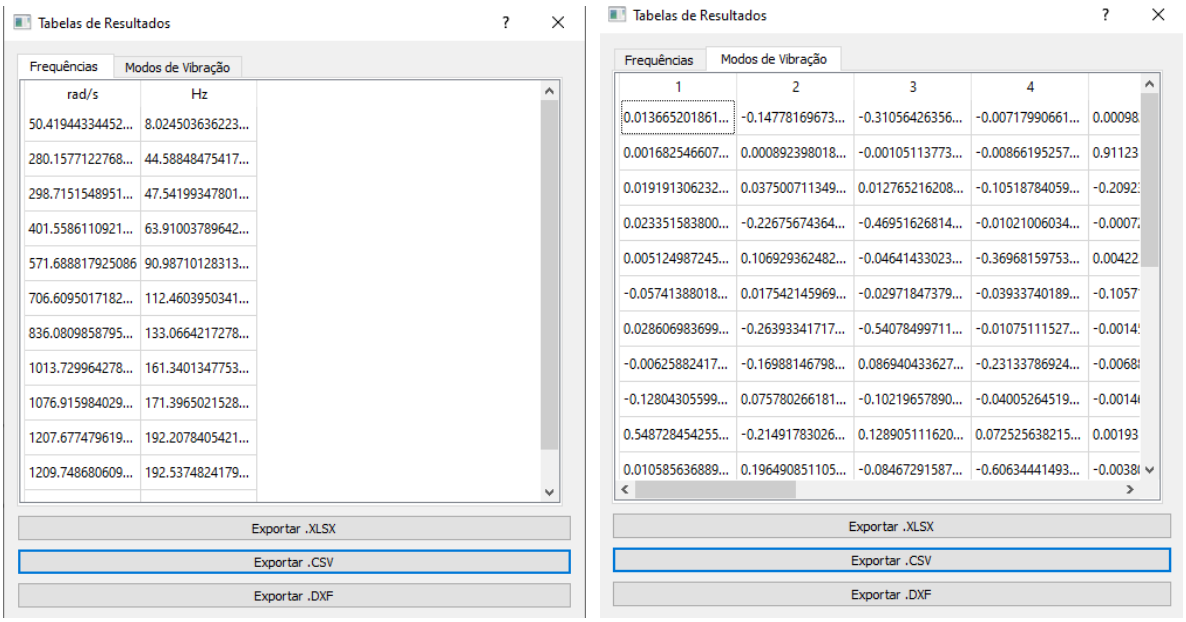


Figura A.55 – Tabelas de resultados de parâmetros modais do Aeolos.

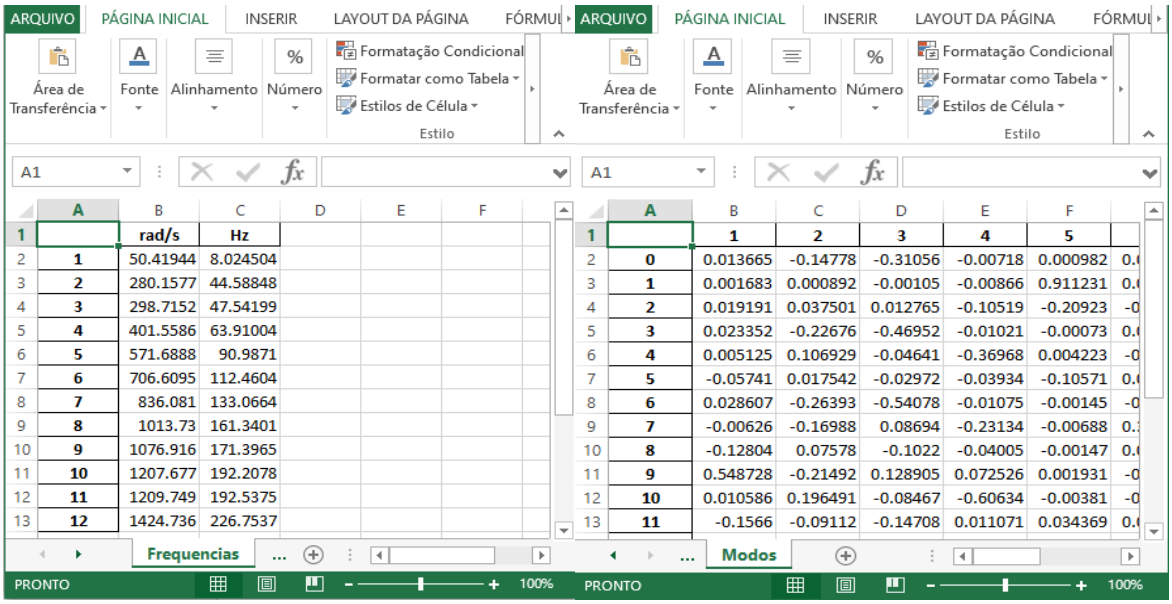


Figura A.56 - Tabelas de resultados dos parâmetros modais exportados em .xlsx.

O Aeolos também possui a possibilidade de exportar as deformadas relativas a cada modo de vibração em formato. dxf, para leitura em programas de plataforma CAD. Caso o usuário necessite exportar a estrutura na configuração original, o mesmo deve atribuir o valor 0 para a “Escala de plotagem”, em qualquer modo de vibração.

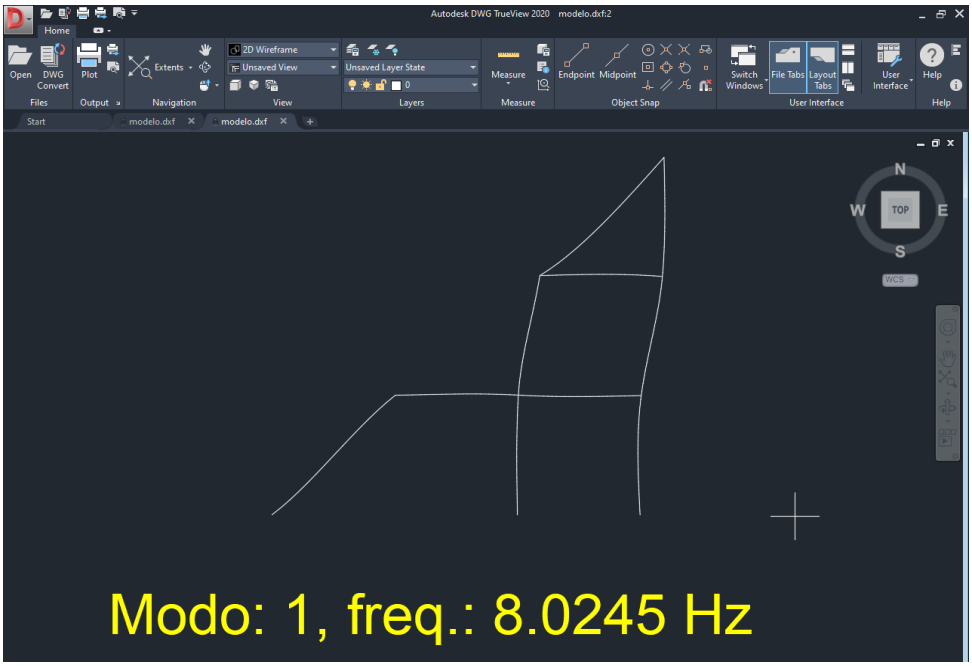


Figura A.57 - deformadas relativas a cada modo de vibração em formato .dxf

APÊNDICE B

Tabelas de comparativos de modos de vibração e plodategem entre Aeolos e SAP2000 21

1 MODELO 5: PÓRTICO CONVENCIONAL ENGASTADO

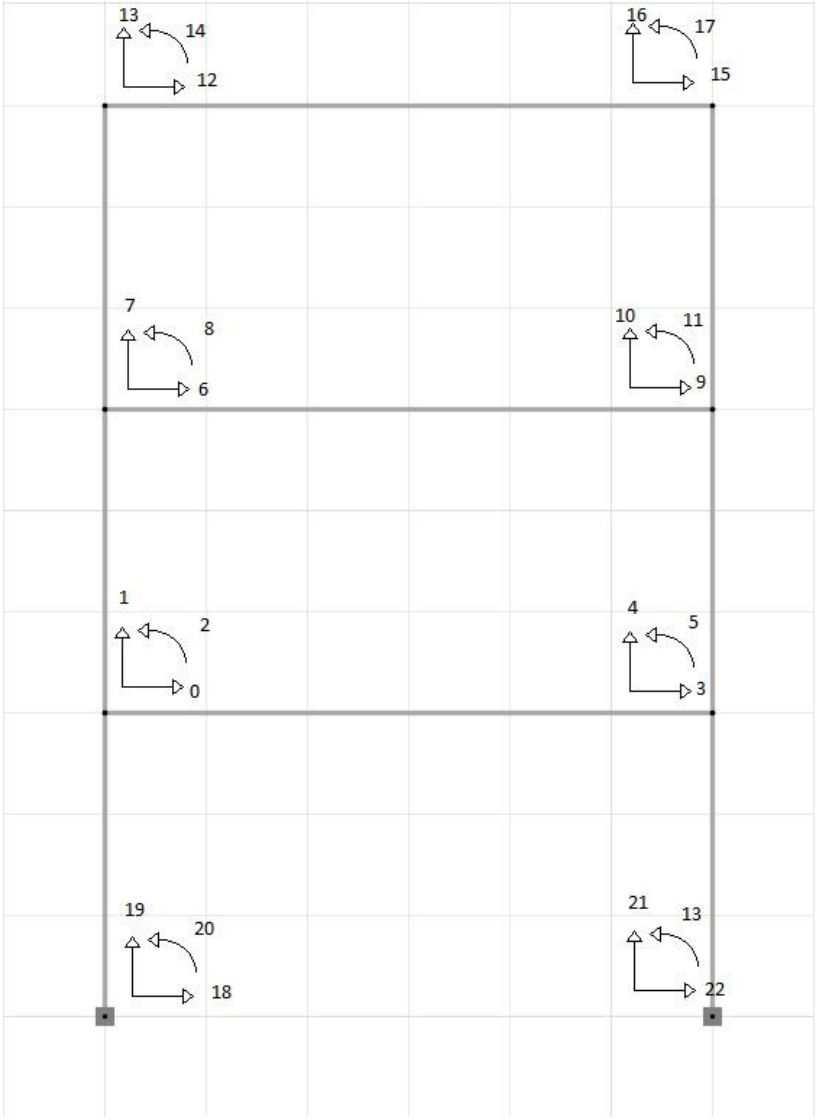


Figura B.58 - Estrutura do modelo 5, indeformada, com a numeração dos graus de liberdades referentes a cada nó.

1.1 DEFORMADA REFERENTE AOS MODOS DE VIBRAÇÃO OBTIDOS

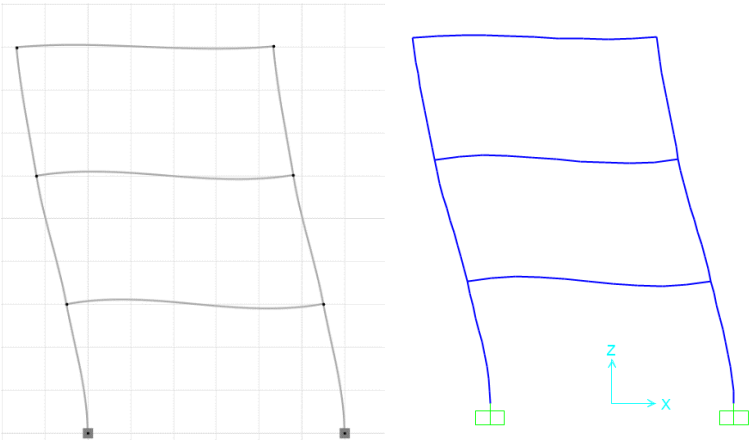


Figura B.59 - Comparativo da deformada obtida referente ao primeiro modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

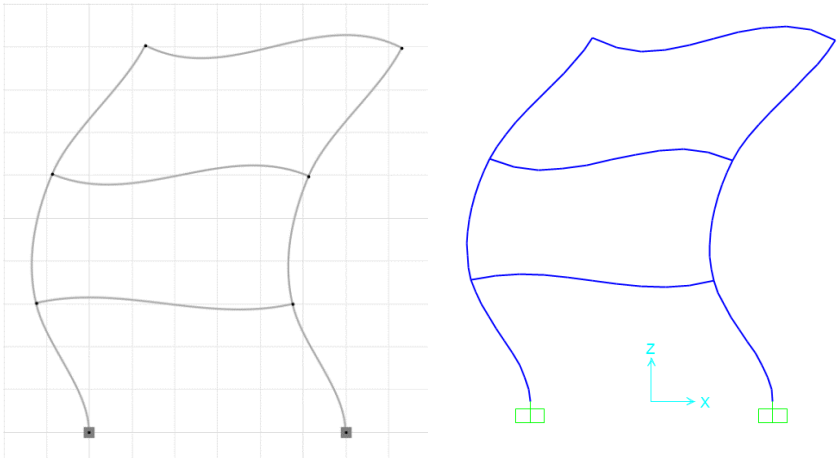


Figura B.60 - Comparativo da deformada obtida referente ao segundo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

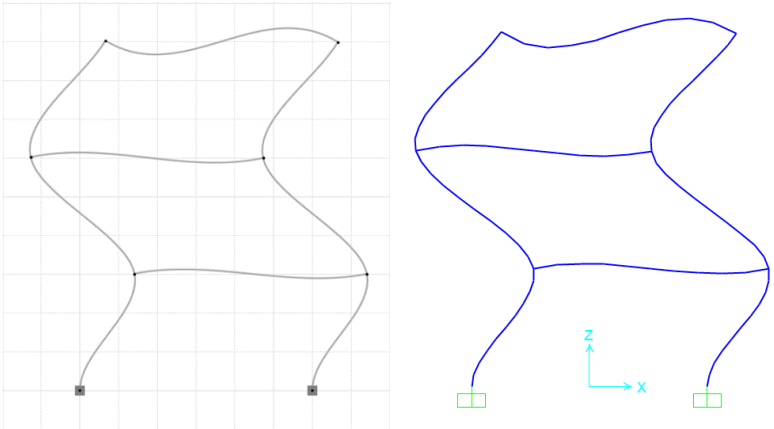


Figura B.61 - Comparativo da deformada obtida referente ao terceiro modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

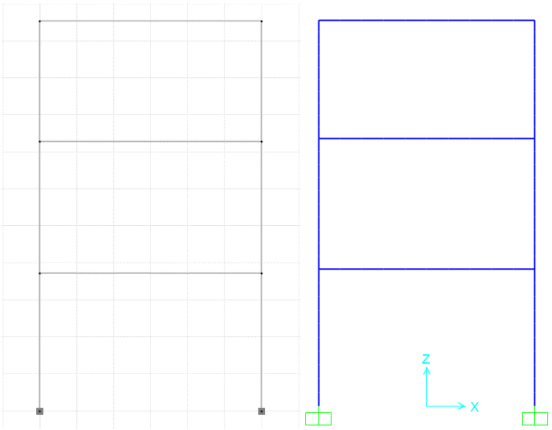


Figura B.62 - Comparativo da deformada obtida referente ao quarto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

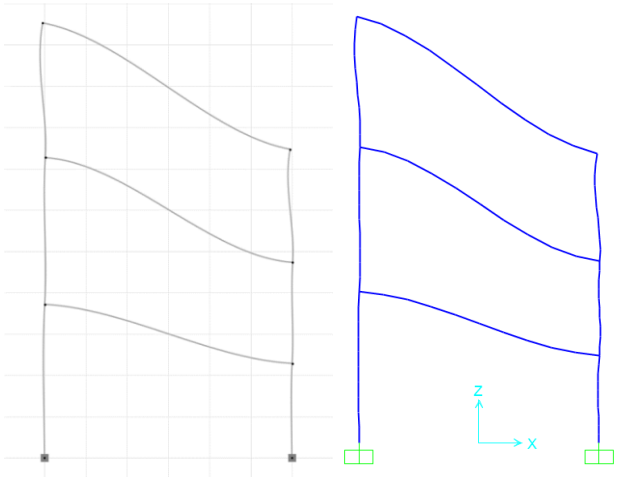


Figura B.63 - Comparativo da deformada obtida referente ao quinto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

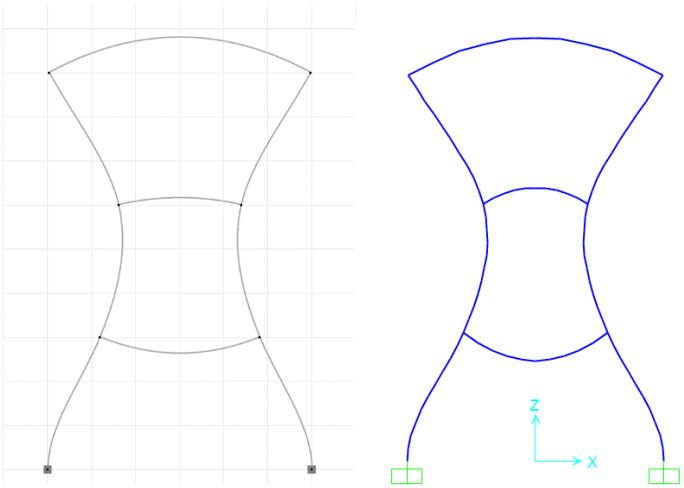


Figura B.64 - Comparativo da deformada obtida referente ao sexto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

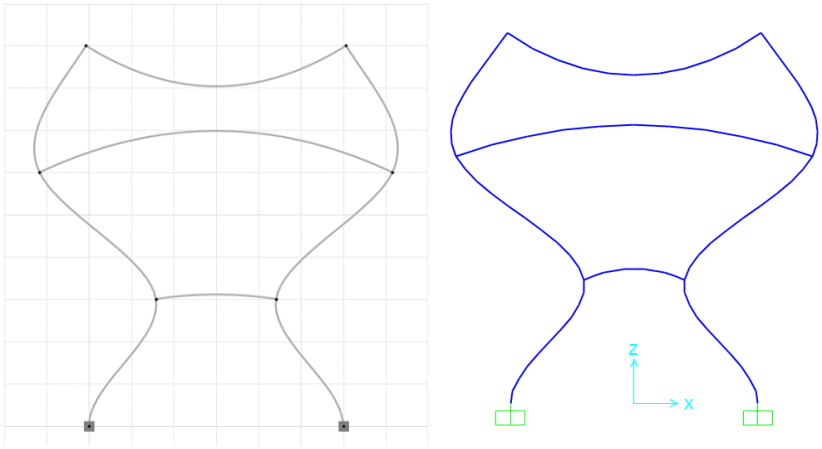


Figura B.65 - Comparativo da deformada obtida referente ao sétimo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

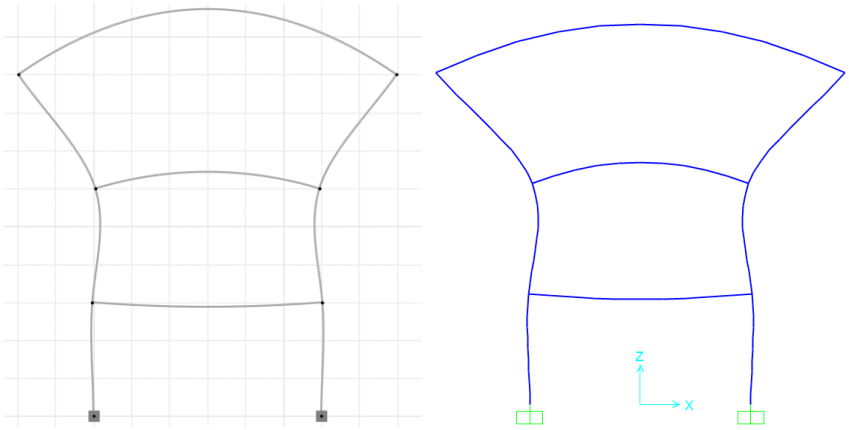


Figura B.66 - Comparativo da deformada obtida referente ao oitavo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

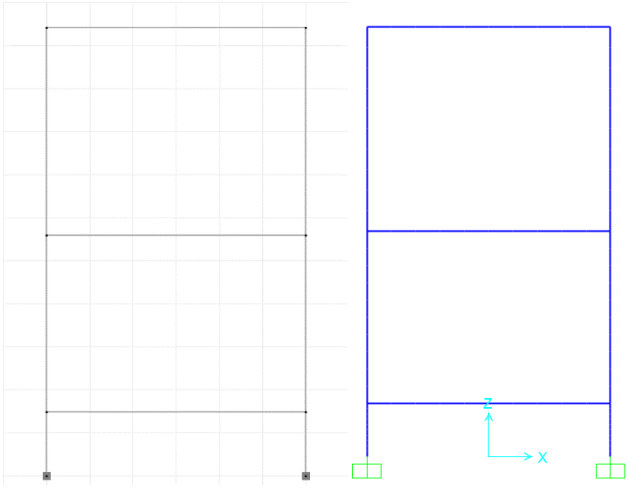


Figura B.67 - Comparativo da deformada obtida referente ao nono modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

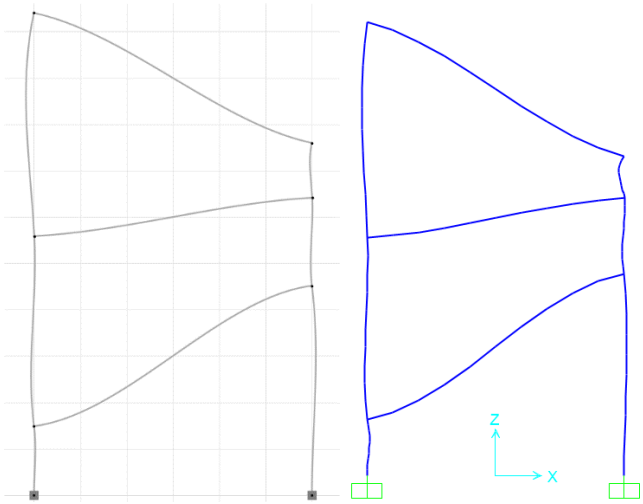


Figura B.68 - Comparativo da deformada obtida referente ao décimo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

1.2 COMPARATIVO DE VALORES OBTIDOS PARA OS MODOS DE VIBRAÇÃO

Modo de Vibração	1				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	1,6433E-01	-1,8899E-01	2,9680E-01	2,9836E-01	-5,2370E-01
1	1,9244E-03	-2,1500E-03	3,4757E-03	3,3942E-03	2,4003E+00
2	-6,2723E-02	7,0872E-02	-1,1329E-01	-1,1189E-01	1,2515E+00
3	1,6433E-01	-1,8899E-01	2,9680E-01	2,9836E-01	-5,2370E-01
4	-1,9244E-03	2,1500E-03	-3,4757E-03	-3,3942E-03	2,4003E+00
5	-6,2723E-02	7,0872E-02	-1,1329E-01	-1,1189E-01	1,2515E+00
6	3,9834E-01	-4,5623E-01	7,1945E-01	7,2025E-01	-1,1059E-01
7	3,0186E-03	-3,3740E-03	5,4519E-03	5,3266E-03	2,3533E+00
8	-5,4324E-02	6,1463E-02	-9,8117E-02	-9,7032E-02	1,1177E+00
9	3,9834E-01	-4,5623E-01	7,1945E-01	7,2025E-01	-1,1059E-01
10	-3,0186E-03	3,3740E-03	-5,4519E-03	-5,3266E-03	2,3533E+00
11	-5,4324E-02	6,1463E-02	-9,8117E-02	-9,7032E-02	1,1177E+00
12	5,5367E-01	-6,3343E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	-1,2212E-13
13	3,3980E-03	-3,7990E-03	6,1372E-03	5,9975E-03	2,3287E+00
14	-2,9344E-02	3,3297E-02	-5,3000E-02	-5,2566E-02	8,2444E-01
15	5,5367E-01	-6,3343E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
16	-3,3980E-03	3,7990E-03	-6,1372E-03	-5,9975E-03	2,3287E+00
17	-2,9344E-02	3,3297E-02	-5,3000E-02	-5,2566E-02	8,2444E-01

Quadro B.21 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o primeiro modo

Modo de Vibração	2				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-4,1347E-01	-4,8552E-01	-9,4211E-01	-9,4580E-01	-3,9057E-01
1	3,2450E-03	3,7060E-03	7,3939E-03	7,2194E-03	2,4178E+00
2	7,7161E-02	8,6977E-02	1,7581E-01	1,6943E-01	3,7664E+00
3	-4,1347E-01	-4,8552E-01	-9,4211E-01	-9,4580E-01	-3,9057E-01
4	-3,2450E-03	-3,7060E-03	-7,3939E-03	-7,2194E-03	2,4178E+00
5	7,7161E-02	8,6977E-02	1,7581E-01	1,6943E-01	3,7664E+00
6	-2,8708E-01	-3,3357E-01	-6,5412E-01	-6,4980E-01	6,6360E-01
7	7,4870E-03	8,5230E-03	1,7060E-02	1,6603E-02	2,7497E+00
8	-1,3893E-01	-1,6023E-01	-3,1656E-01	-3,1213E-01	1,4211E+00
9	-2,8708E-01	-3,3357E-01	-6,5412E-01	-6,4980E-01	6,6360E-01
10	-7,4870E-03	-8,5230E-03	-1,7060E-02	-1,6603E-02	2,7497E+00
11	-1,3893E-01	-1,6023E-01	-3,1656E-01	-3,1213E-01	1,4211E+00
12	4,3888E-01	5,1334E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	-1,1102E-13
13	9,8032E-03	1,1149E-02	2,2337E-02	2,1719E-02	2,8477E+00
14	-1,6912E-01	-1,9444E-01	-3,8535E-01	-3,7877E-01	1,7367E+00
15	4,3888E-01	5,1334E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
16	-9,8032E-03	-1,1149E-02	-2,2337E-02	-2,1719E-02	2,8477E+00
17	-1,6912E-01	-1,9444E-01	-3,8535E-01	-3,7877E-01	1,7367E+00

Quadro B.22 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o segundo modo

Modo de Vibração	3				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-4,6980E-01	-5,2289E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
1	-1,3482E-03	-1,4250E-03	2,8698E-03	2,7252E-03	5,3043E+00
2	-6,4054E-02	-7,1495E-02	1,3634E-01	1,3673E-01	-2,8148E-01
3	-4,6980E-01	-5,2289E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	6,6613E-14
4	1,3482E-03	1,4250E-03	-2,8698E-03	-2,7252E-03	5,3043E+00
5	-6,4054E-02	-7,1495E-02	1,3634E-01	1,3673E-01	-2,8148E-01
6	4,2365E-01	4,7481E-01	-9,0177E-01	-9,0804E-01	-6,9095E-01
7	-3,4923E-03	-3,7330E-03	7,4337E-03	7,1391E-03	4,1263E+00
8	-7,0676E-02	-7,5040E-02	1,5044E-01	1,4351E-01	4,8285E+00
9	4,2365E-01	4,7481E-01	-9,0177E-01	-9,0804E-01	-6,9095E-01
10	3,4923E-03	3,7330E-03	-7,4337E-03	-7,1391E-03	4,1263E+00
11	-7,0676E-02	-7,5040E-02	1,5044E-01	1,4351E-01	4,8285E+00
12	-2,2041E-01	-2,4789E-01	4,6916E-01	4,7407E-01	-1,0357E+00
13	-6,4282E-03	-6,8760E-03	1,3683E-02	1,3150E-02	4,0529E+00
14	2,0513E-01	2,2314E-01	-4,3663E-01	-4,2674E-01	2,3184E+00
15	-2,2041E-01	-2,4789E-01	4,6916E-01	4,7407E-01	-1,0357E+00
16	6,4282E-03	6,8750E-03	-1,3683E-02	-1,3148E-02	4,0680E+00
17	2,0513E-01	2,2314E-01	-4,3663E-01	-4,2674E-01	2,3184E+00

Quadro B.23 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o terceiro modo

Modo de Vibração	4				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-3,0426E-16	-5,9840E-13	5,9394E-16	-1,0431E-12	-1,0006E+02
1	-2,3961E-01	2,6834E-01	4,6774E-01	4,6774E-01	-2,0151E-05
2	2,0706E-15	5,1930E-13	-4,0419E-15	9,0518E-13	-1,0045E+02
3	-3,1385E-16	4,9780E-13	6,1266E-16	8,6770E-13	-9,9929E+01
4	-2,3961E-01	2,6834E-01	4,6774E-01	4,6774E-01	-2,0152E-05
5	2,3133E-15	5,9180E-13	-4,5157E-15	1,0315E-12	-1,0044E+02
6	-9,6686E-16	1,2940E-13	1,8874E-15	2,2555E-13	-9,9163E+01
7	-4,2445E-01	4,7535E-01	8,2857E-01	8,2857E-01	-8,5657E-05
8	3,0259E-15	4,1790E-13	-5,9069E-15	7,2843E-13	-1,0081E+02
9	-8,3344E-16	-4,9560E-13	1,6269E-15	-8,6387E-13	-1,0019E+02
10	-4,2445E-01	4,7535E-01	8,2857E-01	8,2857E-01	-8,5657E-05
11	2,6606E-15	7,1200E-13	-5,1938E-15	1,2411E-12	-1,0042E+02
12	1,8188E-15	3,7220E-13	-3,5504E-15	6,4877E-13	-1,0055E+02
13	-5,1227E-01	5,7370E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
14	7,1330E-15	1,8180E-12	-1,3924E-14	3,1689E-12	-1,0044E+02
15	1,6481E-15	3,9890E-13	-3,2173E-15	6,9531E-13	-1,0046E+02
16	-5,1227E-01	5,7370E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	-2,4925E-11
17	8,1940E-15	1,4490E-12	-1,5995E-14	2,5257E-12	-1,0063E+02

Quadro B.24 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o quarto modo

Modo de Vibração	5				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	2,2086E-03	2,5410E-03	-4,3323E-03	-4,4304E-03	-2,2138E+00
1	2,3852E-01	2,6833E-01	-4,6787E-01	-4,6785E-01	2,2816E-03
2	-1,9131E-02	-2,1833E-02	3,7526E-02	3,8067E-02	-1,4229E+00
3	2,2086E-03	2,5410E-03	-4,3323E-03	-4,4304E-03	-2,2138E+00
4	-2,3852E-01	-2,6833E-01	4,6787E-01	4,6785E-01	2,2816E-03
5	-1,9131E-02	-2,1833E-02	3,7526E-02	3,8067E-02	-1,4229E+00
6	6,7676E-03	7,2890E-03	-1,3275E-02	-1,2709E-02	4,4543E+00
7	4,2243E-01	4,7524E-01	-8,2862E-01	-8,2861E-01	7,5543E-04
8	-2,0809E-02	-2,4735E-02	4,0817E-02	4,3127E-02	-5,3572E+00
9	6,7676E-03	7,2890E-03	-1,3275E-02	-1,2709E-02	4,4543E+00
10	-4,2243E-01	-4,7524E-01	8,2862E-01	8,2861E-01	7,5543E-04
11	-2,0809E-02	-2,4735E-02	4,0817E-02	4,3127E-02	-5,3572E+00
12	-1,4671E-02	-1,6040E-02	2,8777E-02	2,7967E-02	2,8986E+00
13	5,0981E-01	5,7354E-01	-1,0000E+00	-1,0000E+00	-6,6613E-12
14	-6,0759E-02	-6,9843E-02	1,1918E-01	1,2178E-01	-2,1315E+00
15	-1,4671E-02	-1,6040E-02	2,8777E-02	2,7967E-02	2,8986E+00
16	-5,0981E-01	-5,7354E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
17	-6,0759E-02	-6,9843E-02	1,1918E-01	1,2178E-01	-2,1315E+00

Quadro B.25 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o quinto modo

Modo de Vibração	6				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-3,9556E-01	4,4004E-01	7,3851E-01	7,4265E-01	-5,5780E-01
1	-3,9301E-17	1,0040E-12	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
2	1,3588E-01	-1,4720E-01	-2,5370E-01	-2,4842E-01	2,1223E+00
3	3,9556E-01	-4,4004E-01	-7,3851E-01	-7,4265E-01	-5,5780E-01
4	-9,0156E-17	-7,7230E-12	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
5	-1,3588E-01	1,4720E-01	2,5370E-01	2,4842E-01	2,1223E+00
6	-5,3562E-01	5,9253E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
7	2,6772E-17	-9,8910E-13	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
8	-7,5859E-02	8,3299E-02	1,4163E-01	1,4058E-01	7,4439E-01
9	5,3562E-01	-5,9253E-01	-1,0000E+00	-1,0000E+00	-7,7716E-14
10	-7,8656E-17	1,0040E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
11	7,5859E-02	-8,3299E-02	-1,4163E-01	-1,4058E-01	7,4439E-01
12	-1,0284E-02	1,1190E-02	1,9201E-02	1,8885E-02	1,6710E+00
13	-2,9251E-16	7,0680E-13	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
14	-1,7979E-01	1,9605E-01	3,3567E-01	3,3088E-01	1,4479E+00
15	1,0284E-02	-1,1190E-02	-1,9201E-02	-1,8885E-02	1,6710E+00
16	1,7418E-16	-6,2500E-12	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
17	1,7979E-01	-1,9605E-01	-3,3567E-01	-3,3088E-01	1,4479E+00

Quadro B.26 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o sexto modo

Modo de Vibração	7				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	5,2667E-01	5,9249E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
1	1,3675E-17	-1,1060E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
2	5,1417E-02	5,9716E-02	9,7626E-02	1,0079E-01	-3,1379E+00
3	-5,2667E-01	-5,9249E-01	-1,0000E+00	-1,0000E+00	8,8818E-14
4	-8,4570E-17	-1,3080E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
5	-5,1417E-02	-5,9716E-02	-9,7626E-02	-1,0079E-01	-3,1379E+00
6	-3,8861E-01	-4,3965E-01	-7,3787E-01	-7,4205E-01	-5,6279E-01
7	-4,5244E-17	-4,9400E-12	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
8	1,5724E-01	1,7072E-01	2,9855E-01	2,8814E-01	3,6153E+00
9	3,8861E-01	4,3965E-01	7,3787E-01	7,4205E-01	-5,6279E-01
10	-4,0991E-17	4,4770E-12	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
11	-1,5724E-01	-1,7072E-01	-2,9855E-01	-2,8814E-01	3,6153E+00
12	-2,3300E-02	-2,5213E-02	-4,4241E-02	-4,2554E-02	3,9623E+00
13	-1,3168E-16	1,3830E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
14	-2,0902E-01	-2,2765E-01	-3,9687E-01	-3,8423E-01	3,2902E+00
15	2,3300E-02	2,5213E-02	4,4241E-02	4,2554E-02	3,9623E+00
16	1,4175E-16	3,8850E-12	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
17	2,0902E-01	2,2765E-01	3,9687E-01	3,8423E-01	3,2902E+00

Quadro B.27 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o sétimo modo

Modo de Vibração	8				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-9,6373E-03	-1,1756E-02	-1,4599E-02	-1,3800E-02	5,7879E+00
1	2,1440E-16	4,6300E-13	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
2	-2,5670E-02	-3,1773E-02	-3,8887E-02	-3,7299E-02	4,2581E+00
3	9,6373E-03	1,1756E-02	1,4599E-02	1,3800E-02	5,7879E+00
4	-6,0925E-16	-2,1610E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
5	2,5670E-02	3,1773E-02	3,8887E-02	3,7299E-02	4,2581E+00
6	1,6623E-02	2,0796E-02	2,5182E-02	2,4413E-02	3,1527E+00
7	1,1159E-16	-1,9840E-13	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
8	9,8892E-02	1,2790E-01	1,4981E-01	1,5014E-01	-2,2042E-01
9	-1,6623E-02	-2,0796E-02	-2,5182E-02	-2,4413E-02	3,1527E+00
10	-3,2832E-17	-1,1410E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
11	-9,8892E-02	-1,2790E-01	-1,4981E-01	-1,5014E-01	-2,2042E-01
12	-6,6013E-01	-8,5186E-01	-1,0000E+00	-1,0000E+00	1,5543E-13
13	-3,0077E-16	-3,5700E-13	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
14	2,3114E-01	2,9321E-01	3,5015E-01	3,4420E-01	1,7290E+00
15	6,6013E-01	8,5186E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
16	7,3083E-16	2,6280E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
17	-2,3114E-01	-2,9321E-01	-3,5015E-01	-3,4420E-01	1,7290E+00

Quadro B.28 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o oitavo modo

Modo de Vibração	9				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-9,1016E-18	-9,0240E-12	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
1	-5,0886E-01	-5,6332E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
2	2,7954E-15	-3,0640E-10	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
3	-3,0933E-17	1,3040E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
4	-5,0886E-01	-5,6332E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	-1,3178E-11
5	2,4689E-15	-3,0560E-10	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
6	8,2045E-17	-4,5390E-12	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
7	-1,3899E-01	-1,5386E-01	2,7313E-01	2,7313E-01	-1,0146E-04
8	9,3007E-16	-1,3300E-10	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
9	5,5773E-17	-2,0000E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
10	-1,3899E-01	-1,5386E-01	2,7313E-01	2,7313E-01	-1,0146E-04
11	1,6193E-15	-1,2090E-10	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
12	9,5843E-17	2,6830E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
13	4,7090E-01	5,2130E-01	-9,2540E-01	-9,2540E-01	1,2386E-04
14	-3,8635E-15	5,0630E-10	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
15	-1,4834E-16	-1,1390E-11	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
16	4,7090E-01	5,2130E-01	-9,2540E-01	-9,2540E-01	1,2386E-04
17	-5,8677E-15	5,1060E-10	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00

Quadro B.29 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o nono modo

Modo de Vibração	10				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	3,0092E-04	-3,1700E-04	5,9568E-04	1,6773E-03	-6,4486E+01
1	5,0516E-01	-5,6328E-01	1,0000E+00	1,0000E+00	0,0000E+00
2	-4,2338E-02	4,8320E-02	-8,3811E-02	-8,5783E-02	-2,2988E+00
3	3,0092E-04	-3,1700E-04	5,9568E-04	5,6277E-04	5,8481E+00
4	-5,0516E-01	5,6328E-01	-1,0000E+00	-1,0000E+00	2,3737E-11
5	-4,2338E-02	4,8320E-02	-8,3811E-02	-8,5783E-02	-2,2988E+00
6	-1,7998E-03	1,9350E-03	-3,5627E-03	-3,4352E-03	3,7122E+00
7	1,3801E-01	-1,5389E-01	2,7320E-01	2,7320E-01	5,6553E-04
8	-1,7922E-02	1,9915E-02	-3,5478E-02	-3,5355E-02	3,4856E-01
9	-1,7998E-03	1,9350E-03	-3,5627E-03	-3,4352E-03	3,7122E+00
10	-1,3801E-01	1,5389E-01	-2,7320E-01	-2,7320E-01	5,6553E-04
11	-1,7922E-02	1,9915E-02	-3,5478E-02	-3,5355E-02	3,4856E-01
12	1,1325E-03	-1,2170E-03	2,2419E-03	2,1605E-03	3,7633E+00
13	-4,6754E-01	5,2133E-01	-9,2553E-01	-9,2552E-01	1,0908E-03
14	7,1075E-02	-8,0057E-02	1,4070E-01	1,4213E-01	-1,0051E+00
15	1,1325E-03	-1,2170E-03	2,2419E-03	2,1605E-03	3,7633E+00
16	4,6754E-01	-5,2133E-01	9,2553E-01	9,2552E-01	1,0908E-03
17	7,1075E-02	-8,0057E-02	1,4070E-01	1,4213E-01	-1,0051E+00

Quadro B.30 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o décimo modo

2 MODELO 6: PÓRTICO ENGASTADO COM CONTRAVENTAMENTO

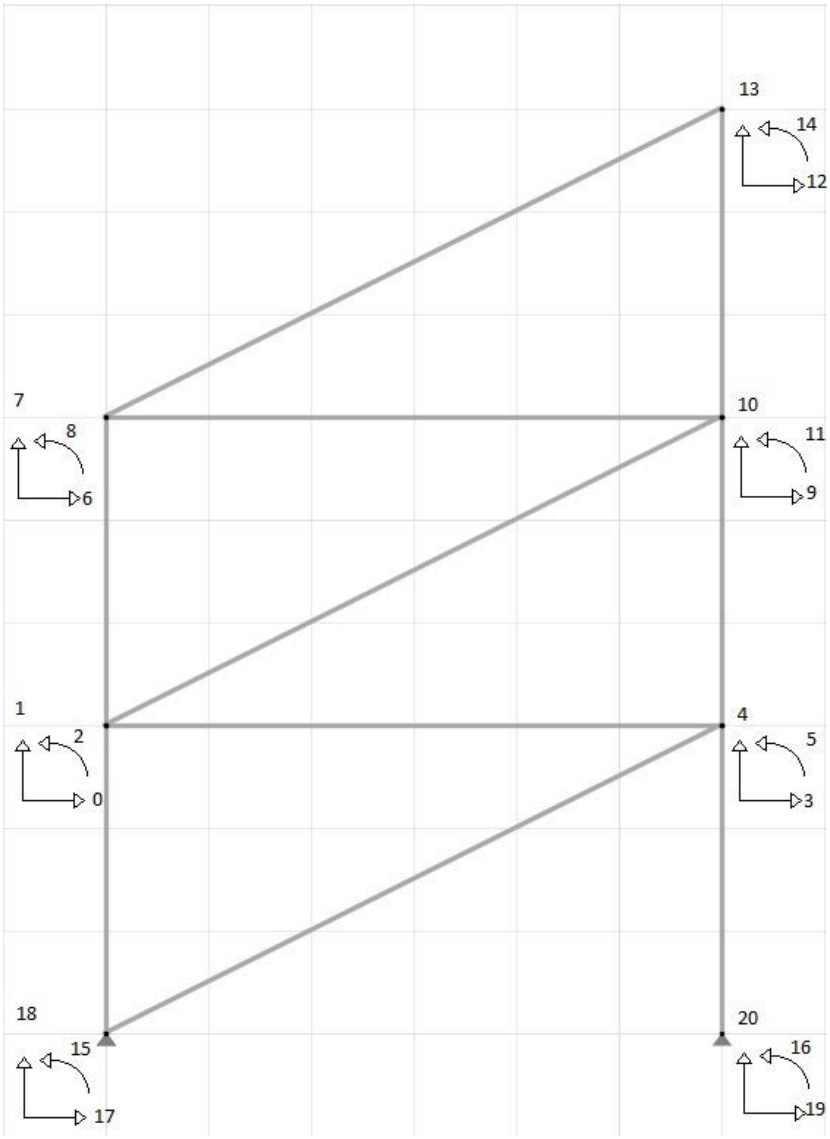


Figura B.69 - Estrutura do modelo 6, indeformada, com a numeração dos graus de liberdade referentes a cada nó da estrutura

2.1 DEFORMADA REFERENTE AOS MODOS DE VIBRAÇÃO OBTIDOS

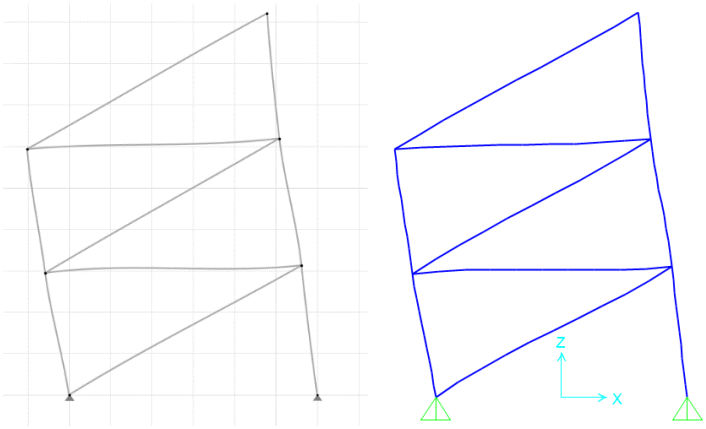


Figura B.70 - Comparativo da deformada obtida referente ao primeiro modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

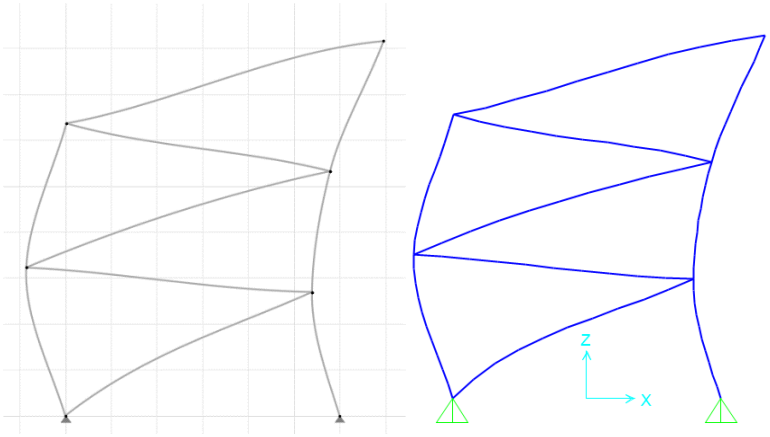


Figura B.71 - Comparativo da deformada obtida referente ao segundo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

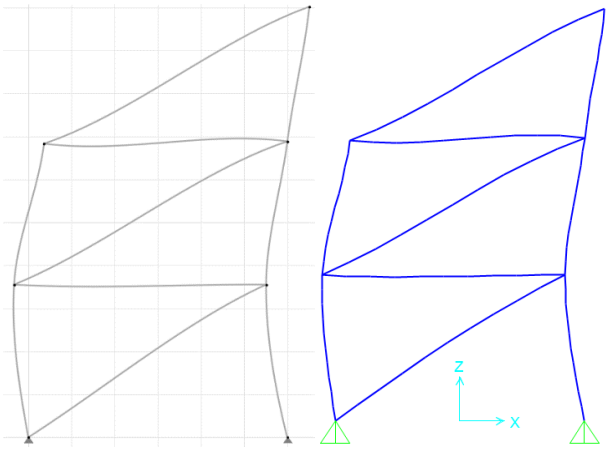


Figura B.72 - Comparativo da deformada obtida referente ao terceiro modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

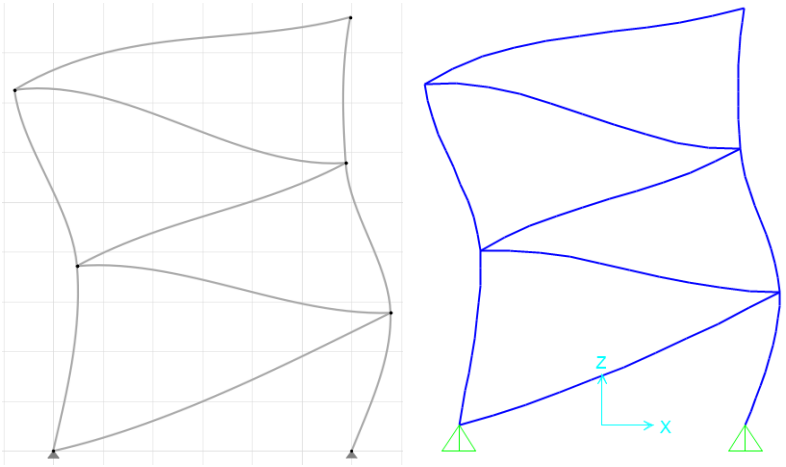


Figura B.73 - Comparativo da deformada obtida referente ao quarto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

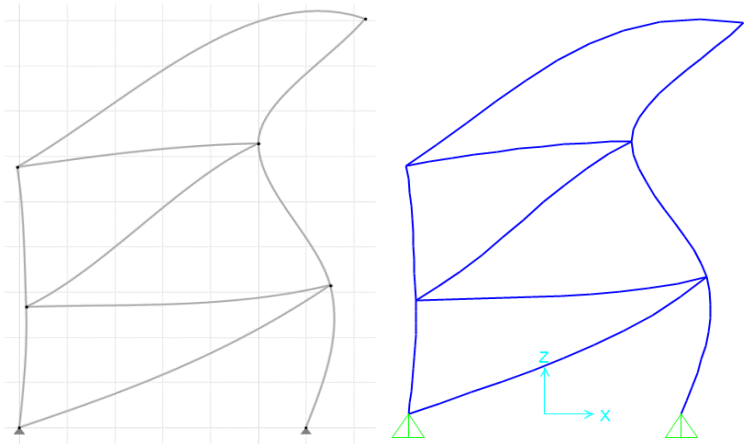


Figura B.74 - Comparativo da deformada obtida referente ao quinto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

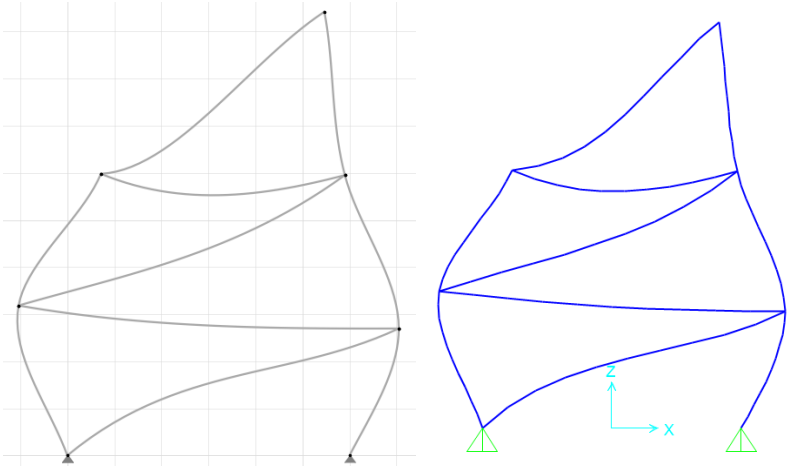


Figura B.75 - Comparativo da deformada obtida referente ao sexto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

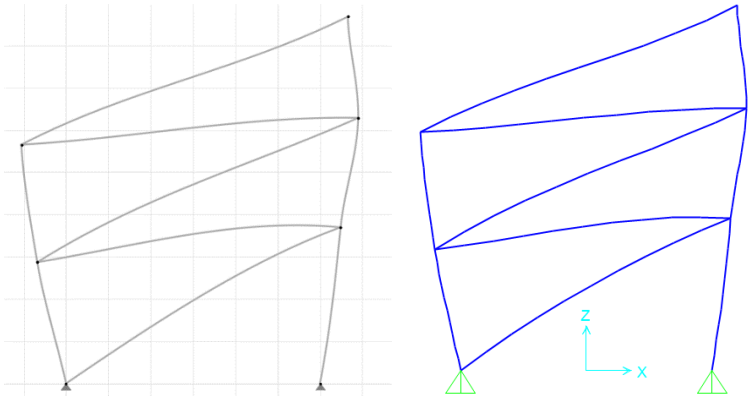


Figura B.76 - Comparativo da deformada obtida referente ao sétimo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

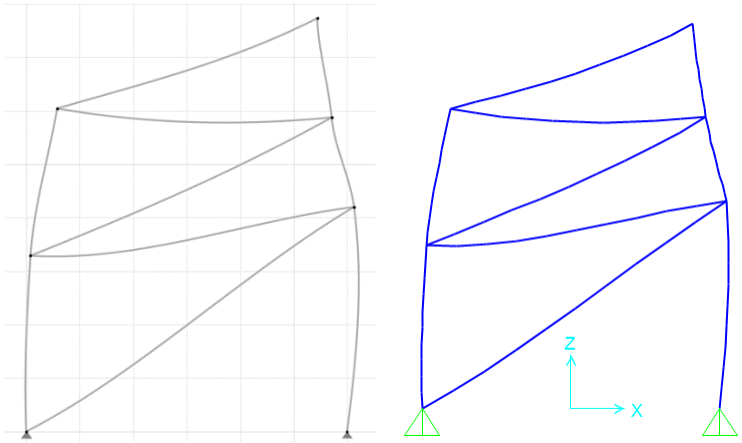


Figura B.77 - Comparativo da deformada obtida referente ao oitavo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

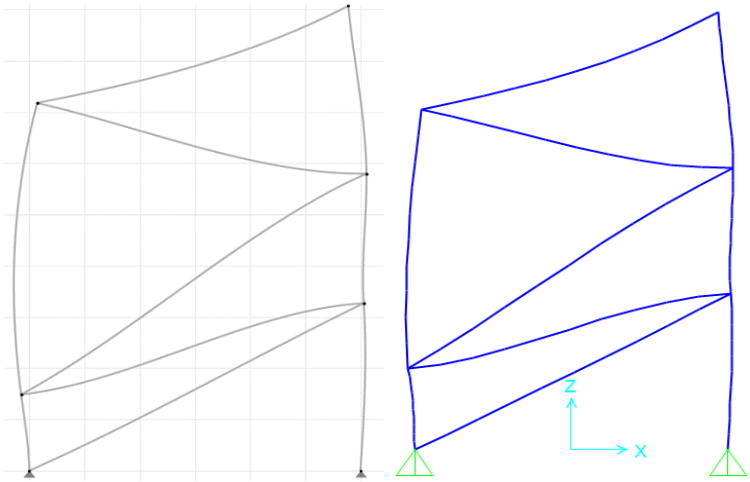


Figura B.78 - Comparativo da deformada obtida referente ao nono modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

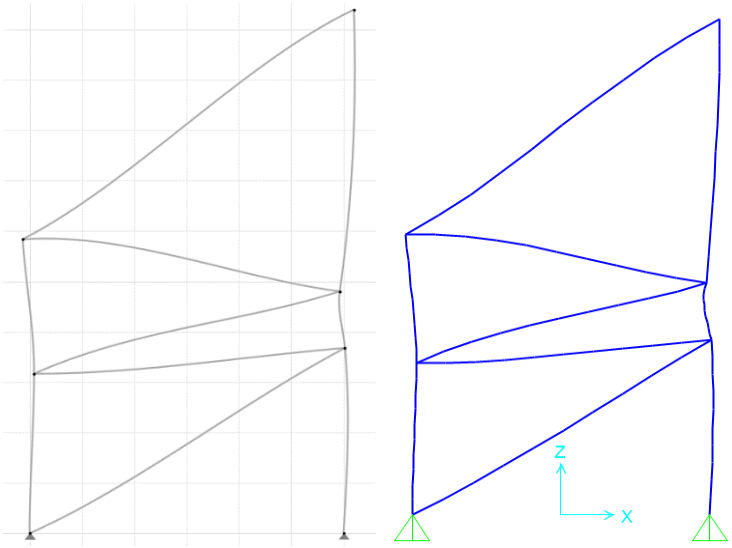


Figura B.79 - Comparativo da deformada obtida referente ao décimo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

2.2 COMPARATIVO DE VALORES OBTIDOS PARA OS MODOS DE VIBRAÇÃO

Modo de Vibração	1				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-2.8742E-01	-2.7688E-01	4.7514E-01	4.7514E-01	-7.2458E-04
1	-2.8411E-02	-2.7347E-02	4.6966E-02	4.6930E-02	7.7389E-02
2	6.6379E-02	6.3404E-02	-1.0973E-01	-1.0881E-01	8.4937E-01
3	-1.9045E-01	-1.8336E-01	3.1482E-01	3.1467E-01	5.0525E-02
4	6.2521E-02	6.0177E-02	-1.0335E-01	-1.0327E-01	8.1664E-02
5	5.3168E-02	5.0790E-02	-8.7892E-02	-8.7160E-02	8.3963E-01
6	-5.0652E-01	-4.8802E-01	8.3733E-01	8.3749E-01	-1.8876E-02
7	-3.5410E-02	-3.4069E-02	5.8536E-02	5.8465E-02	1.2111E-01
8	4.4450E-02	4.2561E-02	-7.3480E-02	-7.3038E-02	6.0489E-01
9	-4.5732E-01	-4.4062E-01	7.5599E-01	7.5615E-01	-2.0449E-02
10	9.3376E-02	8.9888E-02	-1.5436E-01	-1.5426E-01	6.7416E-02
11	5.8208E-02	5.5490E-02	-9.6223E-02	-9.5226E-02	1.0479E+00
12	-6.0493E-01	-5.8272E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
13	1.0076E-01	9.6990E-02	-1.6657E-01	-1.6644E-01	7.3787E-02
14	3.5475E-02	3.4317E-02	-5.8644E-02	-5.8891E-02	-4.1998E-01
15	7.7903E-02	7.4306E-02	-1.2878E-01	-1.2752E-01	9.9257E-01
16	6.8638E-02	6.6090E-02	-1.1347E-01	-1.1342E-01	4.3299E-02

Quadro B.31 - Resultado comparativo de valores entre o Aeolos e o SAP para o primeiro modo

Modo de Vibração	2				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	4.2729E-01	-4.3461E-01	-8.8969E-01	-8.8986E-01	-1.9105E-02
1	-1.1250E-01	1.1441E-01	2.3425E-01	2.3425E-01	1.8022E-03
2	2.4528E-02	-2.4945E-02	-5.1072E-02	-5.1074E-02	-4.9086E-03
3	3.0210E-01	-3.0731E-01	-6.2902E-01	-6.2921E-01	-2.9662E-02
4	1.5422E-01	-1.5642E-01	-3.2112E-01	-3.2027E-01	2.6545E-01
5	8.5060E-03	-8.5470E-03	-1.7711E-02	-1.7500E-02	1.2073E+00
6	-1.2222E-02	1.2917E-02	2.5448E-02	2.6447E-02	-3.7766E+00
7	-1.8049E-01	1.8347E-01	3.7582E-01	3.7565E-01	4.3893E-02
8	1.4060E-01	-1.4116E-01	-2.9276E-01	-2.8903E-01	1.2902E+00
9	1.0425E-01	-1.0598E-01	-2.1706E-01	-2.1699E-01	3.4076E-02
10	3.3954E-01	-3.4454E-01	-7.0698E-01	-7.0543E-01	2.1899E-01
11	1.2621E-01	-1.2791E-01	-2.6279E-01	-2.6189E-01	3.4429E-01
12	-4.8027E-01	4.8841E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
13	4.2365E-01	-4.2991E-01	-8.8212E-01	-8.8023E-01	2.1454E-01
14	1.8842E-01	-1.9023E-01	-3.9232E-01	-3.8949E-01	7.2696E-01
15	-1.5722E-01	1.5627E-01	3.2735E-01	3.1997E-01	2.3094E+00
16	-1.5530E-01	1.5582E-01	3.2337E-01	3.1904E-01	1.3544E+00

Quadro B.32 - Resultado comparativo de valores entre o Aeolos e o SAP para o segundo modo

Modo de Vibração	3				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	1.6566E-01	-1.5710E-01	-3.2649E-01	-3.2580E-01	2.1024E-01
1	-2.7640E-01	2.6184E-01	5.4473E-01	5.4303E-01	3.1292E-01
2	2.8102E-02	-2.5892E-02	-5.5384E-02	-5.3697E-02	3.1410E+00
3	2.4450E-01	-2.3214E-01	-4.8186E-01	-4.8143E-01	9.0425E-02
4	-2.7633E-01	2.6253E-01	5.4460E-01	5.4445E-01	2.6965E-02
5	2.9450E-03	-2.0260E-03	-5.8041E-03	-4.2017E-03	3.8136E+01
6	-1.8208E-01	1.7319E-01	3.5885E-01	3.5917E-01	-8.8274E-02
7	-4.1536E-01	3.9336E-01	8.1860E-01	8.1580E-01	3.4388E-01
8	6.3545E-02	-5.8614E-02	-1.2524E-01	-1.2156E-01	3.0243E+00
9	-2.3090E-03	2.3640E-03	4.5506E-03	4.9027E-03	-7.1812E+00
10	-4.4214E-01	4.2009E-01	8.7137E-01	8.7123E-01	1.5690E-02
11	6.4497E-02	-6.0016E-02	-1.2711E-01	-1.2447E-01	2.1250E+00
12	-2.5667E-01	2.4296E-01	5.0586E-01	5.0388E-01	3.9339E-01
13	-5.0740E-01	4.8218E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
14	5.2396E-02	-4.8989E-02	-1.0326E-01	-1.0160E-01	1.6387E+00
15	-9.2032E-02	8.5760E-02	1.8138E-01	1.7786E-01	1.9797E+00
16	-1.2372E-01	1.1558E-01	2.4383E-01	2.3969E-01	1.7277E+00

Quadro B.33 - Resultado comparativo de valores entre o Aeolos e o SAP para o terceiro modo

Modo de Vibração	4				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-2.3987E-01	2.1978E-01	3.8480E-01	3.8405E-01	1.9652E-01
1	-3.5562E-01	3.2646E-01	5.7049E-01	5.7045E-01	6.6001E-03
2	-4.1603E-02	3.6449E-02	6.6741E-02	6.3691E-02	4.7885E+00
3	-3.9116E-01	3.5850E-01	6.2750E-01	6.2644E-01	1.6948E-01
4	1.1393E-01	-1.0424E-01	-1.8277E-01	-1.8214E-01	3.4209E-01
5	-1.5186E-02	1.1891E-02	2.4362E-02	2.0778E-02	1.7246E+01
6	3.8944E-01	-3.5702E-01	-6.2475E-01	-6.2386E-01	1.4339E-01
7	-6.2335E-01	5.7228E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
8	-6.6706E-02	5.7354E-02	1.0701E-01	1.0022E-01	6.7765E+00
9	5.9801E-02	-5.5247E-02	-9.5934E-02	-9.6538E-02	-6.2564E-01
10	1.1003E-01	-1.0058E-01	-1.7651E-01	-1.7574E-01	4.3653E-01
11	-3.2998E-02	2.8095E-02	5.2936E-02	4.9093E-02	7.8284E+00
12	1.3334E-02	-1.1040E-02	-2.1391E-02	-1.9291E-02	1.0883E+01
13	1.4710E-01	-1.3465E-01	-2.3598E-01	-2.3529E-01	2.9239E-01
14	9.7001E-02	-8.8527E-02	-1.5561E-01	-1.5469E-01	5.9469E-01
15	1.1872E-01	-1.0598E-01	-1.9046E-01	-1.8520E-01	2.8399E+00
16	2.0317E-01	-1.8271E-01	-3.2593E-01	-3.1926E-01	2.0906E+00

Quadro B.34 - Resultado comparativo de valores entre o Aeolos e o SAP para o quarto modo

Modo de Vibração	5				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	7.2388E-02	7.8862E-02	1.1675E-01	1.1613E-01	5.3172E-01
1	-1.6744E-01	-1.8356E-01	-2.7004E-01	-2.7030E-01	-9.5612E-02
2	1.6965E-02	1.9496E-02	2.7361E-02	2.8709E-02	-4.6957E+00
3	2.5282E-01	2.7718E-01	4.0775E-01	4.0816E-01	-1.0088E-01
4	7.3156E-02	8.0105E-02	1.1799E-01	1.1796E-01	2.1793E-02
5	1.2663E-01	1.3433E-01	2.0423E-01	1.9781E-01	3.2440E+00
6	-2.1712E-02	-2.3111E-02	-3.5017E-02	-3.4032E-02	2.8929E+00
7	-1.2355E-01	-1.3577E-01	-1.9925E-01	-1.9993E-01	-3.4110E-01
8	7.4516E-02	8.0295E-02	1.2018E-01	1.1824E-01	1.6402E+00
9	-4.9793E-01	-5.4558E-01	-8.0306E-01	-8.0340E-01	-4.3367E-02
10	1.3748E-01	1.5072E-01	2.2172E-01	2.2194E-01	-9.9802E-02
11	7.4110E-03	6.8640E-03	1.1952E-02	1.0108E-02	1.8251E+01
12	6.2004E-01	6.7909E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
13	1.5403E-02	1.7280E-02	2.4842E-02	2.5446E-02	-2.3739E+00
14	-4.1157E-01	-4.4121E-01	-6.6377E-01	-6.4971E-01	2.1646E+00
15	-5.3727E-02	-5.7774E-02	-8.6651E-02	-8.5076E-02	1.8508E+00
16	-1.8973E-01	-2.0146E-01	-3.0599E-01	-2.9666E-01	3.1456E+00

Quadro B.35 - Resultado comparativo de valores entre o Aeolos e o SAP para o quinto modo

Modo de Vibração	6				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	5.1823E-01	-5.0180E-01	-9.8788E-01	-9.8784E-01	4.4491E-03
1	-9.1473E-02	8.8784E-02	1.7437E-01	1.7478E-01	-2.3370E-01
2	8.7744E-02	-8.3858E-02	-1.6726E-01	-1.6508E-01	1.3208E+00
3	-5.2459E-01	5.0798E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
4	1.5223E-01	-1.4752E-01	-2.9019E-01	-2.9041E-01	-7.4824E-02
5	-1.3070E-03	-4.0100E-04	2.4915E-03	-7.8941E-04	-4.1561E+02
6	-3.5724E-01	3.4603E-01	6.8100E-01	6.8120E-01	-2.9198E-02
7	1.0573E-02	-1.0098E-02	-2.0155E-02	-1.9879E-02	1.3885E+00
8	2.0648E-01	-1.9537E-01	-3.9360E-01	-3.8460E-01	2.3407E+00
9	4.8905E-02	-4.6928E-02	-9.3226E-02	-9.2382E-02	9.1295E-01
10	2.4920E-02	-2.4258E-02	-4.7504E-02	-4.7754E-02	-5.2391E-01
11	-1.3086E-01	1.2424E-01	2.4946E-01	2.4459E-01	1.9915E+00
12	2.6678E-01	-2.5910E-01	-5.0854E-01	-5.1007E-01	-2.9851E-01
13	-2.0861E-01	2.0205E-01	3.9766E-01	3.9775E-01	-2.1077E-02
14	-9.4793E-02	9.3747E-02	1.8070E-01	1.8455E-01	-2.0861E+00
15	-1.8354E-01	1.7202E-01	3.4987E-01	3.3864E-01	3.3160E+00
16	2.6295E-01	-2.5059E-01	-5.0125E-01	-4.9330E-01	1.6106E+00

Quadro B.36 - Resultado comparativo de valores entre o Aeolos e o SAP para o sexto modo

Modo de Vibração	7				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	3.4026E-01	-3.0782E-01	6.4396E-01	6.4408E-01	-1.8454E-02
1	6.5238E-02	-5.9034E-02	1.2347E-01	1.2352E-01	-4.5226E-02
2	-8.2956E-02	7.4463E-02	-1.5700E-01	-1.5581E-01	7.6562E-01
3	-2.4381E-01	2.2064E-01	-4.6142E-01	-4.6168E-01	-5.6260E-02
4	-3.4764E-01	3.1445E-01	-6.5794E-01	-6.5797E-01	-4.5523E-03
5	4.9687E-02	-4.3902E-02	9.4037E-02	9.1862E-02	2.3679E+00
6	5.2838E-01	-4.7792E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
7	1.7336E-01	-1.5681E-01	3.2810E-01	3.2810E-01	-2.5720E-03
8	-2.7707E-02	2.5141E-02	-5.2438E-02	-5.2606E-02	-3.1907E-01
9	-4.5220E-01	4.0893E-01	-8.5583E-01	-8.5565E-01	1.9965E-02
10	-1.4366E-01	1.2996E-01	-2.7188E-01	-2.7194E-01	-2.1612E-02
11	9.5690E-03	-8.4780E-03	1.8110E-02	1.7740E-02	2.0888E+00
12	-3.2852E-01	2.9725E-01	-6.2176E-01	-6.2196E-01	-3.3411E-02
13	1.5900E-01	-1.4382E-01	3.0092E-01	3.0093E-01	-1.8392E-03
14	-1.6162E-02	1.3039E-02	-3.0588E-02	-2.7283E-02	1.2113E+01
15	-1.1052E-01	9.9227E-02	-2.0917E-01	-2.0762E-01	7.4602E-01
16	9.7059E-02	-8.7809E-02	1.8369E-01	1.8373E-01	-2.2587E-02

Quadro B.37 - Resultado comparativo de valores entre o Aeolos e o SAP para o sétimo modo

Modo de Vibração	8				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-4.0751E-02	3.9809E-02	-6.3928E-02	-6.3968E-02	-6.1791E-02
1	-1.4356E-01	1.4014E-01	-2.2522E-01	-2.2519E-01	9.8044E-03
2	3.1330E-02	-3.0004E-02	4.9149E-02	4.8213E-02	1.9426E+00
3	-6.5157E-02	6.3580E-02	-1.0222E-01	-1.0216E-01	4.9545E-02
4	-5.9962E-01	5.8539E-01	-9.4066E-01	-9.4065E-01	5.6193E-04
5	-6.5260E-02	6.3387E-02	-1.0238E-01	-1.0185E-01	5.1281E-01
6	-2.8970E-01	2.8281E-01	-4.5446E-01	-4.5443E-01	6.9027E-03
7	-1.9862E-02	1.9409E-02	-3.1159E-02	-3.1188E-02	-9.3354E-02
8	8.6787E-02	-8.3808E-02	1.3615E-01	1.3467E-01	1.0983E+00
9	1.4457E-01	-1.4113E-01	2.2680E-01	2.2678E-01	4.8569E-03
10	6.4463E-02	-6.2939E-02	1.0113E-01	1.0113E-01	-8.0043E-03
11	-4.6514E-02	4.4809E-02	-7.2969E-02	-7.2002E-02	1.3428E+00
12	2.7952E-01	-2.7289E-01	4.3850E-01	4.3849E-01	1.7927E-03
13	6.3745E-01	-6.2233E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
14	-2.0929E-02	1.9994E-02	-3.2833E-02	-3.2128E-02	2.1935E+00
15	-2.1707E-02	2.1336E-02	-3.4053E-02	-3.4284E-02	-6.7436E-01
16	6.5208E-02	-6.1880E-02	1.0230E-01	9.9433E-02	2.8786E+00

Quadro B.38 - Resultado comparativo de valores entre o Aeolos e o SAP para o oitavo modo

Modo de Vibração	9				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	7.4952E-02	-6.5551E-02	9.8980E-02	9.8982E-02	-1.9746E-03
1	7.5725E-01	-6.6225E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
2	-6.0512E-02	5.2827E-02	-7.9911E-02	-7.9769E-02	1.7817E-01
3	-2.9840E-02	2.6120E-02	-3.9406E-02	-3.9441E-02	-8.9032E-02
4	-1.3405E-01	1.1721E-01	-1.7703E-01	-1.7699E-01	2.0436E-02
5	-3.0595E-02	2.7174E-02	-4.0403E-02	-4.1033E-02	-1.5344E+00
6	-7.1156E-02	6.2230E-02	-9.3967E-02	-9.3967E-02	-1.7376E-04
7	-5.8926E-01	5.1535E-01	-7.7817E-01	-7.7817E-01	-7.2889E-04
8	1.2451E-01	-1.0783E-01	1.6442E-01	1.6283E-01	9.7610E-01
9	-5.4887E-02	4.7965E-02	-7.2482E-02	-7.2427E-02	7.6605E-02
10	1.0048E-01	-8.7865E-02	1.3269E-01	1.3268E-01	7.8162E-03
11	-5.4620E-03	4.8600E-03	-7.2130E-03	-7.3386E-03	-1.7114E+00
12	1.1016E-01	-9.6313E-02	1.4547E-01	1.4543E-01	2.7324E-02
13	-3.6920E-02	3.2295E-02	-4.8756E-02	-4.8765E-02	-1.9818E-02
14	-4.5838E-02	3.8634E-02	-6.0533E-02	-5.8337E-02	3.7632E+00
15	-7.6250E-03	7.0580E-03	-1.0069E-02	-1.0658E-02	-5.5187E+00
16	3.0217E-02	-2.5966E-02	3.9904E-02	3.9209E-02	1.7733E+00

Quadro B.39 - Resultado comparativo de valores entre o Aeolos e o SAP para o nono modo

Modo de Vibração	10				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	4.3193E-02	4.1653E-02	6.1988E-02	6.1965E-02	3.6404E-02
1	8.4648E-02	8.1653E-02	1.2148E-01	1.2147E-01	8.1849E-03
2	-1.7340E-03	-1.7330E-03	-2.4885E-03	-2.5781E-03	-3.4746E+00
3	1.3759E-02	1.3251E-02	1.9746E-02	1.9713E-02	1.6805E-01
4	3.3997E-01	3.2797E-01	4.8790E-01	4.8790E-01	-8.6713E-04
5	4.3692E-02	4.1325E-02	6.2704E-02	6.1477E-02	1.9953E+00
6	-6.6248E-02	-6.3902E-02	-9.5075E-02	-9.5064E-02	1.1355E-02
7	-8.1980E-02	-7.9087E-02	-1.1765E-01	-1.1765E-01	-1.4272E-03
8	3.4465E-02	3.2513E-02	4.9462E-02	4.8368E-02	2.2615E+00
9	-3.5597E-02	-3.4313E-02	-5.1086E-02	-5.1046E-02	7.9632E-02
10	-5.9878E-01	-5.7764E-01	-8.5933E-01	-8.5932E-01	4.2540E-04
11	-6.8715E-02	-6.6130E-02	-9.8615E-02	-9.8378E-02	2.4068E-01
12	9.9484E-02	9.5958E-02	1.4277E-01	1.4275E-01	1.4517E-02
13	6.9680E-01	6.7220E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
14	1.4756E-02	1.4898E-02	2.1177E-02	2.2163E-02	-4.4498E+00
15	-4.8800E-04	2.4300E-04	-7.0035E-04	3.6150E-04	-2.9373E+02
16	-2.8725E-02	-2.6421E-02	-4.1224E-02	-3.9305E-02	4.8822E+00

Quadro B.40 - Resultado comparativo de valores entre o Aeolos e o SAP para o décimo modo

3 MODELO 7: PÓRTICO CONVENCIONAL ROTULADO

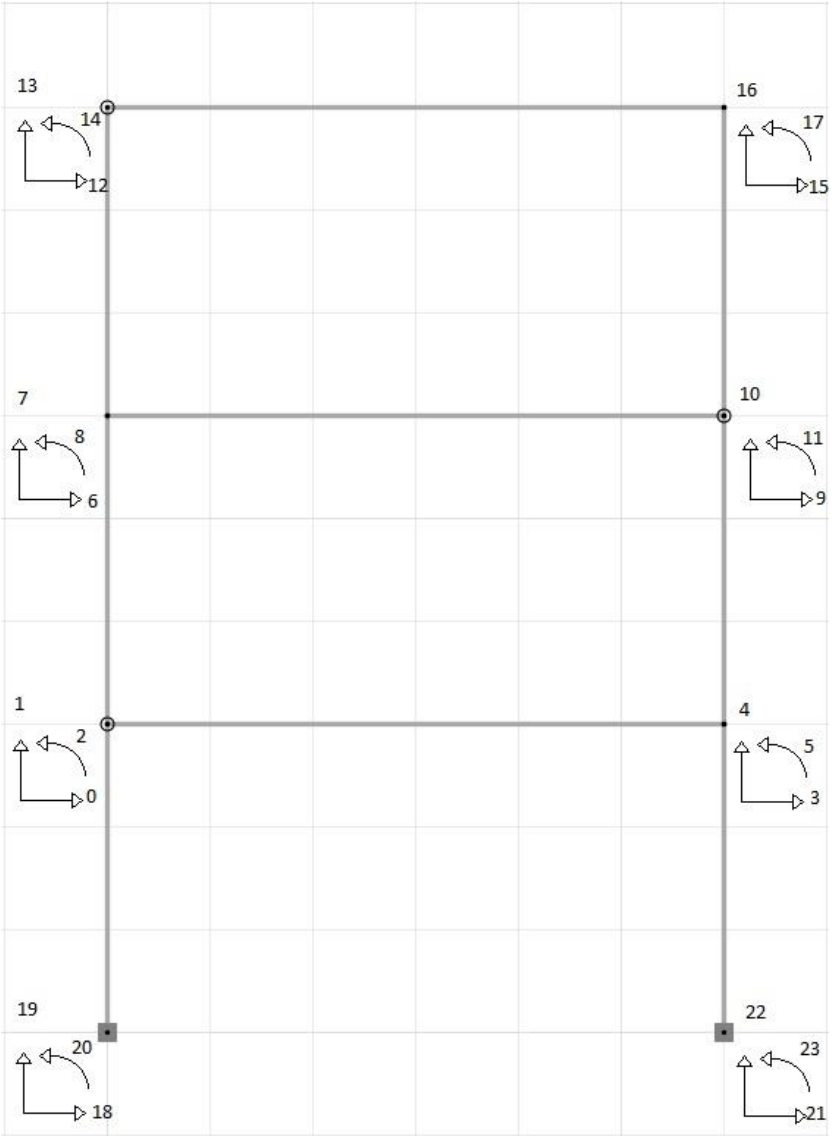


Figura B.80 - Estrutura do modelo 7, indeformada, com a numeração dos graus de liberdade referentes a cada nó da estrutura

3.1 DEFORMADA REFERENTE AOS MODOS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS

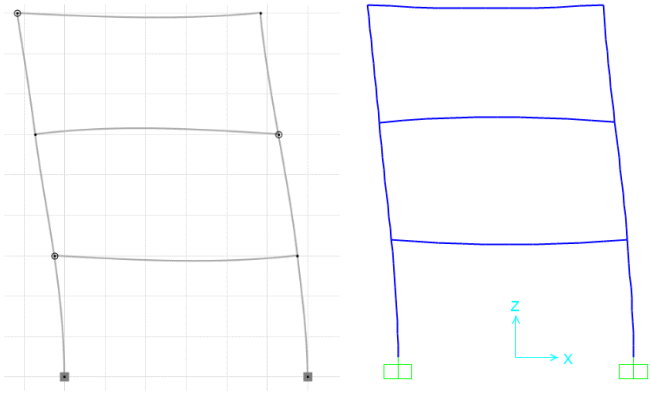


Figura B.81 - Comparativo da deformada obtida referente ao primeiro modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

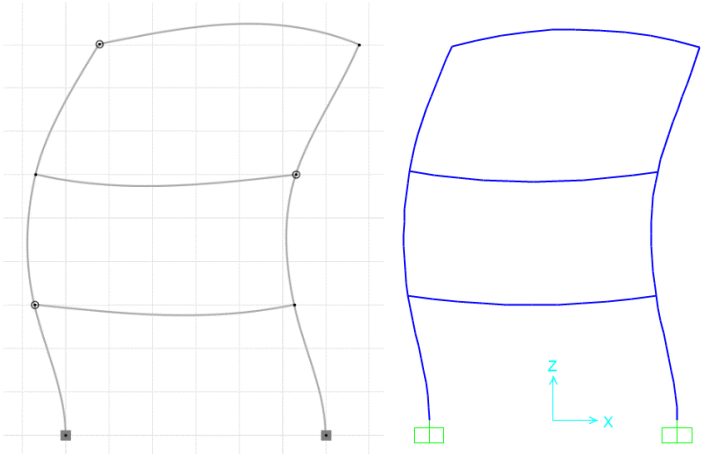


Figura B.82 - Comparativo da deformada obtida referente ao segundo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

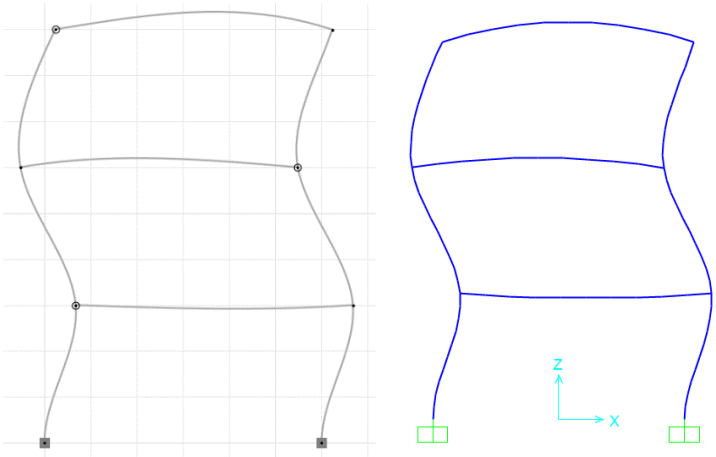


Figura B.83 - Comparativo da deformada obtida referente ao terceiro modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

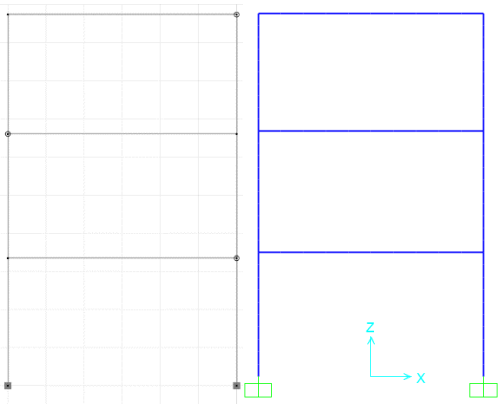


Figura B.84 - Comparativo da deformada obtida referente ao quarto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

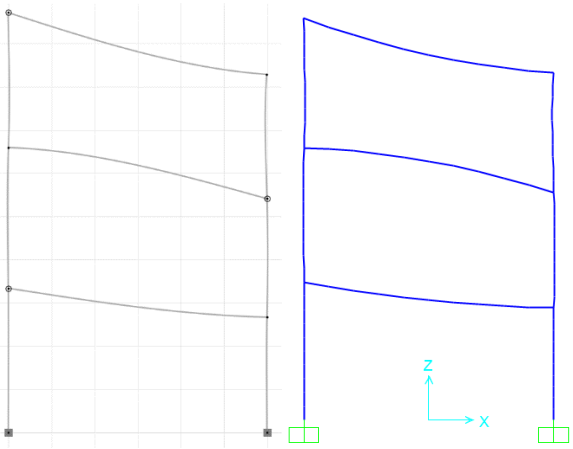


Figura B.85 - Comparativo da deformada obtida referente ao quinto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

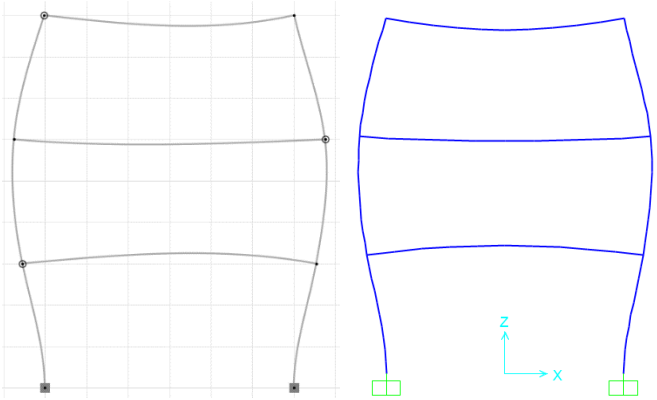


Figura B.86 - Comparativo da deformada obtida referente ao sexto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

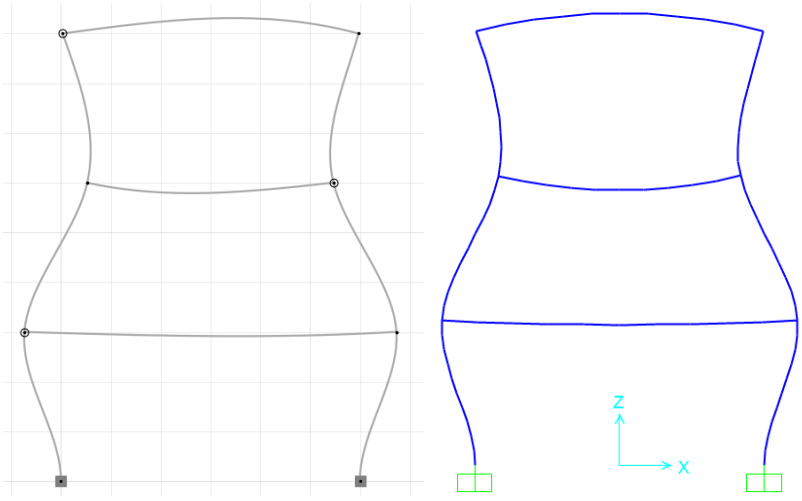


Figura B.87 - Comparativo da deformada obtida referente ao sétimo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

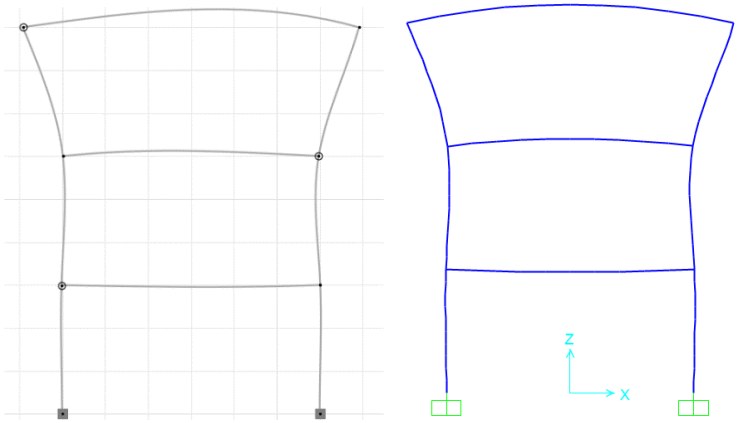


Figura B.88 - Comparativo da deformada obtida referente ao oitavo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

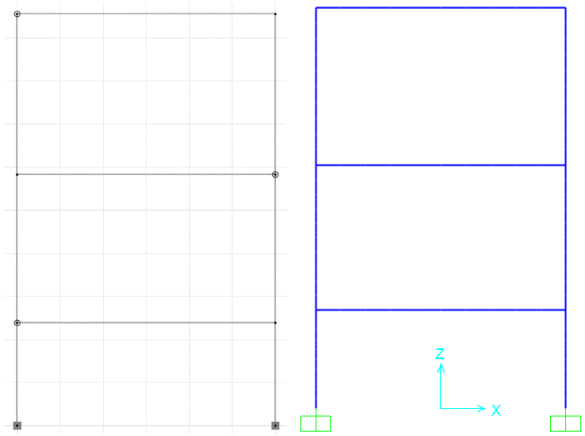


Figura B.89 - Comparativo da deformada obtida referente ao nono modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

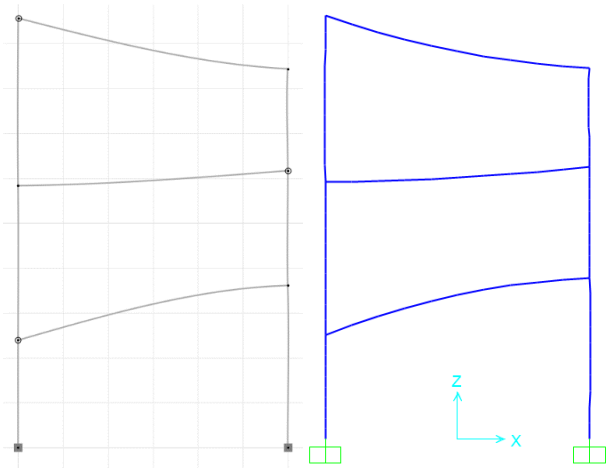


Figura B.90 - Comparativo da deformada obtida referente ao décimo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

3.3 COMPARATIVO DE VALORES OBTIDOS PARA OS MODOS DE VIBRAÇÃO

Modo de Vibração	1				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	1.2491E-01	-1.4634E-01	2.1412E-01	2.1514E-01	-4.7691E-01
1	5.6735E-04	-6.5600E-04	9.7253E-04	9.6442E-04	8.4124E-01
2	-7.3878E-02	8.5761E-02	-1.2664E-01	-1.2608E-01	4.4298E-01
3	1.2430E-01	-1.4567E-01	2.1307E-01	2.1415E-01	-5.0388E-01
4	-5.6735E-04	6.5600E-04	-9.7253E-04	-9.6442E-04	8.4124E-01
5	-5.7291E-02	6.6357E-02	-9.8207E-02	-9.7555E-02	6.6833E-01
6	3.5975E-01	-4.2003E-01	6.1667E-01	6.1750E-01	-1.3365E-01
7	9.4407E-04	-1.0910E-03	1.6183E-03	1.6039E-03	8.9544E-01
8	-6.4238E-02	7.4496E-02	-1.1011E-01	-1.0952E-01	5.4232E-01
9	3.6010E-01	-4.2041E-01	6.1726E-01	6.1806E-01	-1.2892E-01
10	-9.4407E-04	1.0910E-03	-1.6183E-03	-1.6039E-03	8.9544E-01
11	-8.8105E-02	1.0222E-01	-1.5103E-01	-1.5028E-01	4.9605E-01
12	5.8337E-01	-6.8020E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
13	1.1072E-03	-1.2790E-03	1.8980E-03	1.8803E-03	9.3977E-01
14	-7.9692E-02	9.2609E-02	-1.3661E-01	-1.3615E-01	3.3601E-01
15	5.8321E-01	-6.8002E-01	9.9971E-01	9.9972E-01	-9.7709E-04
16	-1.1072E-03	1.2790E-03	-1.8980E-03	-1.8803E-03	9.3977E-01
17	-4.9193E-02	5.7029E-02	-8.4326E-02	-8.3841E-02	5.7788E-01

Quadro B.41 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o primeiro modo

Modo de Vibração	2				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	3.6118E-01	4.4530E-01	-9.3277E-01	-9.3701E-01	-4.5281E-01
1	-7.5628E-04	-9.2100E-04	1.9531E-03	1.9380E-03	7.8178E-01
2	-1.1579E-01	-1.3869E-01	2.9903E-01	2.9183E-01	2.4674E+00
3	3.6229E-01	4.4660E-01	-9.3565E-01	-9.3974E-01	-4.3554E-01
4	7.5628E-04	9.2100E-04	-1.9531E-03	-1.9380E-03	7.8178E-01
5	-1.0630E-01	-1.2641E-01	2.7453E-01	2.6600E-01	3.2033E+00
6	3.4595E-01	4.2257E-01	-8.9345E-01	-8.8918E-01	4.8000E-01
7	-1.8614E-03	-2.2560E-03	4.8073E-03	4.7471E-03	1.2666E+00
8	1.1719E-01	1.4293E-01	-3.0265E-01	-3.0076E-01	6.2861E-01
9	3.4311E-01	4.1922E-01	-8.8612E-01	-8.8214E-01	4.5105E-01
10	1.8614E-03	2.2560E-03	-4.8073E-03	-4.7471E-03	1.2666E+00
11	1.6199E-01	1.9755E-01	-4.1837E-01	-4.1570E-01	6.4259E-01
12	-3.8721E-01	-4.7523E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
13	-2.5625E-03	-3.1010E-03	6.6178E-03	6.5252E-03	1.4195E+00
14	3.0799E-01	3.7447E-01	-7.9540E-01	-7.8797E-01	9.4238E-01
15	-3.8576E-01	-4.7352E-01	9.9626E-01	9.9640E-01	-1.3488E-02
16	2.5625E-03	3.1010E-03	-6.6178E-03	-6.5252E-03	1.4195E+00
17	2.0637E-01	2.4936E-01	-5.3297E-01	-5.2470E-01	1.5759E+00

Quadro B.42 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o segundo modo

Modo de Vibração	3				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	4.8400E-01	-5.6967E-01	9.9968E-01	9.9967E-01	6.9173E-04
1	3.1541E-04	-3.5300E-04	6.5145E-04	6.1946E-04	5.1652E+00
2	6.1750E-02	-7.4995E-02	1.2754E-01	1.3160E-01	-3.0870E+00
3	4.8416E-01	-5.6985E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
4	-3.1541E-04	3.5300E-04	-6.5145E-04	-6.1946E-04	5.1652E+00
5	5.0569E-02	-6.1086E-02	1.0445E-01	1.0720E-01	-2.5643E+00
6	-3.7023E-01	4.3863E-01	-7.6469E-01	-7.6973E-01	-6.5355E-01
7	7.8642E-04	-8.9500E-04	1.6243E-03	1.5706E-03	3.4201E+00
8	1.2323E-01	-1.3836E-01	2.5453E-01	2.4279E-01	4.8351E+00
9	-3.6755E-01	4.3560E-01	-7.5915E-01	-7.6440E-01	-6.8691E-01
10	-7.8642E-04	8.9500E-04	-1.6243E-03	-1.5706E-03	3.4201E+00
11	1.2727E-01	-1.4371E-01	2.6287E-01	2.5219E-01	4.2356E+00
12	1.6687E-01	-1.9843E-01	3.4465E-01	3.4820E-01	-1.0200E+00
13	1.6359E-03	-1.8620E-03	3.3788E-03	3.2675E-03	3.4067E+00
14	-3.3017E-01	3.8106E-01	-6.8194E-01	-6.6869E-01	1.9809E+00
15	1.6436E-01	-1.9560E-01	3.3948E-01	3.4325E-01	-1.0962E+00
16	-1.6359E-03	1.8620E-03	-3.3788E-03	-3.2675E-03	3.4067E+00
17	-2.3985E-01	2.7449E-01	-4.9540E-01	-4.8168E-01	2.8484E+00

Quadro B.43 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o terceiro modo

Modo de Vibração	4				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-7.6750E-17	2.8980E-13	-1.4982E-16	5.0514E-13	-1.0003E+02
1	2.3961E-01	2.6834E-01	4.6774E-01	4.6774E-01	-2.0151E-05
2	7.8827E-17	-1.8360E-13	1.5388E-16	-3.2003E-13	-1.0005E+02
3	-1.8398E-17	-2.9020E-13	-3.5914E-17	-5.0584E-13	-9.9993E+01
4	2.3961E-01	2.6834E-01	4.6774E-01	4.6774E-01	-2.0151E-05
5	-7.0427E-16	1.2220E-13	-1.3748E-15	2.1300E-13	-1.0065E+02
6	3.4558E-16	7.5770E-13	6.7460E-16	1.3207E-12	-9.9949E+01
7	4.2445E-01	4.7535E-01	8.2857E-01	8.2857E-01	-8.5657E-05
8	-7.6540E-16	-1.5330E-14	-1.4941E-15	-2.6721E-14	-9.4409E+01
9	3.3052E-16	-7.8440E-13	6.4520E-16	-1.3673E-12	-1.0005E+02
10	4.2445E-01	4.7535E-01	8.2857E-01	8.2857E-01	-8.5657E-05
11	9.3877E-16	3.9810E-13	1.8326E-15	6.9392E-13	-9.9736E+01
12	-1.0080E-16	2.7980E-12	-1.9677E-16	4.8771E-12	-1.0000E+02
13	5.1227E-01	5.7370E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
14	-1.9590E-16	-9.9610E-13	-3.8241E-16	-1.7363E-12	-9.9978E+01
15	-1.4407E-16	-2.7450E-12	-2.8123E-16	-4.7847E-12	-9.9994E+01
16	5.1227E-01	5.7370E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	-7.0388E-12
17	-2.2411E-15	7.8550E-13	-4.3747E-15	1.3692E-12	-1.0032E+02

Quadro B.44 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o quarto modo

Modo de Vibração	5				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	3.4637E-04	3.0900E-04	-6.7762E-04	-5.3864E-04	2.5802E+01
1	-2.3912E-01	-2.6836E-01	4.6779E-01	4.6779E-01	5.8853E-04
2	-5.8738E-03	-6.4370E-03	1.1491E-02	1.1221E-02	2.4087E+00
3	-1.0890E-03	-1.2230E-03	2.1305E-03	2.1319E-03	-6.4131E-02
4	2.3912E-01	2.6836E-01	-4.6779E-01	-4.6779E-01	5.8853E-04
5	1.6671E-02	1.8816E-02	-3.2614E-02	-3.2800E-02	-5.6700E-01
6	-2.6978E-03	-2.9320E-03	5.2779E-03	5.1110E-03	3.2648E+00
7	-4.2356E-01	-4.7535E-01	8.2862E-01	8.2862E-01	3.2897E-04
8	2.6193E-02	2.9774E-02	-5.1242E-02	-5.1901E-02	-1.2698E+00
9	-1.2443E-03	-1.3630E-03	2.4344E-03	2.3759E-03	2.4583E+00
10	4.2356E-01	4.7535E-01	-8.2862E-01	-8.2862E-01	3.2897E-04
11	-1.8162E-02	-1.9860E-02	3.5532E-02	3.4619E-02	2.6351E+00
12	4.2772E-03	4.7280E-03	-8.3677E-03	-8.2417E-03	1.5278E+00
13	-5.1116E-01	-5.7367E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
14	-1.6584E-02	-1.8104E-02	3.2444E-02	3.1558E-02	2.8057E+00
15	3.5650E-03	3.9520E-03	-6.9744E-03	-6.8890E-03	1.2386E+00
16	5.1116E-01	5.7367E-01	-1.0000E+00	-1.0000E+00	-1.7308E-11
17	5.1325E-02	5.8444E-02	-1.0041E-01	-1.0188E-01	-1.4426E+00

Quadro B.45 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o quinto modo

Modo de Vibração	6				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-3.8573E-01	-4.3313E-01	-7.1913E-01	-7.2283E-01	-5.1178E-01
1	8.1646E-04	8.9200E-04	1.5222E-03	1.4886E-03	2.2542E+00
2	1.4895E-01	1.6380E-01	2.7769E-01	2.7335E-01	1.5886E+00
3	3.8500E-01	4.3236E-01	7.1776E-01	7.2154E-01	-5.2375E-01
4	-8.1646E-04	-8.9200E-04	-1.5222E-03	-1.4886E-03	2.2542E+00
5	-1.3127E-01	-1.4338E-01	-2.4473E-01	-2.3929E-01	2.2746E+00
6	-5.3391E-01	-5.9656E-01	-9.9539E-01	-9.9557E-01	-1.7343E-02
7	3.7514E-04	4.1100E-04	6.9939E-04	6.8590E-04	1.9675E+00
8	-6.1886E-02	-6.8769E-02	-1.1538E-01	-1.1476E-01	5.3350E-01
9	5.3638E-01	5.9922E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
10	-3.7514E-04	-4.1100E-04	-6.9939E-04	-6.8590E-04	1.9675E+00
11	8.6937E-02	9.6583E-02	1.6208E-01	1.6118E-01	5.5704E-01
12	-9.6020E-03	-1.0528E-02	-1.7901E-02	-1.7570E-02	1.8887E+00
13	-6.4934E-04	-7.1100E-04	-1.2106E-03	-1.1865E-03	2.0260E+00
14	-2.3121E-01	-2.5623E-01	-4.3106E-01	-4.2761E-01	8.0587E-01
15	7.8936E-03	8.6850E-03	1.4716E-02	1.4494E-02	1.5348E+00
16	6.4934E-04	7.1100E-04	1.2106E-03	1.1865E-03	2.0260E+00
17	1.6062E-01	1.7664E-01	2.9946E-01	2.9478E-01	1.5878E+00

Quadro B.46 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o sexto modo

Modo de Vibração	7				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	5.2508E-01	5.9806E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
1	8.9430E-04	9.8900E-04	1.7032E-03	1.6537E-03	2.9923E+00
2	5.4763E-02	6.4887E-02	1.0430E-01	1.0850E-01	-3.8721E+00
3	-5.2468E-01	-5.9761E-01	-9.9925E-01	-9.9926E-01	-9.5402E-04
4	-8.9430E-04	-9.8900E-04	-1.7032E-03	-1.6537E-03	2.9923E+00
5	-4.3180E-02	-5.1019E-02	-8.2236E-02	-8.5308E-02	-3.6017E+00
6	-3.7670E-01	-4.3132E-01	-7.1742E-01	-7.2121E-01	-5.2605E-01
7	7.1565E-04	7.8200E-04	1.3629E-03	1.3076E-03	4.2349E+00
8	1.5765E-01	1.7288E-01	3.0024E-01	2.8907E-01	3.8635E+00
9	3.7870E-01	4.3351E-01	7.2123E-01	7.2486E-01	-5.0184E-01
10	-7.1565E-04	-7.8200E-04	-1.3629E-03	-1.3076E-03	4.2349E+00
11	-1.7382E-01	-1.9190E-01	-3.3103E-01	-3.2087E-01	3.1685E+00
12	-2.3026E-02	-2.5214E-02	-4.3853E-02	-4.2160E-02	4.0158E+00
13	3.1906E-04	3.3900E-04	6.0765E-04	5.6684E-04	7.1994E+00
14	-2.5566E-01	-2.8365E-01	-4.8690E-01	-4.7429E-01	2.6588E+00
15	2.0240E-02	2.2172E-02	3.8546E-02	3.7074E-02	3.9731E+00
16	-3.1906E-04	-3.3900E-04	-6.0765E-04	-5.6684E-04	7.1994E+00
17	1.9353E-01	2.1278E-01	3.6857E-01	3.5579E-01	3.5921E+00

Quadro B.47 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o sétimo modo

Modo de Vibração	8				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-9.0783E-03	1.1236E-02	-1.3897E-02	-1.3175E-02	5.4801E+00
1	-1.1554E-03	1.4720E-03	-1.7686E-03	-1.7260E-03	2.4707E+00
2	-2.3072E-02	2.9155E-02	-3.5318E-02	-3.4185E-02	3.3135E+00
3	9.9088E-03	-1.2256E-02	1.5168E-02	1.4371E-02	5.5486E+00
4	1.1554E-03	-1.4720E-03	1.7686E-03	1.7260E-03	2.4707E+00
5	2.8164E-02	-3.5242E-02	4.3112E-02	4.1323E-02	4.3304E+00
6	1.3914E-02	-1.7614E-02	2.1298E-02	2.0653E-02	3.1238E+00
7	-6.7139E-04	8.5800E-04	-1.0277E-03	-1.0060E-03	2.1558E+00
8	7.8376E-02	-1.0314E-01	1.1997E-01	1.2093E-01	-7.9412E-01
9	-1.5746E-02	1.9906E-02	-2.4104E-02	-2.3341E-02	3.2692E+00
10	6.7139E-04	-8.5800E-04	1.0277E-03	1.0060E-03	2.1558E+00
11	-1.1774E-01	1.5412E-01	-1.8024E-01	-1.8072E-01	-2.6560E-01
12	-6.5178E-01	8.5098E-01	-9.9773E-01	-9.9781E-01	-8.7030E-03
13	9.7196E-04	-1.2460E-03	1.4878E-03	1.4610E-03	1.8373E+00
14	2.9366E-01	-3.7919E-01	4.4952E-01	4.4462E-01	1.1028E+00
15	6.5327E-01	-8.5285E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
16	-9.7196E-04	1.2460E-03	-1.4878E-03	-1.4610E-03	1.8373E+00
17	-2.0055E-01	2.5712E-01	-3.0700E-01	-3.0149E-01	1.8265E+00

Quadro B.48 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o oitavo modo

Modo de Vibração	9				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	9.0729E-18	-7.6420E-11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
1	5.0886E-01	-5.6332E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	1.8097E-11
2	1.1680E-16	-8.3970E-11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	7.7163E-18	6.6230E-11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
4	5.0886E-01	-5.6332E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
5	-2.2091E-15	1.2310E-09	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	1.4513E-16	-2.3300E-11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
7	1.3899E-01	-1.5386E-01	2.7313E-01	2.7313E-01	-1.0146E-04
8	-6.3920E-16	3.7300E-10	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	-1.7768E-16	7.6030E-11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
10	1.3899E-01	-1.5386E-01	2.7313E-01	2.7313E-01	-1.0146E-04
11	-4.8247E-16	2.7180E-10	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	-5.7466E-17	1.9730E-10	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
13	-4.7090E-01	5.2130E-01	-9.2540E-01	-9.2540E-01	1.2386E-04
14	3.0496E-16	-2.8830E-10	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	1.0278E-16	-2.3160E-10	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
16	-4.7090E-01	5.2130E-01	-9.2540E-01	-9.2540E-01	1.2386E-04
17	3.5164E-15	-2.0560E-09	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.49 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o nono modo

Modo de Vibração	10				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	1.4548E-04	1.5900E-04	2.8627E-04	2.8226E-04	1.4199E+00
1	5.0818E-01	5.6331E-01	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
2	1.9360E-03	2.0960E-03	3.8097E-03	3.7208E-03	2.3871E+00
3	7.9073E-05	7.6000E-05	1.5560E-04	1.3492E-04	1.5331E+01
4	-5.0818E-01	-5.6331E-01	-1.0000E+00	-1.0000E+00	3.6526E-11
5	-2.5297E-02	-2.9004E-02	-4.9779E-02	-5.1488E-02	-3.3205E+00
6	7.2905E-04	7.9000E-04	1.4346E-03	1.4024E-03	2.2965E+00
7	1.3878E-01	1.5383E-01	2.7309E-01	2.7309E-01	-3.2326E-04
8	-8.4731E-03	-9.5270E-03	-1.6673E-02	-1.6912E-02	-1.4141E+00
9	-1.8709E-03	-2.0220E-03	-3.6815E-03	-3.5895E-03	2.5650E+00
10	-1.3878E-01	-1.5383E-01	-2.7309E-01	-2.7309E-01	-3.2326E-04
11	-5.0159E-03	-5.3880E-03	-9.8702E-03	-9.5648E-03	3.1927E+00
12	-1.6776E-03	-1.8220E-03	-3.3011E-03	-3.2344E-03	2.0624E+00
13	-4.7029E-01	-5.2131E-01	-9.2543E-01	-9.2543E-01	2.6594E-04
14	5.4399E-03	5.8720E-03	1.0705E-02	1.0424E-02	2.6907E+00
15	2.4230E-03	2.6270E-03	4.7680E-03	4.6635E-03	2.2414E+00
16	4.7029E-01	5.2131E-01	9.2543E-01	9.2543E-01	2.6594E-04
17	4.3016E-02	4.8787E-02	8.4647E-02	8.6607E-02	-2.2634E+00

Quadro B.50 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o décimo modo

4 MODELO ESTRUTURAL 8: TRELIÇA

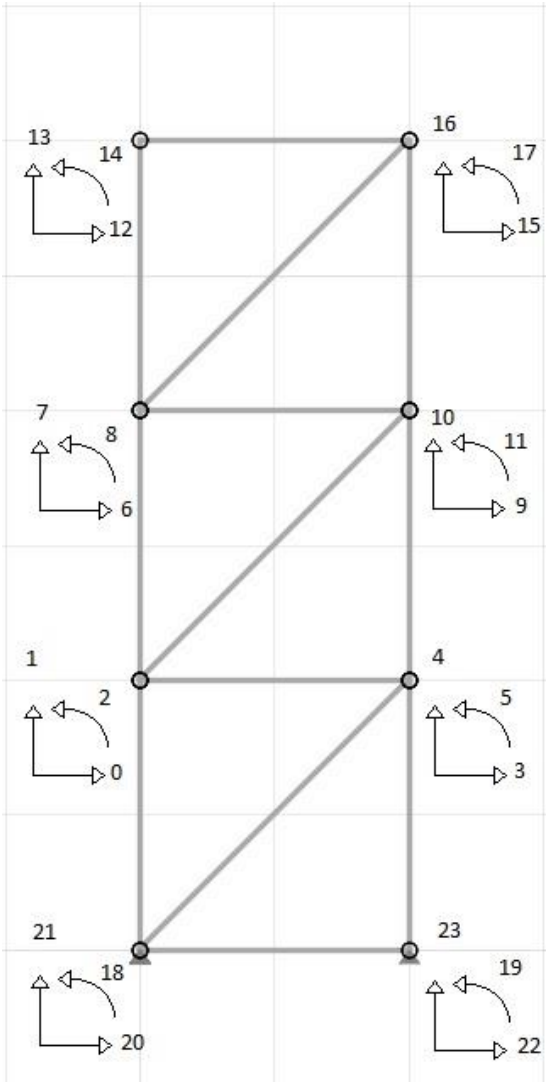


Figura B.91 - Estrutura do modelo 8, indeformada, com a numeração dos graus de liberdade referentes a cada nó da estrutura

4.1 DEFORMADA REFERENTE AOS MODOS DE VIBRAÇÃO OBTIDAS

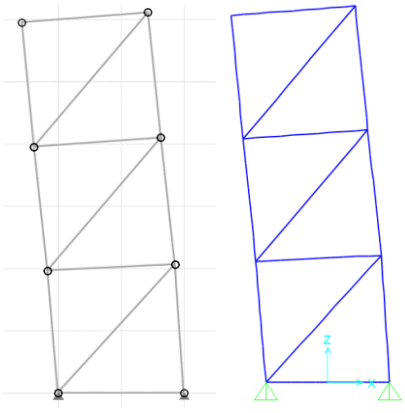


Figura B.92 - Comparativo da deformada obtida referente ao primeiro modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

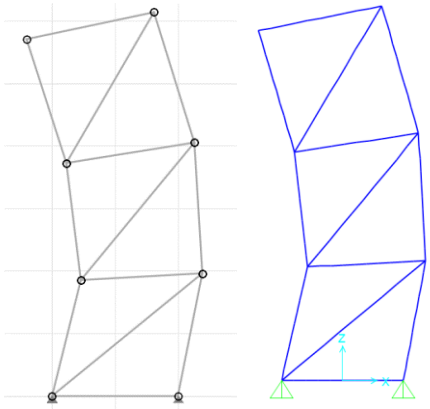


Figura B.93 - Comparativo da deformada obtida referente ao segundo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

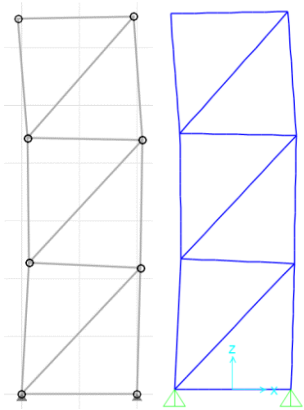


Figura B.94 - Comparativo da deformada obtida referente ao terceiro modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

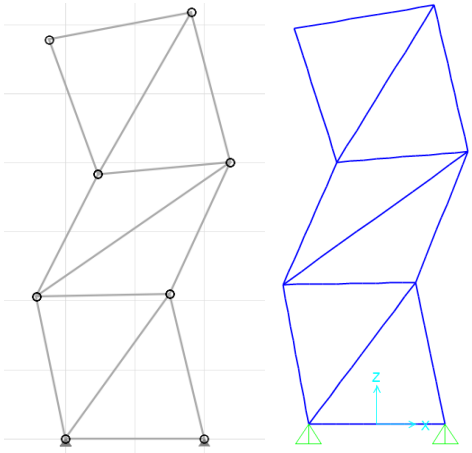


Figura B.95 - Comparativo da deformada obtida referente ao quarto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

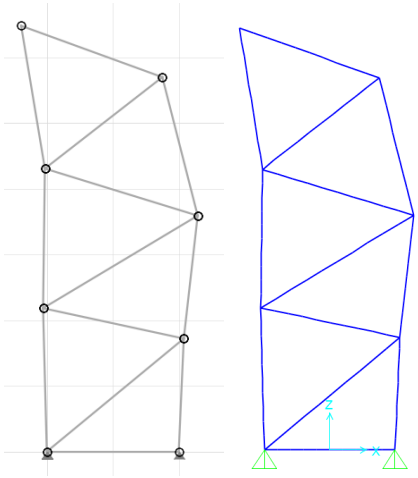


Figura B.96 - Comparativo da deformada obtida referente ao quinto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

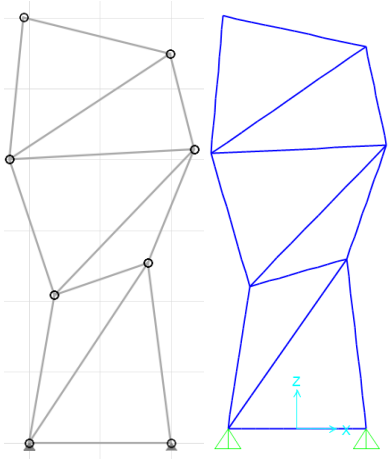


Figura B.97 - Comparativo da deformada obtida referente ao sexto modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

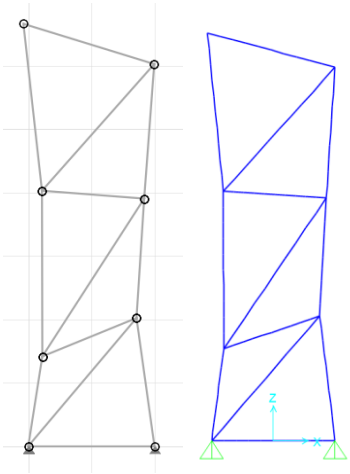


Figura B.98 - Comparativo da deformada obtida referente ao sétimo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

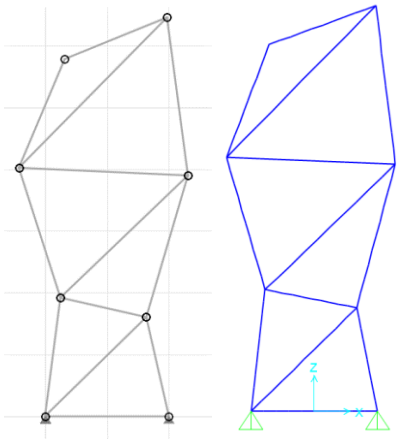


Figura B.99 - Comparativo da deformada obtida referente ao oitavo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

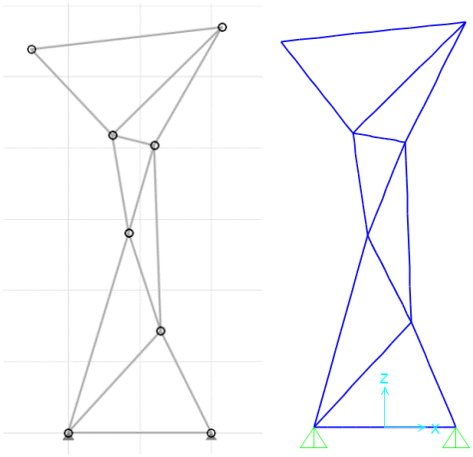


Figura B.100 - Comparativo da deformada obtida referente ao nono modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

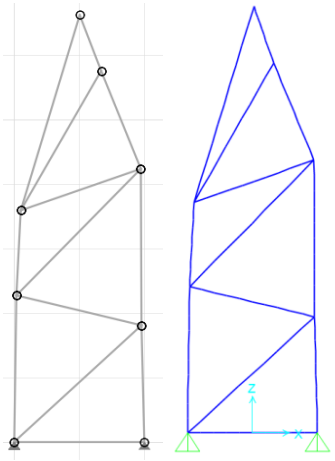


Figura B.101 - Comparativo da deformada obtida referente ao décimo modo de vibração obtido pelo Aeolos (esq.) e pelo SAP (dir.)

4.2 COMPARATIVO DE VALORES OBTIDOS PARA OS MODOS DE VIBRAÇÃO

Modo de Vibração	1				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	1.6467E-01	-1.6204E+00	2.8843E-01	2.8843E-01	-1.0414E-05
1	3.4566E-02	-3.4014E-01	6.0544E-02	6.0544E-02	1.3286E-04
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	1.3991E-01	-1.3768E+00	2.4506E-01	2.4506E-01	-3.4248E-05
4	-6.3769E-02	6.2751E-01	-1.1170E-01	-1.1170E-01	-3.4459E-05
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	3.7832E-01	-3.7228E+00	6.6264E-01	6.6264E-01	6.8948E-07
7	4.6385E-02	-4.5645E-01	8.1247E-02	8.1247E-02	-3.0186E-05
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	3.6169E-01	-3.5592E+00	6.3353E-01	6.3353E-01	4.3949E-06
10	-9.9633E-02	9.8042E-01	-1.7451E-01	-1.7451E-01	-4.2179E-05
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	5.7092E-01	-5.6181E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
13	4.6713E-02	-4.5967E-01	8.1820E-02	8.1820E-02	-4.8439E-05
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	5.6692E-01	-5.5787E+00	9.9300E-01	9.9300E-01	6.1804E-06
16	-1.1174E-01	1.0996E+00	-1.9573E-01	-1.9573E-01	3.2813E-05
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.51 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o primeiro modo

Modo de Vibração	2				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	4.5715E-01	4.2758E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
1	-1.4838E-01	-1.3878E+00	-3.2458E-01	-3.2458E-01	2.2913E-05
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	3.8965E-01	3.6444E+00	8.5234E-01	8.5234E-01	-1.0817E-05
4	-3.9601E-02	-3.7039E-01	-8.6625E-02	-8.6625E-02	-2.6285E-05
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	2.2629E-01	2.1166E+00	4.9501E-01	4.9501E-01	1.0182E-05
7	-2.7684E-01	-2.5893E+00	-6.0557E-01	-6.0557E-01	-1.2522E-05
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	2.6273E-01	2.4573E+00	5.7471E-01	5.7471E-01	7.8877E-06
10	5.0277E-02	4.7025E-01	1.0998E-01	1.0998E-01	7.5385E-06
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	-4.0703E-01	-3.8070E+00	-8.9037E-01	-8.9037E-01	1.0959E-06
13	-2.9622E-01	-2.7706E+00	-6.4796E-01	-6.4796E-01	-4.5135E-07
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	-3.8041E-01	-3.5580E+00	-8.3212E-01	-8.3212E-01	-4.3058E-06
16	1.3439E-01	1.2570E+00	2.9398E-01	2.9398E-01	2.2364E-05
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.52 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o segundo modo

Modo de Vibração	3				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-1.2462E-01	1.1811E+00	2.3703E-01	2.3703E-01	-5.6401E-06
1	-2.6731E-01	2.5334E+00	5.0843E-01	5.0843E-01	3.0301E-06
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	-5.7267E-02	5.4274E-01	1.0893E-01	1.0893E-01	-6.2403E-05
4	-1.7854E-01	1.6921E+00	3.3959E-01	3.3959E-01	1.7328E-05
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	-9.9723E-02	9.4510E-01	1.8968E-01	1.8968E-01	4.5153E-05
7	-4.2736E-01	4.0502E+00	8.1285E-01	8.1285E-01	-1.3218E-06
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	-9.3332E-02	8.8454E-01	1.7752E-01	1.7752E-01	-3.7001E-05
10	-3.9051E-01	3.7010E+00	7.4277E-01	7.4277E-01	1.6873E-05
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	6.8120E-02	-6.4559E-01	-1.2957E-01	-1.2957E-01	6.7156E-05
13	-4.8937E-01	4.6379E+00	9.3081E-01	9.3081E-01	5.8909E-06
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	5.9487E-02	-5.6378E-01	-1.1315E-01	-1.1315E-01	-4.2894E-05
16	-5.2575E-01	4.9827E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.53 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o terceiro modo

Modo de Vibração	4				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-4.2171E-01	-3.7150E+00	8.4612E-01	8.4612E-01	-1.3617E-05
1	5.7921E-02	5.1025E-01	-1.1621E-01	-1.1621E-01	1.7394E-05
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	-4.9840E-01	-4.3907E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
4	9.3913E-02	8.2732E-01	-1.8843E-01	-1.8843E-01	1.8454E-05
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	4.7257E-01	4.1631E+00	-9.4818E-01	-9.4818E-01	3.8476E-06
7	-1.7228E-01	-1.5177E+00	3.4567E-01	3.4567E-01	-3.3129E-05
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	3.7552E-01	3.3081E+00	-7.5344E-01	-7.5344E-01	-1.1782E-05
10	3.4178E-03	3.0109E-02	-6.8576E-03	-6.8575E-03	9.1835E-04
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	-2.3543E-01	-2.0740E+00	4.7237E-01	4.7237E-01	1.3098E-05
13	-2.1528E-01	-1.8965E+00	4.3194E-01	4.3194E-01	6.1313E-06
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	-1.8841E-01	-1.6598E+00	3.7803E-01	3.7803E-01	1.7261E-06
16	1.7401E-01	1.5329E+00	-3.4913E-01	-3.4913E-01	6.3669E-06
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.54 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o quarto modo

Modo de Vibração	5				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-5.6239E-02	-5.4921E-01	-1.1689E-01	-1.1689E-01	-6.8840E-05
1	1.8265E-01	1.7837E+00	3.7963E-01	3.7963E-01	-1.0463E-05
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	7.6200E-02	7.4414E-01	1.5838E-01	1.5838E-01	-5.4938E-05
4	-2.7946E-01	-2.7291E+00	-5.8085E-01	-5.8085E-01	2.8214E-06
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	-2.8905E-02	-2.8227E-01	-6.0078E-02	-6.0078E-02	5.7881E-05
7	3.0783E-01	3.0062E+00	6.3982E-01	6.3982E-01	-1.3085E-06
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	2.8690E-01	2.8017E+00	5.9630E-01	5.9630E-01	4.2180E-06
10	-4.0863E-01	-3.9905E+00	-8.4931E-01	-8.4931E-01	4.7180E-06
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	-3.8857E-01	-3.7947E+00	-8.0764E-01	-8.0764E-01	-5.5610E-06
13	4.8112E-01	4.6985E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	-2.4862E-01	-2.4279E+00	-5.1674E-01	-5.1674E-01	6.9260E-06
16	-3.0068E-01	-2.9364E+00	-6.2496E-01	-6.2496E-01	-4.1971E-06
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.55 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o quinto modo

Modo de Vibração	6				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	3.5858E-01	3.1449E+00	6.6777E-01	6.6777E-01	-5.1942E-06
1	8.4102E-02	7.3761E-01	1.5662E-01	1.5662E-01	2.8515E-06
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	-3.2383E-01	-2.8401E+00	-6.0305E-01	-6.0305E-01	-3.5642E-06
4	5.3699E-01	4.7096E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	-2.7742E-01	-2.4331E+00	-5.1662E-01	-5.1662E-01	-1.2456E-05
7	3.2989E-04	2.8930E-03	6.1434E-04	6.1428E-04	1.0457E-02
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	3.2888E-01	2.8844E+00	6.1245E-01	6.1246E-01	-1.4913E-05
10	1.4270E-01	1.2516E+00	2.6575E-01	2.6575E-01	2.4054E-05
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	-8.0776E-02	-7.0843E-01	-1.5042E-01	-1.5042E-01	1.5659E-05
13	2.1897E-03	1.9205E-02	4.0778E-03	4.0778E-03	-1.2005E-03
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	-1.2169E-02	-1.0673E-01	-2.2662E-02	-2.2662E-02	2.6709E-04
16	-5.0888E-01	-4.4630E+00	-9.4765E-01	-9.4765E-01	3.6228E-06
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.56 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o sexto modo

Modo de Vibração	7				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	2.2312E-01	2.1766E+00	3.3775E-01	3.3775E-01	2.0949E-05
1	-5.8484E-01	-5.7054E+00	-8.8531E-01	-8.8531E-01	1.3970E-05
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	-2.8456E-01	-2.7760E+00	-4.3075E-01	-4.3075E-01	2.1865E-05
4	2.1074E-02	2.0559E-01	3.1901E-02	3.1901E-02	5.3715E-05
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	2.1750E-01	2.1218E+00	3.2925E-01	3.2925E-01	1.1998E-05
7	2.8626E-02	2.7925E-01	4.3332E-02	4.3332E-02	7.2890E-05
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	-1.6279E-01	-1.5881E+00	-2.4643E-01	-2.4643E-01	-7.8027E-06
10	-9.5505E-02	-9.3168E-01	-1.4457E-01	-1.4457E-01	5.7733E-05
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	-7.6848E-02	-7.4968E-01	-1.1633E-01	-1.1633E-01	5.2683E-05
13	6.6061E-01	6.4445E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	-3.3300E-03	-3.2485E-02	-5.0408E-03	-5.0408E-03	1.1811E-03
16	2.6137E-02	2.5498E-01	3.9565E-02	3.9565E-02	-5.8155E-05
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.57 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o sétimo modo

Modo de Vibração	8				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	2.4808E-01	2.2569E+00	5.4625E-01	5.4625E-01	2.0193E-05
1	-8.1837E-02	-7.4452E-01	-1.8020E-01	-1.8020E-01	7.9822E-06
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	-3.6510E-01	-3.3215E+00	-8.0392E-01	-8.0392E-01	1.1293E-05
4	-3.9760E-01	-3.6171E+00	-8.7548E-01	-8.7548E-01	-2.6285E-06
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	-4.2249E-01	-3.8436E+00	-9.3030E-01	-9.3030E-01	9.0885E-06
7	2.0902E-02	1.9016E-01	4.6025E-02	4.6025E-02	4.2402E-05
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	3.0732E-01	2.7959E+00	6.7670E-01	6.7671E-01	-8.6934E-06
10	-1.0344E-01	-9.4101E-01	-2.2776E-01	-2.2776E-01	-2.1816E-05
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	3.1827E-01	2.8954E+00	7.0080E-01	7.0080E-01	-8.0077E-10
13	-2.1870E-01	-1.9896E+00	-4.8155E-01	-4.8155E-01	2.4940E-05
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	-3.0419E-02	-2.7674E-01	-6.6981E-02	-6.6981E-02	-1.4392E-04
16	4.5415E-01	4.1316E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.58 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o oitavo modo

Modo de Vibração	9				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	-4.2327E-01	3.7782E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
1	-4.0201E-01	3.5884E+00	9.4977E-01	9.4977E-01	9.8450E-06
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	3.5244E-01	-3.1460E+00	-8.3266E-01	-8.3266E-01	-3.4047E-06
4	2.8695E-01	-2.5614E+00	-6.7794E-01	-6.7794E-01	-1.0837E-05
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	-3.0811E-01	2.7503E+00	7.2794E-01	7.2794E-01	2.5320E-06
7	-8.8739E-02	7.9212E-01	2.0965E-01	2.0965E-01	-5.5697E-05
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	3.9921E-01	-3.5635E+00	-9.4316E-01	-9.4316E-01	-5.8078E-06
10	-1.5663E-02	1.3982E-01	3.7006E-02	3.7006E-02	-1.4641E-05
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	2.5716E-01	-2.2955E+00	-6.0757E-01	-6.0757E-01	-2.0863E-05
13	3.0830E-01	-2.7520E+00	-7.2839E-01	-7.2839E-01	1.2956E-06
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	-7.4020E-02	6.6073E-01	1.7488E-01	1.7488E-01	-5.6764E-05
16	1.5363E-01	-1.3713E+00	-3.6296E-01	-3.6296E-01	-2.0398E-05
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.59 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o nono modo

Modo de Vibração	10				
Grau de Liberdade	**Aeolos**	**SAP**	**Aeolos - Normalizado**	**SAP - Normalizado**	**Erro - %**
0	2.1710E-02	2.3617E-01	3.2350E-02	3.2350E-02	3.5981E-05
1	1.8152E-01	1.9746E+00	2.7048E-01	2.7048E-01	8.9909E-06
2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	-2.8980E-02	-3.1525E-01	-4.3183E-02	-4.3183E-02	-1.5437E-04
4	-1.2795E-01	-1.3918E+00	-1.9065E-01	-1.9065E-01	-3.4447E-06
5	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
6	6.6355E-02	7.2181E-01	9.8874E-02	9.8874E-02	-2.2809E-05
7	-2.7314E-01	-2.9713E+00	-4.0700E-01	-4.0700E-01	-1.3378E-05
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
9	-3.5742E-02	-3.8880E-01	-5.3258E-02	-5.3258E-02	1.0714E-04
10	1.5738E-01	1.7120E+00	2.3451E-01	2.3451E-01	-3.1027E-05
11	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
12	6.7110E-01	7.3003E+00	1.0000E+00	1.0000E+00	0.0000E+00
13	4.1389E-01	4.5024E+00	6.1673E-01	6.1673E-01	-1.2846E-05
14	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
15	-4.4288E-01	-4.8177E+00	-6.5993E-01	-6.5993E-01	-8.1303E-06
16	-1.6272E-01	-1.7701E+00	-2.4247E-01	-2.4247E-01	-8.8224E-06
17	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
18	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
19	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Quadro B.60 - Resultados comparativos de valores entre o Aeolos e o SAP para o décimo modo